

先進的電阻率建模和 使用非結構化離散化反演

物理與地理科學學院

萊比錫大學

基因赫米格特

論文

學術成績的說明

自然博士

博士。自然，

華格萊格特

地球物理學家卡斯滕 · 呂克 (Carsten Rücker) 文憑

1973 年 7 月 2 日在施默恩舉行。

古塔赫特： Franz Jacobs 教授、博士，萊比錫 Ugur
Yaramancı 教授、博士，漢諾威

發售日期：2011 年 1 月 24 日

書目數據

卡斯滕・呂克

使用非結構化離散化進行高階電阻率建模和反演

萊比錫大學，論文

121頁數、120 篇參考文獻、42 張圖、12 張表格

抽象的

在本論文中，提出了一種使用非結構化離散化的三維電阻率層析成像（ERT）方法。地電正演問題透過有限元素方法使用具有線性和二次形函數的四面體網格來求解。非結構化網格適用於對任意幾何形狀的域（例如，複雜的地形）進行建模。此外，由於具有適應問題的網格細化的能力，可以實現精度和數值工作之間的最佳權衡。非結構化離散化也允許考慮空間擴展的有限電極。由於使用從醫學阻抗斷層掃描得知的完整電極模型對正向算子進行了相應的擴展，因此給出了關於此類電極對地電測量的影響的研究。

基於正向算子，發展了所謂的三重網格技術來解決地電反演問題。由於非結構化離散化，可以透過在任意形狀的二維和三維域上使用依賴於解析度的參數化來應用 ERT。高斯-牛頓方法與不精確的線搜尋一起使用，以將資料擬合在誤差範圍內。使用特殊的平滑約束應用全域正規化方案。

此外，基於非結構化網格提出了一種先進的 ERT 正則化方案，該方案能夠將先驗資訊納入反演中，並顯著改善所得到的 ERT 影像。結構資訊（例如從其他地球物理技術已知的材料界面）被納入允許的尖銳電阻率對比。模型加權函數可以單獨定義最終電阻率模型與給定起始值或參考值的允許偏差。作為隨後的進一步發展，提出了區域概念，其中參數域被細分為具有單獨反演和正則化參數的岩性或地質區域。所有使用的技術和概念都是開源 C++ 函式庫 GIML 的一部分我，它是在本論文期間開發的，作為逆問題的獨立於方法的解決方案的高級工具。

內容

1. 概述	7
一、建模	11
2 地電正演問題	13
2.1.介紹	13
2.2.總潛力的計算	16
2.2.1.有限元素建模	17 號
2.3.二次電位的計算	19
2.4.求解方程組	20
2.5.網格生成和細化	21
2.5.1.品質措施	22
2.5.2.用於計算總潛力的離散化	22
2.5.3.用於計算二次勢的離散化	24
2.6.建模幾何效果	26
2.6.1.地下範例	27
2.6.2.複雜的表面形貌	28
2.7.計算方面	31
2.8.討論和結論	34
3. 有限電極建模	37
3.1.介紹	38
3.2.完整的電極模型	40
3.3.確認	42
3.3.1.對錶面電阻率陣列的影響	45
3.4.例子	46
3.4.1.模型坦克	46
3.4.2.板狀電極	49
3.4.3.使用 CEM 模擬良導體	52
3.4.4.直立式電極鍊	53
3.5.結論	54

內容

二.反轉	57
4. 非結構化網格上的反演	59
4.1.介紹	59
4.2.動機	61
4.3.三個網格	61
4.4.反演方案	62
4.4.1.目標函數	62
4.4.2.靈敏度計算	64
4.4.3.反子問題的解	65
4.4.4.正規化參數的選擇	66
4.4.5.線搜尋	67
4.4.6.三重網格反演方案	68
4.5.一個綜合的例子	69
4.5.1.綜合模型和數據	69
4.5.2.幾何效果	71
4.5.3.反演結果	71
4.5.4.與平坦表面的比較	74
4.6.現場數據的應用	75
4.7.討論和結論	79
5.先進的電阻率斷層掃描	81
5.1.介紹	82
5.2.方法	83
5.2.1.廣義最小化方法	83
5.2.2.轉換函數	85
5.2.3.區域概念	86
5.3.例子	87
5.3.1.納入地震的結構約束	87
5.3.2.透過水下調查演示區域概念	89
5.3.3.納入鑽孔參數訊息	92
5.3.4.在 3D 建模時求解 1D 逆問題	95
5.3.5.地質塊反演	97
5.4.結論	99
六、總結與展望	101
A. 單元積分與形狀函數	103
參考書目	109

1. 概述

電阻率層析成像 (ERT) 是指直流 (DC) 電阻率資料的成像技術，是應用地球物理學的一個經過驗證的領域。ERT 的主要目的是非侵入性測定電阻率的空間分佈。電阻率及其倒數電導率取決於幾個岩性和岩石物理參數，因此有關電導率分佈的知識允許對地下地質環境進行假設。

現場技術的基本應用相當簡單。視電阻率數據值是透過使用空間分佈的四點測量來獲得的，並且取決於測量的電壓、注入的電流和比例幾何因子。現代多電極系統如今已經達到了很高的技術標準，可以進行高效的二維 (2D) 和三維 (3D) 勘測，這使得該方法成為當今環境和工程研究的實用地球物理勘探工具。

地電數據的解釋代表了一個反問題。反演的主要任務是找到地面電阻率的離散分佈（所謂的模型），它可以在其測量誤差範圍內解釋數據。所有尺度、地下空隙和表面地形的三維測量都是現代反演軟體必須解決的挑戰，以重建現實環境的電阻率。此外，所有反演策略的普遍問題是方法的模糊性。然而，通常存在額外的資訊或假設，這可能會抵消模糊性問題，但很難被傳統策略納入。建模，即基於給定模型的資料模擬，是反演過程的決定性因素。建模的主要要求是在考慮任意建模幾何形狀和可能的系統誤差源（例如電極效應）的情況下，以最小的努力至少實現測量數據的準確性。

建模和反演的核心部分是研究區域的離散化，這必須滿足現代 ERT 軟體的所有要求。非結構化離散化適合建模，因為它們可以在精度和數值工作之間實現最佳權衡，另一方面可以根據問題來選擇它們以進行反演。然而，這需要在這項工作中開發的新技術。

1. 概述

在本文中，基於四面體的非結構化離散化是開發正向算子的基礎，該算子用於建模並且必須滿足前面提到的所有需求。非結構化離散化也允許考慮空間擴展的有限電極。由於前向算子的相應擴展，首次可以研究此類電極對地電測量的影響。

基於正向算子，我們與 Thomas Günther 博士（漢諾威萊布尼茨應用地球物理研究所）密切合作，開發了一種靈活的反演策略，作為用於任意形狀的三維域的高效 ERT 工具。基於非結構化網格的高級正則化方案允許將結構和參數先驗資訊合併到反演中。

所有使用的技術和概念都是開源 C++ 函式庫 GIML 的一部分我，它是在本論文期間開發的，作為獨立於方法的反問題求解的高級工具。特別適用於直流電阻率問題的前向算子代表了應用套件 BERT（無邊界電阻率層析成像）的基礎，該套件越來越多地用於地電界（例如，烏爾里希等人。, 2008年; 克萊門特等人。, 2009年; 博克等人。, 2010年; 弗萊希格等人。, 2010年; 舒茨等。, 2010年; 多奇等人。, 2010年）。然而，本文並未展示程式設計問題，而是展示物理和數學概念，並分為建模和反演兩個主要部分，概述如下。

地電正演問題本章介紹了在非結構化四面體網格上使用具有線性和二次形函數的有限元素方法進行三維地電正演算子的基礎知識。非結構化離散化允許有效的局部網格細化和任意模型幾何形狀的最靈活的描述。因此，研究了細化策略以有效計算初級和次級電位。透過兩個例子說明了複雜地形對地電測量的影響，並透過所謂的幾何效應進行了量化。此外，也比較了一些方法來求解所得方程組。本章的重要部分已發表於呂克等人。（2006年）。

有限電極建模本章提供完整電極模型 (CEM) 的物理和數學基礎知識，這是從醫學阻抗斷層掃描中得知的。透過 CEM 擴展了地電正演算子，並透過分析模型驗證了電場的解。空間延伸電極對地球物理測量的影響透過電極效應進行量化，並針對典型的地電測量陣列進行研究。也研究了非典型板電極的電極效應。除了考慮實際電流和電位電極的能力之外，還演示了兩個附加目的。在建模域中使用被動電極作為高導電體，並使用環形電極對鑽孔效果進行真實模擬。本章的重要部分已接受出版呂克和岡瑟（2011年）。

非結構化網格上的反演本章介紹了基於非結構化四面體網格和上述正演算符的三重網格反演技術，用於有效確定三維電阻率結構。描述了同名網格以及反演方法。高斯-牛頓方法與不精確的線搜尋一起使用，以將資料擬合在誤差範圍內。使用特殊的平滑度約束應用全域正規化方案。逆子問題由自適應共軛梯度求解器計算。此技術應用於 3D 合成範例和 3D 現場資料集。這兩個例子都包含陡峭的地形。此外，還給出了一種減少靈敏度矩陣的方法，以應對當今標準 PC 的記憶體限制。本章的重要部分已發表於岡瑟等。（2006年）。

先進的電阻率斷層掃描本章描述了一種用於靈活合併先驗資訊的高階正規化方案。除了理論背景之外，還引入了變換函數，它允許透過使用對數勢壘來限制所得電阻率範圍。此外，也發展了所謂的區域概念。因此，反演域被細分為具有單獨反演和正則化參數的岩性或地質區域。正則化方案以及區域概念在幾個現場示例中進行了演示，以顯示結合結構資訊（例如，來自折射地震勘測）和考慮離散電阻率值（例如，來自鑽孔測井）的能力。區域也可以被視為單一參數，這允許模型簡化。兩個進一步的例子證明了這一點。將 3D 問題的反演簡化為 1D 反演特徵，並解釋非常稀疏的資料集。本章主要部分的出版正在準備中。

1. 概述

第一部分。

造型

2 地電正演問題

抽象的

本節介紹了一種利用三維和任意地形的有限元素方法對電位進行有效數值計算的技術。關鍵的創新首先是結合了非結構化四面體網格，它允許有效的局部網格細化和對任意模型幾何形狀的最靈活的描述。其次，透過實施二次形函數可以獲得更準確的結果。與用於總勢計算的高度精細的網格相比，利用二次勢方法，網格的尺寸顯著縮小。然而，後者對於確定任意模型域中所需的主要勢是必要的。首先，模擬地表和地下具有不同幾何形狀的同質模型，以量化其影響。這會導致所謂的幾何效應，這不僅是副作用，而且可能導致嚴重的誤解。此外，它代表了用二次勢方法處理異質電導率模型的基礎，這對於反問題特別有前景。

討論如何使用現代多前沿直接求解器結合重新排序策略或更確切地說根據問題的大小使用傳統的預處理共軛梯度方法來最有效地求解所得方程組。此外，還提出了一種估計建模誤差的互易方法，並研究了模型離散化必須細化到何種程度才能產生足夠準確的結果。

2.1. 介紹

電場的數值計算始於 20 世紀 60 年代末，使用積分方程式技術 (迪特等人。,1969年), 有限元素 (科貢,1971年) 和有限差分 (常服, 1976年) 。基於積分方程的一種特殊變體是邊界元法 (岡部, 1981年) 。三維有限差分 (FD) 計算返回戴伊和莫里森 (1979年) 。它們是 20 世紀 80 年代和 90 年代的首選方法，並經過改進

2 地電正演問題

幾次。張等人。（1995年），例如，提出了改進的邊界條件以實現更準確的勢近似和史皮策（1995年），例如，引入高效率的預處理共軛梯度求解器以減少執行時間。

透過將總電位（TP）分解為背景模型的已知參考電位和由於與背景模型的電導率偏差而產生的二次電位（SP），可以在中等網格上進行二次電位的精確數值計算（科貢,1971年）。這種技術被稱為奇點消除（洛瑞等人。,1989年）並透過以下方式增強趙和葉德林（1996年）。然而，它僅用於具有分析已知勢的平地問題。

有限差分法僅限於正交網格，這限制了其再現非正交幾何形狀的能力。近年來，出現了越來越多的有限元素（FE）方法，它們通常不會遇到這些缺點。除了上述論文外科貢（1971年），直流(DC)電阻率問題的有限元素公式描述於普里德莫爾等人。（1981年）；奎拉爾特等。（1991年）；李和史皮策（2002年）；周和格林哈爾（2001年）；疼痛等人。（2003年）。表面形貌模擬以二維(2D)形式呈現科貢（1971年）；福克斯等人。（1980年）和三維(3D)霍爾科姆和吉拉切克（1984年）；佐佐木（1994年）；易等人。（2001年）。然而，所提出的演算法主要適用於使用六面體或四面體元素的面向塊（結構化）離散化，因此沒有充分利用有限元素方法的全部功能。佐佐木（1994年）和周和格林哈爾（2001年）使用四面體網格，但由於它們源自磚塊，因此該方法仍然是面向塊的。

數位2.1顯示三種可能的網格類型。(a)和(b)中的網格屬於常規（結構化）類型。正交六面體網格(a)是一種在幾何彈性和局部細化方面受到最大限制的網格。(b)是一種非正交正六面體類型，其局部細化仍然笨拙且低效，但其幾何可調節性已增加。(c)中的網格顯示了非結構化或不規則的四面體類型，這顯然是這方面最靈活的離散化。特別是規則網格的細化導致節點數量過度增加，擴大了數值工作量。非結構化離散化（通常稱為網格）在幾何靈活性和預期數值性能、準確性和工作量之間的比率方面遠遠優於結構化類型。

在這項工作中C++類別庫GIML我已開發，提供有限元素問題的解決方案，並應用非商業網格生成器TetGen矽（2004年）用於產生非結構化四面體網格。因此可以討論兩個主題。首先，可以靈活地描述任何模型形貌和電極佈局，例如，可以透過網格內的前綴節點來表示任意電極位置。其次，可以透過在電極附近或在強電導率對比下局部細化網格來按需控制節點分佈，即模擬電位的強梯度需要

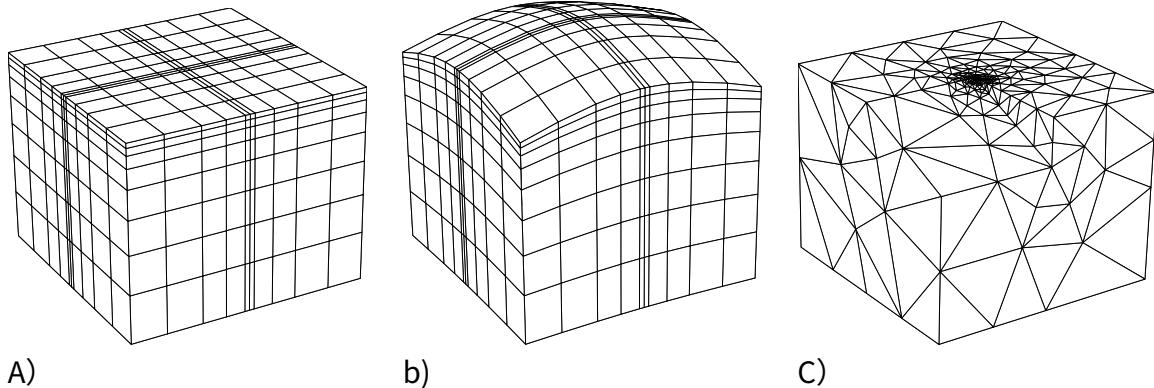


圖 2.1.：不同的網格類型：a) 正交長方體，b)非正交六面體和c) 非結構-曲面四面體網格

提高準確性。作為回報，朝向邊界的粗網格足以近似相當平滑的場。

由於任何離散化技術，都必須為每個當前位置求解稀疏方程組。[史匹策和沃姆斯蒂奇（1999年）](#)概述了直流電阻率問題的非平穩迭代方程式求解器。他們建議使用預條件子的共軛梯度技術。一種非常有效但消耗記憶體的技術是透過不完全 Cholesky 分解而獲得的（[克肖,1978年](#)）應用於直流建模[戴伊和莫里森（1979年）](#)和[李和史皮策（2002年）](#)。與這些迭代方法相比，直接方程式求解器近年來取得了實質進展。多前沿分解方法可追溯到[達夫等人。（1986年）](#)似乎最適合具有許多右側的問題，因為分解只進行一次。重新排序技術的使用有助於限制直接方法以及不完整的 Cholesky 預處理器的記憶體需求。

直流電阻率建模的準確性不僅可以透過網格細化策略來提高，還可以透過在有限元素方法中採用更高階的基底函數來提高。可以證明，網格細化和二次形函數的結合可以產生最有效的解決方案。

首先介紹有限元素建模、非結構化網格生成和細化。齊次半空間用於研究細化策略如何改善總勢的計算結果。作為延續，使用導電半球來展示所提出方法的幾何靈活性並應用二次電位建模。借助兩個範例，將展示如何涉及複雜的地下和表面幾何形狀。幾何效應的定義是評估任何地形對直流電阻率測量的影響。最後，討論了方程組求解的計算方面。

2.2. 總潛力的計算

直流 (DC) 電阻率正演問題的邊界值問題由具有混合邊界條件的連續性方程式給出：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \psi) = -\nabla \cdot j \text{ 在 } \Omega \subset \text{紅外線3} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha u = 0 \text{ 開 } \partial \Omega = \partial \Omega_s \cup \partial \Omega_i, \quad (2.1b)$$

在哪裡 $\sigma(x, y, z)$ 代表地面給定的電導率分佈， j 源電流密度和 ψ 是所尋求的電位。電阻率 ρ ，它是直流地球物理學中使用最廣泛的材料參數，等於 σ 。電流密度的經典地電源術語 j 讀

$$\nabla \cdot j = \delta(r - r_s) \quad (2.2)$$

並假設當前 i 透過位於 $r_s = (x_s, y_s, z_s)$ 。狄拉克三角洲 δ 在源位置施加奇異電流密度。配方 (2.1a) 允許域內任意位置的點源以及建模域邊界上的源。然而，該表達式沒有考慮可能影響實際測量的有限電極的物理存在。章節 3 詳細介紹了有限電極的建模及其對地電測量的影響。

方程中地電問題的邊界條件類型 (2.1b) 專門由 α 。在地球表面 $\partial \Omega_s$ (即空氣/材料界面) 齊次諾伊曼條件 ($\alpha=0$) 用於避免電流沿向外法線流過邊界 n 。

允許人工地下邊界的電位漸近減小 $\partial \Omega_i$, 戴伊和莫里森 (1979年) 強加 $\alpha = (n \cdot r) / r$ 對於地球表面的電流源，而 $r=r/r$ 是電流源和相應邊界之間的徑向距離。域內掩埋電流源的一般形式由 (周和格林哈爾, 2001年)

$$\alpha = \frac{r_3 n \cdot r + r_3 n \cdot r'}{(r_3 r_3 (n \cdot r))} \quad (2.3)$$

和 $r=r/r$ 在哪裡 r 表示影像位置 r 關於地球表面。這種類型的邊界條件有時稱為 Robin 型 (赫萬格等人。, 2004年)。

請注意，在純諾依曼域上，例如 $\alpha=0$ 在整個邊界上，就像在儲罐建模中一樣，有兩個額外的要求來確保唯一的解決方案。一、電荷守恆 $\partial \Omega j \cdot n=0$ (整個邊界上的總電流 $\partial \Omega$ 為零)，這可以簡單地表示為

透過使用參考電極或偶極電流模式來實現。其次，由於只有導數 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 存在於邊界上，方程式的解 (2.1) 變得不明確，因此方程組變得奇異。可以透過附加條件在邊界上選擇任意參考點來避免這種情況 $\phi=0$ 。

2.2.1.有限元素建模

求方程式 (2.1a) 考慮邊界條件 (2.1b) 、有限元素法 (FEM) (齊恩凱維奇,1977年) 被申請;被應用。

FEM 有兩種方法，變分公式 (普里德莫爾等人。,1981年;佐佐木, 1994年;李和史皮策,2002年) 和加權殘差 (周和格林哈爾,2001年)。這兩種方法都會導致所謂的邊界值問題的弱表述。這種弱公式允許對解進行分段近似 ϕ 但不要求存在連續的二階導數。

加權殘差的方法較通用且 (在 DC 問題的情況下) 相當於變分公式 (周和格林哈爾,2001年)。對於廣義偏微分方程 (PDG) $D(\phi) + f = 0$ 存在近似解 $\phi_H \approx \phi$ 用殘差求解 PDG 右, $D(\phi_H) + f = g$ 。選擇尚未確定的加權函數 w 滿足條件的

$$\int_{\Omega} w R d\Omega = 0 \quad (2.4)$$

應用加權殘差法 (2.4) 關於基本直流方程式 (2.1a) 和進一步的部分積分以消除二階導數，導致直流電阻率正向算子的弱公式：

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma w \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Omega = \int_{\Omega} w \nabla \cdot j d\Omega \quad (2.5)$$

左邊第二項是方程式 (2.1b) 是求解方程式所必需的。諾伊曼邊界條件 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=0$ 在邊界上 $\partial\Omega$ 自動滿足，因此它們的通用名稱是自然邊界條件。Robin 邊界條件 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=\alpha u$ 我應用於 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=-\alpha u$ 所以完整的弱公式可以唸成：

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma w \alpha u d\Omega = \int_{\Omega} w \nabla \cdot j d\Omega \quad (2.6)$$

必須解決一組適當的加權函數 w 。

2 地電正演問題

基本的有限元素原理提供了近似解 ϕ_H 屬於氮域內的離散點（節點）：

$$\phi \approx \phi_H = \sum_{i=1}^n \phi_i \chi_i \quad (2.7)$$

基本功能氮代表所尋求的勢的插值規則 ϕ_H 在每個節點中。下標 H 可以解釋為兩個節點之間的最小距離，因此收斂 $\phi_H \rightarrow \phi$ 為了 $H \rightarrow 0$ 。

應用 FEM 近似規則 (2.7) 到弱公式 (2.6) 並依據伽遼金準則 (w_f 氮) (齊恩凱維奇, 1977年) 得出直流正向問題的有限元素近似：

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \nabla \phi_j \chi_i \chi_j d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma a \phi_i \phi_j \chi_i \chi_j d\partial\Omega = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot j d\Omega \quad \text{為了 } f=1 \dots n. \quad (2.8)$$

將域剖析為 C 具有元素常數電導率的元素（因此稱為有限元素法） $\sigma_{(e)}$ 和 \mathcal{E} 內部邊界導致對稱方程組：

$$K = b, \quad (2.9)$$

$$\text{和 } A = \sum_{e=1}^C \sigma_{(e)} S_{(e)} + \sum_{\mathcal{E}=1}^C \sigma_{(\mathcal{E})} \alpha_{(\mathcal{E})} \text{ 中號 } (\mathcal{E}),$$

$$\mathcal{E} = \sum_{e=1}^C \delta_{(e)} (r - r_s)$$

$$\text{和 } \phi = [\phi_H], \text{ 為了 } i=1 \dots n.$$

可以由局部元素矩陣組裝而成：

$$S_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \chi_i \chi_j d\Omega, \quad \text{我} (e) = \int_{\Omega_{(e)}} \chi_i \chi_j d\Omega \text{ 為了 } k = 1 \dots n_{(e)}$$

$$\text{和 } \text{中號 } (\mathcal{E}) = \int_{\partial\Omega_{(\mathcal{E})}} \chi_i \chi_j d\partial\Omega \text{ 為了 } k = 1 \dots n_{(\mathcal{E})}. \quad (2.10)$$

$S_{(e)}$ 被稱為每個單元的局部剛度矩陣 $\Omega_{(e)}$, 中號 (\mathcal{E}) 每個邊界元的局部質量元矩陣 $\partial\Omega_{(\mathcal{E})}$ 和我 (e) 各個元素的載重向量 $\Omega_{(e)}$ 包含目前來源。這些矩陣的貢獻取決於元素的類型以及基底函數氮。有關線性和二次基函數實現的詳細信息，請參閱附錄 A。

2.3.二次電位的計算

2.3.二次電位的計算

狄拉克 δ 函數 δ 在 DC 方程式的源項中 (2.1a) 導致源位置處存在無限的電位梯度 r_s 。通常，這種奇點會導致非常差的數值近似，特別是在靠近電極位置的地方。奇點可以根據以下描述的過程去除
[科貢 \(1971年\)](#) 對於 FE 和 [洛瑞等人 \(1989年\)](#) 對於 FD。總潛力 (TP) 你分為主要部分和次要部分， $\psi = \psi_p + \psi_s$ 。主要潛力 ψ_p 是給定背景電導率結構的已知電場 σ_p 並滿足源項： $\nabla \cdot (\sigma_p \nabla \psi_p) = -\nabla \cdot j$ 。通常使用齊次半空間的解析解，但也可以應用更複雜的背景結構（垂直堤壩或分層模型）[\(李和史皮策,2002年\)](#)。

二次勢 (SP) 的邊界值問題如下：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \psi_s) = \nabla \cdot ((\sigma_p - \sigma) \nabla \psi_p) \text{ 在 } \Omega \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial n} + \alpha s = \frac{\partial \psi_p + \alpha u}{\partial n} \Big|_{p=0} \text{ 開 } \partial \Omega \text{ 我,} \quad (2.11b)$$

其中奇異電流密度 j 消失了。然而，方程式的積分 (2.11a) 包含一次位勢的梯度 ψ_p 。其規則的前提是電極附近的電導率等於 σ_p ，正如已經提到的[趙和葉德林 \(1996年\)](#)。確定 σ_p ，必須選擇電極處的局部電導率，而不是如下所示的平均電導率[洛瑞等人 \(1989年\)](#)。二次來源出現在電導率偏離的地方 σ_p 。

左側和右側微分算子都與總勢的微分算子相同。透過用矩陣近似算子，方程組可以寫成

$$A_\sigma \psi_s = A_{\sigma_p - \sigma} \psi_p \circ \quad (2.12)$$

為了避免組裝 $A_{\sigma_p - \sigma}$ 對於每個源電導率 σ_p ，線性度 A 被利用

$$A_{\sigma_p - \sigma} \psi_p = (A_{\sigma_p} - A_\sigma) \psi_p = A_1 \psi_p \sigma_p - A_\sigma \psi_p \circ \quad (2.13)$$

因此只有一個矩陣 A_1 對於 1 的均勻電導率，也必須創建 A_σ 用於具有多個來源和異質電導率分佈的整個正演計算。

2.4.求解方程組

邊界條件以及對應的矩陣條目取決於來源位置。為了避免多電極系統的每個單獨源的係數矩陣的強烈重組，使用邊界條件的恆定平均源位置，由於邊界通常遠離源，因此該位置足夠精確。因此，矩陣A是恆定的。

對於總勢和二次勢，方程組金我=乙我必須針對每個電流源求解我=1, . 。 。 ,乙，在哪裡乙是電流源的數量，即使使用的電極的數量。因此，方程組得到求解乙次。鑑於在典型的直流測量中單個電極通常使用多次，因此計算每個單一電極的電位並將結果疊加是最有效的。

矩陣A對稱、稀疏、正定且有維數 $N \times N$ ε 右在哪裡 ε 是用於建模域離散化的節點數量。對於線性形狀函數，通常會獲得每行 3 到 20 個非零條目，平均值約為 14。

對於求解此類大型稀疏矩陣方程組，可以使用共軛梯度 (CG) 方法（[赫斯特尼斯和斯蒂芬爾, 1952年](#)）被證明是非常有效的（[史匹策和沃姆斯蒂奇, 1999年](#)）。透過使用預處理器可以顯著提高它們的收斂性。對於許多右側向量來說，一個非常有效的預處理器是透過不完全 Cholesky (IC) 分解來實現的A，因為預處理過程僅進行一次，且每個右側向量的迭代次數大大減少。不完全因式分解有兩種主要變體（[薩阿德, 1996年; 周和格林哈爾, 2001年](#)）。一種將非零元素限制為稀疏結構A（[戴伊和莫里森, 1979年; 李和史皮策, 2002年; 吳等。, 2003年](#)）。另一種變體允許填充但忽略小於特定閾值的值（[薩阿德, 1996年](#)）。以下稱為 IC-nofill 和 IC-droptol。

使用 IC-droptol 的共軛梯度法類似於迭代法和直接法的混合體。閾值為 0 的 IC 分解對應於直接求解器，因為迭代在 1 個迭代步驟後停止。因此，如果有足夠的記憶體來保存完整的 Cholesky 因子，則可以選擇直接方法。近年來，多前沿演算法得到了發展（[達夫等人。, 1986年](#)），允許高效的 Cholesky 分解。C 庫 TAUCS（[托萊多等人。, 2001年](#)）作為基於多前沿方法和直接稀疏 Cholesky 分解包 CHOLMOD 的迭代求解器（[陳等人。, 2009年](#)）被使用。

透過對矩陣行和列重新排序，可以顯著減少（完全或不完全）Cholesky 分解產生的填充。從歷史上看，最古老的方法是

2.5.網格生成和細化

Cuthill-McKee (CMK) 和反向 Cuthill-McKee (RCM)。對各個方法的詳細描述超出了本文的範圍，可以在數學文獻中找到（薩阿德, 1996年）。一般來說，有三個類別：

- 嵌套剖析 (ND) 基於幾何節點分離 (圖分區)。METIS 是一種流行且非常有效率的實現（卡里皮斯和庫馬爾, 1998年）。
- 最小度 (MD) 方法嘗試減少節點的鄰近關係 (度)。流行的方法是多重最小度 (MMD) 和近似最小度 (AMD)（阿梅斯托伊等人, 1996年）。
- 最小缺陷 (MF) 是一種更廣泛的技術，它連續消除具有最小填充的節點（戴維斯等人。, 2000年）。

2.5.網格生成和細化

建模域的初始劃分通常將給定的電極佈局合併為固定節點。然而，由於電極處的奇異電位，必須進行額外的細化才能獲得準確的正向計算。現有方法使用面向區塊的網格進行 FD 和 FE 計算（洛克和巴克, 1996b; 吳等。, 2003年; 易等人。, 2001年）。為了最小化正向計算的誤差，在電極之間引入了網格線。使用兩到四條額外的網格線，對於極點配置，所有計算最終的相對誤差約為 4%（易等人。, 2001年）。

對於具有大幾何因子（例如偶極子）的構型的連續疊加，需要進一步細化，因為相對誤差被幾何因子放大。然而，由於面向塊的網格的細化總是以全局方式進行，因此節點數量迅速增加。非結構化網格的主要優點之一是有利於在不同區域內細化網格。因此，在不同電位梯度的區域（靠近電極），網格可以選擇得非常精細，而單元尺寸則朝向建模域的邊界增長。

它可以區分後驗細化和先驗細化。對於前者，離散化取決於求解過程中的誤差估計過程，而對於後者，資訊是提前引入的。由於關鍵區域是已知的，因此選擇先驗類型透過在網格生成過程中引入額外的支援節點來強制執行局部精細網格。

2.5.1.品質措施

除了本地節點密度之外，近似質量還取決於單元大小增長（或延長）因子。這主要可以透過四面體邊長與外接球半徑之比來控制。由於條形單元的近似性能較差，因此所謂的網格生成器嘗試最小化半徑邊緣比。整個網格的最大比率可以用作全域網格品質控制。

應用的網格生成器 TetGen (矽, 2004年) 嘗試強制所有半徑與邊緣的比率低於特定的質量約束。對於所有後續網格，選擇 1.2 的半徑與邊緣之比，根據經驗，這可以提供足夠準確的結果。

若要建立非結構化網格，域必須由點、多邊形或面定義，即所謂的分段線性複形 (PLC) (矽, 2004年)。它包括域的幾何形狀和電極位置以及邊界。透過引入節點並創建四面體元素，網格生成器可以創建所需品質的網格。

在下面的研究中，研究了局部和全局細化技術，以找到準確性和計算量之間的最 佳權衡。除了空間網格細化 (H -方法)，使用高階形函數 (p -方法) 被考慮。

2.5.2.用於計算總潛力的離散化

具有平坦表面邊界的均勻地球為均勻電阻分佈提供了最簡單的解析解 $\rho = 1/\sigma = 1\Omega \text{米}$ ：

$$\rho = \frac{\rho}{2\pi|r-r_s|} \quad (2.14)$$

在徑向距離 r (x 、 y 、 z) 從來源位置 r_s (x_s, y_s, z_s)。

定義一條直線，包含 21 個電極節點，間距為 1 m。模型邊界放置在原點周圍 5 公里處，以盡量減少邊界條件的影響。網格產生器 TetGen 所建立的第一個網格有 2047 個節點。

數位 2.2 顯示電極位置處解析解和數值解之間的極-極測深曲線的相對偏差。數值結果可以直接從 FEM 解中讀取你在電極的給定節點處。在源電極附近可以觀察到相當大的誤差，而隨著距離的增加，誤差穩定在 5% 左右。

為了減少源處的大誤差，增加源節點周圍的離散化密度。透過在固定深度添加支撐點 dz 在電極下方，網格

2.5.網格生成和細化

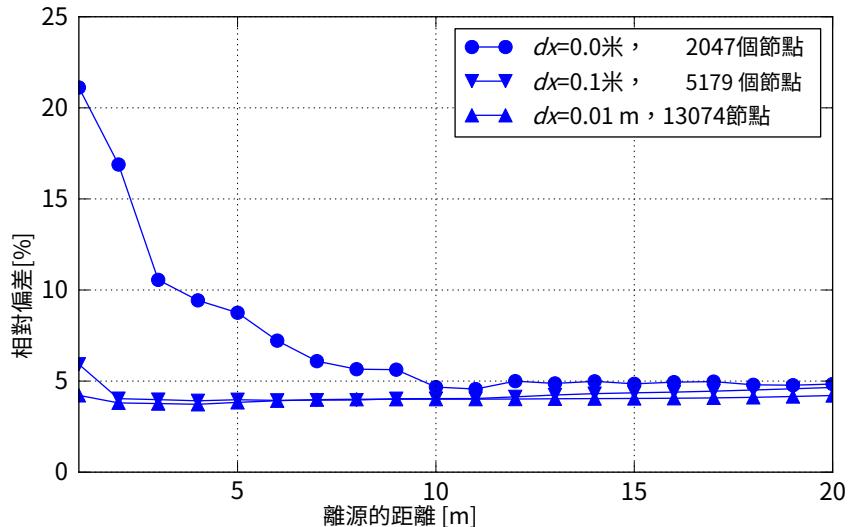


圖 2.2.：極點探測的解析解和數值解之間的相對偏差
三個網格，源電極周圍的局部細化不斷增加（總電位計算）。

生成器被迫施加局部細化。除了表示為的粗略未細化網格之外 $dz=0.0\text{ m}$ (2 047 個節點) ，圖2.2顯示局部細化網格的結果，表示為 $dz=0.1\text{ m}$ (5 179 個節點) 和 $dz=0.01\text{ m}$ (13 074 個節點) 。誤差幾乎是恆定的 $dz=0.1\text{ m}$ 。後期局部細化 ($dz=0.01\text{ m}$) 僅產生可忽略的改進。因此先驗網格細化 $dz=0.1\text{ m}$ 就夠了，以後再用。

顯然，一個球體 A 需要細化來增強平分所有四面體的全局錯誤級別 \approx 細分 4%。該SIM-最好的策略是整合面體邊緣 (H -勒爾的。節點化) 使得每個四元組 A結晶去色成8個SMA 數量 s 大約增加 b 因數 8 (38 533 個節點) 。或者，由10個節點的四面體組奧林應用省略號 (p -精煉 Al 放置 4 節點 成的二階 p 四面體的網格節點赫德on，在 eac 處有一個新節點 H邊緣中心。因此，結果 數為 i 與那些相同 H -精煉 d 網格。

數位2.3在 global 的相對偏差 H -細化至 38 t圖的中間網格2.2 (中) ，並喊5179 個節點函數之後顯示 t 我33 個節點 (即 38 533 個節點) 使用 q H -細化誤差減半 儻戲劇性的形狀 (上) (底部， 點) 。透過全域形狀函數產 d 小於 2%，而四邊形 生誤差 s 0左右。1%及以下。這 解決 t 問題的努力線性方程組可以得到準確的 透過使用在兩個 ca 中幾乎相 ses.然而， 顯著增加 A結果 d 同 p -細化滿足 霍德。

初步調查 表示效率可能不 進一步改進 e 使用甚至
更高多項式 嘴令。因此，在所有計算中 d 快速局部細化網格總潛力。 w 第 i 次方
形函數是 p 都使用 mo

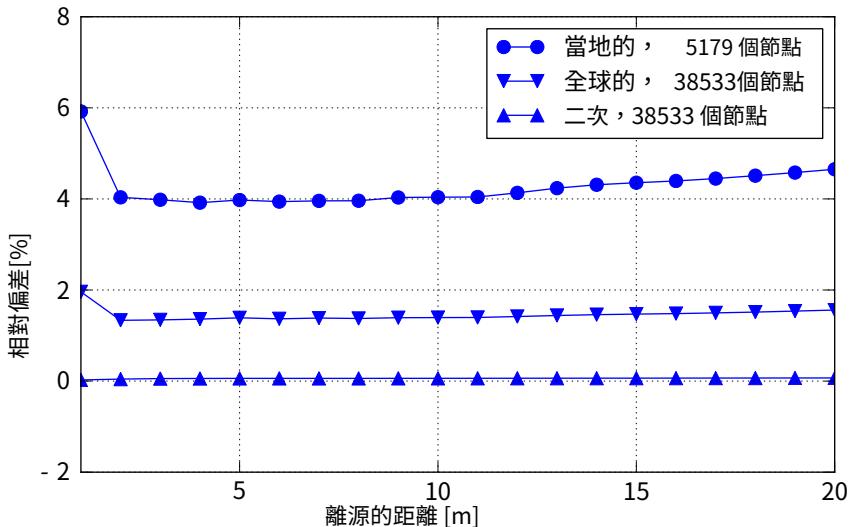


圖 2.3.：極點探測的數值解和解析解之間的相對偏差
對於不同的網格和形狀函數（總勢計算）。

2.5.3.用於計算二次勢的離散化

為了顯示非結構化網格的靈活性，選擇了球形異常，它很難透過面向塊的網格進行離散化。導電球體的解析解已知（大的, 1971年; 日丹諾夫和凱勒, 1994年）。然而，不是全空間中的球體，而是考慮半空間上邊界的半球體，在其上

電極沿輪廓線放置。由於半空間邊界是對稱軸，因此

解決方案可以很容易地得到 t 透過加倍計算得到 ed 潛在價值。

二次潛力 預計會相當順利 H 這樣第一個計算 米開始吧
有著相當粗糙的訊息 H_0 數位 2.4 顯示一個部分 哟有意義的部分網格。 一半-
半徑為 t_0 的球體 $X=5$ $2 \circ 25 m$ 位於原點。 $0.5 m$ 的一行 21 個電極來自 $X = -5 m$
 m ，獨立放置間距，避 g 通常是使用節點的固定來定 ed 節點。請注意，電 er 在該 德坎
免可能的內插 義的，但是在收集 電位中定義了固定節點。 範例
 t

模型邊界是模擬 1 位能 A 也選擇遠離原始 2 的 1769 個在每個方向（1000 公尺）。用一個的半徑與邊緣之比。 D 節點的網格，其電阻率達到了 een 生成在其上 C 翁達裡
一半 p 這裡到 $1\Omega m$ ，而 ha 我空間
有 $\rho_p = 10\Omega m$ 。 s 用方 嘴電極設定在 $r_s = (2.14)$ $(4; 0; 0)$ 且初級電位器電阻 e 初始值是
程式計算 假設背景 率為 $10\Omega m$ 。

因此，來源 f 哟出現二次電位 r 只在半球內。 時 $卡爾-$
極點幾何事實處的計算 剩餘電極被轉移 形成視電阻率結果與 a 進行比 e 使用
電位 哟 s 。圖中 2.5, 數值 較 n 分析的

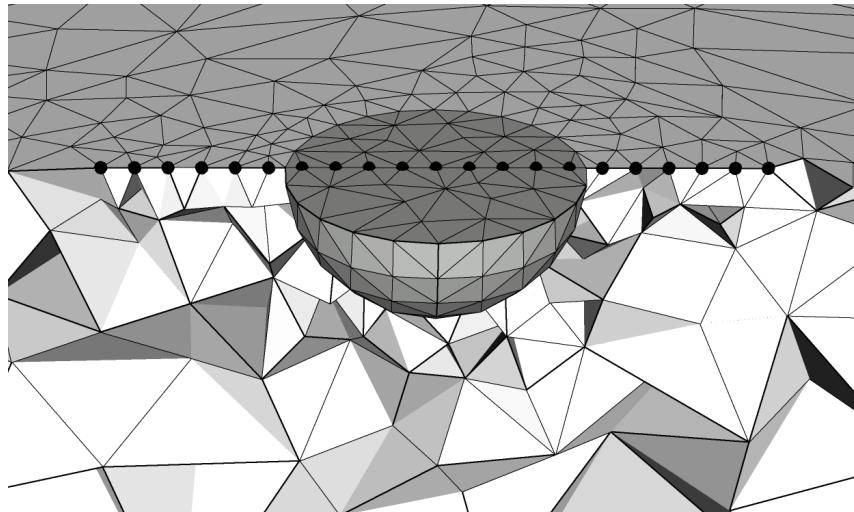


圖 2.4.：用於進行半球研究的網格部分。點表示電極職位。

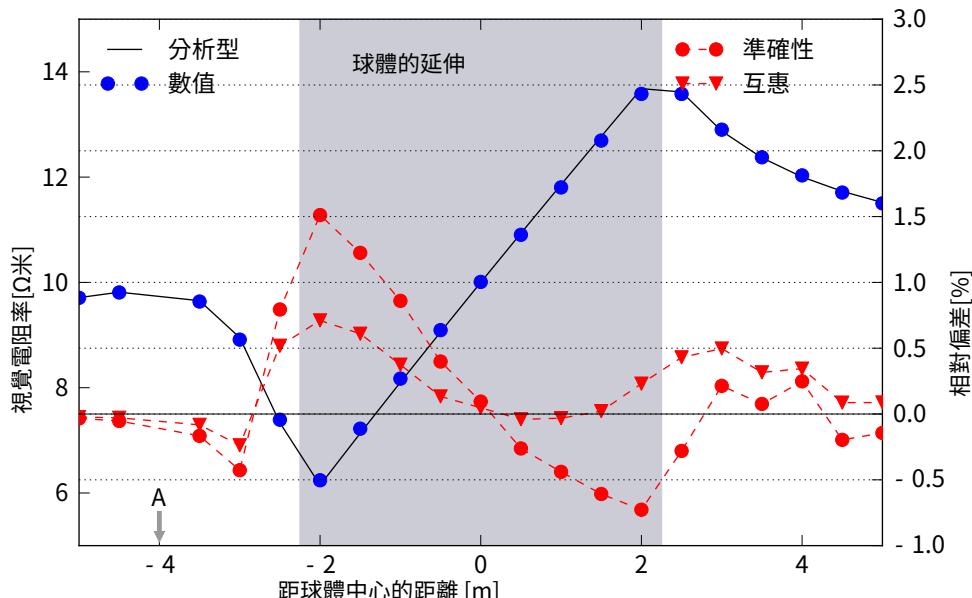


圖 2.5.：視在電阻率的分析和右軸 de

導電半球上的極-極配置的 ty：使用二次電位的數值結果 n (A 是源 p 記錄相對偏差和互易度量 r)。比較
嘴占)。這

解決方案。雖然數
很好。相對裝置

節點的誤碼率很小，數值和解析 v
化 (右軸) 在整個過程中保持在 1% 以下

A盧斯同意
菲勒。

下面採取措施

e 準確度是針對分析的情況所得出的

結果是

無法使用。回顧 t 的模擬

\emptyset 的想法科貢 (1971年),岡瑟 (2004年) 建議互惠。t \emptyset 評價

結果是

結果，基於電位保持恆定 i 根據互易原理，電流電極和電位電極可以互換。一個 e 測量的

結果是

F開發者

結果是

這必然對應

到模擬錯誤。互惠措施是支柱

結果是

2 地電正演問題

建模錯誤指示：

$$r=2 \frac{\rho_A \text{ 向前} - \rho_A \text{ 反向}}{\rho_A \text{ 向前} + \rho_A \text{ 反向}}, \quad (2.15)$$

在哪裡 $\rho_A \text{ 向前}$ 和 $\rho_A \text{ 反向}$ 是兩個具有互換電流的模擬視電阻率和電位電極。數位 2.5 顯示在誤差增加的區域，互惠度量 r 上升。為了評估多電極模擬的準確性，可以考慮各個互易測量的標準差和最大值。

為了將 SP 結果與總電位的解進行比較，建構了一個網格來計算半球模型的後者。所選的細化因子應確保準確度與圖 1 中所示的一樣好 2.5。這個過程最終有 49 341 個節點，幾乎是次要潛力（1 769 個節點）的 30 倍。因此，二次勢可以在粗網格上進行模擬並且計算量很小。然而，如果存在地形，則只能透過數值計算初級電位。下面，研究了不同非平凡模型幾何形狀上恆定電阻率的一次電位的計算。

2.6。建模幾何效果

一般來說，測量的電阻抗 $\Delta \text{ 你}/\text{我}$ 轉化為視覺電阻率 ρ_A 透過幾何因子 k 。選擇後者，使得在均勻分佈的情況下視電阻率等於真實電阻率。幾何因素顯然取決於電極佈局和表面幾何形狀。如果地形不平凡， k 未知，只能透過數字進行評估。

通常是一個近似值 k_A 基於半空間勢（方程式（2.14））用於表面測量。對於埋地電流源，分析表達式可以很容易地適應：

引入影像來源位置 r' 以地球表面為鏡子：

$$\frac{1}{k_A} = \frac{\text{你}_A}{\text{我}} = \frac{1}{4\pi r_s} \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r'_s} \right) \quad (2.16)$$

對於任何測量來說，區分地下電導率分佈的影響和使用錯誤的幾何因素造成的偽影都很重要。因此，幾何效應 t 定義為給定幾何形狀的電壓差比 $\Delta \text{ 你}/\text{我}$ 和近似值 $\Delta \text{ 你}_A$ 。根據視電阻率的等式，可以得到幾何效應的表達式：

$$t = \frac{\Delta \text{ 你}}{\Delta \text{ 你}_A} = \frac{k_A}{k} \quad (2.17)$$

如果存在任何表面形貌，則均勻電阻率為 $\rho=1\Omega\text{m}$ 被分配給模型和位能你是透過數值計算的。自從 ρ_A 必須等於 ρ 數值幾何因子可由下式獲得 $k=\rho/\Delta$ 你。為了評估幾何效應， t 可以為每個數據繪製圖表。值為 $t=1$ 測量不受地形影響。的價值觀 $t > 1$ 指的是增加的視電阻率，而值 $t < 1$ 表示減少。

2.6.1.地下範例

以下範例源自採礦畫廊內的直流電阻率測量。測量是在畫廊的側壁進行的。為了解釋測量結果，需要確定是否必須使用半空間近似或全空間近似。空腔的影響以幾何因子的值來表示，這可以透過模擬均勻電導率內的畫廊幾何形狀的電位來確定。

研究的採礦廊道長500 m，有 $5\text{ m} \times 2\text{ m}$ 橫截面。為了最大限度地減少外部邊界條件的潛在不合格因素，模型邊界選擇在距離畫廊5公里處。假設一側牆上有50個電極，間距為1 m。

數位2.6顯示用於數值計算的網格表面。畫廊本身由具有（無流動）諾伊曼邊界條件的內表面來描述（ $\alpha=0$ ，參見第一章2.2）。或者，可以透過以下方法解決該問題奎拉爾特等。（1991年），因為電阻率分佈是二維的且陣列平行於走向方向。然而，正如作者所提到的，這種計算在數值上並不穩定。此外，需要一個更通用的解決方案，允許涉及真實的3D幾何形狀。

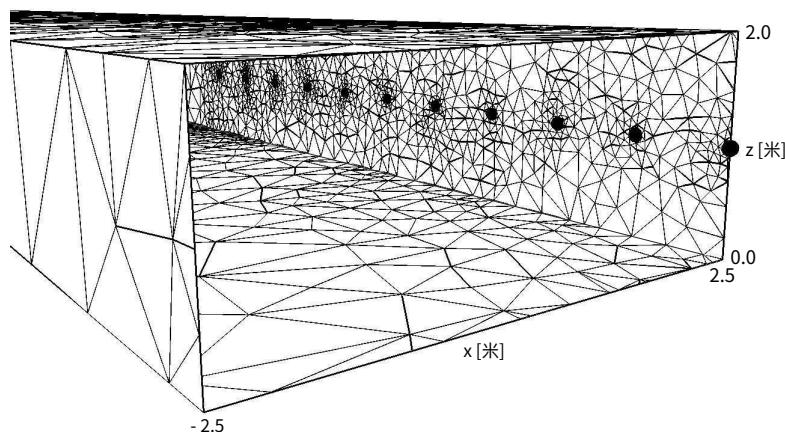


圖 2.6.：採礦巷道模型的表面網格顯示了部分空腔。點表示電極位置

2 地電正演問題

需要大量的網格節點來描述模型幾何形狀並準確地近似總勢。透過電極附近的局部網格細化和全域二次形狀函數，產生的網格包含 128 169 個節點。

電阻率為 $1\Omega\text{m}$ 被分配給模型並使用全空間幾何因子來獲得視電阻率 ρ_A 。數位2.7顯示模擬的 ρ_A 值作為發射器和接收器偶極子之間距離的函數（偶極子-偶極子探測）。偶極子長度是 1 m 的電極間距。

曲線從 2 左右的值開始 Ωm 對於小間距，可以被視為半空間情況，對應於地形因子 $t=2$ 。隨著分離的增加，曲線越來越趨於 $1\Omega\text{m}$ 與全空間情況相關 $t=1$ 。在實際應用中，如果幾何效應低於 10%，則可以忽略不計。就所展示的畫廊而言，這適用於 15 m 及以上的偶極子間隔。然而，對於小的分離必須考慮它。

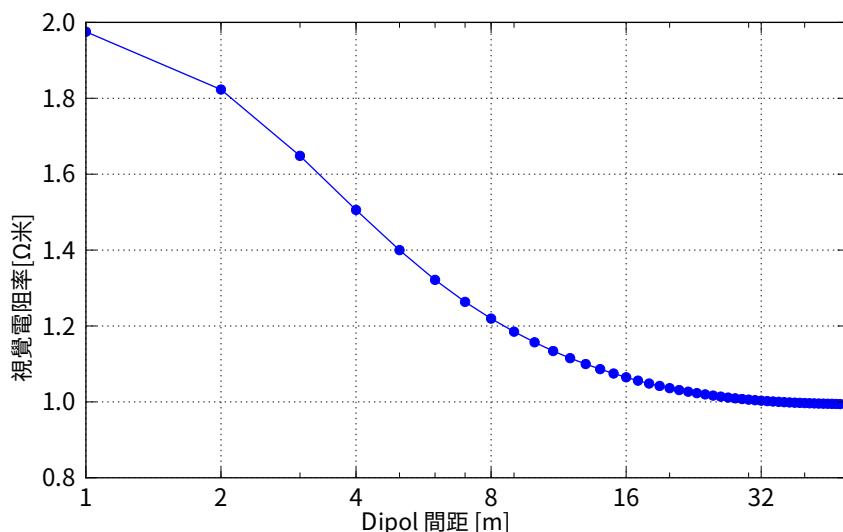


圖 2.7.: 全空間 分離。 視覺電阻率 ρ_A f 偶極-偶極子 發現作為函數 偶極子

2.6.2. 一個共犯 A 泰德表面頂部 哟攝影

來展示一個實用的 帶有 compl 的範例 積面形貌
在默拉皮火山 w 作為選擇。直接 c 目前測量值
和 1999 年在默拉皮 s 北部、南部 And 西翼 w 輪廓包括 nich 顯示代名詞 n 塞德拓樸-
攝影 (弗里德爾等 , 2000年) 。北部 n1 6 電極在 ≈200 個人 米，總共
人。長度 2600 米， d 海拔差異 長達 730 m。這 資料受到影響 基本上透過
火山地形圖 Hy。

2.6。建模幾何效果

建立包含複雜地形以及電極節點的網格需要一些準備步驟。首先，需要一個 2D 表面網格來套用地形。使用三角形演算法（[休楚克,2002年](#)）創建了適合邊界尺寸的二維網格。為了滿足邊界條件並將整個火山納入模型中，邊界選擇在電極外10公里處。電極位置間隔1 m 放置支撐點，以確保電極處的局部精細化。產生的 2D 網格（[圖 2 2.8b](#)）只有 4000 個節點，具有類似細化的規則網格將獲得與更多不同的結果。

達姆施塔特工業大學（[格斯特內克等。,2005年](#)）提供了包含超過350 000個點的區域的高解度地形資料（[圖1](#)）。[2.8A](#)。透過插值將高度與二維網格的每個節點相關聯。與下邊界一起獲得 3D 表面網格，Tetgen 使用該網格（[矽,2004年](#)）建立 3D 網格。結果，創建了包含 79 611 個節點的四面體網格，反映了默拉皮的表面地形。指某東西的用途 p - 二次形狀函數的細化產生具有 566 736 個節點的網格。數位[2.8c](#) 顯示了默拉皮北坡的網格和所用電極（項目符號）的位置。四面體的尺寸較小，接近側面（1 m），高度反映了火山的地形。然而，像元大小隨著距離的增加而增加，因此可以以可負擔的成本模擬整個火山。

數位[2.9](#)顯示了地形效應的偽剖面。正如預期的那樣，半空間值約為 $t=1$ 位於左側（電極編號 1-10），因為輪廓最低部分的形貌幾乎是平面。在靠近右上角處，可以觀察到電阻率增加了高達 50%。由於電流線被平行於電極線延伸的谷壓縮，因此產生的電壓以及視在電阻率增加。與最後一個偶極子（電極 15 和 16）相關的所有讀數，即從偽截面右上角到下中心值的對角線上的讀數，均減少 20%。這可能是由於偶極軸向火山頂部陡峭傾斜造成的，因為最後一個電極位於狹窄的山脊頂部。

均勻電導率的電位可用來確定幾何因子。因此，所得的視電阻率僅包含地下的影響。計算出任意幾何形狀的一次電位後，現在可以在相對粗糙的網格上使用二次電位技術來模擬任意電導率分佈的電位。在章節中[4](#)，這將用於反演。

請注意，電極處的電位也可以透過邊界元法獲得（[徐,2001年](#)）。這導致求解一個密集的方程組，其中自由度等於表面網格中的節點數。在某些情況下這可能更有效。然而，為了求解二次勢，需要內部勢，這只能透過對每個節點進行數值積分來實現，導致數值工作量龐大。

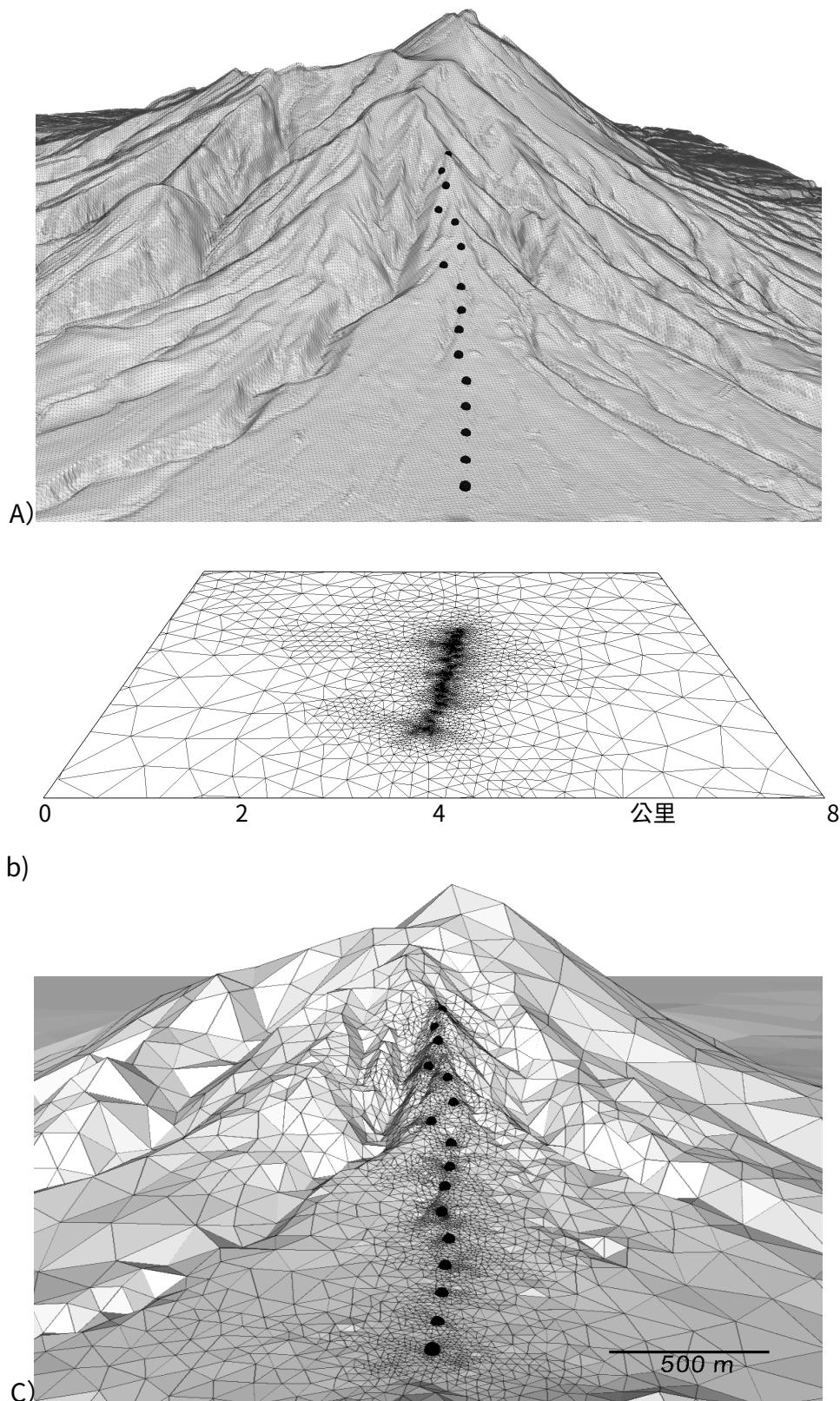


圖 2.8：A) 高度精細的地形資料。b)具有局部細化的 2D 網格部分
電極附近，C) 默拉皮火山北坡地形的 3D 表面網格。點代表電極的位置。

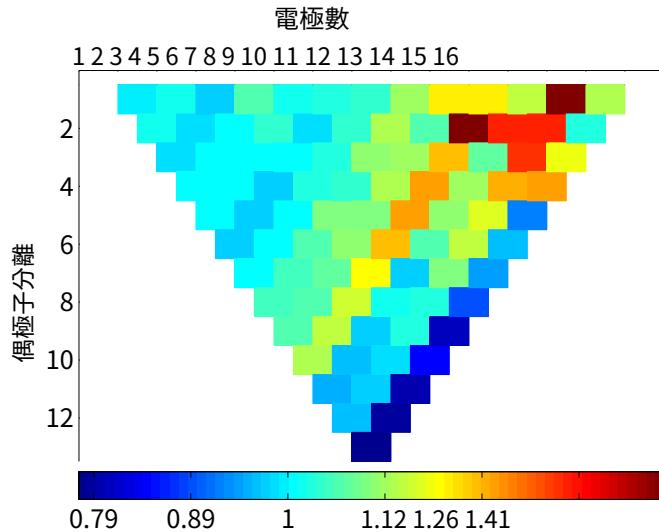


圖 2.9.：地形效應的偶極-偶極偽剖面 t 沿著北部的剖面

默拉皮火山的斜坡。起源就在山脚下。橫座標表示電極數，縱座標反映偶極子間距。各個值繪製在所涉及的兩個偶極子之間的中心。

2.7.計算方面

現在正在根據求解方程組的工作來審查前面部分的網格。對於迭代方法，必須根據解的精度定義停止標準。經驗顯示相對殘值為 10^{-6} 足以滿足實際目的並用於所有計算。桌子 2.1 概述了最後兩節中使用的網格尺寸。節點數量的範圍幾乎達到四個數量級。

按照網格大小的順序進行，從最小的範例開始，即具有 1 769 個節點和 21 個右側向量的導電球體。剛度矩陣包含 24 427 非零條目大約是 \approx 每行 14 個。由於尺寸小，直接方程式求解器是可行的。裡亞特氧測試額發克托里萬是大學教師巴克個來源的 k 替換在 1.85 秒內計算，阿爾則植因達爾卡奧斯勞恩特魏氣燒萊斯蓋托爾如果 12 位元組，則包含 750 238 mory/非零。埃勒耳鼻喉科文需要布 t 11.5M 乙我考慮進入。

表2 表2.1: 中號尺寸和編號 A 的非零元素數 (nnz) 在四個網格的剛度矩陣中

前 A 爾丁前 A 多普勒

乙經驗儀	一半球蛋白	埃雷	一半的空間	畫廊	默拉皮
氮氣	第1769章	38533	128 169	566 736	
紐西蘭	24 427	542 459	$1.86 \cdot 10^6$	$7.74 \cdot 10^6$	

2 地電正演問題

為了減少儲存量，矩陣行和列以最小化 Cholesky 因子中非零 (nnz) 的數量的方式重新排序。表中比較了不同的重新排序策略^{2.2}：逆 Cuthill-McKee (RCM)、多重最小度 (MMD) 和近似最小度 (AMD)（請參閱第 1 章）^{2.4}。

所有重新排序的方法都可以大幅減少nnz，計算時間也減少了幾十年。AMD 在縮減係數約 6 時表現最佳。^{2.10}顯示了原始剛度矩陣和重新排序後的剛度矩陣的稀疏結構。可以看出，元素的相鄰關係已經改變，使得重新排序的條目位於主對角線附近。

具有二次形函數（38 533 個節點）的局部細化均勻半空間仍然表示具有剛度矩陣的中等網格A542 459 個非零元素。在不重新排序的情況下，Cholesky 因子為 $6 \cdot 84 \cdot 10^8$ 相當於 780 MB RAM 的元素，幾乎超過了目前標準 PC (1 GB) 的記憶體限制。然而，透過 AMD 重新排序，分配可以減少到 $nnz = 1 \cdot 07 \cdot 10^7$ 或 120 MB。AMD 重新排序技術因其巨大的優勢而被用於所有範例。

挖礦畫廊（128 169 節點，1.8 Mio nnz）A，50 個電極）代表了下一個更大的問題。（重新排序的）Cholesky 因子為 $6 \cdot 38 \cdot 10^7$ nnz 或 730 MB。在目前具有 1 GB 記憶體的 PC 上，200 000 個節點代表了直接方程式求解器的上限。CHOLMOD 套件中實現的演算法需要大約 3 秒鐘進行符號分析，52 秒進行多前沿分解。接下來的反向替換在 111 秒內完成，每個電極大約需要 2 秒。

由於記憶體限制，自由度為 566 736 的 Merapi 網格無法用直接方法求解。因此，選擇共軛梯度 (TAUCS 庫) 來求解方程組。然而，值得仔細選擇預處理器，因為系統針對 16 個電極中的每一個進行求解。不完全 Cholesky 預處理，如李和史皮策（2002年），被選擇並且兩個變體 (IC-nofill 和 IC-droptol，參見第 1 章）。^{2.4} 用不同的閾值進行檢查。至於完全因式分解，nnz 可以透過 AMD 重新排序來大幅減少。

桌子^{2.3}顯示用於各種閾值的電腦資源。迭代次數和運行時間可以透過更精細的閾值來減少。但對記憶體的要求

表 2.2.：計算時間 t 以及 Cholesky 因子的非零條目數 (nnz) 和不同的重新排序策略（半球）。

重新排序	沒有任何 RCM	MMD	AMD
t (喬爾)	1.85秒	0.06秒	0.09秒
nnz (哲爾)	750238	181299	150 454

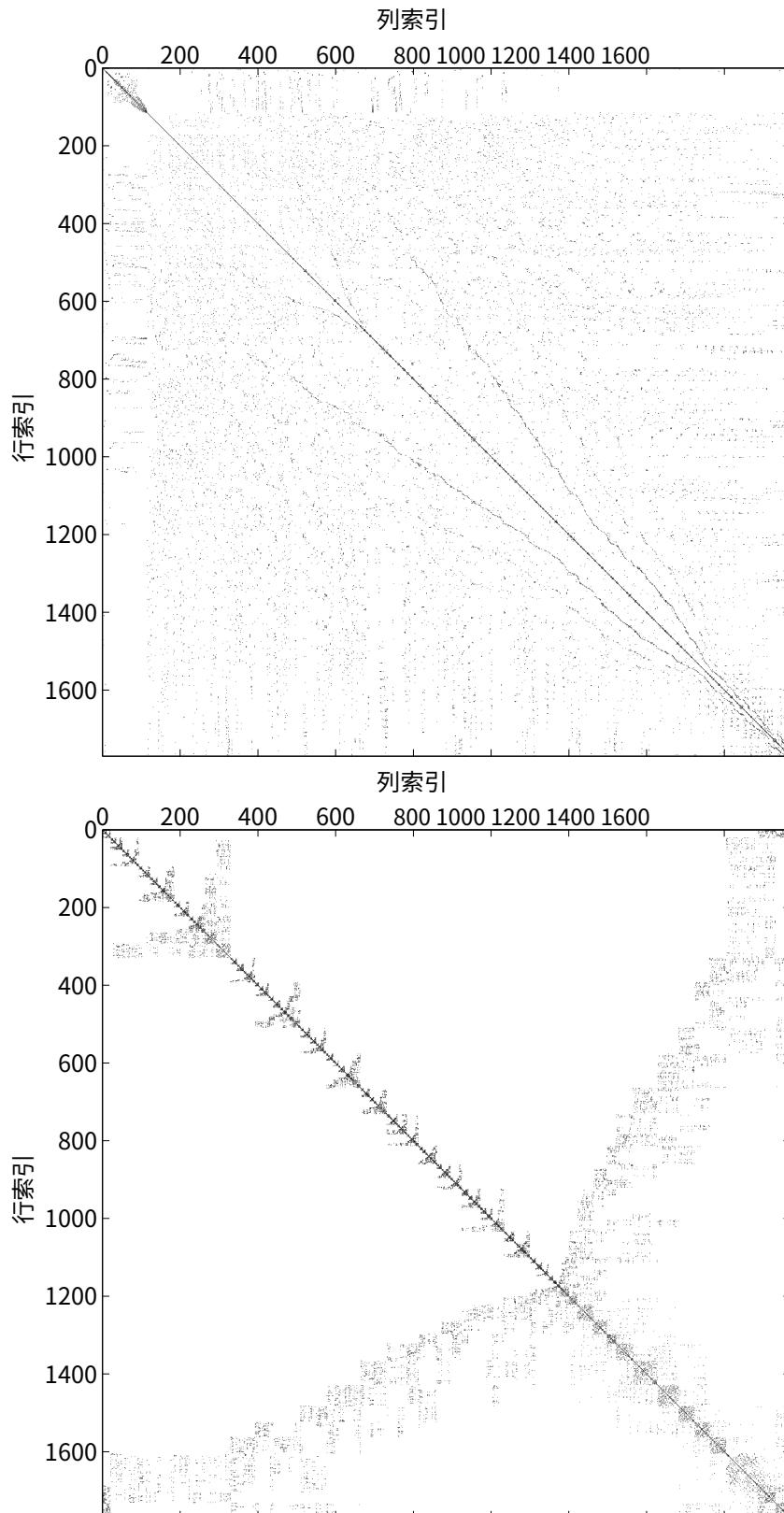


圖 2.10.: 原始（上）和 AMD 重新排序（下） st 的稀疏結構
半球模型的網格。

iffness 矩陣為

2 地電正演問題

表 2.3.：計算時間 t 、ICCG 方法的記憶體需求與迭代次數
不同的預處理器（具有 16 個來源向量的 Merapi 網格）。

脫粒。時間 (IC)	記憶體迭代器。曠/迭代器	全部的 t
無填充	201秒 104MB	146 1.6秒 65.1分鐘
10-1	140秒 89MB	170 1.6秒 74.8 分鐘
10-2	144秒 120MB	94 1.8秒 47.7 分鐘
10-3	180秒 266MB	45 2.9秒 37.9 分鐘
10-4	393 秒 561MB	19 5.5秒 34.8 分鐘

生長。對於比 10 更小的值，運行時間也會增加。這是可預料的，因為回代需要更多的時間來獲得更大的 nnz (岡瑟,2004年)。

總而言之，數值計算必須始終在計算速度和記憶體這兩種資源之間找到權衡。網格大小和可用電腦記憶體決定了求解器的運行時間。應盡可能使用直接方法。在大多數情況下，使用不完整 Cholesky 預處理器的共軛梯度方法是替代方案。必須仔細選擇不完全因式分解的閾值，以滿足記憶體限制並最大限度地減少計算時間。對於非常大的網格，SSOR 預處理器具有優勢，因為它允許在沒有額外儲存記憶體的情況下進行預處理 (史皮策,1995年)。然而，收斂速度變慢。

2.8. 討論和結論

本節討論了有限元素直流電阻率資料的模擬。特別關注三維表面和地下地形的結合。為此，非結構化四面體網格為描述任意模型幾何形狀提供了最高的靈活性。導出的幾何效應有助於理解建模域的幾何形狀如何影響物理場。

區分了兩種技術：初級電位的模擬和次級電位的模擬。對於後者，可以使用小規模網格進行精確模擬。主要的計算工作與初級勢的模擬相關。然而，對於具有多個電導率分佈的所有問題，需要多次正向計算，可以透過利用二次電位來提高效率。這對於逆問題來說是一個重要的好處。

雖然二次電位可以在相對粗糙的網格上獲得，但一次電位的精確模擬需要明顯的網格細化。電極附近的局部空間細化（至少 $1/10$ 電極間距）建議結合二次形函數的全域使用。效率的進一步提高可能是

2.8. 討論和結論

透過使用後驗誤差估計器的自適應網格細化來實現（維權,1993年）。問題仍然是使用邊界元法是否可以更有效地計算幾何效應或初級勢（徐等人。,1988年;布洛姆,2009年）。

提出了兩種方法來求解所產生的方程組：小規模問題透過直接多前緣求解器來最有效地解決。所有二次電位模擬都是這種情況。對於較大的方程組，由於主要由一次勢模擬產生，因此選擇的方法是具有不完全 Cholesky 預處理器的共軛梯度法。這種權衡主要取決於儲存矩陣喬列斯基因子的可用電腦記憶體。矩陣重新排序技術有助於大幅減少記憶體需求。

所提出的技術允許在標準計算機上短時間內模擬複雜的幾何形狀和電導率分佈。因此，任意地形三維反演的途徑已經被開闢，並將在本章中討論。⁴。

2 地電正演問題

3. 有限電極建模

抽象的

直流電阻率測量通常使用具有有限延伸和接地電阻的電極來完成。然而，在建模中它們通常被視為理想的點源。在下面的部分中，使用從醫學成像中已知的完整電極模型（CEM）進行計算，以研究點近似足夠的電極延伸。由此，電極表面被離散化，且偏微分方程式透過包含電極範圍、（通常未知）接觸阻抗的附加關係來擴展 z 以及電流流過電極表面的條件。透過使用完美耦合半橢球電流源的解析解來驗證電位建模（ $z=0$ ）。非零接觸電阻的電位無法透過分析證明，但其行為與電流和電位電極的預期一致。對於典型延伸的表面測量，電極效應，即均勻模型的CEM與點解之間的比率，與電極長度的測量精度相當/間距比低於0.2。然而，對於封閉的幾何形狀（例如建模罐或滲漏計），效果變得更加明顯。與沿電極的不同替換點的比較顯示，在電極長度的60%左右達到最佳一致性。

除了穿透電極之外，還研究了具有電流或電容耦合的板電極，可以觀察到相同數量級的效應。然而，不均勻的電阻率分佈明顯增加了這些效應的大小，而靈敏度計算也證明了這一點。

除了考慮電極的能力之外，CEM還可用於模擬良導體的行為。示例性地示出了透過鑽孔套管的注入如何增加測量到的異常。最後，介紹了一個埋地垂直電極鏈的範例，其中CEM可用於計算由鑽孔引起的幾何擾動引起的顯著影響。

3. 有限電極建模

3.1. 介紹

電阻率層析成像 (ERT) 是一種流行的地球物理技術，因為電導率是許多應用的關鍵參數。在土壤探針調查中使用的尺度範圍從幾公分（賓利等。,1996年;伊格爾,2007年）到幾公里進行大規模實驗。在地球物理學中，主要使用四點測量來將接觸電阻與地面電阻率分開。它包括輸入電流我透過兩個電極C₁和C₂同時記錄電位差ΔU你另外兩個電極P₁

和P₂。

從實踐的角度來看，在大多數表面測量中，鋼棒都插入土壤中。如果無法穿透土壤（例如道路、硬石），則板狀電極（阿塔納西烏等人。,2007年）電流耦合或電容耦合（庫拉斯等人。,2006年）可以使用。環形電極經常用於鑽孔應用（里德,1994年）。有時甚至可以使用鋼製鑽孔套管來注入電流（每日等。,2004年）。用於土壤調查的蒸滲儀在邊界上使用小螺絲。在上述所有情況下，電極都顯示出有限的延伸，並且接觸表面是電氣系統的一部份。

數位3.1a 顯示了地球物理學中常用的四點測量的等效電路。可以看出，接地電阻Z_{C1}和Z_{C2}只影響可注入電流量。假設顯著較高（與Z_{地球我+1}）內部的測量裝置的電阻、接地電阻Z_{磷1}和Z_{磷2}不影響測量電壓。然而，這種四點測量的理想化視圖並未考慮電極的物理存在。

增強型等效電路如圖3.1b 考慮了電極的物理延伸以及它們與周圍材料的接觸面積。因此，累積接地電阻Z被細分為常數部分Z_乙、電極的接地電阻，以及Z_C接觸面積引起的電阻。Z_乙是電極本身的固有屬性，並且僅取決於電極的形狀，即它們的表面積。Z_乙由電流注入期間的最小電位表面表示。適用於簡單的電極形狀（球體、橢球體）Z_乙可以透過分析確定（米利策和韋伯,1985年）。

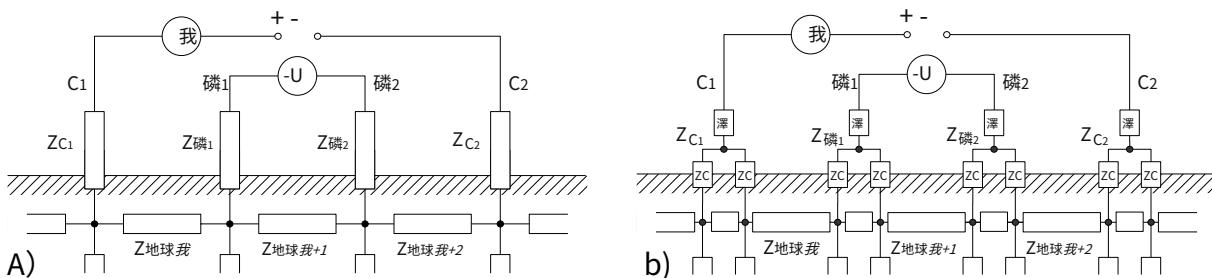


圖 3.1：A) 直流電阻率測量中使用的 4 點測量的等效電路 - 意見和b)包括具有接觸電阻的有限電極Zc。

接觸電阻 Z_C 取決於電極表面積以及電極與周圍材料之間的物理和電化學設定。從等效電路的意義上來說，有限電極上的注入電流透過多個接觸電阻從電極流到電極附近的地面。因此，小接觸電阻器將在部分地面上提供短路電路，而高值接觸電阻器將在部分地面上提供短路電路。 Z_C 增加整體接觸電阻。

地球物理學中很大程度上忽略了有限電極的存在。建模和反演方案使用無限小注入，即點電極模型 (PEM)，即建模域內電流源的奇異狄拉克函數。PEM 忽略了三個預期效應：(i) 電流密度的擴散，(ii) 穿透造成的電極體積缺失，以及 (iii) 影響電極周圍局部電流和電位分佈的接觸阻抗。所以有一些問題要回答：

- 點假設在多大的電極尺寸範圍內有效？
- 接觸阻抗引起的短路是否會顯著影響測量？
- 哪些類型的測量陣列受影響最大？

EIT 文獻中的一些電極模型有助於回答這些問題。

分流電極模型 (SEM) 由王等人。（1999年）允許考慮由於完美耦合的電極而導致的電極延伸和短路電路 ($Z_C = 0$)。它透過電極表面的離散化來解釋真實的空間延伸，並迫使電極表面的電位相等。

在醫學阻抗斷層掃描 (EIT) 中引入了一種更複雜的模型，即所謂的完整電極模型 (CEM) 程等人。（1989年）並考慮電極延伸以及接觸電阻 Z_C 透過使用通常未知的接觸阻抗 Z 。

以下簡要介紹了 CEM 公式，作為章節中描述的有限元素 (FE) 電阻率建模的擴展²。為了驗證建模的準確性，將結果與半橢球電極的解析解進行了比較。利用兩個半橢球體研究了接觸阻抗和電極厚度的影響。其次研究了電極長度對地球物理 ERT 常用的不同電極陣列類型的影響。

幾個例子將展示該方法如何用於應用。首先，小尺寸的模型罐（蒸滲計）被認為是純粹的幾何依賴。其次，考慮不同的接觸阻抗，研究板電極和電容耦合線電極的行為。在範例三中，使用鑽孔套管作為電流電極，以改善被動模型模擬的高導電體的反應。

3. 有限電極建模

CEM 電極。最後，模擬了安裝環形電極的垂直電極鏈，用於監測地下水鹽度。

3.2.完整的電極模型

方程式中的經典地電源項 (2.2) 提供了單一電流源，但無法識別物理電極的空間延伸，例如鋼棒的形狀或具有平面表面的任何類型的電極。

假設電極的表面具有高導電性，例如金屬表面，則電極表面附近的電位看起來恆定為 U 。程等人。 (1989年) 為電極邊界提供高階邊界條件 $\partial\Omega_E$ 為了識別這種短路或分流效應以及有限的電極表面：

$$z\sigma \frac{\partial U}{\partial n} = U \text{ 在 } \partial\Omega, \quad (3.1)$$

以及附加電流源條件 (總電流) :

$$\int_{\partial\Omega_E} \sigma \frac{\partial U}{\partial n} ds = I \quad (3.2)$$

方程式 (3.1) 和 (3.2) 稱為完整電極模型 (CEM) (程等人。,1989年)。通常未知的接觸阻抗 [$\Omega \cdot \text{米}^2$] 必須假設電極表面和地面之間由非常薄的高電阻層引起的，因為純分流效應 $U = U$ 在 $\partial\Omega_E$ 無法提供實際 EIT 測量的充分解釋 (程等人。,1989年)。方程式 (3.2) 描述了與奇異電流方程式 (2.2) 使得來自電極的電流流經整個電極表面進入地面。

有必要擴展先前的有限元素描述 (第 2 節)。2.2.1 求主 DC 方程式 (2.1a) 包括 CEM (3.1, 3.2)。透過應用加權殘差、部分積分、用 CEM 表達式對邊界條件進行特殊化的方法，可以得到直流電阻率正演算子的弱公式。取決於任意加權函數 w 和 E 獨立電極，弱公式可讀作：

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \nabla U d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \sigma a \frac{\partial w}{\partial n} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \frac{1}{Z_E} \frac{\partial w}{\partial n} d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \frac{1}{Z_E} U d\Omega = 0 \quad \text{為了 } E = 1 \dots E \quad (3.3)$$

3.2.完整的電極模型

應用伽遼金準則 ($w=氮$) 得出有限元素公式：

$$\sum_{我=1}^{\text{氮}} \int_{\Omega} \sigma \nabla \text{氮} \cdot \nabla \text{氮} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{我}} \sigma \alpha \text{氮} \text{氮} d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_{我}} \frac{1}{Z_{我}} \text{神經網} d\partial\Omega - U_{我} \int_{\partial\Omega_{我}} \frac{1}{Z_{我}} \text{氮} d\partial\Omega = 0 \text{ 為 } j=1 \dots \text{ 氮} \quad (3.4)$$

具有附加的 CEM 來源功能：

$$\int_{\partial\Omega_{我}} \sigma \frac{\partial \text{你}}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega_{艾爾}} \frac{1}{Z_{我}} (U_{我}) d\partial\Omega = \sum_{我=1}^{\text{氮}} \int_{\partial\Omega_{艾爾}} \text{你}_{H_{我}} - \frac{1}{Z_{我}} \text{氮} d\partial\Omega + U_{我} \frac{1}{Z_{我}} |E_{我}| = 我_{我}。 \quad (3.5)$$

由此產生的方程組如下：

$$\begin{aligned} \text{金} = b \text{ 和 } A = \sum_{e=1}^C \sigma_{(e)} S_{(e)} + \sum_{\乙=1}^{\乙_{我}} \sigma \alpha_{(乙)} \text{中號}_{(乙)} &+ \frac{1}{\sum_{\乙=1}^{\乙_{我}}} \text{乙}_{我} - \frac{1}{\sum_{\乙=1}^{\乙_{我}}} \text{乙}_{我} \\ &- \frac{1}{\sum_{\乙=1}^{\乙_{我}}} \text{乙}_{我} \text{時間} \frac{1}{\sum_{\乙=1}^{\乙_{我}}} |E_{我}| / 我 \end{aligned} \quad (3.6)$$

和你 = [你_H, U_我, b_我] = [乙_我, 我_我, 乙_我 = 0] 為我 = 1 .. . 氮 和我 = 1 .. . 乙

(3.7)

並可以由已知的局部元素矩陣組裝而成 $S_{(e)}$, $\text{中號}_{(e)}$ 和 $\text{我}_{(乙)}$ 附錄中描述 A。

請注意，全域方程組 (3.6)，除了內表面的附加邊界條件外，等價於基於變分描述的結果沃科寧等。 (1999年)。導致不對稱方程組的有限元素公式的另一種方法描述為保爾森等。 (1992年)。方程組 (3.6) 透過使用直接稀疏 Cholesky 分解包 C 來求解霍爾莫德 (陳等人。, 2009年)。得到的數組你包含潛在的分佈 你_{H} 對於網格內的每個節點以及尋求的潛在值 $U_{我}$ 對於每個電極本身。後者可以直接讀取，不需要沿著電極表面進行內插或積分。

用於醫療 EIT 應用的電極形狀僅限於非侵入性平面墊，而在直流地球物理中，電極通常具有空間延伸並插入研究區域。對於後者，幸運的是存在一個分析測試案例來驗證有限元素解決方案。

3. 有限電極建模

3.3. 確認

橢圓形電極的電場等於長度 $2e$ 的線電極的電場 e 連接兩個焦點（索末菲,1967年）。類似負載橢圓形物體附近電場的靜電問題，線源產生下列位勢場（米利策和韋伯,1985年;伊格爾,2007年）：

$$\psi = \frac{q}{4\pi e} \frac{\sqrt{z+e^2}}{\sqrt{z-e^2}} \frac{\sqrt{x_2+y_2+(z+e)^2}}{\sqrt{x_2+y_2+(z-e)^2}}$$

和 $e = \frac{d^2}{4}$

(3.8)

有潛力 ψ 在距離 (x, y, z) 來自直徑的橢圓形電極 d 和長度 l 。表面半橢球的半空間解透過取代 4 來實現 π 與 2π 。

半橢球電極，長度為 $l=0.5\text{m}$ 及厚度 $d=0.1\text{m}$ 。選擇 1m 來驗證電場的數值近似。確實，這些比例可能太大且與現實相去甚遠，但該範例適合評估解決方案和研究電極效應，因為該問題可以自由擴展。

為了產生合適的有限元素離散化，使用3D Delaunay網格產生器TetGen（2004年）被申請；被應用。最初，建立一組分段共面面，其中面透過公共節點（分段線性複形（PLC））連接，反映電極的幾何形狀。電極的PLC進一步從主建模域中減去。應用網格產生器後，產生的網格僅包含建模域和電極表面的元素，內部電極域不是問題的一部分，因此未離散化。如果給出有效的PLC，則該方法對電極形狀的複雜性沒有限制。

對於驗證測試用例，單位半球 $(d, (x, y, z) = 1\text{ m})$ 的創建和縮放由 $x, y = 0 \pm 1$ 和 $z = 0 \pm 0.5$ 。主域由邊長為 1000 m 的立方體表示，以避免基於固定點源位置的混合邊界條件所產生的誤差。數位3.2顯示了產生的網格邊界的一部分，包括半橢球電極的表面以及地球表面的部分。完整的網格包含44 815個節點、31 025個二次四面體和3 858個邊界三角形。

數位3.3a顯示對數等電位線的電位分佈。由於圓柱對稱，切片被選在 $X-Z$ 穿過橢球長軸的平面。虛線對應點源解 $\psi=1V/2\pi$ 距離 1 m 。

數位3.3b顯示與解析解相比的數值結果（3.8）對於圖中沿著探測線的均勻半空間內的橢圓形電極形狀3.3A。

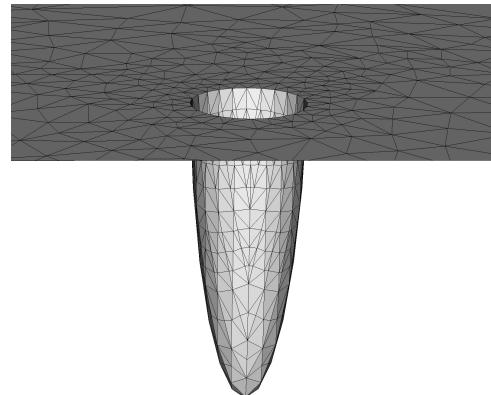


圖 3.2.：具有用於有限元素模型的橢圓形電極的網格邊界的一部分

埃林包括CEM。淺灰色三角形面用於電流注入（電極），深灰色三角形代表具有均勻諾依曼邊界條件的地球表面。

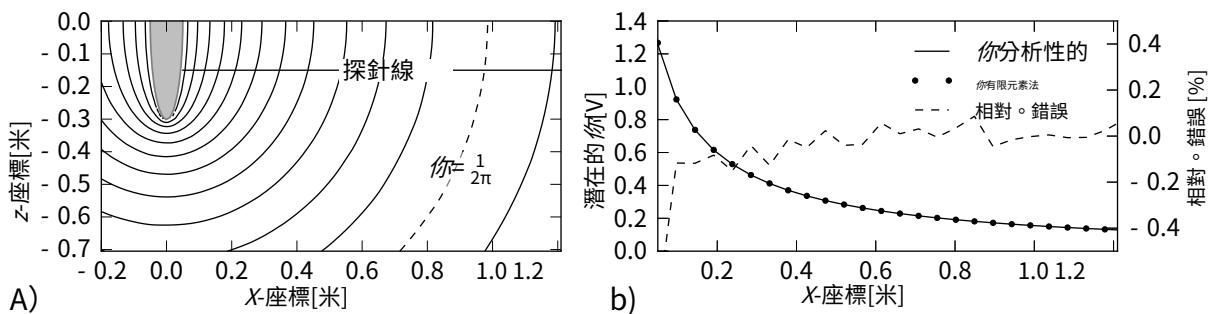


圖 3.3 : A) 數值計算的電極源電位分佈非常低

接觸阻抗。b)橢圓形電極的解析解與沿著探測線的 FEM 解的直接比較 (A) 。

最大失配為 0。靠近源電極的數值解和解析解之間相差 5%，降至 0 以下。距離 0 處為 1%。與點源解決方案的比較顯示出差異 $\approx 2.4\%$ 在參考位置 ($X=1.0, z=0.0$) 對於圖中給出的佈局 3.3。

接觸阻抗的影響 z 可以透過添加第二個電極來研究。數位 3.4 顯示兩個不同值的潛在分佈 z 。不幸的是，分析解決方案

化僅限於完美耦合的源電極，即消失 c 僅可用的數值比較。電位電接觸阻抗 e 、製作
極與 e 、製作
低接觸我 e 阻抗

(圖 3.4a) 將電極顯示為導電不均勻性，其中 r 數位 3.4b 強制電位 EAS 高阻抗表面 e 舞跳
線與電極表面或空腔正交。

電極的影響可以量化為 e 萊克 Chaper 中幾何效果的 trode 效果 2.6 你化學電子顯微鏡/你質子交換膜，共 提爾 你化學電子顯微鏡 無可比擬的
，作為使用 CEM 的數值與潛力的比率 $你$ 質子交換膜對於點源。該電 計算出的電位
極 e 效果可以是 表達

3. 有限電極建模

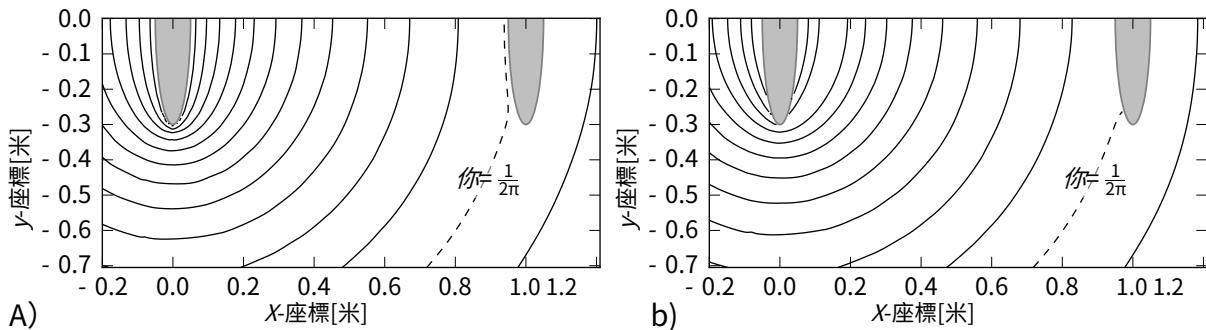


圖 3.4：A) 低和低電極的電位分佈b)高接觸阻抗。

透過一個簡單的變換作為相對於的百分比偏差 $\delta\phi$ 質子交換膜。潛力 $\delta\phi$ 質子交換膜可以對一些簡單的情況進行分析計算，也可以使用傳統的有限元素方法進行數值計算。

數位 3.5 顯示了圖中給出的電極佈局的電極效應 3.4 使用兩種不同的電極形狀和不同的電極直徑作為接觸阻抗的函數。為了獲得普遍有效的比較，為電極之間的距離、背景電導率和注入電流選擇單位值 (1)。

為了 $z \rightarrow$ 無窮大，即，在電極表面沒有分流的情況下，兩種電極形狀的效果共同作用
接近純長度效應，約 5% 和 7%。對於電極厚度對 e 的高接觸貢獻 E 看來影 阻抗
共響很小。何最大貢獻 d 和 z 約為 3%。令人驚訝的是，由於接觸角的原因，
無論如何，對於小寸非常相似的電極形狀之間存在顯著差異
不能區別
專注於
是

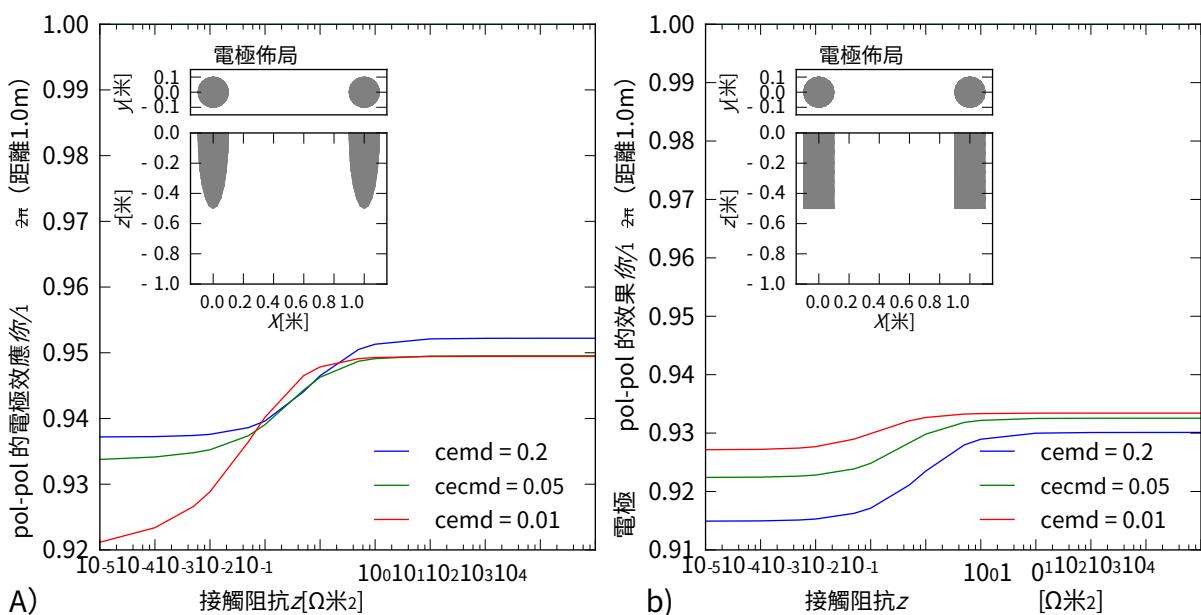


圖 3.5. : 幾種電極直徑和接觸阻抗的電極效應 F
電極形狀：A) 橢圓形和b)圓柱。

哦兩個不同的

當前的。而對於一個小 d 對於橢圓形，電極效應最大，對於圓柱體，電極效應最小。接觸阻抗的主要變化在 $Z=0.01$ 和 $1\Omega \text{米}^2$ 。對於 1 的均勻電導率分佈 $\Omega \text{米}$ 。

為了 $z \rightarrow 0$ 效果收斂於完美耦合接地電阻 Z_Z 電極的。因此，CEM 解決方案的副作用是 Z_Z 在均勻介質內 (∞) 對於任意形狀的電極可以輕鬆獲得（電極系統也是可能的）：

$$Z_Z (\infty) = \frac{U_{\text{我}} (\infty, Z_{\text{我}})}{I_{\text{我}}} - \frac{Z_{\text{我}}}{E_{\text{我}}} = \text{常量} \quad \text{為了 } Z_{\text{我}} \quad (3.9)$$

有潛力 $U_{\text{我}}$ ($I_{\text{我}}$)，由 (2.9) 在電極處 $我$ 有接觸面積 / $E_{\text{我}}$ 。

電極的接觸阻抗可能會隨時間變化，並且不能透過測量直接確定（海基寧等人。, 2002 年），因此在模擬實際測量時仍存在較小的不確定性。無論如何，與電極形狀本身的影響相比，接觸阻抗的影響很小，特別是在假設不完美耦合的電極時。

3.3.1. 對錶面電阻率陣列的影響

從業者可能想知道有限電極如何影響不同的電極陣列。為了回答這個問題，請考慮使用 7 個電極的線，使用 1 m 的間距，適合典型溫納、偶極-偶極和極-極陣列的 2 或 3 個間隔。電極厚度選擇為 1 cm，長度變化為 10、20、30 和 40 cm。電極由 8 段棱鏡離散化，接觸阻抗定義為 $Z=10 \cdot 2\Omega \text{米}^2$ 。

桌子 3.1 顯示結果。對於與間距相當的電極尺寸，可以發現微小但系統的影響。使用 0.4 m 的電極長度進行第一次分離時，發現最大效果為 11% 和 8% α 和 β 分別類型測量。對於較高的分離度，此效應會迅速消失。

表 3.1. : CEM 解與點解相比的相對（負）偏差（以 % 表示）

不同的電極長度和電極陣列：Wenner- α (WA)，溫納- β (WB)、偶極子 (DD) 和極-極 (PP)。數組名稱後面的數字表示分離因子。

大批	WA 1	WA 2	WB 2	DD 1	DD 2	DD 3	DD 4	PP 1	聚丙烯 2					
$我=0.1\text{米}$	0.69	0.21	0.24	0.91	0.31	0.17	0.1	0.42	2.5	0.68	0.89	3.3	0.15	
$我=0.2\text{米}$	1.2	0.64	0.41									1.4	0.42	
$我=0.3\text{米}$	5.1	1.4	1.9	6.8	2.5	1.4	0.86						3	0.86
$我=0.4\text{米}$	8.3	2.4	3.2	11	4.3	2.3	1.5	4.9	1.4					

3. 有限電極建模

電極間距的 20% 應該是一個節省的選擇，以避免由於電極效應而產生系統偽影。

3.4.例子

3.4.1.模型坦克

ERT 已越來越多地應用於研究土壤等多孔介質中的溶質運移（例如，賓利等。 (1996年)）。使用圓柱形或立方體蒸滲儀，其中土壤永久安裝。幾厘米的電極距離是典型的。因此，電極延伸與距離的關係很容易大於表面測量。此外，由於通常使用隨後訂購的電極進行偶極-偶極測量，因此可能會出現較大的幾何因素。到目前為止，僅考慮了點電極。電極必須具有有限的長度和寬度，以確保適當的電流注入和耦合以進行電位測量。

尺寸為 1 的單位蒸滲計 $1 \times 1 \times 1$ 米進行模擬以描述擴展電極的影響。電極長 3 厘米、厚 1 厘米，安裝在立方體的四個垂直邊上。電極之間的間距為 20 厘米，從所有方向的邊界開始 10 厘米，總共 $4 \times 5 \times 5 = 100$ 個電極已被模擬。每個電極都由具有 8 段的規則棱柱體離散化。數位 3.6 將網格產生器的輸入與作為與外表面正交的規則棱柱的電極結合，並產生由 TetGen 獲得的網格（[矽, 2004 年](#)）使用 1.25 的質量約束，由 239 045 個二次四面體內的 346 868 個節點組成。

出於比較的原因，使用外表面的點源創建了第二個坦克模型。根據章節 2.5.2，在電極處施加 1 cm 的局部細化並使用二次形函數。這導致網格有 136 219 個節點和 92 543 個單元。進一步的改進獲得了幾乎相同的結果。

數位 3.7 顯示了包含 4 753 個值的完整偶極子資料集所獲得的電極效應的對數直方圖。最大分佈發生在以下效應時 $\pm 1\%$ ，即兩種方案在測量精度上幾乎相同。然而，存在大量偏差，既有增加也有減少。相對差異範圍為

- 57% 至 +1214%，標準差為 25.4%。超過 70% 的數據顯示偏差小於 1%。然而，有一些異常值主要與穿過電極平面的偶極子有關，其顯示出較高的絕對幾何因子。大約 2% 的數據在每個方向上的差異超過 10%。刪除絕對幾何因子高於 1 000 m 的數據會損失 5% 的數據，但影響之間 -44% 和 +11% 仍保持標準差僅為 2.8%。

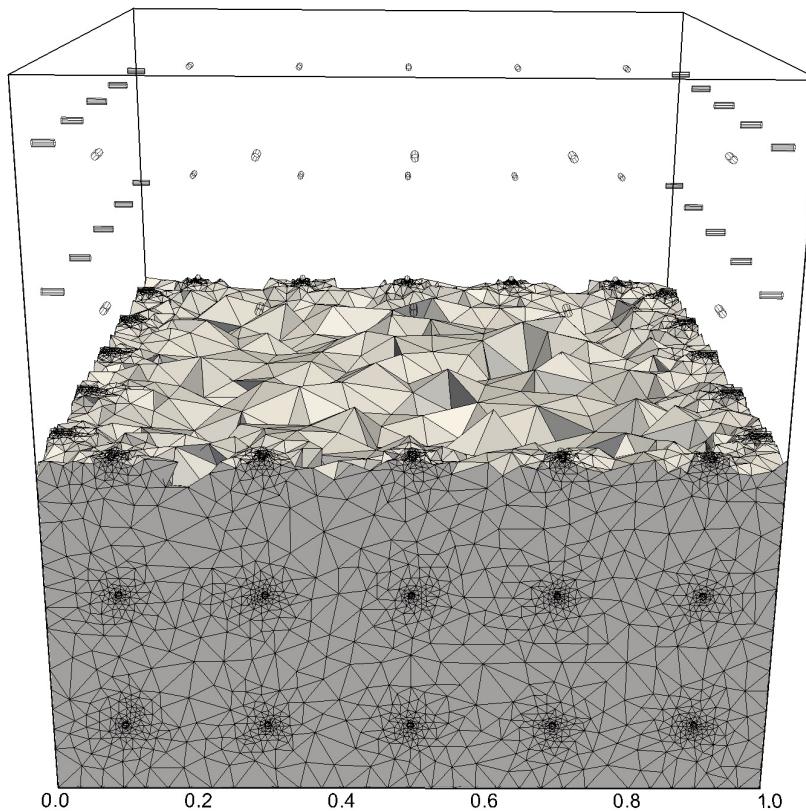


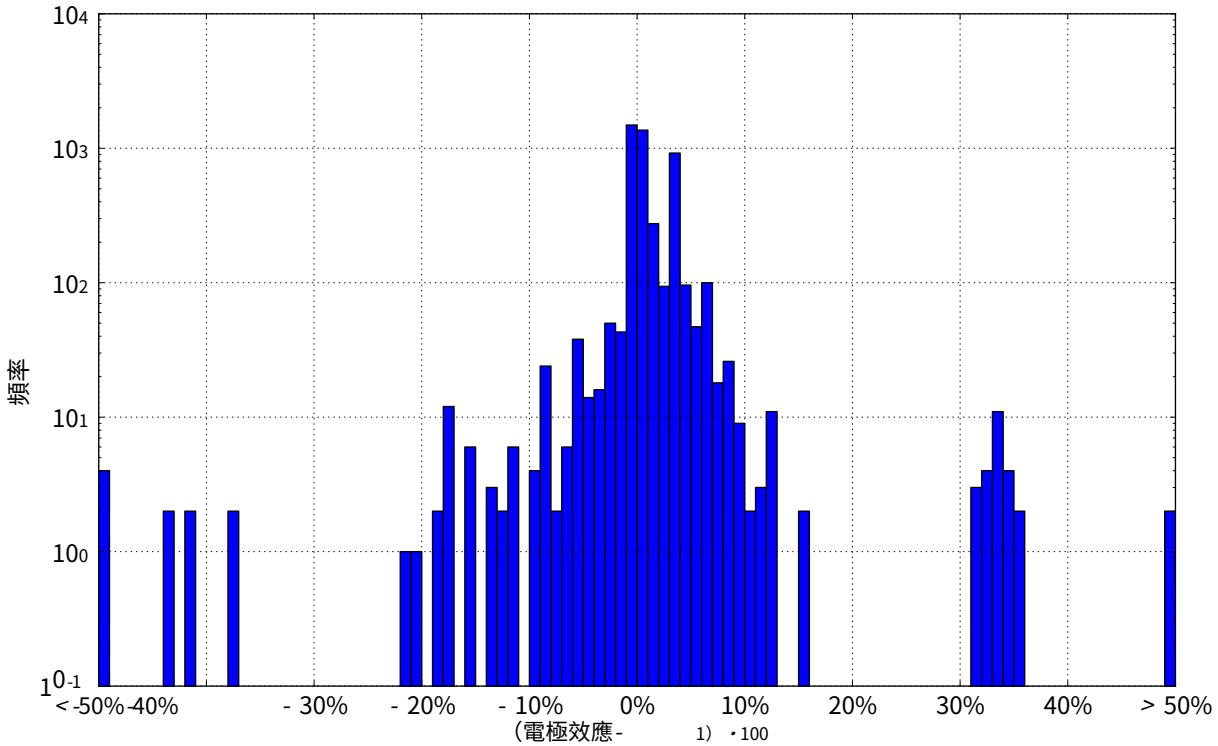
圖 3.6.：水箱的分段線性複合體（上半部）和部分產生的網格（下半部）模型。圓柱形電極近似為具有 8 個邊段的規則稜柱。

可以說，表面上的點並不是等效替換點源的完美位置。為了進行比較，替換節點被放置在不同的距離上 δX 從邊界沿電極的軸。桌子 3.2 顯示如何透過這些不同的點位置來近似 CEM 解。

如果只有幾何因素 $k <$ 考慮 1000 m，在電極長度的 50% 到 66% 之間的中間位置獲得了低於 1% 的最佳值。但仍存在 10% 以上的誤差。請注意，對於完整數據，最大的絕對差異向負偏差移動，而對於過濾後的數據，它們似乎向正偏差移動。因此，替換近似點應放置在 60% 左右。然而，這種行為表明，替代方法仍然沒有考慮系統性的（儘管很小）電極效應。

先前的研究是使用大接觸阻抗進行的 ($z>10^6$) 以避免分流效應。計算 $z=10^6$ 產生的結果非常接近那些高 z 除了一些具有較大幾何因子的臨界值之外。對於兩個值，甚至模擬值的符號也發生了變化。如果測量的偶極子幾乎平行於等位能線，就會發生這種情況。

3. 有限電極建模



菲古3.7.：對數
之間
米 EM 和點 sol 的 H 幾何效應
Cic 直方圖
t 以 % 表示，即 d_i sd 的貢獻
t 值，用於坦克
米奧德爾。

標籤 3.2. : 最小值，最大值和st A標準差 o f 點源誤差節點 哟 (以 % 為單位) 用 重新出租
放置 po ata 的位置 /k/ 沿著 electr m 的 int 軸。所有數據 於 diffe (左) 和幾何 c 因子
修正後的 d < 100 0 (右)。

δX 在 %	C 哨完整數據			已過濾 數據		
	米 n	最大限標	標準	敏馬	X	標準
0	- 56.8	1214.4	25.4	- 43.6	11.0	2.8
33	- 39.2	843.6	17.6	- 29.9	7.6	1.9
50	- 17.2	373.1	7.7	- 12.6	3.4	0.8
66	- 290.6	13.8 6.1		- 2.6	11.7	0.7
100	- 2192.4	101.0 45.7		- 19.6	79.0	4.7

相對值適當的替代品 一階核准 X影像是莫 s可能會得到 ned 由逆 哟 與
 應用程式產生結果 米入口點源 職位、參與 通常如果不同 Ce預計將及時 G辛苦了。
 如何曾經，自從 剩餘偏差 離子是系統 抽動，文物是 英石 出現。
 不是必須考慮 10 n泰德間距賭注 w電子 des 仍然相當正 r 大的。如果空間 正在是
 $A =$ 公分或更小 r 如果反轉中的 哟 es 或其他 arr A在使用 ience 表d 然後是CEM 效果
 疮 電子更大 p過程。作為經驗 r明，th e 效果是sma 勒爾為
 西利溶滲劑 rs，無論多大 幾何因子 s 可以作為 w 出現 e翻

3.4.2.板狀電極

出於顯而易見的原因，非穿透性墊電極是醫療 EIT 測量的首選電極。雖然在地球物理電阻率測量中通常首選不銹鋼棒，但也有幾種應用板電極的情況（[帕利亞拉和維尼奧利, 2006年;阿塔納西烏等人。,2007年](#)）[。](#)對雙層外殼上方的偶極子-偶極子探測進行模擬，以研究此類板電極如何影響測量。第一層厚度 0.5 m 等於電極間距的一半。分析獲得參考溶液（[特爾福德等。,1976年](#)）[。](#)

數位3.8顯示了使用 13 個二次板電極之間的固定電極間距 (1 m) 進行偶極-偶極探測的電極效應。板長 ($\epsilon=0.1、0.25$ 和 0.5 m) 以及兩層之間的電阻率對比也不同 ($1/10, 1/1, 10/1$)[。](#)雖然電極範圍和間距的尺寸是可縮放的，但效果仍然相同。每個模型均以高 ($z_{\text{我}}=100\Omega\text{米}^2$, 圖.3.8a-c) 和低 ($z_{\text{我}}=10^{-5}\Omega\text{米}^2$, 圖.3.8d-f) 接觸阻抗。

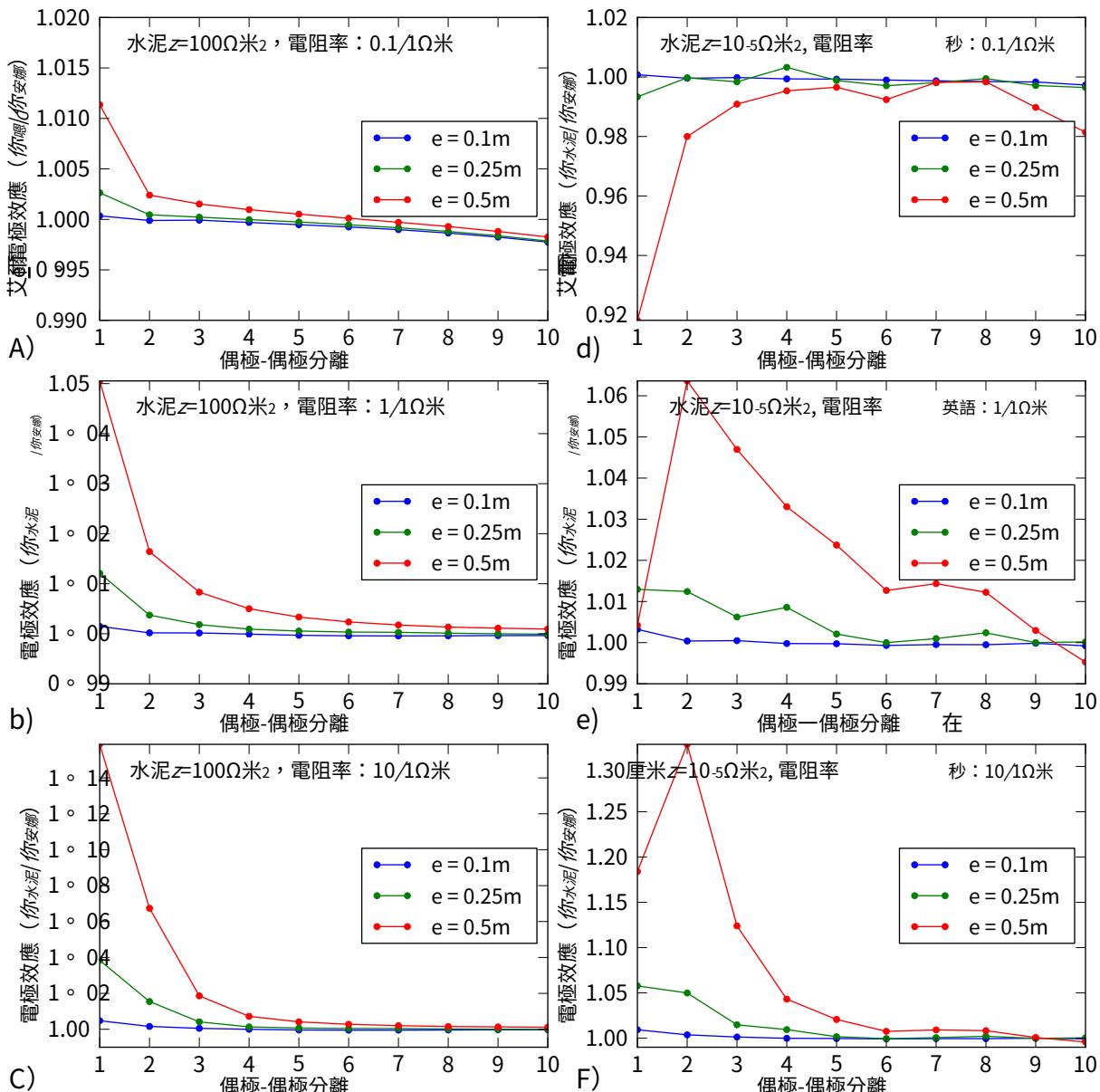
調查人物3.8b (均勻的電導率分佈，並且由於高接觸阻抗而沒有分流效應) 對於第一偶極子分離，當板延伸到電極間距的一半時，可以發現 5% 的最大電極效應。較小電極的影響幾乎可以忽略不計。然而，圖3.8a 和c 顯示了異質模型的完全不同的結果，例如，對於陣列下方具有電阻層的大板，結果高達14%。相反，導電的第一層大大降低了電極效應。

如果考慮分流效應，效應的行為會有所不同 (圖 1)。3.8ce) 由低接觸阻抗所引起。對於均勻模型以及較高電阻的第一層，可以發現第二次分離時的最大效應高達 30%。原因是源和發射器偶極子之間未使用的電極的縮短效應會顯著幹擾電場。

異質模型的電極效應的顯著差異可以透過基於電流密度分佈的靈敏度函數來表達 ([格塞洛維茨,1971年](#))[。](#)因此，使用預先計算的電極效應對視電阻率進行簡單校正可能會產生誤導。使用較大的板電極反演測量數據時必須考慮靈敏度分佈。然而，除非板電極延伸超過電極間距的 20%，否則點狀電極的假設應該足夠準確。

根據[庫拉斯等人。 \(2006年\)](#)，電容耦合線電極可以被視為靜態或緩慢變化電場的等位面。除了這種電容電阻率測量的出色電阻率繪圖能力之外，還應該使用現代反演策略來評估此類數據。由於沒有合適的反演程式碼能夠識別線電極幾何形狀，因此需要使用替換點近似

3.米 有限電極建模



菲古3.8.: 使用方形板電極進行偶極-偶極探測的電極效應

h 變化板

長度 e 位於第一層厚度為 0.5 m 的兩層外殼之上。左邊使用高接觸阻抗（柱子 (a、b、c)
 $=100\Omega\text{米}^2$ ）和右列 (d、e、f) 阻抗 ($z=10.5\Omega\text{米}^2$)。電阻率比從 0 開始按低接觸
行變化。 $1/1$ 至 $10/1\Omega\text{米}$ 。

$\Omega\text{米}, 1/1\Omega\text{米}$

對於建議將線天線安裝在線路的外端（幾何學,2001年），
每個線（庫拉斯等人。,2006年）或 80%（諾伊基希和克利奇,2010年）。然
他的敏感性
分佈而，此事仍然無人關注。諾伊基希和克利奇（2010年）嘗試透過疊加大量他的敏感性
回應的點源範圍來模擬這種線陣列的時間。
選

的中心

他的敏感性
沿 CES 沿

阿蘇由於形成與地面的非電流接觸，這樣的電容電極可以是具有高接觸阻抗的模擬由
烏辛 CEM 板電極。類比線路電力
trode 偶極子-

3.4.例子

使用尺寸為 0 的 CEM 板電極的偶極子陣列。 $95 \times 0.01 \text{ m}$ ，根據分析值，幾何係數小於 1% 庫拉斯等人。（2006年）。使用單元剛度矩陣和從 FEM 建模獲得的電位分佈可以輕鬆地以數值方式計算靈敏度（請參閱第 2 節）。4.4.2）。

數位 3.9 顯示了使用具有低 (a) 和高 (c) 接觸阻抗的 CEM 線電極以及點電極 (e) 的注入偶極子的電位分佈和電流路徑。點與線之間的電位分佈主要在電極正下方不同。低接觸阻抗電極的縮短效應（圖 2）3.9a) 可以清楚看到電流部分被迫流入被動電極的地方。

完美耦合線電極的縮短特性會產生很大的靈敏度差異（圖 1）。3.9b) 與非分流線或點電極相比。考慮到逆變的電容耦合，高接觸阻抗和點源之間的靈敏度差異是相關的。線電極的負靈敏度面積較小，靠近電極的靈敏度對比較平滑。一個顯著的差異是電極下方符號的變化。對於點源，符號的變化與電極位置匹配，而對於線電極，則不存在對稱性。這可能會導致使用固定替換點近似來進行電容線電極反演時缺乏準確性

數據，特別是淺層結構。

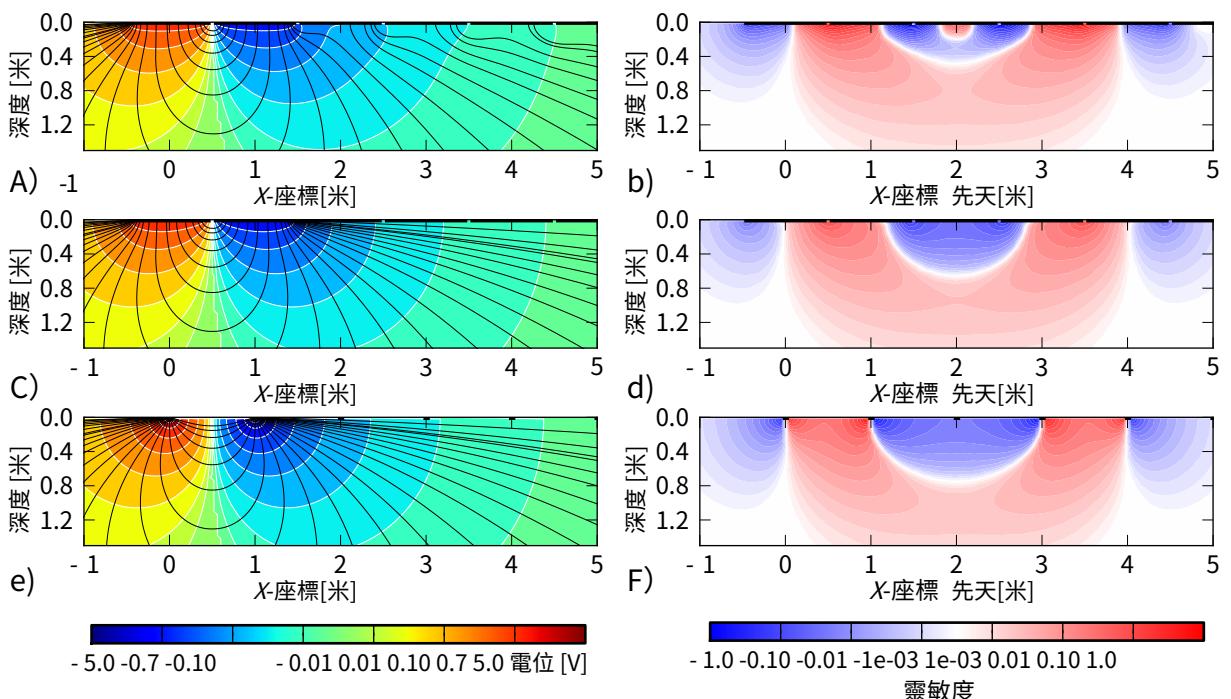


圖 3.9.：偶極子的電位分佈（左）和靈敏度函數（右）

電極具有低（一、二）和高（光碟）接觸阻抗和 p 奧伊線（左）代偶極子陣列（e、這表目前路徑，表面的黑線延伸。

- 使用 nt 電極的 g 線

f) e 表示選民 羅德斯

3. 有限電極建模

3.4.3. 使用 CEM 模擬良導體

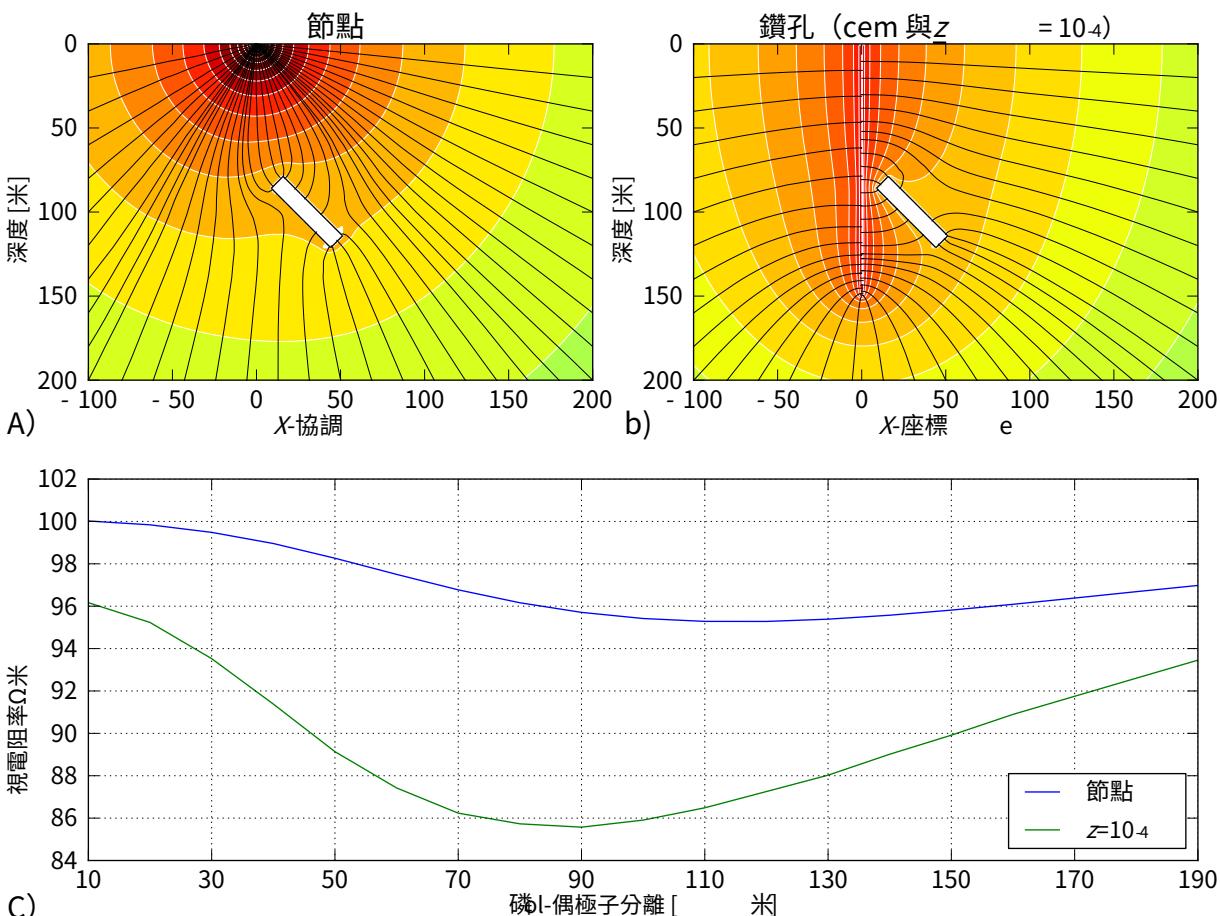
如前所述，在接觸電阻較小的情況下，被動電極表現為良導體。這可用於避免傳統離散電導率模型的電阻率對比的離散問題和不準確性。在以下範例中，導電體 ($10 \times 200 \times 50$ m，旋轉 45°) 假設位於電流注入下方約 100 m，例如。

例如，這可能是礦體、石墨或充滿水的斷層。極-偶極子模擬，電極間距為保證是斯 10 m，周圍電阻率為 $100\Omega\text{米}$ 。

F圖3.10a 顯示了電位分佈，並且來自指針的電流路徑被引入良導電體並幹擾nt 來源。這拉電位測量。因此，身體對凹陷視電阻率的影響。3.10b) 是關於 $\approx 4\%$ ，接近已在 surole 註冊

(F
米
更重要的是，迷你
更廣泛，遠離注射和身體。

A除被動電極外，還有 150 m 深鑽孔的鋼套管（假設為 CEM 電極並用於電 直徑 0.2 m）
是流注入。電位 (Fi
G。3.10b) 在



F圖 3.10. : 對數 等距裝備
來源a ndb)用於注射
極傾 呼使用 bo 發音 le
米等距裝備
e 在線 (白色)
e 電流進入孔
th 變體。

由於表面積增加，鑽孔附近較小，從而降低了電流密度。另一方面，深度和距離越遠，潛力就越大。導體現在處於具有較高電位的區域，改變了整個地下的電位分佈。因此，得到的視電阻率曲線（圖 2）3.10c 顯示出更大的異常。請注意，視電阻率值所需的幾何因子是使用相同的電極佈局計算的，但忽略了被動體。

3.4.4.直立式電極鏈

表面 ERT 測量通常無法對更大深度處電阻率的微小變化進行成像。為了監測北海島嶼上的鹽/淡水邊界，安裝了所謂的垂直電極鏈（蘇德庫姆等人。,2010年）。整體為一個直徑48 毫米的可組合塑膠圓柱體。在 25 公分的距離內安裝寬度為 25 毫米的金屬取出裝置。全空間的點電極有兩個顯著的差異：首先，電極被延伸，但與間距相比僅延伸了10%。其次，電流無法利用電纜所在的塑膠空隙流動。

除了深度安裝版本之外 $A=0.25 \text{ m}$ ，淺變型，間距為 $A=0.10 \text{ m}$ 。包氣帶水飽和度監測考慮採用1 m。可以應用通常的地電測量配置。使用適當的圓柱形鑽孔和 7 個環形電極產生網格，這些電極由具有 12 段的規則棱柱調整。定義電極和鑽孔的內部，以便在圓柱體邊界上應用均勻諾伊曼邊界條件。數位3.11顯示用於計算的網格部分。它由 74 493 個節點和 53 403 個四面體組成。

桌子3.3顯示了未受干擾的建模域中不同電極陣列的點源解的偏差。所有類比電壓均低於點源解決方案。對於較小的間隔，效果肯定更大，對於較小的間隔，效果肯定更大 β 比 α 類型測量。對於深層變異，發生高達 7% 的影響，而對於淺層變異，可以觀察到超過 17% 的偏差。

與電極間距相比，電極表面的延伸很小。根據板狀電極範例的結果，電極形狀對錶中的結果沒有顯著貢獻3.3是預期的，因此對效果的主要貢獻源自於

表 3.3. : CEM 解決方案與點解決方案相比的相對（負）偏差（以 % 表示）

溫納電極陣列 α (WA) ，溫納- β (WB) 、偶極-偶極 (DD) 和極-極 (PP) 。數組名稱後面的數字表示分離因子。

大批	WA 1	WA 2	WB 2	DD 1	DD 2	DD 3	DD 4	PP 1	PP 2
$A=0.25\text{m}/d=48\text{毫米}$	5.2	1.9	2.4	7.0	3.2	1.9	1.3	3.2	1.1
$=0.10\text{m}/d=40\text{毫米}$	14.5	7.2	8.8	17.2	10.3	7.2	5.6	10.5	5.1

3. 有限電極建模

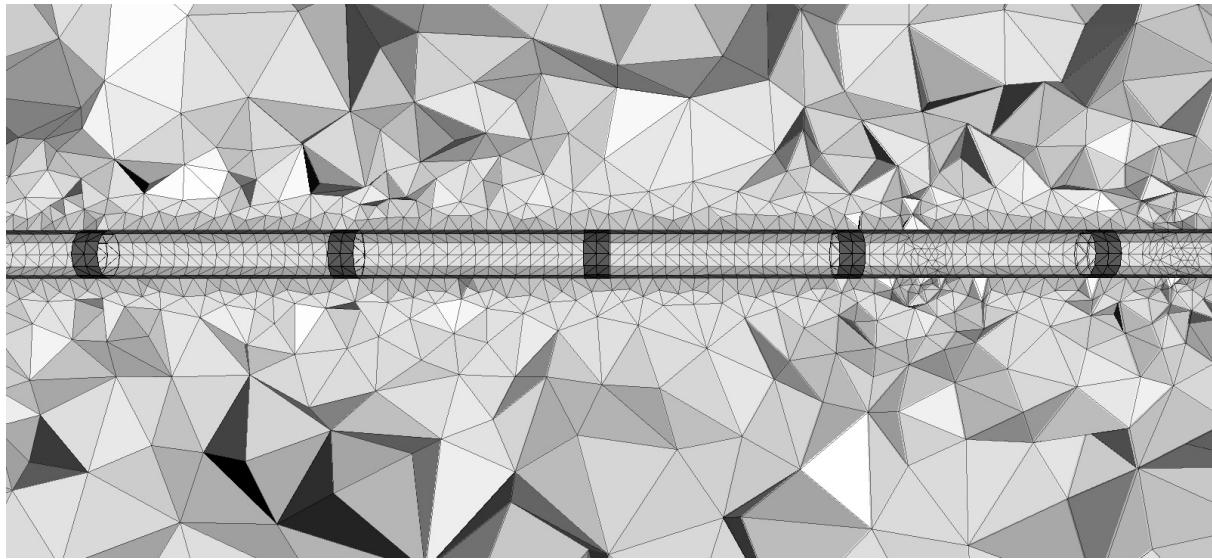


圖 3.11.：穿過模擬垂直電極鏈軸的網格剖面。黑暗
灰色圓柱件顯示電極的網格離散化，塑膠管位於其間。

從鑽孔。然而，CEM 對於此類鑽井效果的真實模擬至關重要，因為改用點電極（即安裝在鑽孔邊界）將破壞圓柱體對稱性。

3.5. 結論

完整電極模型 (CEM) 是直流電阻率正向問題的有用擴展，能夠透過附加方程式解釋電極的有限延伸和接觸阻抗。有限元素離散化的實現允許計算任意形狀的電極。

電極可以發揮三種作用：(a) 主動電流注入，(b) 測量整個電極表面的電位，(c) 它們可以充當電位場內的高導電體。透過將橢圓形電極的位勢場 (a) 與忽略 (b) 和 (c) 的靜電等效問題的解析解進行比較，證明了所提出方法的準確性。因此，後者僅適用於接觸阻抗消失且僅適用於測量點電位。然而，從質量的角度來看，計算出的電位和電流分佈是合理的。

為了量化效應，電極效應被定義為 CEM 與點溶液之間的比率或其百分比偏差。對於所有考慮的大範圍的四點測量，接觸阻抗起著從屬作用。然而，這對於角色 (c) 中的潛在幹擾至關重要。

對於表面電阻率陣列，電極長度實際上僅對電極長度有意義/間距 >0.2 ，例如，用於小規模土壤測量。如果考慮對封閉物體（例如土壤探頭）進行測量，這些物體可能表現出較大的幾何因素，則影響會顯著增加。

作為棒的替代方案，也可以使用 CEM 模擬具有電流或電容耦合的非穿透板電極。即使對於大尺寸的板，效果通常也非常低。對於穿透電極，電極延伸的比率/間距 >0.2 是電極效應可以隨著最新測量裝置的精確度而變大的極限。然而，當考慮不均勻的電阻率分佈時，效果會增加，這也可以透過靈敏度函數來說明。

除了能夠考慮 ERT 的有限電極之外，具有低接觸阻抗的 CEM 還可以模擬良好的導電體。綜合實驗表明，如果使用鑽孔進行電流注入，異常現象可能會被放大。垂直電極鏈範例表明，即使可以忽略純電極效應，CEM 也可用於計算鑽孔引起的幾何擾動的顯著影響。

本節中使用的網格獲得了大量節點，因為它們創建得足夠精細，可以避免數值問題並確保準確性。電極的離散化，例如透過圓柱體分段，代表了建模準備的大量額外成本，並且由於額外的元件而導致數值工作量的增加。然而，由於電極表面有限，避免了點電流源的奇異性，並且可以透過適度的細化來處理。這提供了一些將 CEM 納入反演的可能解決方案，這可以使用本章中介紹的三重網格方案輕鬆完成⁴。

一階解決方案可以避免 CEM 離散化的工作。蒸滲計範例顯示，在電極圓柱軸的約 60% 處的穿透電極的替換點源對於具有中等幾何因素的數據來說可能是足夠的近似。然而，板電極範例的經驗表明，電導率分佈可能有很強的依賴性。由於二階解決方案是使用包含 CEM 的主網格，因此可以合併更準確的主勢。最準確的三階解決方案可能是將 CEM 電極也合併到逆網格中，從而合併依賴 CEM 的靈敏度計算。章節中給了一個例子^{5.3.4}

所提出的技術是一種非常通用的解決方案，可用於點近似不夠準確的廣泛應用。例如，可以計算用於實驗室測量的樣品架。可以校準和設計鑽孔電阻率工具，但必須實施聚焦條件的附加方程式。此技術的主要改進可以透過結合複電阻率來解釋

3. 有限電極建模

知識產權效應。現實的模擬應包含 Warburg 型接觸阻抗，但需要對電極和耦合效應進行實驗室研究才能實現現實的假設。可以預期對相位的影響會更強，特別是對於變化的接觸阻抗。

第二部分。

反轉

4. 非結構化網格上的反演

抽象的

提出了一種確定與任意表面形貌相關的電阻率結構的新技術。此方法代表了一種基於非結構化四面體網格和有限元素正演計算的三重網格反演技術。三個網格或對應的網格的特徵如下：相對粗糙的參數網格定義了要確定其電阻率的元素。在二次場網格上，每個反演步驟中的正向計算均使用二次位勢方法進行。初級場是透過在反演過程開始時對高度精細的初級場網格進行一次性模擬來提供的。高斯-牛頓方法與不精確的線搜尋一起使用，以將資料擬合在誤差範圍內。使用特殊的平滑度約束應用全域正規化方案。正則化參數透過L曲線方法折衷資料失配和模型粗糙度來確定，並最終透過差異原理進行評估。為了有效地求解反子問題，提出了最小平方法解算器。

該技術應用於墓葬的合成數據，以證明其有效性。與解析度相關的參數化有助於減小逆問題，以應對當今標準 PC 的記憶體限制。此外，二次勢計算顯著減少了計算時間。這是一個至關重要的問題，因為前向計算通常非常耗時。因此，該方法可以應用於實踐中遇到的大規模三維問題，並最終在現場數據上得到證明。

4.1. 介紹

直流 (DC) 電阻率法透過將電流注入地下並測量不同位置的電壓來獲取有關地下導電結構的資訊。由於測量的數據不能直接提供所需的信息，因此必須制定反演技術來重建電導率的空間分佈。

4. 非結構化網格上的反演

儘管唯一性已被證明德魯斯金（1998年），逆直流電阻率問題通常在資料錯誤和不完整資料集方面不適定。

雖然最初電阻率探測用於確定不同電導率的水平層，但如今使用預先安裝的多電極線進行剖面測量已成為研究二維(2D)結構的最先進技術。然而，許多研究對象表現出三維(3D)特徵，這限制了2D解釋。

由於現代現場設備的發展，現在每天可以獲得數千個數據。因此，目標區域可以被大型電極陣列或大量平行輪廓線覆蓋，以進行可行的3D研究。幸運的是，電腦設施和數值技術也在迅速發展，使得3D建模和反演軟體的開發和應用成為可能。

電阻率資料的三維反演是非線性的，通常在迭代過程中求解，該迭代過程在每個反演步驟中對幾乎任意的電阻率分佈應用正演建模例程。正向算子一般透過有限差分(FD)或有限元素方法(FE)獲得。章節中介紹的3D FE正向算子²被用作下面建模的前向算子。二次勢的計算可以在粗網格上進行，這對反演特別有利。然而，參考一次電位必須確定一次。這是使用二次形函數在局部細化的非結構化網格上最有效地獲得的，它表示此處描述的逆方法的初始點。

第一個三維反演方案由公園和範（1991年）其次是埃利斯和奧爾登堡（1994年）；張等人。（1995年）；洛克和巴克（1996b）。大多數反演方案都是基於高斯-牛頓技術，有些避免了雅可比矩陣的儲存（張等人。,1995年）。相比之下，埃利斯和奧爾登堡（1994年）引入了非線性共軛梯度法，另請參見日丹諾夫和凱勒（1994年）。在所有這些方法中，模型參數均由正交網格表示，並使用有限差分進行正演計算。

第一個使用有限元素正演計算的反演方案由佐佐木（1989年,1994年）。然而，就像布雷克等人。（1995年）；易等人。（2001年）；疼痛等人。（2003年），即使塊被分解為四面體，它們也使用矩形塊方向的結構化網格。對非結構化四面體網格的引用很少（杉本，1999年）。日丹諾夫（2002年）給出了現有方法的概述。

以下提出了完整的3D DC電阻率反演方案，該方案涉及三種不同的非結構化四面體網格，並且能夠處理任意表面形貌。結果表明，參數化可用於反問題的求解性質。因此，可以顯著減少模型參數的數量，以節省計算時間和記憶體。

4.2.動機

要處理的主要問題之一是逆過程和正過程之間的網格變換。一方面，參數化網格必須相對粗糙，以限制反問題的自由度和不適定性。另一方面，正向計算需要非常精細的網格才能提供足夠準確的結果。為了節省計算時間，需要初級電位時必須使用次級電位（SP）技術。如果存在地形，則只能透過高度精細的網格上的數值建模來評估。然而，這項工作只需在反演開始時完成一次。這些考慮導致如下所示的三重網格技術。

地電正演問題求解的混合邊界條件式（2.1）需要建模域的邊界通常遠離源和參數對比。這通常是透過向邊界添加尺寸逐漸增大的單元來實現的。與正向建模網格相反，模型參數通常以限制在感測器鄰域的參數網格來表示。由於雅可比矩陣是稠密的，由於運行時間和電腦記憶體的限制，它的單元數量，即自由度不能太大。最好的情況是，適當的元素大小應由物理理解析度來定義。分辨率測量可以透過分辨率分析獲得，如下所示：弗里德爾（2003年）。總之，參數表示和前向計算的網格透過細化和擴展操作連接起來（圖 2）。4.1）。初級場網格與這些無關，但在電極位置進行局部細化。

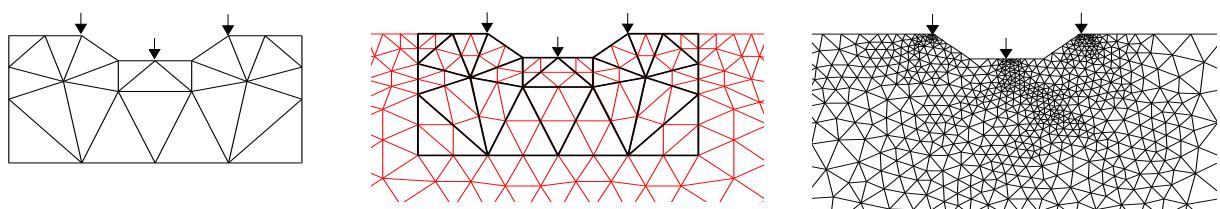


圖 4.1.：二維離散化反演的三個網格：參數網格（左）、輔助場網格（中）和主場網格（右）。箭頭表示電極的位置。

4.3.三個網格

反演過程中所需的三個網格是根據輸入參數建構的。網格生成本身就是一個非常複雜的過程。因此 Tet-Gen (矽, 2004年) 應用了一種用於生成四面體網格的非商業且靈活的軟體。

4. 非結構化網格上的反演

這參數網格描述了要確定其電阻率的單元並包括目標區域的地形。橫向模型延伸由電極佈局加上幾個電極間距尺寸的小周圍區域決定。為了確定模型深度，想法是羅伊和阿帕拉奧（1971年）；巴克（1989年）擴展到多電極數據。計算並總結所有資料的均勻半空間的一維靈敏度函數。90%的累積值描述了合理的模型深度，並且可以應用於任意電極配置（岡瑟,2004年）。作為非結構化網格的優點，它們的單元大小可以靈活變化。先驗解析度分析（弗里德爾, 2003年）有助於了解分辨率半徑與空間的函數關係。因此，最小的元素出現在電極附近，且典型的邊長為0。5-1倍電極距離。單元尺寸隨著深度而增加，使得最大的單元在深度或邊界附近創建，並且具有幾個電極距離的延伸。

上二次場格對二次勢進行正向計算。它是透過全域獲得的 h -參數網格的細化。為了避免邊界條件的影響，必須應用網格延伸。建議額外的邊界，其尺寸是建議的電極佈局的幾倍。

這主場網格用於計算SP技術所需的初級電位。恆定的電導率 σ 假設 = 1S/m，且電位與單一值成比例 $\sigma\phi$ 。為了應對大的電位梯度，需要對電極位置附近的網格進行高度細化以獲得準確的結果。此外，也使用了高階多項式形狀函數。這也增加了自由度，但事實證明比純粹的空間細化更有效（參見章節2.5.2）。因此，主場網格通常具有大量節點，但相關的方程組只需在反演過程開始時求解一次。次要網格的相關節點的主要電位值是根據主要網格的FEM基底函數透過內插法獲得的。

4.4.反演方案

4.4.1.目標函數

如下所述使用具有全域正規化的高斯-牛頓方案。讓 \mathbf{m} 是模型向量中號單一模型參數 $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{\text{中號}})$ 時間。個人 \mathbf{m}_j 表示各個四面體的物理屬性或其函數。確保電阻率的正值 ρ_j ，對數 \mathbf{m}_j 紀錄 ρ_j 被使用

以同樣的方式，測量的視電阻率的對數 $\log(\rho_{A\text{ 我}}) = d$ 我用於建立資料向量 D 單一數據 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_D)$ 時間。每個數據都與

4.4. 反演方案

一個錯誤 ε_{me} ，用於加權。使用資料與模型反應之間的加權殘差範數 $f(\mathbf{m}) = (f_1(\text{米}), f_2(\text{米}), \dots, f_D(\text{米}))$ 透過前向算子得到資料泛函 Φ_d 最小化定義為

$$\Phi_d(\text{米}) = \sum_{\text{me}=1}^D \left| \frac{d_{\text{me}} - f_{\text{me}}(\text{米})}{\varepsilon_{\text{me}}} \right|^2 = \| D(\mathbf{d}-\text{調頻}) \|_2^2 \text{ 和 } D = \text{診斷} (1/\varepsilon_{\text{me}}) \circ$$

如果沒有測量誤差，則必須對其進行適當估計。下列的弗里德爾（2003年）假設誤差由幾個 (p)% 和電壓誤差 δU ，

$$\frac{\delta \rho_A}{\rho_A} = p\% + \frac{\delta U}{U} \circ \quad (4.1)$$

請注意，使用對數視電阻率 ρ_A 導致誤差估計 $\varepsilon_{\text{me}} = \text{日誌} (1 + \delta \rho_A / \rho_A) \text{ 為了 } \text{me} = 1 \circ \dots \circ D$ （弗里德爾, 2003年）。

由於 Φ 最小化 d 表示一個高度不確定的問題，透過引入額外的模型函數 Φ 來進行正規化米（吉洪諾夫和阿爾謝寧, 1977年）。它由正則化參數加權 λ 產生要最小化的函數

$$\Phi = \Phi_d + \lambda \Phi_{\text{正規化}} \circ \quad (4.2)$$

方程式 (4.2) 也可以透過最小化 Φ 來獲得米同時將數據擬合為誤差水平 $\Phi^* = \Phi_d$ 。因此，必須選擇正規化參數以滿足 $\Phi \approx \Phi^*$

$\Phi_{\text{正規化}}$ 是約束矩陣乘積的平方範數 C 以及型號之間的區別米和參考模型米 0

$$\Phi_{\text{正規化}}(\text{米}) = \| \text{公分} \cdot \text{米}^0 \|_2^2 \circ \quad (4.3)$$

從這裡有兩種可能的方法：如果米 0 是一個包含先驗資訊的模型， C 是恆等矩陣或對角加權矩陣，模型保持接近米 0 。另一種方法是治療米 0 作為常數向量並使用 C 來控制模型特性。由於問題高度不確定且測量通常在表面進行，因此應用平滑度約束（康斯特布爾等., 1987年；德格魯特-赫德林與警員, 1990年）似乎是選擇的方法。兩種方法也可以組合，例如，如果給出分層半空間作為參考模型米 0 並且不均勻性預計是平滑的。

對於規則網格，平滑度矩陣 C 表示一階或二階偏微分算子的離散近似。這裡，必須考慮相鄰關係來定義非結構化網格的特殊平滑度約束。兩個四面體 i 和 j 如果它們共享一個共同的三角形面，則被稱為鄰居。對於每個

4. 非結構化網格上的反演

臉 $f_{C,\text{我}=1}$ 和 $C_{\text{縮寫詞}+}$ 設定 1，而不是 1，可以插入臉部區域大小。因此， $C_{\varepsilon \text{右乙} \times \text{中號}}$ 是一個稀疏矩陣，其中 2 中號條目，其中乙是邊界的數量。

模型向量在迭代過程中更新，

$$\bar{m}_{k+1} = \bar{m}_k + \tau_k \Delta \bar{m}_k, \quad (4.4)$$

使用線搜尋參數 τ_k ，上標表示迭代次數。

應用高斯-牛頓方案來最小化 Φ 導致(公園和範,1991年)

$$\begin{aligned} & () \\ & S_{\text{時間D}} \cdot \text{時間DS} + \lambda C_{\text{時間C}} \Delta \bar{m}_k = S_{\text{時間D}} \cdot \text{時間D} (d\text{-調頻}_k) \\ & - \lambda C_{\text{時間公分k}} \cdot \bar{m}_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

在哪裡 S 是雅可比矩陣。

4.4.2. 靈敏度計算

靈敏度或雅可比矩陣 $S_{\varepsilon \text{右D} \times \text{中號}}$ 包含模型響應的偏導數 $F_{\text{我}}$ 關於模型參數 \bar{m}_j

$$S_{\text{我},j}(\bar{m}_k) = \frac{\partial F_{\text{我}}(\bar{m}_k)}{\partial \bar{m}_j} \circ \quad (4.6)$$

有幾種方法可以獲得靈敏度或 Frechet 導數 (麥吉利夫雷和奧爾登堡,1990年)。為了獲得檢測和分辨率特性的概念，已經廣泛進行了靈敏度研究。史皮策 (1998年) 描述了各種配置的靈敏度，並概述了數值計算的方法。

由互易定理可知格塞洛維茨 (1971年) 可以導出阻抗靈敏度的解析式 Z 關於電導率的變化 $\delta \sigma$

$$\delta Z = -\delta \sigma \iint_{\Omega_{\text{我}}} \nabla \psi_s \nabla \psi_{\text{右}} \frac{I}{\sigma_s \cdot \sigma_{\text{右}}} d^3, \quad (4.7)$$

在哪裡 $\Omega_{\text{我}}$ 是異常區域。 ψ_s 是源電極引起的電位， $\psi_{\text{右}}$ 是透過交換源電極和接收電極獲得的。相應的電流表示為 σ_s 和 $\sigma_{\text{右}}$ 。

勢梯度是從有限元素正向模擬中得知的，對於線性形狀函數來說，其在每個元素內是恆定的。在下面的公式中凱姆納

(2000年) 被調整，回到佐佐木 (1989年)

$$\frac{\partial \text{你}}{\partial \sigma^{(e)}} = -\frac{1}{\sigma^{(e)}} \sum_{\text{我}} \sum_j S \text{ 我} \text{ 你告},$$

其中靈敏度是透過對單元剛度矩陣中的勢和條目求和獲得的S_(e) 章節中介紹的2.2.1

然而，與電極位置相鄰的元件會出現問題。此節點上的無限電位必須替換為有限電位，以限制靈敏度值。還要注意，該公式透過分段線性函數來近似電位，這對於二次場網格來說是令人滿意的，但對於中等二次場網格上的總電位來說是不滿足的。

在迭代過程中，可以重新計算靈敏度矩陣。或者，可以應用使用秩一更新機制的擬牛頓方法（布羅伊登,1972年）。由於差異可以忽略不計，因此在以下範例中使用 Broyden 方法以節省計算時間。

4.4.3.反子問題的解

方程組 (4.5) 必須在每個迭代步驟中求解。與射線斷層掃描相比，矩陣S是稠密的。對於大規模問題，有時忽略小的絕對值來表示是有用的S作為稀疏矩陣。

為了避免左側矩陣的儲存和雅可比行列式的轉置，使用共軛梯度技術來求解方程式 (4.5) 大約。所提出的表示為 CGLSCD 的演算法是 CGLS 演算法的改編（出版社等人。,1992年）引入資料權重和模型約束（岡瑟,2004年）。對於解決方案

$$(\hat{S}_{\text{時間}} \hat{S} + \lambda L)x = \hat{S}_{\text{時間}} \bar{z} - \lambda L \delta x$$

它讀取初始化 (x_0 - 初步猜測)

$$\begin{aligned} z_0 &= \bar{z} - \hat{S}x_0 \\ p_0 &= r_0 = \hat{S}z - \lambda L \delta x \end{aligned}$$

4. 非結構化網格上的反演

並在每次迭代中計算 $k+1$

$$\begin{aligned} q_k &= \hat{S} p_k \\ \alpha_{k+1} &= \|q_k - \hat{S} p_k\|_2^2 / (\text{時間} \lambda p_k \text{脂蛋白}) \\ X_{k+1} &= X_k + \alpha_{k+1} p_k \\ z_{k+1} &= z_k - \alpha_{k+1} q_k \\ r_{k+1} &= \hat{S} z_{k+1} - \lambda L(X_{k+1} + \delta X) \\ \beta_{k+1} &= \|r_{k+1}\|_2^2 / \|r_k\|_2^2 \\ p_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k \end{aligned}$$

直到殘差向量 r_k 低於給定限制。每次出現時， \hat{S} 都會被替換為 DS ，向量乙初始化為 $D(d\text{-調頻}_k)$ ， $\delta X = \bar{m}_k - \bar{m}_0$ 和 $L = C\text{時間}C$ 。結果是

尋求模型更新 Δm_k 。請注意，所有標量和向量都可能在每次迭代中被覆蓋。

唯一的例外是保存 $\|r\|_2$ 前 r_{k+1} 被計算出來。透過預處理可以實現進一步的改進（哈伯，2005年）。

4.4.4. 正規化參數的選擇

正規化參數 λ 是資料擬合和模型粗糙度之間的權衡，因此必須進行相應選擇。小值導致具有良好數據擬合的高度粗糙模型，而大值對應於具有弱數據擬合的平滑模型（吉洪諾夫和阿爾謝寧，1977年）。存在多種方法來妥協資料擬合和模型約束（法誇森和奧爾登堡，2004年）。一種非常簡單但不總是穩定的方法稱為 L 曲線方法（漢森和奧利裡，1993年），看沃格爾（1996年）對於不穩定性）。透過繪製資料失配 Φ_d 相對於模型粗糙度 Φ_m 對於一系列 λ 建構一條曲線，該曲線通常具有 L 形外觀。數位 4.2 顯示了由本章第一個綜合範例產生的 L 曲線 4.5.1。 Φ 之間的合理權衡 d 和 m 發生在「角落」附近。例如，可以透過估計曲率來確定位置李和奧登堡（1999年）。

由於系統能夠更好地適應強正則化，因此求解方程式 (4.5) 開始使用相對較大的 λ 並依序減少固定因子，直到 L 曲線的曲率再次開始減少。該點表示最佳值 λ 。由於解決方案 Δm 對應於鄰近的 λ 產生相似的結果，一個值的結果 λ 用作起始向量 X_0 為下一個較小的值。這大大減少了 CGLSCD 演算法的迭代次數（弗洛默和馬斯，1999年）。為了建構全域 L 曲線，需要對所有值進行前向響應 λ 。為了避免這種情況，我們研究了線性逆問題的 L 曲線。

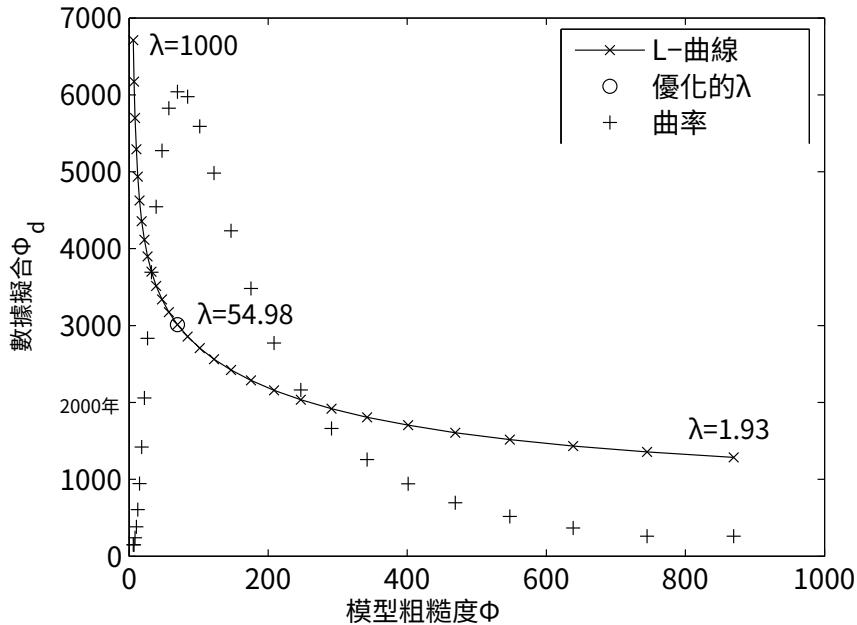


圖 4.2.：從綜合範例得出的 L 曲線（資料擬合模型粗糙度）

查柏4.5.1。可以透過搜尋曲率的最大值來確定最佳正則化強度。

請注意，最終差異原則（在誤差範圍內擬合數據）決定了正則化強度。然而，在非線性反演中，需要進行多次迭代，直到
 $\Phi_d = \Phi^{*d}$ 。另一方面，數據錯誤很少被準確地知道並且必須被估計。
 實際上，卡方失配值為 1 到 $5\chi^2 = \Phi_d/D$ 顯示可靠的結果，而不會過度擬合或欠擬合資料。

4.4.5。線搜尋

在每次迭代中步長參數 τ_k 由於非線性，必須有過衝。 e 確定為防止模型從 d 回應計算 整個最初，前向長度調頻 $k + \Delta k$ 。為了避免正向計算 f 步驟
 用於新舊模型響應之間 或許多值 τ_k 我,線性插值

$$\text{調頻}_{k+1} \approx F(\tau) = \text{調頻}_k + \tau [F_{k+1} - \text{調頻}_k],$$

這是一個較差的近似，但足以得到參數 τ_k 確定使得 n 適當的步長岡瑟（2004年）。 $\lambda\Phi_m$
 $\Phi_d(F(\tau)) +$ 已更新 $m_{k+1} = m_k + \tau_k \Delta m_k$ 並且每個迭代 (τ) 被最小化。然後，模型就出來
 步驟至少需要前向運行兩次。 了調頻 $k+1$ 是準確計算的。因此

4. 非結構化網格上的反演

4.4.6.三重網格反演方案

數位4.3顯示反演方案。經過以下步驟：

1. 讀取資料和地形，估計誤差
2. 對地形表面進行三角測量
3. 透過解析度估計生成參數網格
4. 透過延伸和全域細化生成二次場網格
5. 生成主場網格
6. 計算初級電位 $\sigma = 1$ 並插值到輔助網格節點
7. 確定幾何因素和視電阻率
8. 選擇起始模型與限制條件

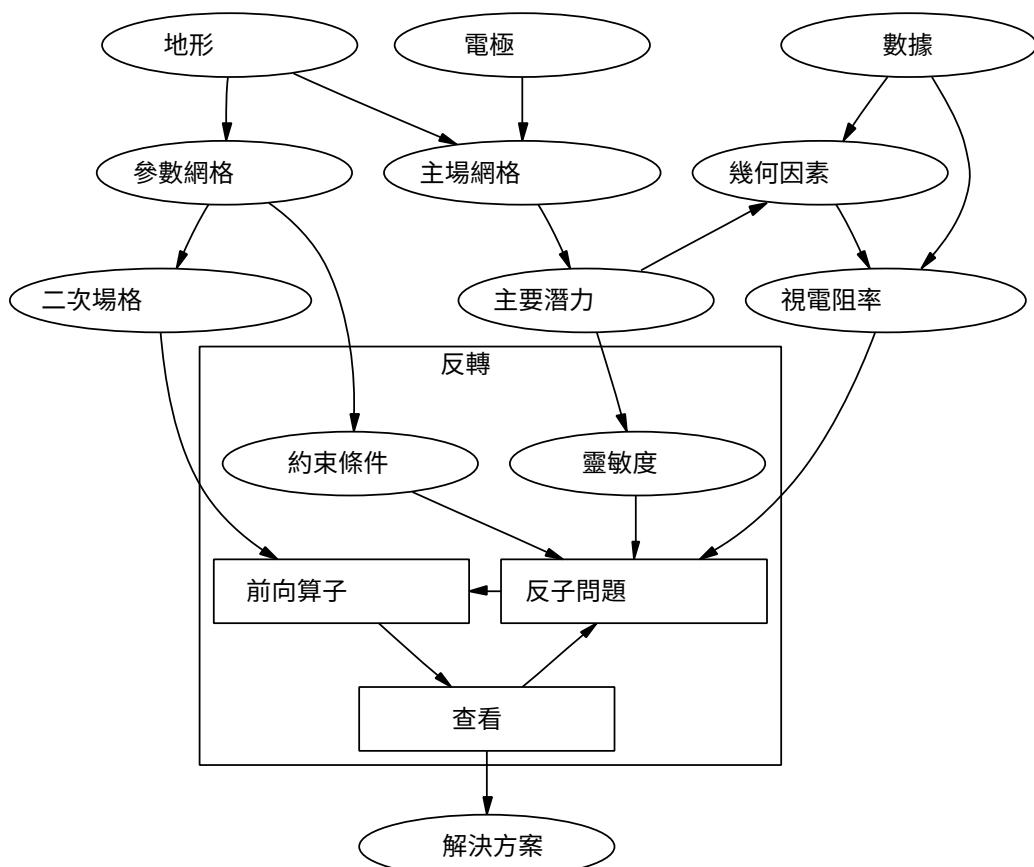


圖 4.3： 反演方案。地形用於建構網格。主要是幾何因素，因此是視電阻率。輔 潛力定義
助網格上的正向計算。此框表示 for 步驟的中心循環，直到達到停止標 進行了計算
準並獲得解決方案。
病房和逆病房

9. 從位勢近似雅可比矩陣
10. 透過解方程式 (4.5), 利用 L 曲線準則來確定 λ 第一步
11. 透過不精確線搜尋確定步長
12. 更新模型並計算前向響應
13. 重複最後四個步驟，直到滿足停止標準

如果 (a) 函數 Φ 停滯或 (b) 資料在誤差範圍內擬合，則停止標準適用，即 $\chi^2 = \Phi_d/N \approx 1$. 如果需要，正規化參數 λ 可以調整並繼續反轉。

4.5.一個綜合的例子

4.5.1. 綜合模型和數據

以下範例源自於墓葬的研究，說明了處理複雜幾何形狀的靈活性。地形是由橢球體與平面相交而形成的。它的足跡是一個 20 的橢圓 $\times 15$ m 範圍，土丘頂部距地面 5 m。如下圖所示，陡峭的地形，特別是坡腳處的地形，對直流測量影響很大，在反演過程中不可忽視。

數位 4.4 顯示形貌和電極佈局。9 個設定檔放置在 x 方向，13 個設定檔放置在 y 方向。所有輪廓上的電極距離均為 1 m，輪廓距離為 2 m。總共使用了 487 個電極。

土丘本身的電阻率應該是 $200\Omega\text{米}$ ，而地下 100Ω 假設為 m。此外，也考慮了土墩內部的空腔。其形狀為橢球體，半軸分別為 1.5、1.0 和 0.5 m in X, y 和 z 分別為方向，並由諾伊曼邊界條件描述。其中心位於土丘頂部以下 2.5 m 處。數位 4.5 顯示合成模型和用於計算合成資料的網格。電極的位置透過高度精細的清晰指示。根據章節 2.5.2 在具有 634 242 個節點的網格上使用二次形狀函數來計算合成資料。

所有設定檔均考慮偶極-偶極配置。為了抵消不斷增長的幾何因素和冗餘，偶極子長度隨著分離因子的增加而增加 n 。事實上，偶極子長度的計算公式為 $\Delta e = (n+3 \bmod 4)A$ ，在哪裡 A 是初始偶極子長度， $n=1,2,3,\dots$ ，共模擬了 3 439 個單數據。合成資料帶有噪聲

4. 非結構化網格上的反演

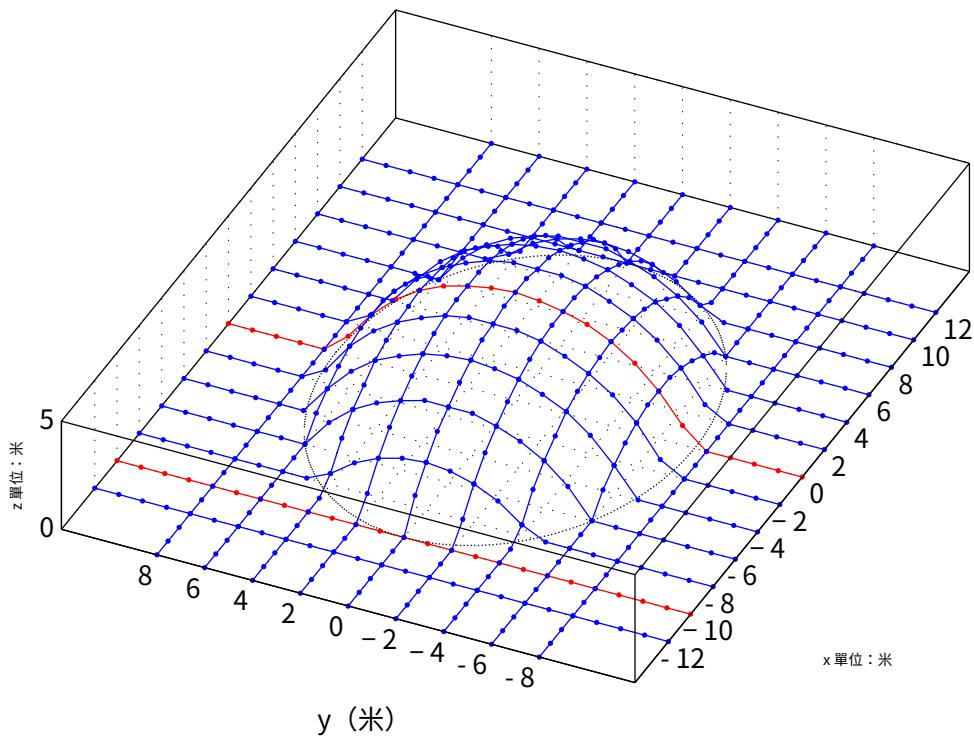


圖 4.4.：合成範例的形貌和電極佈局。兩個紅色設定檔將是
下面討論。

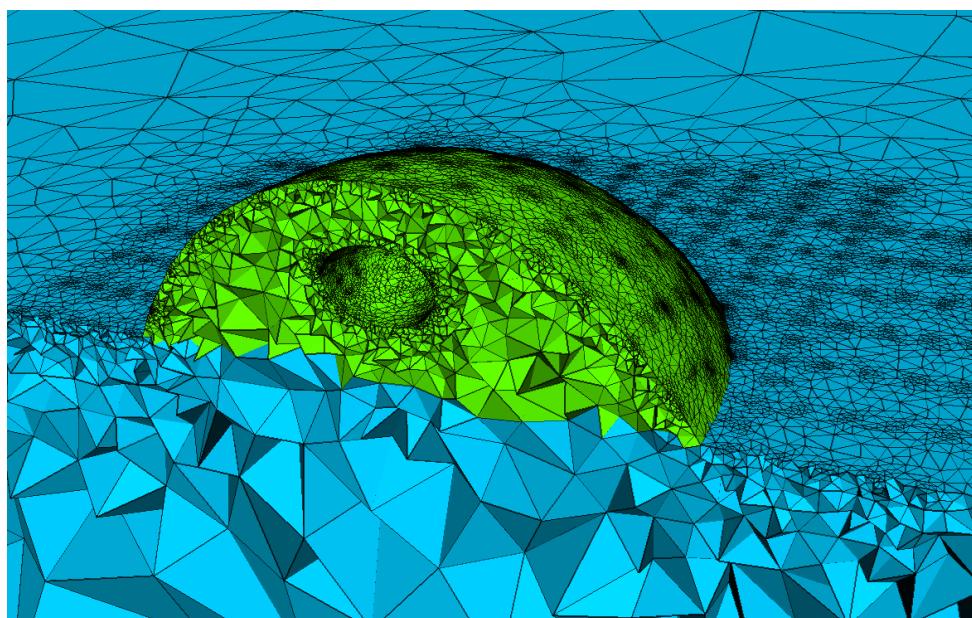


圖 4.5.：200 人墳墓的合成模型 Ω_m 在 100 的齊次半空間上 Ω 米。
土丘中央有一個橢圓形空腔。

具有高斯隨機值。根據方程式 (4.1) ，使用 3% 的標準差加上 100 的電壓相關噪聲 μ 對於噪音和加權，假設電流為 100 mA 時的 V。兩個設定檔位於 $X=0$ 米和 $X=-10$ m。

4.5.2. 幾何效果

地形對沿範例剖面的響應的影響如圖所示 4.6。請注意，這僅用於說明，因為透過數值計算幾何因素是已知的。計算視電阻率時使用了錯誤的平地幾何因子 ρ_A (數位 4.6a) 故意的。在土丘旁邊的剖面 (頂部) 和中央剖面 (底部) 中都可以看到強烈的異常現象，這主要是由地形引起的，正如可以立即看到的那樣。

為了消除幾何效應，真正的幾何因子是從一次位勢中導出的。影響非常強烈，導致視電阻率增加或減少 3 到 4 倍。與原始數據相比 (圖 1) 4.6a 可以看到幾乎相同的結構。因此，數據受幾何效應支配。

使用模擬的幾何因子，可以對資料進行轉換，從而消除幾何效應 (圖 1) 4.6c。其餘的異常可以清楚地與參數結構相關聯。位於中央輪廓的中央部分 (圖 1) 4.6c 底部 假剖面顯示了土丘的電阻率 ($200\Omega m$)，而剖面兩端的資料代表背景電阻率 $100\Omega m$ 。此外，透過中心部分孤立的高電阻率，可以在數據中清楚地觀察到高電阻空腔。

4.5.3. 反演結果

僅基於地形資訊使用自動網格生成。下面建立的網格與第一章中用於生成合成資料集的網格無關 4.5.1 以避免逆向犯罪 (維金, 2004 年)。參數網格包含 23 109 個待確定電阻率的參數單元。次級場網格獲得 112 040 個節點，初級場網格獲得 421 157 個節點，因此第一個可以透過 Cholesky 分解直接求解，而後者可以透過共軛梯度迭代求解。

數位 4.7 顯示參數網格和輔助場網格。主場網格類似於如圖所示 4.5 但缺少空腔，因此未顯示。

4. 非結構化網格上的反演

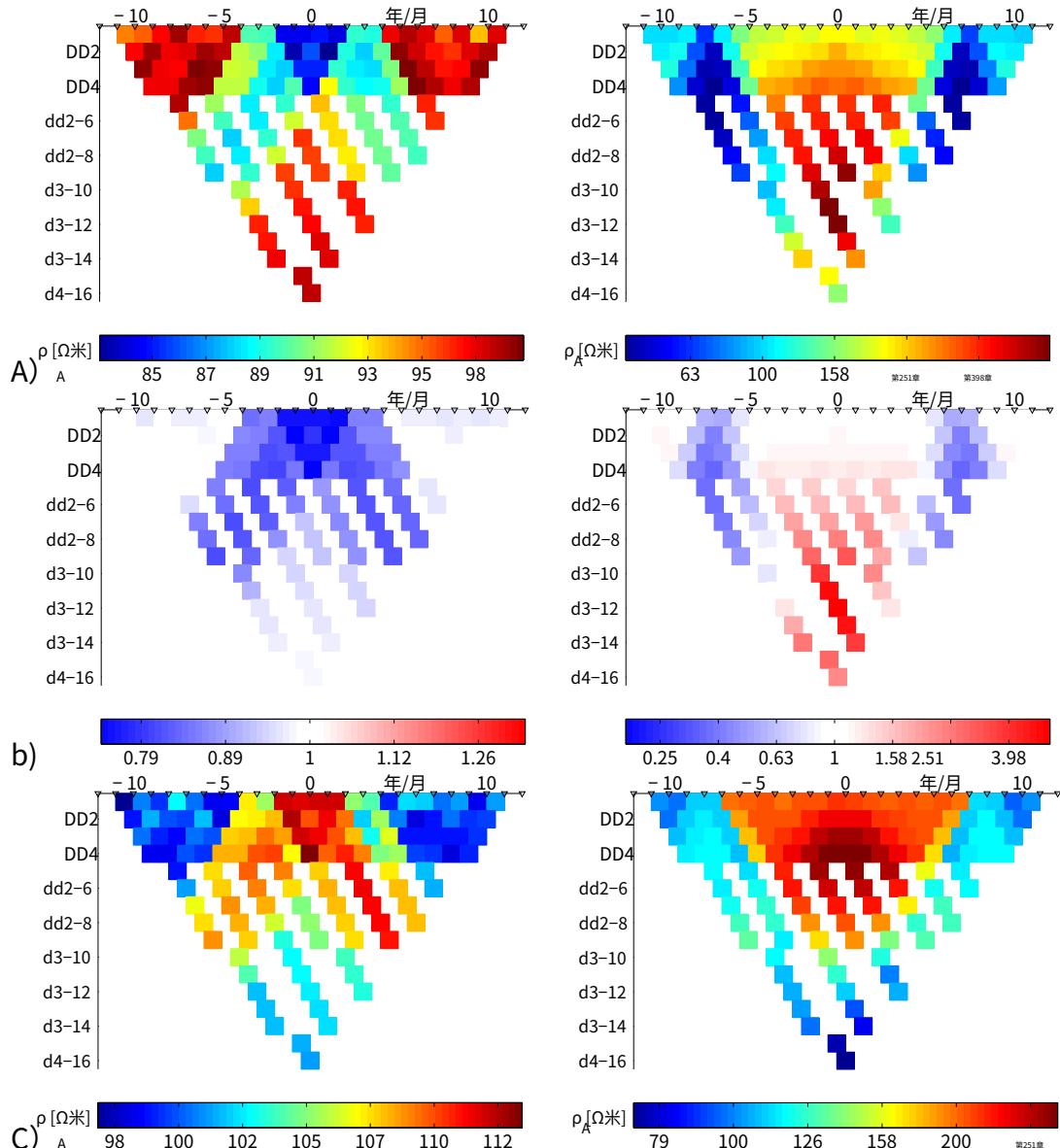


圖 4.6.：兩個範例輪廓的地形效果 $X=-10$ m (左) 和 $X=0$ 公尺 (右)

綜合模型如圖4.5： ρ_A 基於地平幾何因素 (A)，幾何學影響 (b)和 ρ_A 使用模擬幾何因素 (C)。

在 e v 在是.in 蒂編輯我作鈦錫 GM 哟艾蘭 A h 哟電阻率 200Ω米。這正規化 蒂廓阿爾特 a be cho na 碳粉圖本在個迭代中的 L 曲線準則化 (圖。4.2) 到 be $\lambda=55.$ 塔布萊 4.1s 何 WSt 每次迭代的反演事實。氣——平方失配 稱重 HHD 達 F NDTI 在阿爾薩達塔) 從 117 分 5 步下降到 1.1。線搜尋 oce re d 公開社是透過 特桑 esse 恩隸非線性。主要減少誤報 jus 實現的 到奈特 鼠離子。D 厄最大程度地利用全域正規化技術型號參數範圍 (往 3 和 4 的桌子 4.1) 在進一步的過程中不會增加反轉。最後，inv 呑錫安 塔gnates 處於預期水準 1，即資料擬合在 (已知) 噪音水平。

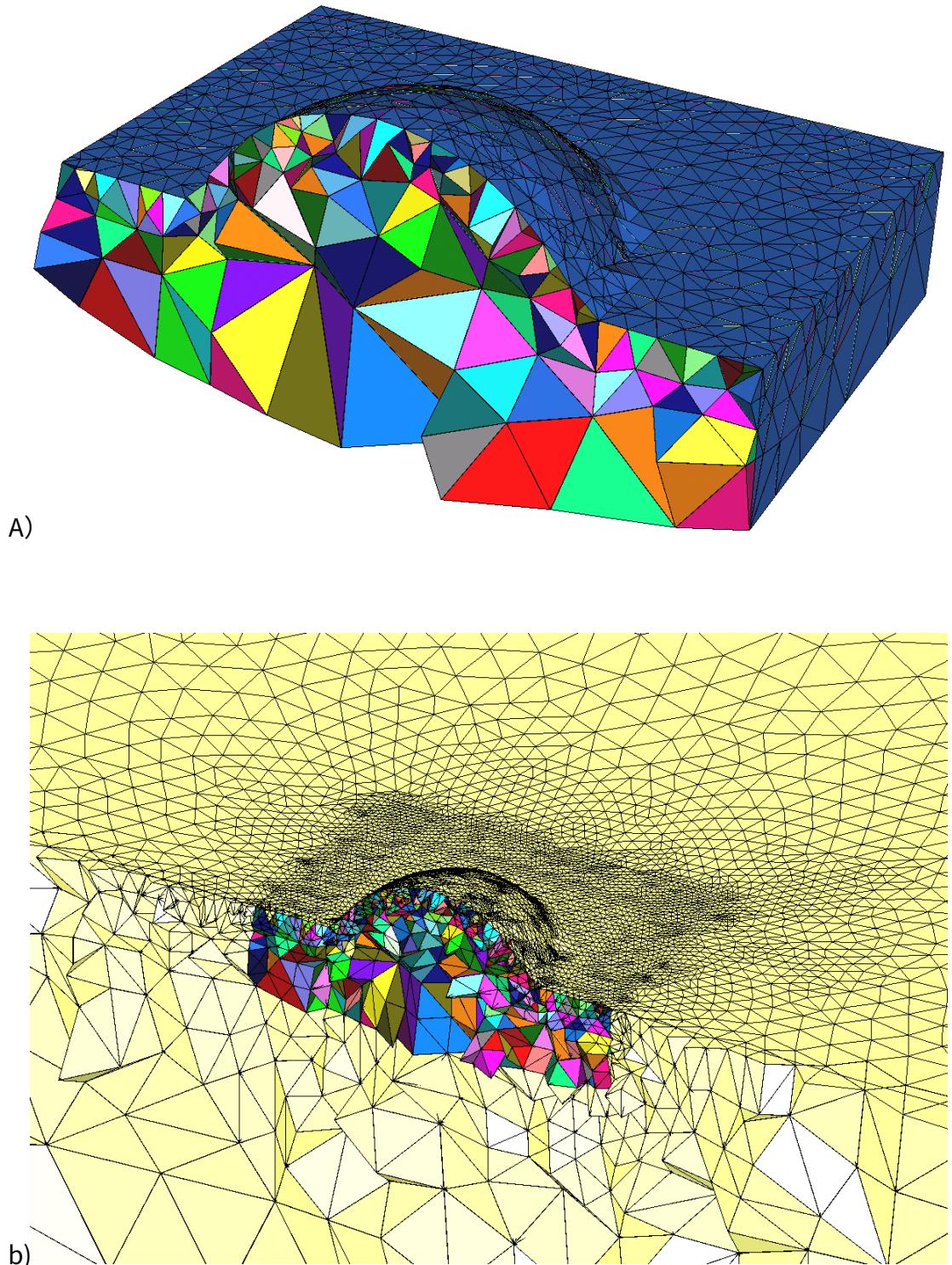


圖 4.7.：用於反演的網格。A) 參數網格嵌入到b)次要的
全域細化和延長的場網格。

數位4.8顯示反演結果。值為 300 的等值面 Ω_m 清楚地描繪了空腔的位置。此外，土丘和地下之間的電阻率對比也清晰可見。

4. 非結構化網格上的反演

表 4.1.: 線搜尋參數 τ , 模型範圍和卡方資料在迭代過程中擬合

迭代	τ	分鐘 (ρ)	最大限度 (ρ)	χ^2 不適應
0	-	110	110	117.0
1	0.93	77	第524章	3.1
2	0.90	73	508	2.0
3	0.75	77	513	1.5
4	0.36	77	516	1.3
5	0.05	77	514	1.1

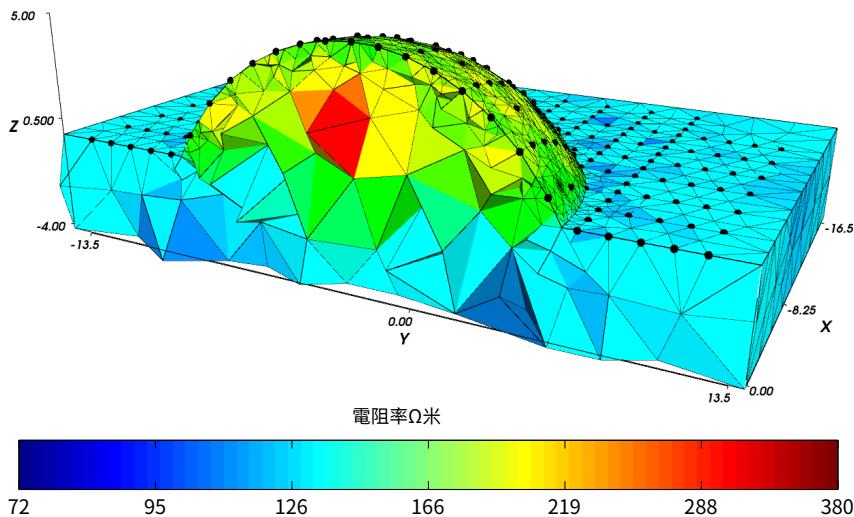


圖 4.8.: 合成模型資料的反演結果。等值面由以下值決定
300Ω米。

4.5.4. 與平坦表面的比較

問題是，是否可以在不結合地形的情況下解釋數據。因此，電極的位置投影到水平表面上 $z=0\text{m}$ (地面) 並使用與之前相同的方法，只是主要電位是透過分析計算的。由於幾何結構更簡單，參數單元的數量減少到 7 448 個。然而，反演過程變得不穩定，參數值超出了 1 到 100 000 的範圍 Ωm 未達到低於 20% 的資料擬合。因此，沒有顯示這些結果。

此後，基於模擬的幾何因素，使用平面參數化來反演視電阻率，因為它們已經包含了地形效應。因此，數據可以近似擬合 ($\chi^2=2.5$)。數位 4.9 顯示了相應反演結果的一部分。

它顯示了導電背景中電阻丘的主要特徵，並且還可以看到空腔。然而，後一種異常較弱並且覆蓋了更大的區域。此外，更強大的人工製品出現在地表。總而言之，雖然模擬的幾何因素

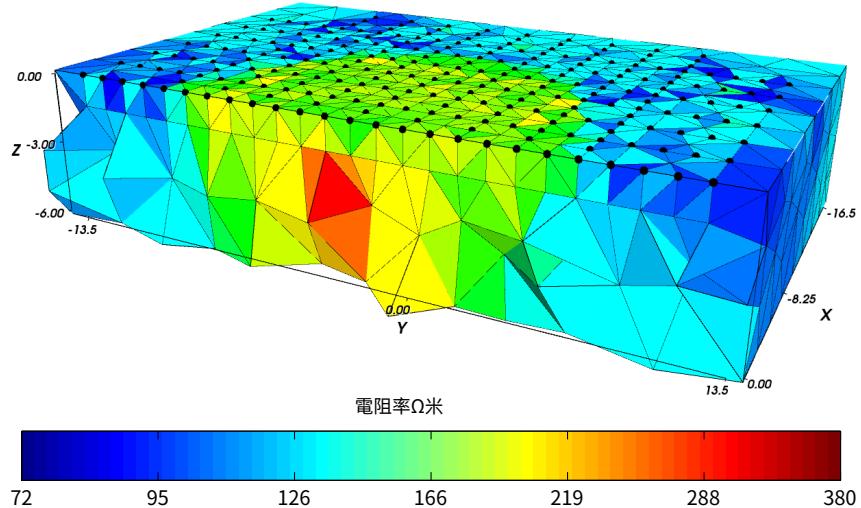


圖 4.9.：使用均勻參數化計算的視電阻率的反演結果。

考慮到簡單的反演方法，需要將地形納入參數化以獲得幾何可靠的模型。請注意，透過計算初級勢來確定幾何因子已經是運行時間的主要部分（見表4.2）。

假設地形足夠光滑，其影響可以忽略不計，通常採用分塊網格進行反演。為了將三重網格技術與面向區塊的離散化的結果進行比較，使用 d 建立等距網格 $X=dY=1\text{m}$ 。採用8層數量 $34\times 28\times 8$ 獲得 $8 = 7616$ 個參數，這與非結構化參數網格的大小相當。然而，對於後者，可以更準確地描述模型，因為物理解析度更好的表面上的單元更小。因此，即使對於平坦表面，非結構化網格似乎也更有效，特別是如果考慮前向網格的細化和延伸。

4.6.現場數據的應用

作為現場示例，該技術應用於對廢棄採礦場的調查，其中含有源自鋼鐵生產的爐渣材料¹。沉積已於 1995 年停止。直流電阻率測量由漢諾威聯邦地球科學和自然資源研究所進行。調查的目的是描繪硬質土的厚度、其作為密封劑的功能，並確定垃圾場的內部結構。

¹數據由聯邦地球科學研究所的 U. Noell、M. Furche 和 C. Grissemann 友情提供
和自然資源，漢諾威

4. 非結構化網格上的反演

垃圾場長約200 m，寬70 m，最大高度離地面14 m。數位4.10顯示了形貌和所使用的電極佈局。頂部輪廓的電極間距為1 m，而13個交叉輪廓的電極間距為2 m。輪廓距離為10 m，是電極間距的五倍，因此足以嘗試對垃圾場內部進行三維重建。

總結起來，Wenner陣列使用總共577個不同的電極位置收集了4 245個數據。數位4.11顯示了x=220m處剖面的原始資料(a)、地形效應(b)和透過模擬幾何因子獲得的視電阻率(c)。原始資料中的一些主要特徵可以透過幾何效應來識別，該幾何效應顯示在兩個方向上與平坦地球情況的偏差高達30%。例如，圖中偽剖面左下側的地形效應值較低4.11b在圖中的平坦地球視電阻率中顯示為高值4.11A。它們不會出現在模擬幾何因素的視電阻率中(見圖4.11C)。儘管地形效應不是很明顯，但它會導致可能的誤解。因此，地形包含在反演中。

參數網格包含數量為62 045個四面體。這遠遠超過了數據的數量，但需要充分描述地形。具有二次形函數的主網格獲得了422 980個節點。如此大的數字需要ICCG方法的方程組的近似解克肖(1978年)被選擇。在2.4 GHz PC上，每個電極的主場計算大約需要18秒，因此包括預處理器在內的整個計算在3小時18分鐘內完成。

相較之下，二級網格僅包含111 096個節點。因此可以直接求解所得方程組。多額Cholesky分解大約需要21秒。

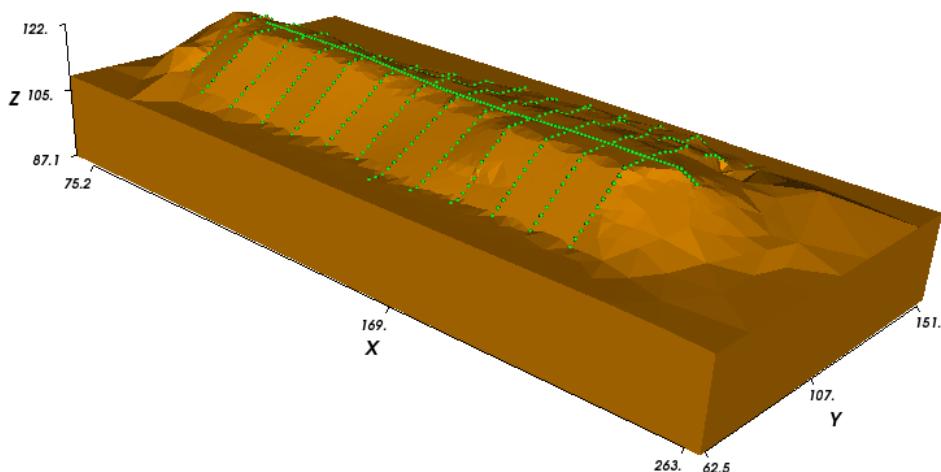


圖 4.10.：採礦場的地形和電極佈局。電極位於13橫截面和頂部的一個。

單一來源的一次反向替換在不到一秒的時間內完成，因此整個正向建模過程大約需要 8 分鐘。

對於根據方程式的誤差加權 (4.1) $\rho=5\%$ ，電壓不確定度為 $\delta U=50\mu V$ 。透過應用 L 曲線準則，正則化強度為 $\lambda=22$ 。可以獲得 5 個。經過 7 個反演步驟後，卡方失配從 1433 減少到 4.7，對應於資料和模型反應之間的相對均方根 7%。桌子 4.2 總結各個反轉部分所需的時間。14 次前向計算的數量是由於每次迭代中的線搜尋過程不精確造成的。請注意，對於任何進一步的運行，例如，改變正則化類型或強度，只有表中的最後兩個任務 4.2 必須進行。

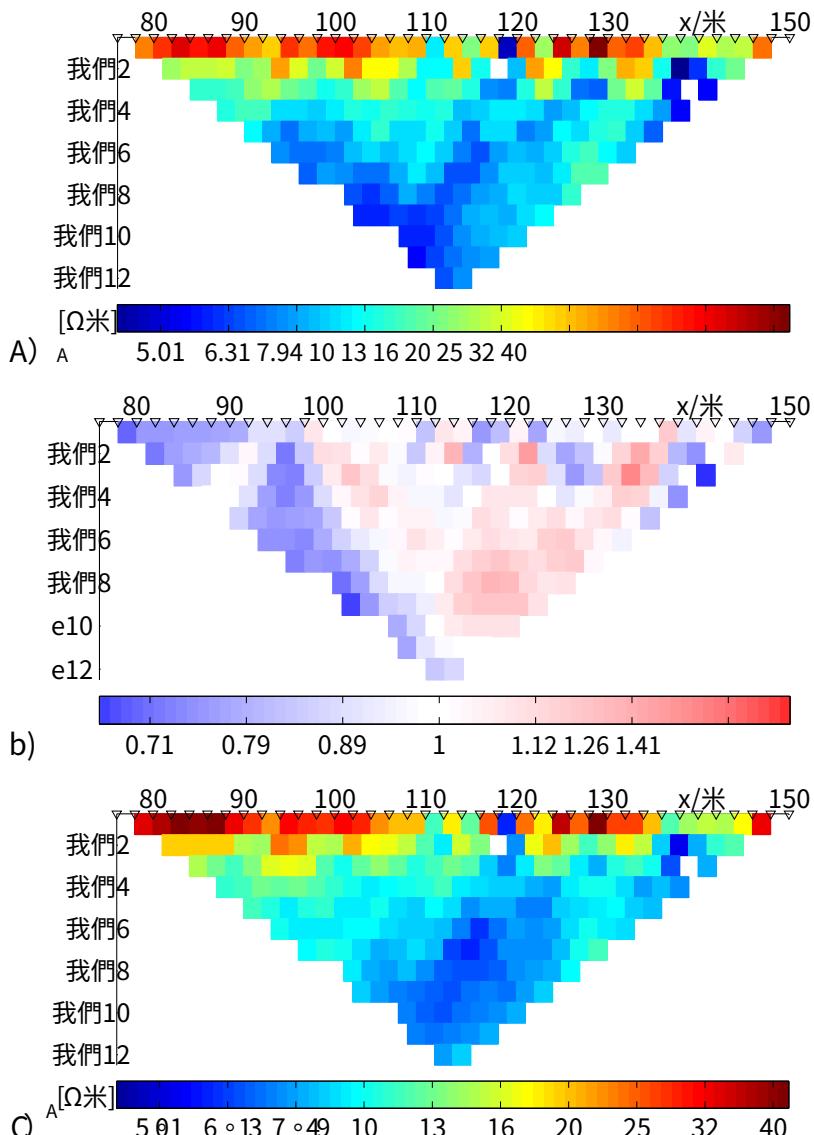


Figure 4.11. SA 地圖顯示了在平坦的地球視電阻率數據 (a) 平坦的地球視電阻率數據，b) 幾何的
EFIT And C 並考慮到交叉剖面的地圖
深度 = 220 米。

4. 非結構化網格上的反演

表 4.2：廢棄採礦場現場資料反演所需的運行時間

程式	運行	乘以	總時間
網格生成	18分鐘	1	18分鐘
主要潛力	3小時18分鐘	1	3小時18分鐘
靈敏度	1小時42分鐘	1	1小時42分鐘
反子問題	13分鐘	7	1小時31分鐘
正向計算	8分鐘	14	1小時52分鐘
全部的			8小時41分鐘

數位4.12顯示反演結果。兩個等值面描繪了導電轉儲材料 ($<6\Omega\text{m}$) 和一個電阻翻斗蓋 ($>20\Omega\text{m}$)，可能是由於硬質層發育所致。在硬質層缺失或較薄的區域，低電阻率體的凸起很明顯。沒有顯露出垃圾場的明顯內部結構，就電阻率而言，現階段將其解釋為均質垃圾場體的暗示。

大量資料和參數單元超出了標準 PC 儲存靈敏度矩陣值的能力。由於許多值預計非常小，例如，距離所使用的四個電極較遠的小單元，因此可以忽略低於特定閾值的絕對值以節省記憶體。最後，S 儲存為稀疏矩陣。請注意，12 個位元組用於索引和每個非零元素的值，而完整矩陣元素則使用 8 個位元組。

閾值從 10 開始按對數遞減 -2 減少到 10^{-6} 。為了避免前向計算的影響，計算第一次迭代模型之間的差異（沒有

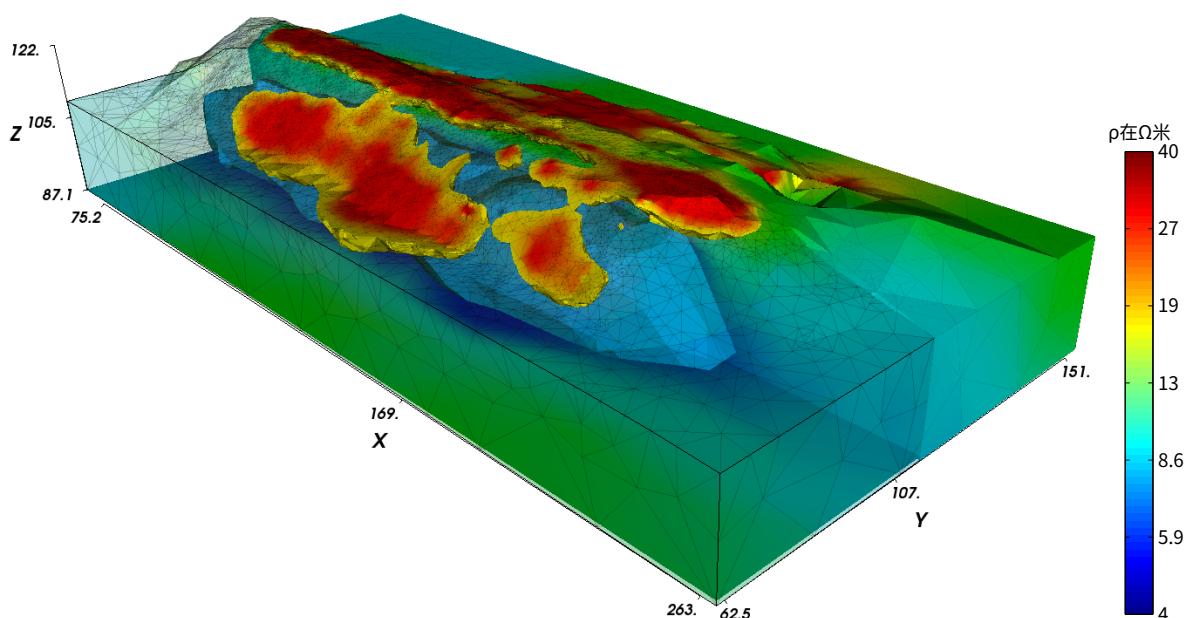


圖 4.12.：廢棄礦場的反演結果。等值面為 $20\Omega\text{m}$ 用於 delin-
吃硬地層。傾卸體的電阻率低於 $6\Omega\text{米}$ 。

線搜尋），帶或不帶靈敏度稀疏。桌子4.3將非零值和模型差異顯示為相對均方根。對於閾值 $\text{tol} = 10^{-5}$ 觀察到非常好的一致性或以下。因此，只需 10% 到 20% 的記憶體需求即可獲得準確的結果，這是透過比較各種資料集的最終模型來支援的。

表 4.3.：稀疏靈敏度矩陣對不同情況的反子問題結果的影響

閾值。非零元素的數量也以完整矩陣和所需記憶體的分數形式給出。模型均方根是有和沒有稀疏的第一次迭代模型的相對均方根。

臨界點	非零	分數	記憶體	模型有效值
10-2	81809	0.02%	<1MB	35.7%
10-3	1 661 792	0.5%	19MB	13.7%
10-4	9 104 548	2.8%	104MB	4.0%
10-5	28 134 833	8.5%	322MB	1.0%
10-6	61 528 436	18.7%	704MB	0.1%
0	329 649 720	100%	2.5GB	0

4.7.討論和結論

提出了一種反演策略，用於根據任意地形的直流測量重建電阻率。它是對現有技術的增強，並將正則化高斯-牛頓方法的快速收斂與精確的有限元素正向計算相結合。使用非結構化四面體網格來高精度地描述測量區域的地形。特別關注使用二次勢方法的有效正向模擬。因此，前向過程分為兩部分：初級勢的耗時計算和中等次級場網格的快速計算。

高斯-牛頓方法與不精確線搜尋一起使用來解決逆問題。因此，經過少量迭代後就可以保證得到解決方案。為了穩定解，應用一階平滑約束。然而，其他正則化方法已經被實現，例如二階平滑約束。先驗資訊的介紹以及不同模型區域的權重機制將在第 1 章中介紹。⁵透過主動約束平衡可以獲得進一步的增強（易等人。,2003年）。一種聚焦反轉（波特尼亞金和日丹諾夫,1999年）也可以被引入以獲得具有清晰邊界的模型。

此策略適用於噪音合成數據以及現場數據。透過奇點去除技術和快速直接方程式的使用，運行時間大大減少

4. 非結構化網格上的反演

求解器。此外，使用非結構化網格提供了依賴解析度的參數化，最終節省了計算時間和記憶體。因此，此方法對於地形陡峭或幾何對比較大的調查特別有趣。此外，此方法非常適合複雜的模型幾何形狀，例如水下勘測、模型槽實驗或圓柱形幾何形狀的測量。

在電導率對比強烈的情況下，特別是在電極附近，正向計算中會出現誤差，只能透過進一步細化來消除誤差。為了實現高速和低記憶體消耗，應該自適應地進行細化，以便僅對弱近似的區域進行局部細化。改進前向計算的另一種可能性是用於多網格求解器或預處理器的網格層次結構。由於在所提出的技術中需要儲存雅可比矩陣，因此標準PC的儲存容量可能成為許多大規模問題的限制因素。因此，尋求避免雅可比矩陣的明確儲存的方法。一種解決方案可能是以下技術張等人。[\(1995年\)](#) 或非線性共軛梯度 (NLCG) 方法 ([埃利斯和奧爾登堡,1994年](#))。由於 NLCG 的收斂速度較慢，需要更多的迭代才能找到目標函數的最小值。然而，由於一旦計算出主勢，正向計算就非常快，因此該技術對於大規模問題特別有希望。其他節省記憶體的技術是擬牛頓方法，如哈伯 [\(2005年\)](#) 其中雅可比行列式由每個由兩個向量儲存的二階更新矩陣總和來近似。因此，此方法以梯度法的緩慢收斂開始，以牛頓型方法的二次收斂結束。

此方法可以透過使用複數電導率結合誘發極化效應來進一步發展凱姆納 [\(2000年\)](#)。由於虛部通常很小，所以初級勢可能保持實數，只需要獲得複數次級勢。此外，使用電孔內、孔到表面和跨孔測量可以限製表面資料的模糊性。最後，評估技術如阿朗博和紐曼 [\(2000年\)](#) 或者弗里德爾 [\(2003年\)](#) 可能有助於發現模型的可靠性。

5.先進的電阻率斷層掃描

抽象的

ERT 是一種廣泛使用的技術，但由於勢場問題的模糊性而存在局限性。因此，需要額外的資訊或假設。到目前為止，平滑度約束的方案缺乏分辨率，並且太不靈活而無法包含資訊。

提出了一種基於非結構化網格的非常靈活的正則化方案，能夠將結構和參數資訊包含到反演中。關於模型結構的信息，例如從其他地球物理技術（例如反射地震或探地雷達）已知的已知材料界面，被合併為允許的尖銳電阻率對比。另外，全域模型平滑度可以單獨加權以允許各向異性約束，例如，偏好水平結構。可以透過對數變換單獨控制參數行為，以允許電阻率下限和上限。模型加權函數可以定義最終電阻率模型與給定起始值或參考值的允許偏差。

作為隨後的進一步發展，提出了區域概念，其中參數域被細分為岩性或地質單元，稱為區域。可以在這些區域上單獨控制反演行為和所有正規化參數。另外，一個區域可以被視為單一參數，這可以減少反演的未知參數量。

來自工程和水文學的幾個例子表明，地震線和區域等界面的定義（例如，包含鑽孔資訊）可以顯著改善 ERT 影像。另一個例子顯示如何使用區域概念有效地處理具有有限維數反問題的複雜三維問題。最後，該概念應用於反演非常稀疏的資料集，該資料集通常無法透過經典反演策略來解釋。

5.先進的電阻率斷層掃描

5.1.介紹

電阻率層析成像 (ERT) 是一種非常流行的地球物理技術，因為電阻率與岩性和水文參數相關，並且通常顯示出足夠大的對比度。1990年代多電極設備的快速發展導致ERT的廣泛傳播，並使其成為解決工程問題的快速標準方法（例如，克諾德爾等。, 2007年）和水文地
球物理問題（例如，賓利和凱姆納,2005年）。應用範圍從 cm-dm 尺度到土壤探針（例如，賓利等。,1996年）在具有數十米調查深度的典型近地表目標上（例如，洛克等人。, 2003年）到大規模調查（例如，弗萊希格等人。,2010年）。

隨著所得的數據量的增加，對反演軟體的需求也在增加。有許多關於基於有限差分 (FD) 正演計算和離散化的二維剖面反演的論文（例如，特里普等人。,1984年;洛克和巴克, 1996a）。作為第一個資料集開發的可比較的基於 FD 的 3D 反演技術可用（公園和範, 1991年;洛克和巴克,1996b）。有限元素 (FE) 計算（科貢,1971年;周和格林哈爾,2001年）後來被引入並用於 2D (凱姆納,2000年) 和 3D (佐佐木, 1994年) 反轉。所有這些的共同點是地下被大量模型單元離散化。然而，到目前為止，即使使用有限元素前向計算，它們也大多是規則排列的（例如，凱姆納,2000年;佐佐木,1994年）。或者，不規則分佈的三角形 (2D) 或四面體 (3D) 允許更靈活地結合地形（岡瑟等。,2006年）。大多數反演算法使用平滑約束（康斯特布爾等。,1987年;布雷克等人。,1995年）以克服逆問題的歧義。然而，儘管結果非常穩定，但結果的平滑性可能會導致解釋不準確。此外，由於正則化技術，可能會出現偽影（例如，克萊門特等人。,2009年）。

有多種方法可以克服過度平滑的模型。易等人。（2003年）使用主動約束平衡來增強解析度。基於 L1 最小化的模型端穩健性，即所謂的塊狀最小化方案（法誇森和奧爾登堡,1998 年）可以產生具有強調梯度的模型（洛克等人。,2003年）。波特尼亞金和日丹諾夫（1999年）和 布拉謝克等。（2008年）使用聚焦技術獲得清晰的介面。克萊門特等人。（2009年）在結合結構約束時觀察到更可靠的延時結果 勒利埃夫爾和奧登堡（2009年）研究將結構方向資訊納入反演的選項。在跨鑽孔實驗中，多奇等人。（2010年）使用完全解耦的模型部件來消除鑽孔鑽井液和地下之間的平滑，從而顯著改善圖像。在上述所有情況下，先驗資訊都被添加到逆問題中，從而提高了解析度（波斯等人。,1987年）。

先驗資訊可以是關於模型的結構特徵，例如透過反射地震或探地雷達（GPR）資料或來自鑽孔描述。然而，它也可以表示電阻率數據，例如來自鑽孔測井或來自其他測量的電阻率數據。就算是真的

單位的電阻率未知，其範圍可以根據經驗或岩石物理考慮因素進行限制。此附加約束可以透過附加正規化項或變換後的模型函數來實現。例如，通常使用對數來確保正電阻率。可以透過組合不同的日誌函數來進一步限制（岡瑟,2004年）。然而，這些知識可能只與模型的特定部分相關。為了合併所有現有訊息，需要一個非常具體的正則化方案。

基於結構介面創建的區域，提出了一種非常靈活的正則化方法。非結構化網格（休楚克, 2002年; 砂, 2004年）用於合併任意線（2D）或面（3D）。地下可以很容易地細分為可以非常靈活地控制其行為的區域。具有真實數據的幾個應用程式演示瞭如何透過先驗資訊來改善反演結果。將地震反射引入基岩偵測中可以得到一個非常簡單的模型。對淺湖底部的二維測量顯示如何專門處理區域（水和沈積物）。鑽孔電阻率資料的應用展示了結構和電阻率資訊如何顯著改善電阻率影像的解釋。垂直電極的基本1D逆問題的3D本質是透過區域概念解決的。最後，區域概念有助於為稀疏資料集找到一個非常粗略的電阻率模型，該模型表示高度欠定的反問題。

5.2.方法

5.2.1. 廣義最小化方法

所提出的反演方案代表了第三章中描述的三重網格ERT反演的擴展⁴。使用非常常見的全域最小化方案（門克,1989年）：

$$\|D(d\text{-調頻})\|_2^2 + \lambda \|H\| \rightarrow \text{分分鐘鐘} \quad (5.1)$$

在哪裡 d 是向量 D 個人資料 d , H 是尋找的模型向量中號模型參數 H （ λ 和調頻）使用本章所述的前向算子計算3D情況的前向回應²和³。對於所呈現的2D情況，模型響應根據以下公式計算凱姆納（2000年）並透過使用混合非結構化來適應三重網格技術

三角形/四邊形網格。假設不相關的數據方差 δd
後者由資料加權矩陣加權 $D = \text{診斷}(1/\delta d)$ 。

非常常見的正則化方案是平滑約束（康斯特布爾等。,1987年）在哪裡 C 是導數矩陣且小時 $=0$ 。圖5.1顯示了包含三角形和矩形的簡約二維網格。它由六個模型單元組成，它們之間有六個內部邊界。非結構化網格可以靈活地用於描述地表或地下地形

5.先進的電阻率斷層掃描

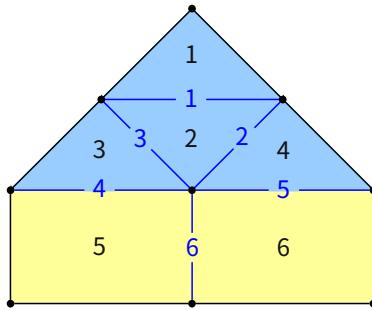


圖 5.1.：由四個三角形和兩個矩形組成的簡約模型。

對於邊界延伸更有效。此外，可以根據解析度屬性控制單元尺寸，因此已經實現了內在的正則化。在某些情況下，結構化網格可能是有利的，例如，有利於遵循水平分層。然而，也可以使用結構化和非結構化網格的組合。

圖中簡約網格範例的對應導數矩陣5.1內容如下：

$$C = C_1 = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

每個邊界有一條線，每個模型單元有一列。

另一個常見的方案是使用最小長度，即與參考模型的偏差 Δr 被最小化。在這種情況下， $C = C_0$ 是單位矩陣且高 = Δr 。在製程監控等情況下，與參考模型的差異可能會受到平滑度的限制。模型的不同部分可以透過垂直附加它們來具有不同的約束 C_n 矩陣和 H 向量。

為了單獨控制邊界和單元，透過乘以基本約束矩陣來擴展此方案 C_1 有兩個對角權重矩陣（岡瑟和呂克，2009年）：

$$C = \text{診斷} (w_{\text{我}}) C_1 \text{診斷} (w_{\text{你}}) \text{為我} = 1 \dots \text{小號} \text{，} \quad \text{和} \quad j = 1 \dots M \text{。} \quad (5.3)$$

型號重量 $w_{\text{米}} = \text{診斷} (w_{\text{米}})$ 對所有人都有重量中號模型細胞。因此，平滑度或與參考模型的差異可以單獨控制。較高的值將強制執行局部較平滑（或偏差較小）的模型，而較低的值則允許對比度較高（偏差較大）的模型。

另一方面，結構重量 $w_s = \text{診斷} (w_s)$ 持有重量 S 單獨的結構約束，即平滑約束情況下的模型邊界，否則為 1。局部修改的結構權重可以代表模型的期望，有多種想法：

- 各向異性約束，與垂直邊界相比，將較低的權重與水平邊界相關聯。垂直重量 w_z 對於邊界的定義是 a_z/a_x 在某種意義上康斯特布爾等。（1987年）。對於每個具有法向量的邊界 $n = (n_x, n_y, n_z)$ 結構重量可以由其垂直分量的線性函數來決定 n_z ：

$$w_s = 1 + (w_z - 1) / |n_z| \quad (5.4)$$

對於圖中的網格 5.1 和 $w_z = 0.1$ 的值 $w_s = [0.1, 1.0, 27.0, 27.0, 1.0, 1.1, 0]$ 可以計算。

- 岩性單元之間已知的鮮明對比可以透過鑽孔、地震或探地雷達測量得知。介面我，由內部細胞邊界組成，是在-
包含在網格中並且 $w_s = 0$ ，或一個小數量，被假設為所有 ε 。
- 可以使用穩健的加權方案迭代地強制未知位置處的尖銳界面（法誇森和奧爾登堡，1998年）使用 $w_s = \text{IRLS}(\text{公分})$ 與 $L_1/\text{公升}$
映射函數

$$\text{IRLS } (r_{\text{我}}) = \frac{|r_{\text{我}}/\sum r_{\text{我}}|}{r_{\text{我}}/\sum r_{\text{我}}} = \frac{\sum C_{\text{我}}}{C_{\text{我}}/\sum C_{\text{我}}}, \quad (5.5)$$

這樣大梯度獲得低權重，反之亦然。

請注意，從左邊開始乘法， w_s 只是放大了平滑約束的強度。然而，不同模型權重之間的從右相乘會導致不對稱的平滑度，並會強制模型梯度。所以， w_s 僅用於模型的單獨部分（區域）或用於最小長度約束。

5.2.2. 轉換函數

在大多數 ERT 反演中，電阻率的對數 ρ 是顛倒的。這表示有關有效範圍的先驗信息，例如禁止負電阻率，並且通常得到統計分佈或解釋方案的支持。的下邊界不是零，而是 $\rho_{\text{我}}$ 可以透過使用 $\log(\rho - \rho_{\text{我}})$ 。以同樣的方式，上邊界 $\rho_{\text{你}}$ 可以定義甚至可以與 $\rho_{\text{我}}$ 使用模型變換

$$\rho_{\text{你}} = \text{紀錄}(\rho_{\text{你}} - \rho_{\text{我}}) - \text{紀錄}(\rho_{\text{你}} - \rho_{\text{我}}), \text{為了 } \text{我}=1 \dots \text{ 中號} \quad (5.6)$$

5.先進的電阻率斷層掃描

與個體電阻率 ρ_i 對於模型 \mathbf{m}_i 。請注意，模型參數的變換會影響靈敏度或雅可比矩陣的元素，該矩陣必須除以變換函數的導數。

高斯-牛頓最小化方案應用於方程式 (5.1) 求解反子問題

$$(S \text{時間} D \text{時間} DS + \lambda C \text{時間} C) \Delta \mathbf{m}_{k+1} = S \text{時間} D \text{時間} D(d\text{-調頻}_k) + \lambda C \text{時間} (\text{公分} k-H) \quad (5.7)$$

對於每次迭代 k 用於模型更新 $\Delta \mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$ 。

逆子問題透過 CGLSCD 求解器的修改版本來求解（請參閱第 17 章）。4.4.3。雅可比行列式都不是 S 也不是約束矩陣 C 是明確形成的。矩陣的乘法 A 由左向量和右向量擴展我和 r 乘法使得

$$[\text{診斷} (l) A \text{診斷} (r)] \cdot x = [A \cdot (X^r)] * w, \quad (5.8)$$

在哪裡 $*$ 表示逐元素乘法且 \cdot 矩陣向量乘法。這適用於雅可比矩陣和約束矩陣。由於向量-向量乘法的階數較低，因此求解器的效能不會顯著降低。

5.2.3.區域概念

由於對於大規模問題，由於實際原因無法有效控制單一單元的屬性，因此應用了所謂的區域概念。區域是模型離散化的子網格，透過合併固定的分離界面線來創建/面進入網格生成過程。或者，可以透過對先前產生的網格的網格單元進行聚類來定義區域。區域具有以下（常數）屬性作為反演控制參數：

- 起始（可能還有參考）模型 \mathbf{m}_0 和模型權重 w_m
- 電阻率下限和上限 ρ_{low} 和 ρ_{high}
- 垂直重量 w_z
- 約束類型（平滑度或最小長度）
- 個體模型改造

另外，一個區域可以被定義為單一區域，即，透過對雅可比元素求和，該區域內的單元被視為一個參數。單一區域的電阻率可以相對於參考進行約束，也可以不進行約束。另一種特殊類型是背景區域，其

細胞被排除在反演之外，但用於正向計算。背景區域對應於第二章中所述的二次場網格的延長部分4。

除了各個區域內的正則化項之外，可以輕鬆地將所謂的區域間約束附加到約束，即區域之間的單元邊界的平滑項。對於具有不同模型控制的區域之間的平滑約束 ± 1 等式中的值(5.2)變為 $1/w$ 米以防止梯度不對稱。例如圖中的三角形和矩形5.1被視為兩個獨立的區域。然後是第4行和第5行C由方程式(5.2)消失，除非定義了區域間約束。加上垂直配重 $w_z=0.1$ 、大模型控制 $w_m=$ 常數。 $=5$ 在四邊形區域中，所得約束矩陣為

$$C = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 1 & + & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 & 0 & 27 & & 0 & + & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 & 0 & 27 & + & 0 & 0 & 27 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & - & 5 & + & 5 \end{bmatrix}$$

如果三角形區域(a)中存在最小長度約束，或將其用作具有區域間約束的單一區域(b)C更改為

$$C_{(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad C_{(B)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{分別。}$$

吉米勒我軟體庫提供了一個獨立於方法的區域管理器，用於組裝矩陣C，各種變換(t_m, t_d)和權重向量(w_m, w_s)控制逆求解器並且是逆子問題所需要的。前向計算可以在參數域的層次導數上完成，如章節所述4或透過使用參數分佈的保形映射在完全獨立的網格上。

5.3.例子

5.3.1.納入地震的結構約束

通常有關於地下粗糙結構的想法。此資訊可能源自反射地震或分段連續線形式的探地雷達測量。這些線可以解釋為代表高速的材料介面/密度

5.先進的電阻率斷層掃描

或介電常數/電導率對比。可以預期，在這種材料界面處會出現高電阻率對比。這種界面也可以從鑽孔岩性或測井中得出，其中電阻率預計至少在鑽孔附近跳躍。

下面的例子¹取自基岩探測，這是挖掘活動之前或穩定性調查中淺層地球物理技術的典型任務。ERT 資料包含使用 Wenner- 測量的 392 個點 a 排列 50 個電極，間距 10 m。數據雜訊約為 2%。除了地電測量之外，還使用 10 m 的地震檢波器間距和 50 m 間隔的 8 個砲點採集了地震折射資料。折射是基岩檢測的標準工具，但是，在異質覆蓋層的情況下，需要多次拍攝才能進行斷層掃描。幸運的是，在這種情況下，很容易透過具有 20 至 50 m 深度之間不同介面的兩層模型來擬合資料。

數位 5.2a 顯示了沒有附加資訊的電阻率反演結果。基岩清楚地顯示出高電阻，但是，僅透過電阻率無法非常清楚地區分正確的深度。

¹資料由 Thomas Schicht (K-UTec Sondershausen) 友情提供

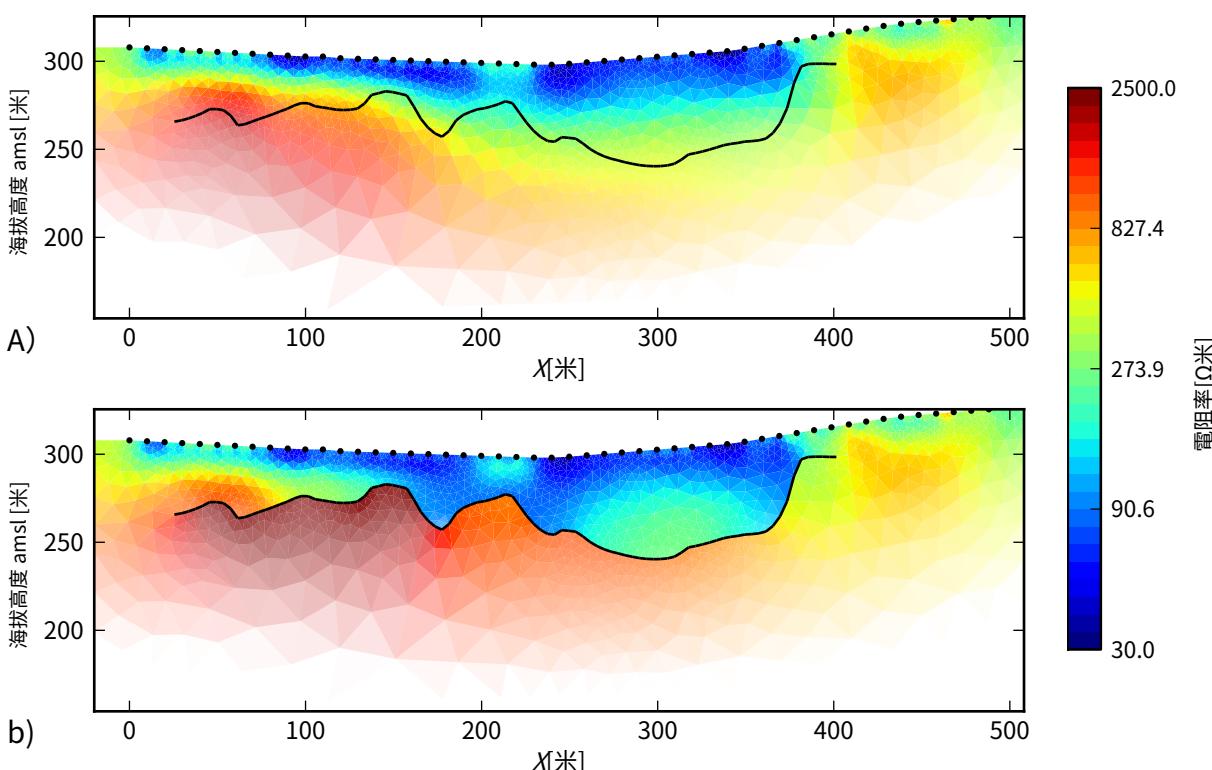


圖 5.2.: 沒有 (a) 與 (b) 折射鏡 (黑林
所用顏色的不透明度對應於雅可比矩陣深度的絕對條目的明暗，即行-
智總和的覆蓋範圍。點表示電極位置。
e) 作為已知邊界。e) 測量數
隨著增加而減少-

現在將地震界面作為結構資訊包含在內，以獲得更可靠的電阻率模型。多邊形作為約束添加到分段線性複形 (PLC)，即網格生成器的輸入三角形 (休楚克,2002年)。結果，完整的多邊形由每兩個三角形之間的已知邊組成。由於標記已合併到

邊的輸入，可以很容易地識別它們及其對應的結構權重
 w_e 可以設定為零，以便允許電阻率對比（但不強制）。

數位5.2b 顯示了所得的電阻率模型。最主要的變化與地震折射（黑線）一致。它顯示從大約 100 突然跳躍到幾千個 Ωm 位於介面的主要部分。然而，在左側，沉積物似乎分為兩層，可能是淤泥和沙子。相同沉積物之間的水平變化發生在界面的右邊緣，在正常反演中已經可以看到跳躍（圖 1）。5.2A)。大約在 $X=300 \text{ m}$ 折射鏡的深度可能稍微太深，導致上面的電阻率增加。

請注意，兩個反演結果的模型反應都符合資料誤差內的測量資料 ($\chi^2 = 1 \circ 0$)，因此這兩個模型在反演等價的意義上都是如此。

5.3.2.透過水下調查演示區域概念

為了調查沉積物，以了解所謂的韋魯斯戰役地點的歷史植被，LIAG 研究所對一個淺湖的底部進行了 ERT 測量。兩條鑽孔電極電纜分別與 24 條引線和跨湖的 2 m 電極間距組合在一起。第一個和最後兩個電極連接到岸上的鋼棒上，而其他取出物則躺在船底的水中。 ≈ 2 米深的湖。測得水的電阻率為 $22.5 \Omega\text{m}$ ，只有很少的橫向和垂直變化。

組合資料集，由 657 個值組成，使用 Wenner- α 和溫納—— β 採集陣列是為了提高解析度。疊加誤差中添加了 2%，用於對各個數據進行加權。儘管缺乏相互測量，但這種選擇被證明是非常合理的，並且控制了所有後續的反演，使得數據適合噪音 ($\chi^2 = 1$)。為了增強沉積作用，即或多或少的層狀結構，垂直重量 w_z 被選為 0.1。

數位5.4a 顯示只有一個反演區域的正常反演結果。它顯示出導電 ($\approx 30 \Omega\text{m}$) 中等電阻率地下湖泊，最高值位於左側。這裡不會討論單一異常的含義，但會展示如何使用區域概念來改進影像。由於相對於電極線的對稱性，地下水位顯示出過高的電阻率。顯然湖泊本身必須處理

5.先進的電阻率斷層掃描

不同。因此，模型沿著湖底線細分為兩個區域：湖泊區域（1）和沈積物區域（2）。

數位5.3顯示所用 PLC 的一部分。反盒子是在較大的外部盒子內創建的，穿過電極節點（點）的線是區域分隔符號。請注意，電極在局部細化了四分之一電極距離，以考慮其附近的更高解析度。三個區域中的每一個區域都有一個區域標記，以便產生的網格的元素（圖 1）。5.3）獲得它們。請注意，網格在以下計算中保持不變，但與正常反演不同，因為湖底沒有離散化。

外部區域（3）用作前向計算的背景。沉積物區域（2）具有與邊界恆定的屬性 $\rho_{\text{我}}=10\Omega\text{米}$ 和 $\rho_{\text{你}}=1000\Omega\text{m}$ ，恆定的起始模型 $\rho_0=30\Omega\text{m}$ ，平滑度約束 $w_z=0.1$ 和恆定的模型權重 $w_{\text{米}}=1$ 。湖區的行為透過表中總結的參數逐步改變5.1。總共選擇了六個參數變體，產生如圖所示的反演結果5.4bg。請注意，對於所有變體 λ 選擇模型以使數據與 $\chi^2=1$ 。

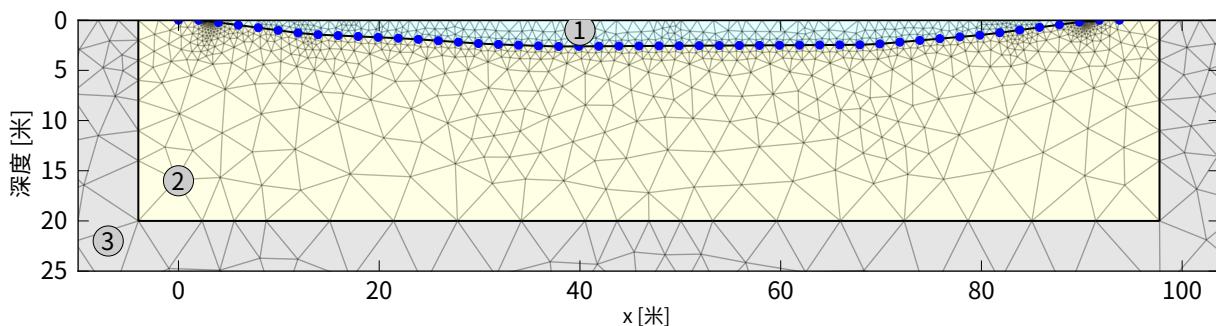


圖 5.3.：網格產生器的輸入 PLC，粗黑線表示區域分隔符
藍點代表固定電極節點。產生的網格元素區分區域 1-3。

表 5.1.：不同正規化策略的湖區（1）參數：區域類型、較低/上
電阻率界限 $\rho_{\text{我}}/\rho_{\text{你}}$ 、模型控制MC和區域間控制IRC。

變異體子圖區域類型 $\rho_{\text{我}}[\Omega\text{米}]$ $\rho_{\text{你}}[\Omega\text{米}]$ $w_{\text{米}}$ （常量）IRC

			沒有地區			
0	A					
1	乙	多	10	1000	1	0
2	C	多	20	30	1	0
3	d	單身的	10	1000	1	0
4a	e	單身的	22	23	1	0
4b	F	單身的	10	1000	10	0
5	G	單身的	10	1000	10	0.1

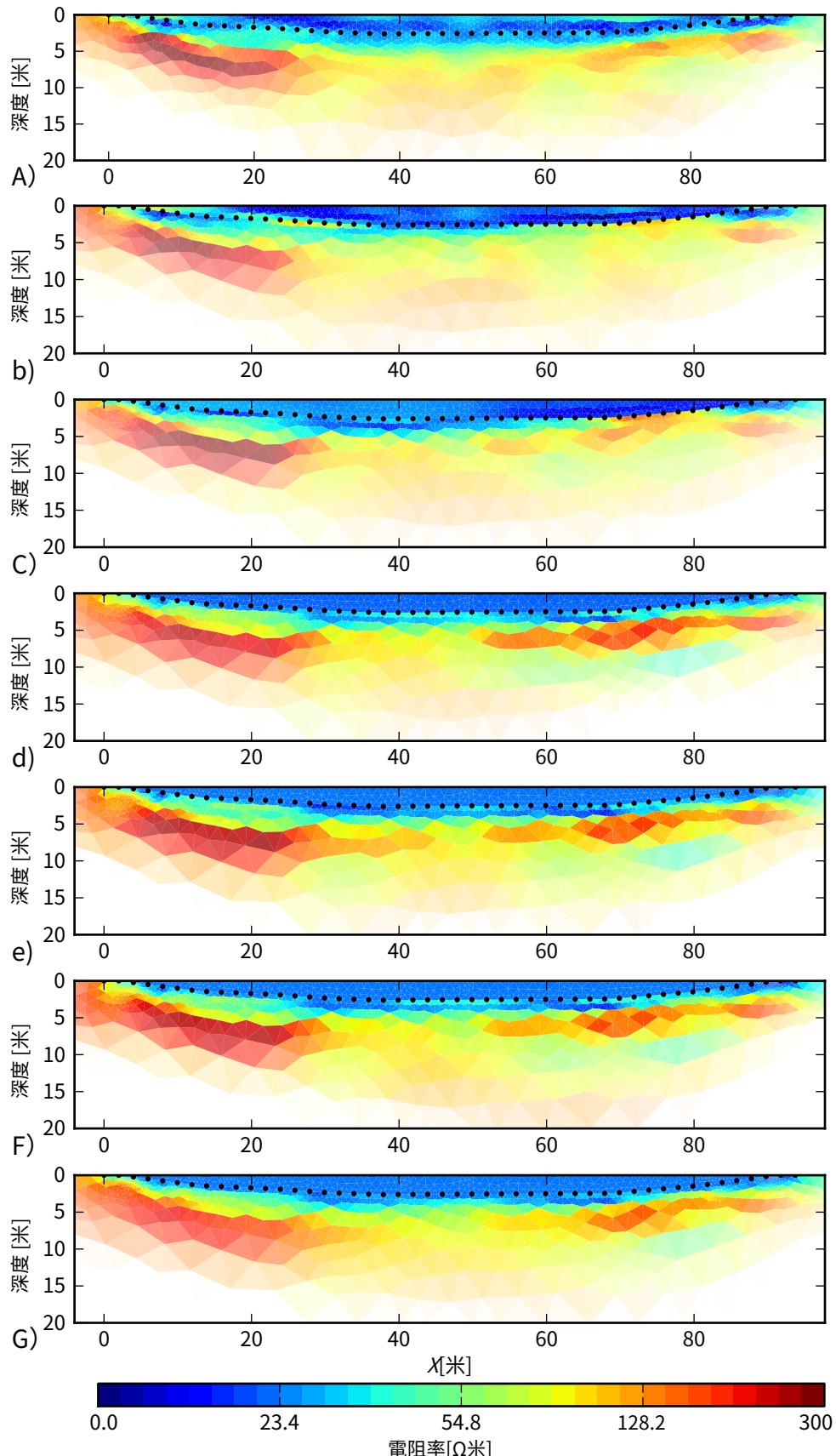


圖 5.4.：根據表不同正規化策略的反演結果5.1。

5.先進的電阻率斷層掃描

首先，在變體 1 中，假設兩個區域相等，對應於結構範例中的底線解耦（圖 1）。5.2。因此，在圖中5.4b 出現了鮮明的對比，但湖水仍然顯示出異常的電阻率。因此，在變體 2 中，湖水電阻率限制為 $10 - 30\Omega$ 米和圖5.4得到c。這樣做可以避免對稱偽影，同時仍存在可變性。當然，可以透過使用更嚴格的界限來進一步限制電阻率範圍。或（變體 3，圖 2）5.4d) 湖泊可以被視為一個單一區域，但具有與變體 1 相同的電阻率範圍。 Ω_m 有點太高了。有兩種方法可以合併直接測量的水電阻率值，即變體 4a（圖 1）。5.4e) 將電阻率限制在 22–23 範圍內 Ω_m 和變體 4b（圖 2）5.4f) 使用大模型控制將電阻率限制為湖區的起始模型米 $\Omega_0 = 22 \pm 5\Omega$ 米。兩個結果實際上是相同的，因為相同的資訊只是透過兩種不同的技術變體添加的。

現在可以說，純水和底部泥漿之間不存在明顯的界面，而底部泥漿的電阻率應該與水相似。因此，可以添加額外的（區域間）約束，以允許湖底線發生輕微變化。變體 4a 不能作為基礎，因為它使用不同的模型轉換。因此，使用變異 4b，並透過為湖泊定義 IRC 值 0.1 進行更改/沉積物邊界，對應於 w_z 。得到的模型（圖 2）5.4g) 與變異 4a 類似（圖 2）。5.4f) 但有些較高的電阻率值位於湖底，例如 $X=20m$ ，消失了。最後，所有圖像都是相似的，並且沉積物層的解釋在變體之間沒有顯著變化。然而，可以透過分別結合附加資訊或期望來找到改進的模型。

5.3.3.納入鑽孔參數訊息

正如前面範例中的水體電阻率的情況一樣，外部資訊並不總是適用於整個擴展區域。經常存在鑽孔以支援或校準地球物理表面資料的成像。一方面，鑽孔岩性可以提供有關現有層的結構信息，至少在鑽孔附近。較小的介面線可以改善結果，如圖所示5.2。另一方面，測量可以擴展到使用鑽孔中的感測器或驅動測井。

以下介紹源自基岩檢測問題的直流電阻率測量²。Wenner- 總共獲得了 1 223 個單一數據 $a/Schlumberger$ 陣列使用 64 個電極，電極間距為 5 m。使用 2% 固定誤差加 100 來估計資料誤差 μV 電壓誤差。此外，在剖面中部每隔 0.25 m 進行一個兩點陣列電阻率探頭。數位5.5顯示作為深度函數的測量分佈（藍色）。此剖面以相當導電的 ($10\Omega m$) 黏土覆蓋層。在某個深度

²資料由 Thomas Schicht (K-UTec Sondershausen) 友情提供

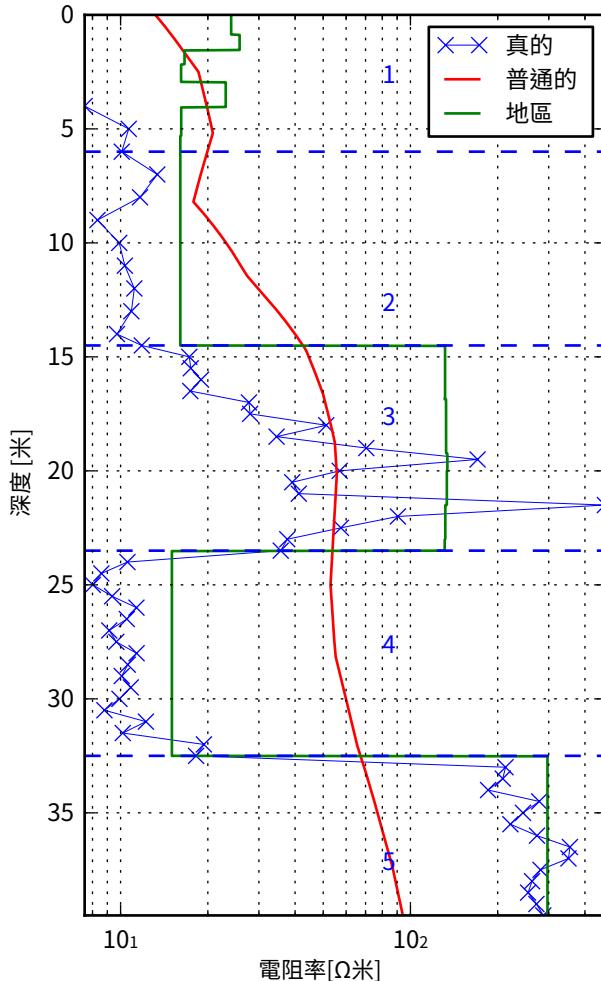


圖 5.5.：在鑽孔中測量的電阻率（藍色），正常反演的結果（紅色）並使用
博爾霍勒埃吉斯（綠色），藍色虛線表示區域邊界
wr伊滕努姆貝s。

哦 15 個月我 薩赫我 hly v阿爾穩定的、主要是電阻性的淡水沙。然後電阻率到達基岩，電
ZACKt奧阿布 10Ω米是或者率超過 200Ω米。紀錄
是蘇BD 瑪德 通過 瑤整數爾夫 4.5、23.5 和 32.5 m 深度處的 ace (圖 1 中的虛線) 5.5) 進入
菲eng 我 w 高度 e前 szhts 電阻率變化最為明顯。

F猶先阿諾馬 我投資Siow 我 垂直重量 $w_z=0$ 。1 完成後得到圖 5.6A。v
UPPer A恩 我 錯誤讀數被設定為 $\rho_1=8\Omega\text{米}$ 和 $\rho_2=500\Omega\text{米}$ 。數據
w而 菲艾德 諸特不伊勢 離車 = 1). 可以清楚看到黏土覆蓋層以及
sANDZ 瑪歐安 d 這 床 r奧虎在深度處，但不在其間的導電黏土層處。在
乙標於樂位置化，th 埃布ack 太深並且似乎過度推力，這可能是
阿爾賓洛分機 r恩 e萊A各向異性正規化。為了改進模型，透過定義區域將構造和鑽孔
pAt我 t 知道威爾德 細節 納入反演中
As 10米 w 標盒子 在 the 鑽孔位置。桌子 5.2 另外也顯示了它們的參數
the G羅 Z 我 ρ_2 。

5.先進的電阻率斷層掃描

表 5.2.: 鑽孔區域的參數。

地區	深度 $z=$	類型	約束類型	m_0 (常量)	Wz	wm (常量。)
1	0 - 75米	多	1	200	0.01	1
2	6 - 14.5米	單身的	0	15	-	2
3	14.5 - 23.5米	多	1	60	0.01	2
4	23.5 - 32.5米	單身的	0	15	-	5
5	32.5 - 42.0米	單身的	0	300	-	2

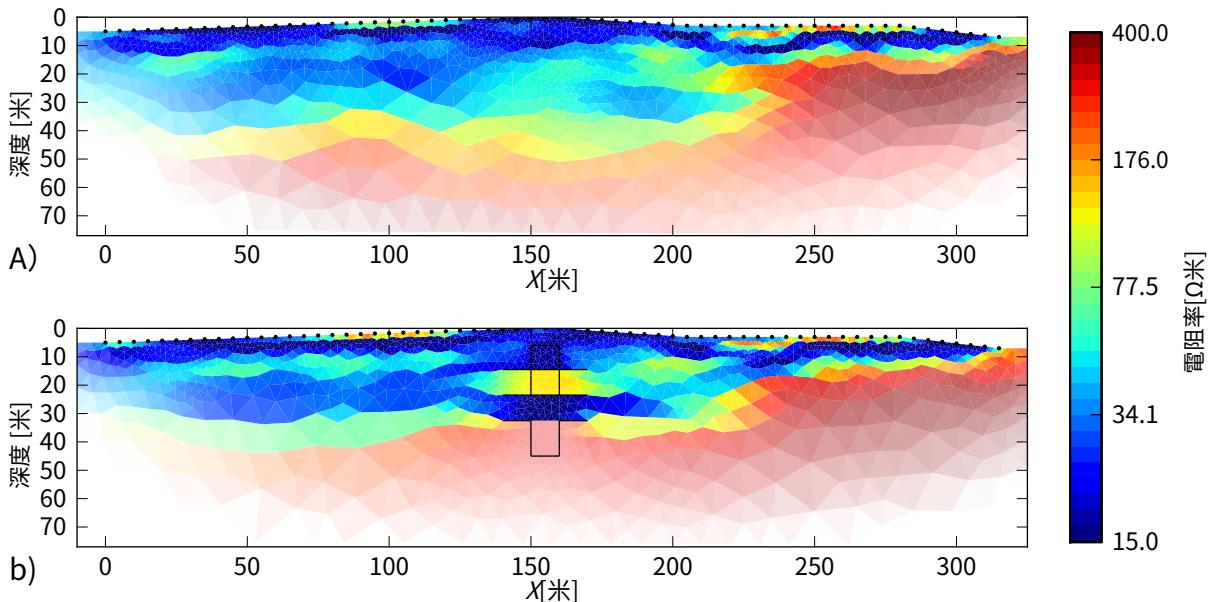


圖 5.6 : A) 標準反演結果和b)結果與先驗鑽孔資料。

外部區域 (1) 採用正常反演的所有參數。區域 2、4 和 5 相當恆定，被視為單一區域，限制與起始模型 15、15 和 300 的絕對偏差 Ω 分別為米。區域 3 被定義為與區域 1 類似的多區域，因為預計其電阻率會改變。由於預計鑽孔鄰域中的模型將受到多個鑽孔區域的影響，因此在所有框和區域 1 之間使用 $IRC = 1$ 定義區域間約束。互相影響。除了盒子之外，每個區域邊界的鑽孔左側和右側還安裝了小型垂直接口

支持分層的想法。數位5.6b 顯示了所得的電阻率影像。

深度上阻力最大的淡水砂層 =-20 m 在鑽孔附近可見，但隨著距離的增加而消失。這可能是真實存在的，也可能只是高導電背景下相對薄的電阻層解析度低的問題。在剖面的左側，淡水沙層似乎在較低的深度重新出現，但尚不清楚各層是否相連。與正常反演相反，從鑽孔測井得知的基岩上方的低電阻層現在清晰可見。

現在可以更好地追蹤基岩本身，而基岩本身正在略微上升以增加 X 值與其他測量值的預期一致，這比鑽孔資料的正常反演有明顯的改善。在剖面的左側，影像更傾向於正常反轉。

將兩次反演的結果與鑽孔測井曲線繪製在一起，如圖所示5.5。正常反演僅顯示一條非常平滑的曲線，趨於對數，基於區域的反演效果較好。對於後者，電阻率在區域2、4和5的起始值處恆定。

5.3.4.在3D建模時求解1D逆問題

ERT本質上是三維的，但有時只能解釋為一維或二維。如果正向運算無法降低至較低維度，則必須在3D正向網格和1D之間尋求模型轉換/2D逆網格。所呈現的範例使用來自具有擴展電極的垂直電極鍊和缺乏所安裝工具使用的空間的複雜3D地下的數據（請參閱第1章）。3.4.4)。蘇德庫姆等人。（2010年）安裝了一個帶有環形電極的固定係統，以監測新鮮的變化/北海博爾庫姆島下方的鹹水介面。³78個電極 $A=0$ 。使用Wenner-25 m間距獲得了917個資料值 α 大眾。

對於靜態電阻率影像，必須考慮電極的3D幾何形狀以及鑽孔幾何形狀。需要用於正向計算的精細四面體主網格，以確保準確的響應並包含環幾何形狀。正演計算使用章節中所述的CEM模型進行³它精確地模擬了沿著電極面的電流注入和電位分流。主網格包含116 582個節點和695 889個四面體。為了將反演的未知數數量保持在合理的範圍內，產生了具有1 792個節點和10 349個四面體的粗參數網格。

參數網格內的目前源位置由環形電極替換位置處的節點表示。參數網格內部缺乏鑽孔會導致兩個網格跨越不同的幾何形狀。因此，參數網格必須對應到主網格上。近700 000個主網格單元必須聚集在一起才能匹配一萬個參數單元。每個簇將相應地用作反演的單一區域。這樣可以實現包含有限電極和鑽孔幾何形狀的精確前向響應。

映射參數單元格需要一些額外的工作。參數網格的每個單元都連續編號，表示所得模型簇的標記。為了

³數據由漢族萊布尼茨應用地球物理研究所的Wolfgang Suedekum提供
諾弗

5.先進的電阻率斷層掃描

必須找到主網格的每個單元對應的（或主單元中心）參數單元，即模型簇的標記。因此，近70萬個搜尋請求的搜尋必須在10,000個元素的搜尋池中完成。為了使搜尋高效，克德樹最近鄰搜尋（賓利,1975年）的應用大大減少了總搜尋時間。搜尋後，具有相同標記的主網格的所有單元都會聚集到單一參數區域。數位5.7作為範例，顯示了所使用的主網格、參數網格和一個結果簇的部分。請注意，所提出的聚類方法類似於中描述的聚類方法布洛姆（2009年）。然而，映射兩個網格的方法似乎更靈活。

數位5.8a表示反演的結果。淡水過渡區 ($80\Omega\text{m}$) 下至鹽水飽和砂 ($3\Omega\text{m}$) 被黏土層所中斷，已知深度為 48.5-49.7 m、52.4-53.8 m 和 56-62.3 m。然而，該模型是圓柱對稱的，因為來自一個鑽孔陣列的數據無法區分方向。每層只能解析代表鑽孔不同距離的幾個未知數。作為後續的延續，創建了第二個參數網格，該網格僅包含 78 個分層圓柱形圓盤（每個電極一個），代表一維參數分佈。

數位5.8b 顯示了作為深度函數的電阻率分佈以及從四面體模型中分別距離鑽孔軸 0.1 和 2 m 處提取的兩條電阻率探針線。一般來說，可以觀察到相同的行為，但雖然距離鑽孔 2 m 的線非常平滑，但鑽孔處的線過度強調了真實分佈。一維模型顯示的分佈最符合包含砂層（白色）和黏土層（灰色）的岩性描述。由於一維結果不缺乏正則化偽影，因此電阻率更加可靠，並且可用於使用阿爾奇定律推導出流體電導率，從而推導出鹽濃度，其時間行為可以描述該島的水力系統。



圖 5.7.：包含 CEM 電極的高度精細的初級網格的一部分（左），粗略參數網格反映了無電極反演的簡單離散化（中）和基於聚類的選定單一區域（右）。

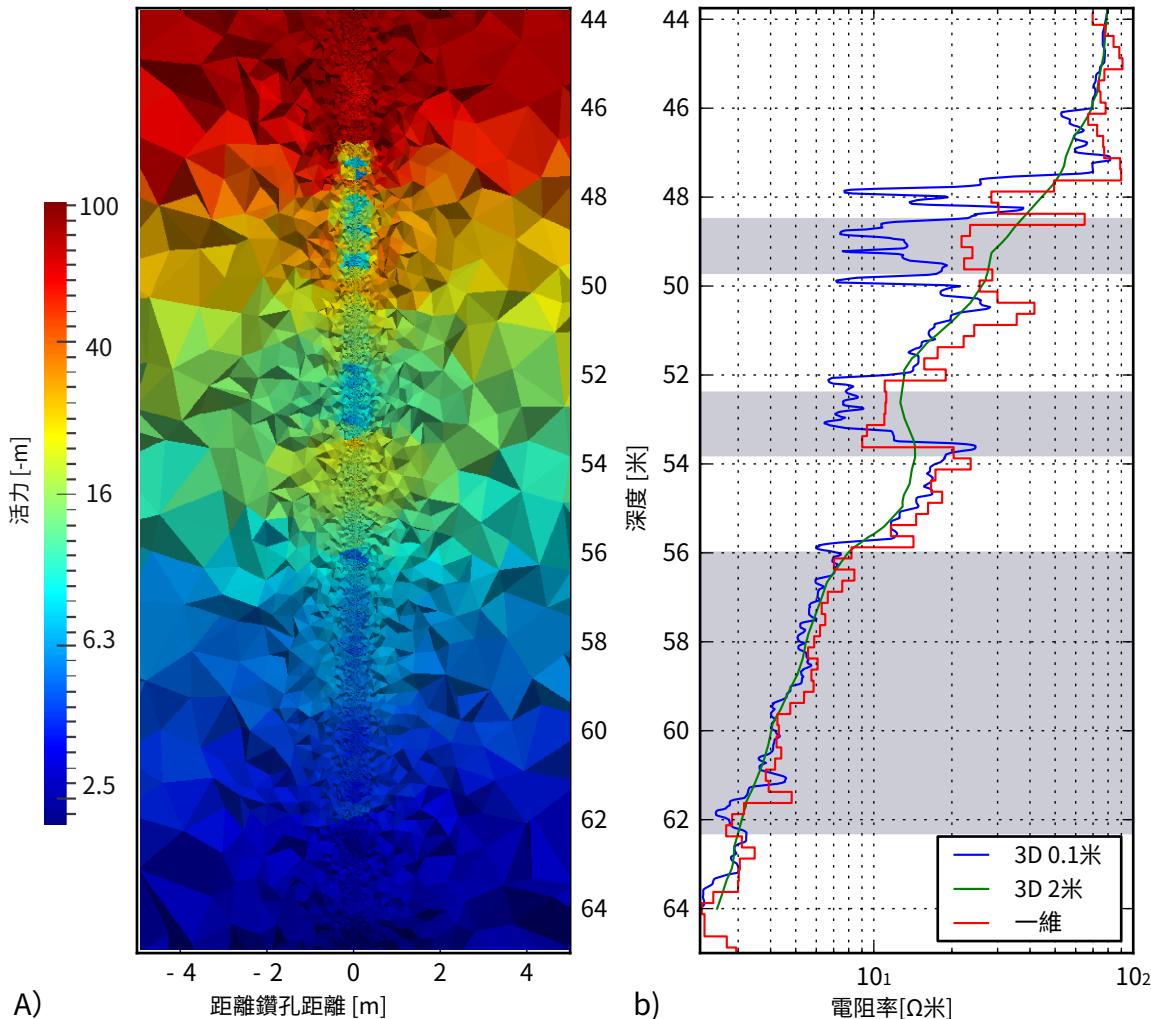


圖 5.8 : A) 3D 反演結果，顯示了等值線和等高線，包括鑽孔幾何形狀和 CEM。b) 垂直的電導率剖面，深度範圍為 64 到 44 米，距離鑽孔 2 m，結果為一維正規化地圖。

5.3.5。吉奧洛 政治集團 k 在 v 埃斯蘭

2008 年，Cheb 盟友規模 DC 關於電導率測量由捷克共和國萊比錫大學開發。測量結果為一維正規化地圖，位於我恩特 western 埃格爾關於測量結果被設計為可行，性質為康蒂來成像電導率分佈。該目的上層地殼與 nnA 我 s 鋼加翁德 甲氣基 4–5 米（弗萊希格等人，2010 年）。主要的可在 d 上檢測到 est 是 CH 欧式土壤二安 d 在 what 質量人工電訊號是的距離 A 欧 t 15 公里維迪 n the we 碳粉匯格爾地區的特徵是由高工業 l 電氣 n 同是。

數據採集化是 p 艾爾我們我重力儀與地圖配置。使用三種不同的饋電電流高於 t 注射三傳輸它特爾實我定位嗎奈秒 (T1 達 8 A T2 和 T3)

5.先進的電阻率斷層掃描

荷蘭國際集團偶極長度（200 m、400 m 和 600 m）。電位訊號是在 9 個不同的接收器偶極子處測量的（P1。。。9）長度為 500m 和 1000m。發射器和接收器偶極子在空間上分佈並且不遵循測量線。總共獲得了 91 個不同的測量結果，而在最大偶極子間隔為 14.5 km 的訊號處理後僅保留 27 個可用資料值。

應用區域概念來獲得電阻率分佈的粗略模型。基於地質情況的先驗知識，即一些主要構造斷層（瑪麗亞拉斯涅斷層帶（MLF）、SW 和 SSW 埃格爾裂谷及其側翼）、沉積結構，創建包含幾個地質單元的參數域切布盆地和地下花崗岩和千枚岩礦床（什克沃爾和薩特蘭,1974 年;斯萬卡拉等人。,2000 年;斯皮查科娃等。,2000 年;班克維茲等人。,2003 年;米爾科赫和斯卡切洛娃,2009 年）。

這會產生 8 個區域，1 個背景加 7 個參數區域，由四面體聚集而成，這些四面體建構了非結構化正向網格，並包含地質單元的邊界以及電極位置。所有區域均假設為單一參數區域。

數位 5.9a 顯示區域設定、發射器和接收器位置以及區域使用的邊界。電阻率模型（圖 5.9b）由七個具有固有電阻率值的區塊組成。其中一個區塊位於 Cheb 沉積填充物下方

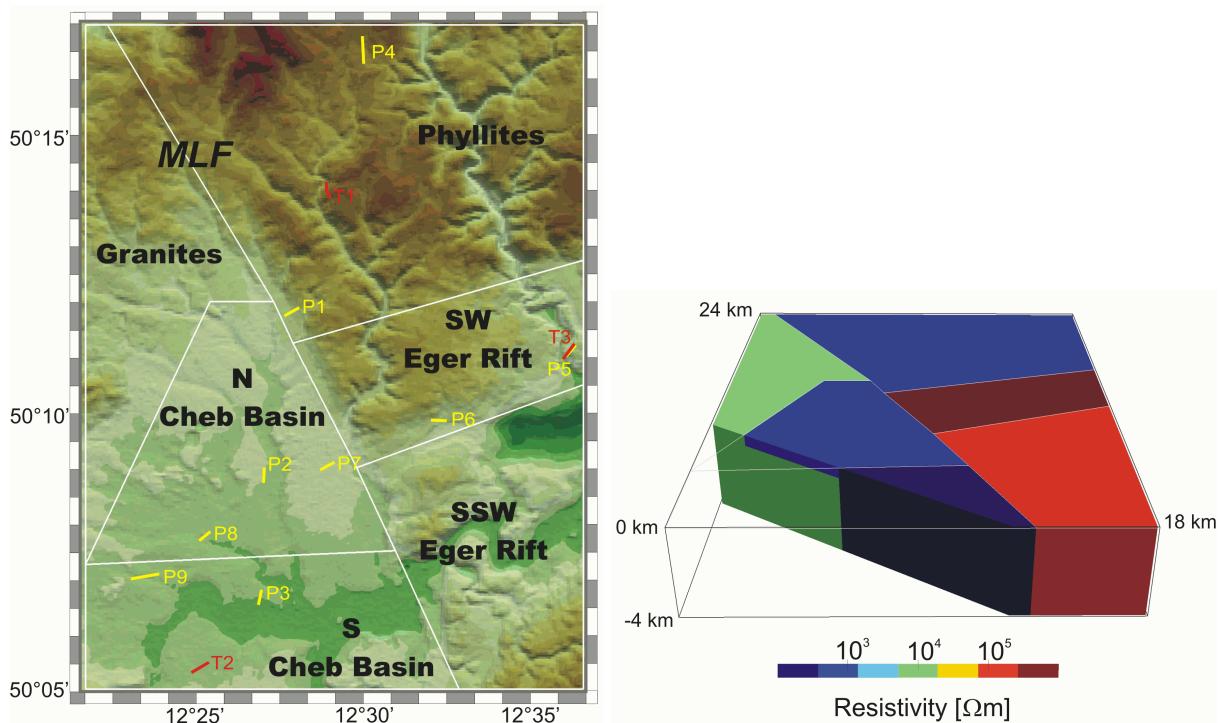


圖 5.9.: 左：數位高程模型，具有根據地理選擇的七個參數區域
邏輯、地形和地電先驗資訊。三個發射器偶極子（紅色）的位置表示為 T(1-3)，九個接收器偶極子（黃色）的位置表示為 P(1-9)。右：單區域反演的結果。

盆地。埃格爾裂谷西南部的雲母片岩和花崗岩具有高電阻率的特徵，而東北部的（風化？）千枚岩和切布盆地的沉積物均具有較低的電阻率值。切布盆地南部的高電導率主要受河流 (Ohře) 的影響。

確實，非常粗糙的 3D 電阻率模型僅允許對區域電阻率設定有相當粗略的第一印象。然而，透過結合進一步的地電調查和結構資料（地震、速度模型、地質）的結果，模型結構可能會逐漸改進和細化。

5.4.結論

提出了一種非常靈活的正則化方案，該方案對靈活的非結構化網格內的每個單元和每個邊界應用單獨的權重。邊界權重由各向異性平滑因子或網格生成中的預定義介面控制。這些介面可以從反射資料或鑽孔資料導出，並且可以任意形狀。透過將權重降低到零，可以獲得對比度更高的模型，這些模型受平滑度偽影的影響較小，並且其參數可以更容易解釋。然而，透過忽略邊界權重，如果資料不支援高電阻率梯度，則可以增強但不能強制執行。

與邊界資訊相反，模型可以分為所謂的區域。區域是在網格生成過程中創建的，反映了地下特定岩性單元行為的先驗知識。對於每個區域，可以定義模型權重、垂直平滑因子、起始值以及電阻率上限和下限。後者是透過使用組合兩個對數函數的模型轉換函數來實現的。區域可以受到空間導數（平滑度）或參考模型的絕對偏差的限制。一個區域的電阻率可以透過使用非常接近的較低電阻率來固定/上限或透過應用大的模型權重。此外，一個區域可以濃縮為單一未知參數，例如水體的恆定電阻率。在高度欠定逆問題的情況下，可以使用有限數量的單一區域來找到三維模型（例如，[弗萊希格等人。,2010年](#)）。另一方面，單一區域可以反映對模型的期望，例如，根據 3D 環境模擬 1D 電阻率行為。

區域被解耦以避免變化時的平滑性，例如，在鑽孔流體的情況下（[多奇等人。,2010年](#)）或其他鮮明對比（[克萊門特等人。,2009年](#)）。但是，可以使用區域間約束來耦合區域。透過後者，可以使用鑽孔盒和鄰近的結構約束從鑽孔合併電阻率資訊。更遠

5.先進的電阻率斷層掃描

ERT 的應用尤其可以在水文地球物理學中找到，其中主要單元（非飽和帶、飽和帶和含水層）可能已知，但含水層的變化令人感興趣。延時 ERT 常用於監測水力過程（[庫拉斯等人。,2009年;奧爾登伯格等人。,2007年](#)）或示踪流（[辛哈和戈雷利克,2005年](#)）。在進行初步步驟反演後，電阻率變化可以輕易地限制在含水層區域。

在所有提出的情況下，透過引入有關結構或參數的附加資訊來改進電阻率圖像。此資訊代表先驗資訊、假設或期望。然而，反演結果的好壞取決於所包含的資料和先驗資料的精確性。必須調查數據對於不準確性的敏感度。此外，附加資訊的影響必須透過解析度分析來量化（[弗里德爾,2003年;岡瑟,2004年](#)）。

六、總結與展望

在這項工作中，提出了使用非結構化離散化的三維電阻率層析成像（ERT）的建模和反演技術。結果表明，所描述的技術的組合滿足了當今直流地電解釋軟體的要求。建模和反演都可以應用於任意形狀的幾何形狀，從而可以對現實環境進行所有尺度的三維電阻率測量。

部分我描述了地電正演問題的建模，該問題透過具有線性和二次形函數的四面體網格的有限元素方法來求解。結果表明，非結構化網格適用於對具有複雜表面和地下地形的域進行建模。具有全局二次形狀函數的適度問題適應的基於先驗的網格細化允許精度和數值工作之間的最佳權衡。解決了使用現代多前沿直接求解器結合矩陣重新排序策略最有效地求解所得方程組的問題。非結構化離散化也允許考慮空間擴展的有限電極。由於使用完整的電極模型對正向算子進行了相應的擴展，因此研究了此類電極對地電測量的影響。結果表明，對於最經典的 ERT 測量設計，電極範圍小於電極間距的 20%，可以透過使用公共點（如電極近似）進行有效解釋。然而，對於封閉的幾何形狀（例如建模罐或滲漏計），效果變得更加明顯。

部分二描述了使用先前開發的正向算子對地電資料進行反演。引入所謂的三重網格技術，透過在任意形狀的三維域上使用分辨率相關的參數化來解決地電反演問題。兩個例子顯示了其有效性。先進的正則化方案作為 ERT 的擴展提出，它允許靈活地合併先驗資訊。結構訊息，例如從其他地球物理技術（例如，反射地震或探地雷達）已知的材料界面，也被包括在內，作為允許的尖銳電阻率對比。模型加權函數可以定義最終電阻率模型與給定起始值或參考值的允許偏差。作為隨後的進一步發展，提出了區域概念，其中參數域被細分為岩性或地質區域。反演行為和所有正則化參數

六、總結與展望

可以對這些區域進行單獨控制。幾個範例顯示了先驗資訊的結合如何能夠顯著改善產生的 ERT 影像。

所提出的建模和反演策略可以透過進一步開發來改進。前向算子的後驗網格細化可以提高效率並更好地滿足未來精度需求的可擴展性。基於解析度分析的自動自適應參數化將提高反演過程的有效性。為了利用當今 PC 日益多核心架構的趨勢，建模和反演的效率將極大地受益於平行化。

在這項工作中提出的獨立於方法的反演框架 GIMLi 提供了一種進一步減少反演問題模糊性的方法，即所謂的聯合反演。來自多個地球物理學科的完整資料集的合併可以透過前向算子的組合來簡單地實現，以重建公共材料參數，例如來自ERT和電磁方法的電阻率。高階正則化方案透過使用一個模型的梯度結構權重作為另一個模型的權重，為結構約束聯合反演（例如折射地震和 ERT）提供了基礎，反之亦然。與模型轉換一起，它為組合參數的岩石物理聯合反演開闢了道路，例如，探地雷達和 ERT 可以聯合反演含水量或孔隙度。透過使用區域概念，可以將其限制在預定義區域，例如含水層。

A. 單元積分與形狀函數

尋求對局部元素矩陣的貢獻：

$$\begin{aligned}
 \text{剛度矩陣 } S_{(e)} &= \int_{\Omega_{(e)}} \nabla \psi_k \nabla \psi_m d\Omega \text{ 和} \\
 \text{負載向量 } f_{(e)} &= \int_{\Omega_{(e)}} \psi_k \psi_m d\Omega \text{ 對於元素 } (e) \text{ 和克、公升}=1 \dots \psi_m (e) \text{ 也} \\
 \text{質量元矩陣中號 } (Z) &= \int_{\partial\Omega_{(Z)}} \psi_k \psi_m d\Omega \text{ 對於邊界 } (Z) \text{ 和克、公升}=1 \dots \psi_m (Z)
 \end{aligned}$$

對於四面體單元和相應的三角形邊界面，其中 $\psi_{(e)}$ 表示元素的節點數 (e) 和 $\psi_{(Z)}$ 邊界的節點數 (Z) ，分別。

全域基底函數 ψ_k 對於全域節點 ϕ_k 由多項式插值規則的線性組合表示，形函數 $\psi_{(e)}$ (即局部基底函數)，這是為節點給出的 ϕ_k 的元素 (e) 我：

$$\psi_k = \begin{cases} \sum_{i \in \forall_{(e)}} \psi_{(e)_i} \phi_{k_i} & \text{為了 } \phi_{k_i} = \phi_{(e)_i} \text{ 為了 } k=1 \dots \psi_{(e)} \\ 0 & \text{別的} \end{cases}$$

局部元素矩陣的組裝是基於三個主要步驟。首先是座標變換，其次是形函數的定義，最後是數值積分。

座標變換

形狀函數可以很容易地用局部元素座標來描述。透過單元形狀的笛卡爾座標的座標變換來獲得。對於四面體 (IR_3) 與節點位置 $\phi_{(e)}$ ($x_{(e)}, y_{(e)}, z_{(e)}$) 和 $e=1 \dots 4$ 、笛卡兒關係

A. 單元積分與形狀函數

和自然或局部座標 δ 由下式給出：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & 1 & 1 & \delta_1 \\
 -x & = & -1 & x_2 & x_3 & x & 4-\delta \\
 -y & = & -y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & -\delta_3-z \\
 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & & \delta_4
 \end{array} \tag{A.1}$$

請注意，三角形的變換是直接的，但對於所尋求的質量元素矩陣來說不需要。任一四面體的局部座標可以透過求解方程組 (A.1) 並提供一些有趣的屬性：

讓 F 是局部座標的最小值 $\delta F(x, y, z)$ 任意點的磷 (x, y, z) 對於具有節點位置的四面體磷我和我 $= 1 \dots \dots 4$ 職位磷

1. 在 if 的四面體之外 $f < 0$ 和裡面的 $f > 0$
 2. 位於邊界面上 (P_i, P_j, P_k) 如果 $F = 0$ 為 $\delta_{\text{我}}$
 3. 等於 $\delta_{\text{我}} = \delta_{\text{我}}(x, y, z) = 1$ 和 $\delta_F = \delta_{\text{我}} = \delta_{k=0}$ 。

形函數

形狀函數是在元素的節點上定義的線性獨立函數，其主要屬性是對應節點的函數值為 1，其餘節點的函數值為 0：

$$\text{氮我} = \begin{cases} 1 & \text{在磷我為了我, } j=1 \dots \text{ 氮 (e) 和 } j6=\text{我。} \\ 0 & \text{在磷} \end{cases} \quad (\text{A2})$$

注意，上標 (e) 對於形函數氮（為了方便起見，下面避免使用局部基底函數）。

形狀函數是元素內函數行為的內插規則。局部座標中的線性插值如下：

$$\text{氮我 } (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \delta_{\text{我}} \quad \text{為了我} = 1 \circ \circ \circ 4 \text{ 對於四面體} \quad (A.3)$$

$$\delta_{\text{我}} (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \delta_{\text{我}} \quad \text{我} = 1 \dots 3 \text{ 表示三角形} \quad (A.4)$$

對應的二次形函數表示四面體：

$$\begin{aligned} \text{氮5} &= \delta_1 \delta_2 (2\delta_1 - 1) \quad \text{為了我=1} \dots \\ \text{氮5} &= 4\delta_1 \delta_2, \quad \text{氮8} = 4\delta_2 \delta_3, \quad \text{氮9} = 4\delta_3 \delta_4 = 4\delta_3 \delta_1 \\ \delta_1 \delta_4, & \quad 2\delta_4, \quad \text{氮10} = 4\delta_3 \delta_4, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

對於三角形：

$$\text{氮我 } (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \delta_1(2\delta_2 - 1) \text{ 對於 我} = 1, 2, 3$$

$$\text{氮4 } (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = 4\delta_1\delta_2, \text{ 氮5 } (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = 4\delta_2\delta_3, \text{ 氮6 } (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = 4\delta_3\delta_1 \quad (A.6)$$

由於定義了形函數，函數值你可以輕鬆插值到一個位置 (x, y, z) 透過應用基本的 FEM 原理 (2.7) :

$$\text{你 } (x, y, z) = \sum_{\text{氮我}} (\delta_1(x, y, z), \delta_2(x, y, z), \delta_3(x, y, z), \delta_4(x, y, z)) \text{ 你 } (X_{\text{我}}, Y_{\text{我}}, Z_{\text{我}}), \quad (\text{A.7})$$

和氮元素的形函數數量和你 ($X_{\text{我}}, y_{\text{我}}, z_{\text{我}}$) 對應元素節點的已知潛在值。以同樣的方式，可以在元素內部確定函數的梯度：

$$\frac{\partial \text{你}(x, y, z)}{\partial x} = \sum_{\text{我}=1}^{\text{氮气}} \frac{\delta_1(x, y, z), \delta_2(x, y, z), \delta_3(x, y, z), \delta_4(x, y, z)}{\partial x} \text{你}(x_{\text{我}}, y_{\text{我}}, z_{\text{我}}) \quad (\text{A.8})$$

形狀函數在直角座標系中的偏導數可以透過鍊式法則得到：

$$\frac{\partial \delta_{\text{氮}}(x, y, z)}{\partial X} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \delta_{\text{氮}}}{\partial \delta_j} \frac{\partial \delta_j}{\partial X} \quad (\text{A.9})$$

並相應地對於 y 和 z 。

數值積分

可以對最基本的元素類型進行元素貢獻的積分分析。然而，數值積分更為通用，並且基於高斯求積規則：

$$\int \sum_{\text{all } e} F(x, y, z) dxdydz = \sum_{\text{all } e} \sum_{m=1}^n w_m F(x_m, y_m, z_m), \quad (\text{A.10})$$

A. 單元積分與形狀函數

使用 n 重量 w_i 和採樣位置的離散函數值 $F(X_i, y_i, z_i)$ 然而 / (e) / 分別表示單元的體積或邊界的面積

積分精確到 $2(p-m)$ 然而 p 是基底函數的多項式次數， m 表示被積函數內微分算子的階數。對於四面體，線性的積分階數為 1，二次基底函數的積分階數為 2，對於剛度矩陣來說就足夠了，而對於載重向量來說，積分階數為 2 就足夠了。三角形邊界元的質量元矩陣的積分需要線性和二次基底函數的積分階數分別為 2 和 4。

載荷向量和局部矩陣的組裝是根據它們的形狀函數並應用方程式 (A.10) :

$$w_{ik}^{(e)} = \frac{\int_{\Omega^{(e)}} \varphi_k d\Omega}{\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i^{(e)}} \quad (A.11)$$

$$\text{中號}(\zeta) = \frac{\int_{\partial\Omega} \zeta d\sigma}{\sum_{k=1}^n w_k \zeta^{(k)}(\zeta)} \quad (\text{A.12})$$

$$S_{(e)} = \nabla \cdot k \nabla \varphi_e d\Omega \text{ 和 } \Omega_{(e)}$$

$$[S_{\text{吉隆坡}}] = / (e) \sum_{i=1}^n W_i \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{(e)}}{\partial z} \quad (A.13)$$

由於狄拉克三角洲的特殊性質：

$$\int F(x) \delta(x) dx = F(0), \quad (\text{A.14})$$

載重向量的具體處理我 (e) 與直流點源項相關的項是必要的：

$$\text{我}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \tilde{\pi}_k \delta(r - r_s) d\Omega \text{ 和 } [\text{我}_k] = \tilde{\pi}_k (\delta_1(r_s), \delta_2(r_s), \delta_3(r_s), \delta_4(r_s)) \quad (A.15)$$

這允許對總電位和主要電位計算進行節點獨立源定位。請注意，如果來源位置 r_s 等於一個節點磷我的元素（ e ），輸入為我（ e ）可以很簡單

表示為：

$$[w_k] = \begin{cases} 1 & \text{為了 } rs = \frac{1}{k} \\ 0 & \text{別的} \end{cases} \quad \text{為了 } k=1 \dots n \text{ 氣 (e)}, \quad (\text{A.16})$$

由於基本屬性 (A2) 的形狀函數。

表 A.1.：四面體和三角形的積分權重和橫座標

四面體：

命令		重量 w	座標 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$	
1 ₁	$n=1$	1.0	一個，一個，一個，一個	$A=0^\circ 25$
2 ₁	$n=4$	0.25	甲、乙、乙、乙 乙，甲，乙，乙 乙，乙，甲，乙 乙，乙，乙，甲	$A=0^\circ 585410196$ $Z=0^\circ 138196601$

三角形：

命令		重量 w	座標 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$	
2 ₁	$n=3$	1/3	一個，一個，b 乙、甲、甲 一、二、一	$A=0^\circ 5$ $Z=0^\circ 0$
4 ₂	$n=6$	0.109951743	甲、乙、乙 乙，甲，乙 乙，乙，甲	$A=0^\circ 816847572$ $Z=0^\circ 091576213$
		0.223381589	甲、乙、乙 乙，甲，乙 乙，乙，甲	$A=0^\circ 108103018$ $Z=0^\circ 445948490$

¹齊恩凱維奇 (1977年)

²杜納萬特 (1985年)

A. 單元積分與形狀函數

參考書目

- DL 的阿倫博和喬治亞州的紐曼 (2000)。2-D 和 3-D 電磁影像評估
反轉。*地球物理學*, 65 (5) : 1455–1467。
- PR Amestoy、TA 戴維斯和 IS 達夫 (1996)。近似的最低學位順序-
演算法。*SIAM 矩陣分析與應用雜誌*, 17 (4) : 886–905。
- Athanasiou, EN、Tsurlos, PI、Vargemezis, GN、Papazachos, CB 和 Tsokas, GN
(2007)。使用平板電極進行無損直流電阻率測量。*靠近。衝浪。地球物理學*。, 5
(4) : 263–272。
- Bankwitz, P.、Schneider, G.、Kämpf, H. 與 Bankwitz, E. (2003)。結構特點
中歐震央地區：研究案例切布盆地（捷克共和國）。*J. Geodyn*。, 35 (1-2) : 5-32。
- 巴克，RD (1989)。共線對稱四電極陣列的深度研究。
地球物理學, 54 (8) : 1031–1037。
- 本特利，JL (1975)。用於關聯搜尋的多維二叉搜尋樹。
ACM 通訊, 18 (9) : 509-517。
- Binley, A.、Henry-Poulter, S. 與 Shaw, B. (1996)。未分散溶液中溶質運移的檢查
使用電阻斷層掃描的渦輪土柱。*水資源。資源*。, 32 (4) : 763-769。
- Binley, A. 與 Kemna, A. (2005)。水文地球物理學，電氣方法一章，第 129 頁-
156. 施普林格，荷蘭。
- Blaschek, R.、Hördt, A. 與 Kemna, A. (2008)。一種新的靈敏度控制聚焦常規-
基於最小梯度支持的激發極化資料反演的化方案。*地球物理學*, 73(2) : F45–F54。
- 布洛姆，M. (2009)。大規模地電的有效測量與數據反演策略
統計調查。博士論文，瑞士蘇黎世聯邦理工學院。
- Bock, M.、Regenauer-Lieb, K.、Lotze, M.、Wilke, T. 與 Rücker, C. (2010)。分析熱
透過地電 3-D 斷層掃描在實驗室中誘導流動。*J. 地球物理學。資源。固體地球*, xx:xxx-
xxx。已接受出版。

參考書目

Brecque, DL、Morelli, G.、Daily, B.、Ramirez, A. 與 Lundegard, P. (1995)。奧卡姆定律——3D ERT 資料的版本。在論文集 *I. 三維電磁學國際研討會*, 康乃狄克州里奇菲爾德, 1995 年 10 月 4 日至 6 日, 第 471-477 頁。猶他大學。

布羅伊登, CG (1972)。擬牛頓方法。在默里, W., 編輯, *數值方法無約束優化*。學術出版社。

Chen, Y.、Davis, TA、Hager, WW 和 Rajamanickam, S. (2009)。算法887：CHOLMOD，超節點稀疏 Cholesky 分解和更新/更新。*ACM 翻譯。數學。軟體*, 35 (3) : 編號：22。

Cheng, K.-S.、Isaacson, D. 與 Gisser, JND (1989)。電流電極模型 CT 檢查。*IEEE 傳輸。生物醫學。工程師*., 36 (9) : 918-924。

Clément, R.、Descloitres, M.、Günther, T.、Ribolzi, O. 與 Legchenko, A. (2009)。影響延時 ERT 上的淺層浸潤：高階解釋的經驗。比較。*地球科學聯盟*., 341 (10-11) : 886-898。

科貢, JH (1971)。透過有限元素方法進行電磁和電氣建模。
地球物理學, 36 : 132-155。

SC 康斯特布爾、RL 帕克和 CG 康斯特布爾 (1987)。奧卡姆反轉：實用從電磁探測資料產生平滑模型的演算法。*地球物理學*, 52 : 289-300。

Daily, W.、Ramirez, A.、Newmark, R. 與 Masica, K. (2004)。低成本電氣斷層掃描電阻率。*前線*, 23 (5) : 472-480。

Davis, TA、Gilbert, JR、Larimore, SI 與 Ng, EG (2000)。一列近似最小度排序演算法。技術報告 TR-00-005，佛羅裡達大學電腦與資訊科學與工程系。

de Groot-Hedlin, C. 與 Constable, SC (1990)。奧卡姆斯反演：產生平滑的二元來自大地電磁資料的維度模型。*地球物理學*, 55 : 1613-1624。

Dey, A. 與 Morrison, HF (1979)。任意形狀的三元電阻率建模
維度結構。*地球物理學*, 44 : 753-780。

Dieter, K.、Paterson, NR 與 Grant, FS (1969)。IP 和電阻率類型曲線為三維度實體。*地球物理學*, 34 : 615-632。

Doetsch, J.、Coscia, I.、Greenhalgh, S.、Linde, N.、Green, A. 與 Günther, T. (2010)。這電阻率成像中的鑽孔流體效應。*地球物理學*, 75(4) : xxx-xxx。印刷中。

德魯斯金, V. (1998)。關於不完全邊界資料反問題的唯一性。
暹羅 J. 應用程式。數學。, 58 (5) : 1591-1603。

IS 達夫、AM 埃里斯曼和 JK 里德 (1986)。稀疏矩陣的直接方法。克拉倫-唐出版社。

DA 杜納萬特 (1985)。高效對稱高斯求積規則

三角形。國際。J. 數字。方法。工程師。, 21 (6) : 1129—1148。

艾利斯，RG 和奧登堡，DW (1994)。極點 3 維直流電阻率反演問題：a
共軛梯度法。地球物理學。J. 國際。, 119 (1) : 187-194。

Farquharson, CG 與 Oldenburg, DW (1998)。使用一般措施的非線性反演

資料失配和模型結構。地球物理學。J. 國際。, 134 (1) : 213-227。

Farquharson, CG 與 Oldenburg, DW (2004)。自動化技術比較

估計非線性反問題中的正規化參數。地球物理學。J. 國際。, 156 (3) : 411-425。

Flechsig, C.、Fabig, T.、Rücker, C. 與 Schütze, C. (2010)。地電調查

Cheb 盆地/W-波希米亞：一種評估近地表電導率結構的方法。螺柱。地球物理學。喬德
, 54 : 417-437。

Fox, RC、Hohmann, GW、Killpack, TJ 與 Rijo, L. (1980)。電阻中的地形效應

活性和誘發極化調查。地球物理學, 45 (1) : 75-93。

弗里德爾, S. (2003)。電阻率層析成像的解析度、穩定性和效率估計為

廣義逆方法。地球物理學。J. 國際。, 153 (2) : 305-316。

Friedel, S.、Brunner, I.、Jacobs, F. 與 Rücker, C. (2000)。直流電阻率的新結果

沿著默拉皮火山側面成像。Buttkus, B.、Greinwald, S. 和 Ostwald, J. 編輯, 正在調查
的十年火山, 第 4 卷德國地球物理學中心, Sonderband IV/2000, 第 23-29 頁。德國地
球物理學協會。

弗洛默, A. 和馬斯, P. (1999)。基於快速 CG 的 Tikhonov-Phillips 正規化方法

。暹羅 J. 科學。計算, 20 (5) : 1831-1850。

幾何 (2001)。OhmMapper TR1, 操作手冊。幾何公司, 財星 2190

驅動器, 聖何塞, 加利福尼亞州, 美國。

Gerstenecker, C.、Läufer, G.、Steineck, D.、Tiede, C. 與 Wrobel, B. (2005)。驗證
印尼爪哇默拉皮火山周圍的數位高程模型。納特。危害地球系統。科學。, 5(6):863
—876。

格塞洛維茨, DB (1971)。心電圖導極理論在阻抗中的應用

體積描記法。IEEE 傳輸。生物醫學。工程師。, BME-18(1) : 38-41。

參考書目

- 岡瑟，T. (2004)。2D/3D重建的反演方法與解析度分析
直流測量的電阻率結構。博士論文，弗萊堡礦業技術大學。可從<http://fridolin.tu-freiberg.de>。
- Günther, T.、Rücker, C. 與 Spitzer, K. (2006)。三維建模與反演
結合地形的直流電阻率資料 – II。反轉。地球物理學。J. 國際。, 166 : 506-517。
- Günther, T. 與 Rücker, C. (2009)。 使用新的地球物理輸入的高階反演策略分機。摘要。
反演和建模庫。 第十五屆歐洲環境會議
和工程地球物理，愛爾蘭都柏林。
- 哈伯，E. (2005)。用於大規模電磁反演問題的擬牛頓方法。
反問題。, 21:305–323。
- PC 漢森和 DP 奧利裡 (1993)。L 曲線在離散正規化的應用
不適定問題。遜羅 J. 科學。計算。, 14 (6) : 1487–1503。
- Heikkinen, LM、Vilhunen, T.、West, RM 與 Vauhkonen, M. (2002)。同時偵察
電極接觸阻抗和內部電氣性能的建構：II · 實驗室實驗。測量。科學。技術。, 十三：
1855-1861。
- Herwanger, JV、Pain, CC、Binley, A.、de Oliveira, CRE 與 Worthington, MH (2004)。
各向異性電阻率斷層掃描。地球物理學。J. 國際。, 158 (2) : 409–425。
- Hestenes, MR 與 Stiefel, E. (1952)。求解線性系統的共軛梯度法
專案.J.Res。納特。布爾。站立，49 : 409-436。
- Holcombe, HT 與 Jiracek, GR (1984)。電阻率三維地形修正
調查。地球物理學，45 : 75-93。
- 伊格爾，J. (2007)。土壤電性小尺度變異性及其影響
地球物理測量。博士論文，美因河畔法蘭克福大學。
- Karypis, G. 與 Kumar, V. (1998)。一種快速、高品質的多層分區方案
不規則圖形。SIAM 科學計算雜誌，20 (1) : 359–392。
- 凱姆納，A. (2000)。複電阻率層析反演。博士論文，魯爾大學
波鴻。
- 克肖，DS (1978)。迭代的不完全 Cholesky 共軛梯度法
線性方程組的解。J. 計算機。物理。, 26 (1) : 43-65。
- Knödel, K.、Lange, G. 與 Hans-Jürgen Voigt (2007)。環境地質學：手冊
實地方法與案例研究。施普林格柏林海德堡紐約。
- Kuras, O.、Beamish, D.、Meldrum, PI 和 Ogilvy, RD (2006)。容量的基本原理
電阻率技術。地球物理學，71(3) : G135-G152。

- Kuras, O.、Pritchard, J.、Meldrum, P.、Chambers, J.、Wilkinson, P.、Ogilvy, R. 與 Wealthall, G. (2009)。使用自動延時電阻率斷層掃描 (ALERT) 監控液壓過程。比較。地球科學聯盟。, 341 (10-11) : 868-885。
- 大, DB (1971)。導電半空間中球體附近的電位。
地球物理學, 36 (4) : 763-767。
- Lelièvre, PG 與 Oldenburg, DW (2009)。全面研究包括結構
地球物理反演中的方向資訊。地球物理學。J. 國際。, 178 (2) : 623-637。
- Li, Y. 與 Oldenburg, DW (1999)。使用 L 曲線對直流電阻率資料進行 3D 反演
標準。在第 69 屆國際年會。Mtg., Soc. 解釋。地球物理學, 擴展摘要。
- Li, Y. 與 Spitzer, K. (2002)。使用有限元素的三維直流電阻率正演模型
元素與有限差分解的比較。地球物理學。J. 國際。, 151 (3) : 924-934。
- Loke, M.、Acworth, I. 與 Dahlin, T. (2003)。平滑反演與塊狀反演的比較
二維電子成像測量方法。探勘地球物理, 34 (3) : 182-187。
- 洛克, M. 和巴克, R. (1996a)。視電阻率偽快速最小平方法反演
透過擬牛頓法進行截面。地球物理學。前景。, 44 (1) : 131-152。
- Loke, MH 與 Barker, RD (1996b)。3D 電阻率測量和數據的實用技術
反轉。地球物理學。前景。, 44 (3) : 499-523。
- Lowry, T.、Allen, MB 與 Shive, PN (1989)。奇異性消除：電阻率的細化
建模技術。地球物理學, 54 (6) : 766-774。
- McGillivray, PR 與 Oldenburg, DW (1990)。Fréchet 導數的計算方法
和非線性反問題的敏感度：比較研究。地球物理學。前景。, 38 (5) : 499-524。
- 門克, W. (1989)。地球物理資料分析：離散反演理論，第 45 卷間
國家地球物理系列叢書。學術出版社
- Militzer, H. 和 Weber, F. , 編輯 (1985 年)。應用地球物理學。施普林格。樂隊 2。
- Mlčoch, B. 和 Skácelová, Z. (2009)。水晶基底的數字高程模型
海布盆地和索科洛夫盆地地區。Z. 地質學家。維斯。, 37 : 145-152。
- 穆夫提, IR (1976)。任意形狀二維的有限差分電阻率建模
結構。地球物理學, 41 : 62-78。
- Neukirch, M. 與 Klitzsch, N. (2010)。如何反演電容電阻率（線電極）
使用直流逆變程序進行測量。包氣帶。印刷中。
- 岡部, M. (1981)。求解任意非均勻性問題的邊界元法
電法探勘。地球物理學。前景。, 29 (1) : 39-59。

參考書目

Oldenborger, GA、Knoll, MD、Routh, PS 和 LaBrecque, DJ (2007)。延時ERT監測淺層無承壓含水層的注入/抽取實驗。*地球物理學*, 72(4) : F177-F187。

帕利亞拉，G. 和維尼奧利，G. (2006)。聚焦反演技術應用於電學研究
實驗槽中的輔助斷層掃描。在第十一屆國際數學地質學會國際大會，列日（比利時）。

Pain, CC、Herwanger, JV、Saunders, JH、Worthington, MH 和 de Oliviira, CRE (2003)。各向異性電阻率反演。反問題。, 19 : 1081-1111。

Park, SK 與 Van, GP (1991)。下方三維電阻率結構的極點資料反演
電極陣列。*地球物理學*, 56 : 951-960。

Paulson, K.、Breckon, W. 與 Pidcock, M. (1992)。電阻抗中的電極建模
斷層掃描。*暹羅J.應用程式。數學*。, 52 (4) : 1012-1022。

Portniaguine, O. 與 Zhdanov, MS (1999)。聚焦地球物理反演影像。*地理-物理*, 64 (3) : 874-887。

Pous, J.、Marcuello, A. 與 Queralt, P. (1987)。利用先驗資訊反演電阻率。
地球物理學。前景。, 35 (5) : 590-603。

Press, WH、Teukolsky, SA、Vetterling, WT 和 Flannery, BP (1988-1992)。數值
C秘訣：科學計算的藝術。劍橋大學出版社。

Pridmore, DF、Hohmann, GW、Ward, SH 與 Sill, WR (1981)。有限的調查
三維電氣和電磁資料的元素建模。*地球物理學*, 46 : 1009-1024。

Queralt, P.、Pous, J. 與 Marcuello, A. (1991)。二維電阻率建模：一種陣列方法
與衝擊方向平行。*地球物理學*, 56 (7) : 941-950。

里德，P. (1994)。環形電極產生的電位。*IEEE J.海洋。工程師*。, 19 (3) : 464-467。

羅伊，A. 和阿帕勞，A. (1971)。直流法的深度研究。*地球物理學*,
36 (5) : 943-959。

Rücker, C. 與 Günther, T. (2011)。使用完整的有限 ERT 電極模擬
電極模型。*地球物理學*。接受發表：2011年3月。

Rücker, C.、Günther, T. 與 Spitzer, K. (2006)。三維建模與反演
結合地形的直流電阻率資料 - I. 建模。*地球物理學。J.國際*。, 166 : 495-505。

薩阿德，Y. (1996)。稀疏線性系統的迭代方法。PWS，波士頓。

佐佐木，Y. (1989)。大地電磁和偶極-偶極電阻二維聯合反演
活動數據。*地球物理學*, 54 : 254-262。

- 佐佐木，Y. (1994)。使用有限元素方法進行 3-D 電阻率反演。*地球物理學*，59 (11) : 1839-1848。
- Schütze, C.、Rücker, C. 與 Flechsig, C. (2010)。大規模地電測量 Rittsteig 研究井（德國巴伐利亞）附近的波希米亞中部剪切帶。*Z.地質學家。維斯.*，38 (1) : 69-77。
- 休楚克，JR (2002)。用於產生三角形網格的 Delaunay 細化演算法。計算幾何：理論與應用，22 (1-3) : 21-74。
- 斯，H. (2004)。TetGen。3D Delaunay 四面體網格產生器。v.1.3。使用者手冊4、WIAS。
- Singha, K. 與 Gorelick, SM (2005)。用三維電可視化鹽水示蹤劑電阻率斷層掃描：場尺度空間矩分析。*水資源。資源。*，41 : W05023。
- Škvor, V. 與 Sattran, V. (1974)。CR 1:50.000, 11-14, Cheb 地質圖。技術的報告，捷克地質調查局，捷克共和國布拉格。
- 索末菲，A. (1967)。Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III: 電動力學。Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig，萊比錫，第四版。
- Špičáková, L.、Uličný, D. 和 Koudelková, G. (2000)。構造沉積演化晚漸新世和上新世之間的切布盆地（捷克共和國波希米亞西北部）：初步說明。螺柱。*地球物理學。地理。*，44 (4) : 556-580。
- 史皮策，K. (1995)。使用共軛法進行直流電阻率建模的 3-D 有限差分演算法門梯度方法。*地球物理學。J.國際。*，123 (3) : 903-914。
- 史皮策，K. (1998)。地表和地下源的三維直流靈敏度。*地球物理學。J.國際。*，134 (3) : 736-746。
- Spitzer, K. 與 Wurmstich, B. (1999)。3D 電阻率建模的速度和準確性。在 Oristaglio, M. 與 Spies, B.，編輯，三維電磁學，《地球物理發展》第 7 名。勘探地球物理學家協會。
- Südekum, W.、Grinat, M.、Epping, D.、Grelle, T. 與 Meyer, R. (2010)。垂直電子-strecken zur Erkundung von änderungen im Salz-Süßwasser-Übergangsbereich auf Borkum (德語)。布倫嫩堡，12:68-71。
- 杉本，Y. (1999)。淺層高解析度 2D 和 3D 電跨孔成像。這前線，18 (12) : 1425-1428。
- Švancara, J.、Gnojek, I.、Hubatka, F. 和 Dědáček, K. (2000)。地球物理場格局西波希米亞地球動力活躍區。螺柱。*地球物理學。地理。*，44 (2) : 307-326。

參考書目

Telford, W.、Geldart, L. 與 Sheriff, R. (1976)。應用地球物理學。劍橋大學出版社，第一版。

Tikhonov, AN 與 Arsenin, VY (1977)。不適定問題的解決。VH 溫斯頓 ans 兒子，華盛頓特區

托萊多，S.，陳，D.，和羅斯金，V. (2001) 。TAUCS – 稀疏線性求解器庫。
<http://www.tau.ac.il/~stoledo/taucs/>。

Tripp, A.、Hohmann, G. 與 Swift, C. (1984)。二維電阻率反演。地理-物理，49：1708-1717。

Ullrich, B.、Günther, T. 與 Rücker, C. (2008)。電阻率斷層掃描方法考古勘探。Posluschny, A.、Lambers, K. 和 Herzog, I. 編輯，感知的層次。第 35 屆考古學電腦應用與定量方法國際會議 (CAA) 論文集，柏林。

Vauhkonen, P.、Vauhkonen, M.、Savolainen, T. 與 Kaipio, J. (1999)。立體電基於完整電極模型的三維阻抗斷層掃描。IEEE 傳輸。生物醫學。工程師。, 46：1150-1160。

Verföhrt, R. (1993)。後驗誤差估計器和自適應網格細化的回顧。技術報告，蘇黎世大學應用數學研究所。

沃格爾，CR (1996)。L曲線正則化參數選擇不收斂方法。反問題。, 十二：535-547。

Wang, M.、Dickin, F. 與 Mann, R. (1999)。電阻層析成像感測系統適用於工業應用。化學。工程師。通訊。, 175 (1) : 49-70。

維金，A. (2004)。逆罪。arXiv, 數學-ph/0401050v1:1-8。

吳X.、肖Y.、齊C.和王T. (2003)。3D DC 二次電位的計算使用不完全 Choleski 共軛梯度法進行電阻率建模。地球物理學。前景。, 51：567-577。

徐SZ (2001)。地球物理學中的邊界元法。地球物理專題系列。勘探地球物理學會。

徐 S.-Z.、高 Z. 和趙 S.-k. (1988)。三維地形的積分公式電阻率測量建模。地球物理學, 53 (4) : 546-552。

Yi, M.-J.、Kim, J.-H. 與 Chung, S.-H. (2003)。增強最小平方法的分辨能力具有主動約束平衡的反演。地球物理學, 68 (3) : 931-941。

參考書目

- Yi, M.-J.、Kim, J.-H.、Song, Y.、Cho, S.-J.、Chung, S.-H. 與 Suh, J.-H.。 (2001)。三-使用電阻率資料對地下結構進行三維成像。*地球物理學。前景。*，49 (4) : 483-497。
- 張 J.、Mackie, RL 與 Madden, TR (1995)。3-D 電阻率正演建模和使用共軛梯度反演。*地球物理學*, 60 (5) : 1313-1325。
- 趙 S. 與 Yedlin, MJ (1996)。對 3-D 有限差分法的一些改進直流電阻率建模。*地球物理學*, 61 (5) : 1301-1307。
- 日丹諾夫, MS (2002)。*地球物理反演理論與正規化問題。中的方法* 地球化學和地球物理學。愛思唯爾，阿姆斯特丹 - 紐約 - 東京。
- Zhdanov, MS 與 Keller, GV (1994)。*地球物理探勘中的地電方法* 配給。地球化學和地球物理學方法。愛思唯爾、阿姆斯特丹 - 倫敦 - 紐約 - 東京。
- Zhou, B. 與 Greenhalgh, SA (2001)。有限元素三維直流電阻活動建模：準確性和效率考量。*地球物理學。J.國際。*，145 (3) : 679-688。
- 辛克維奇, OC (1977)。*有限元素法*。麥格勞希爾，倫敦，第三版。

參考書目

履歷

個人的

姓名 卡斯滕・呂克
出生日期 1973年7月2日
出生地 德國施默恩
國籍 德文

專業記錄

01/2011 - 柏林工業大學應用地球物理系研究助理

02/2000 - 11/2009 萊比錫大學地球物理與地質研究所研究助理

01/2000 萊比錫大學地球物理學文憑文憑論文：“Die Methode der Finiten Elemente mit adjustmentstr Gittererzeugung und Integration eines Mehrgitterverfahrens zum Lösen des gleichstromgeoelektrischen Vorwärtsproblems”

10/1994 - 01/2000 萊比錫大學地球物理學研究（德國萊比錫）

参考書目

致謝

我要感謝我的導師Franz Jacobs教授博士，給了我在地球物理與地質研究所工作的機會，並給了我發展和遵循自己想法的自由。感謝 Ugur Yaramanci 教授擔任第二裁判。

我特別感謝 Thomas Günther 博士在過去十年中進行的所有富有效果的討論和密切合作，我期待著進一步的合作和一些令人興奮的共同計畫。

我要感謝 Christina Flechsig 博士、Claudia Schütze 博士和 Anita Just 博士給我共同現場工作的機會，感謝 Sven Friedel 博士向我展示了地電學的世界。特別感謝我的前室友 Ulrich Serfling 博士進行了許多科學和非科學的討論。

另外，我要感謝 Heike Tröller 校對我的英語語言，感謝 le-tex 出版服務向我介紹了科學排版的基礎知識。

最後但並非最不重要的一點是，我對我的家人和朋友過去幾年的耐心表示感謝。