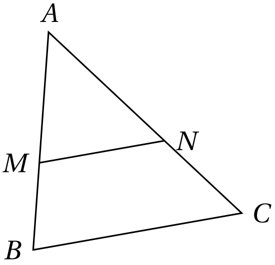
remi.angot@umontpellier.fr

Géométrie plane - Partie 2

Théorèmes et calculs

Théorème de Thalès

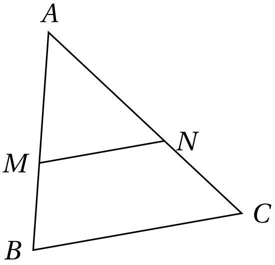
Si les points A, M, N sont alignés, et si les points A, N C sont alignés, et si de plus (MN) est parallèle à (BC) alors :



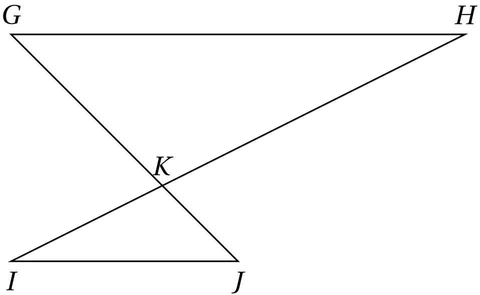
Les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont **proportionnelles**.

Théorème de Thalès

Si les points A, M, N sont alignés, et si les points A, N C sont alignés, et si de plus (MN) est parallèle à (BC) alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

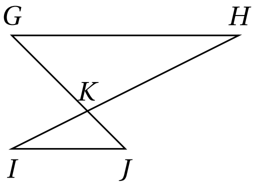


Les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont **proportionnelles**.



Les droites (GH) et (IJ) sont parallèles.
$GH = 9$ cm, $KI = 3$ cm, $KH = 5,4$ cm
Calculer IJ.

Théorème de Thalès



(GH) // (IJ)

$GH = 9$ cm, $KI = 3$ cm,

$KH = 5,4$ cm

Calculer IJ.

- Les points G, K, J sont alignés.
- Les points H, K, I sont alignés.
- (GH) // (IJ)

Donc d'après le théorème de Thalès,

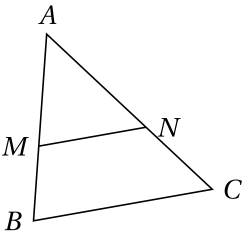
on a : $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{HK}{KI} = \dfrac{GH}{IJ}$

$$\frac{5,4 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{9 \text{ cm}}{IJ}$$

$$IJ = \frac{3 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}}{5,4 \text{ cm}} = 5 \text{ cm}$$

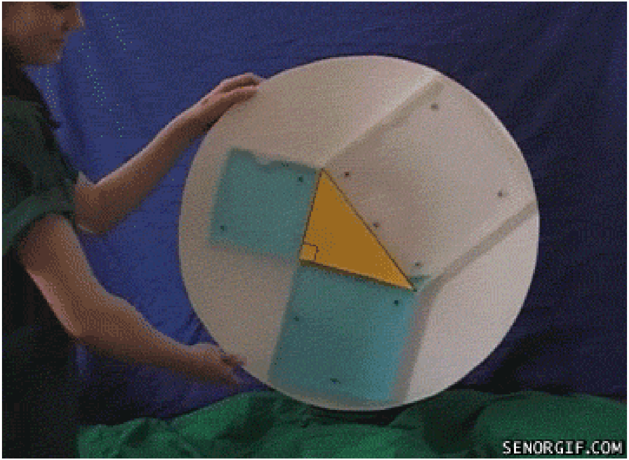
Réciproque du théorème de Thalès

Si A, M, N d'une part et si A, N C d'autre part sont alignés dans le même ordre, et si de plus $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles



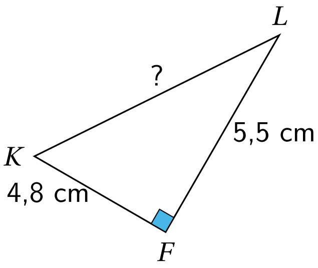
Cette propriété permet de démontrer que des droites sont parallèles à l'aide d'un calcul.

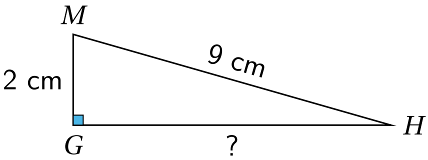
Théorème de Pythagore

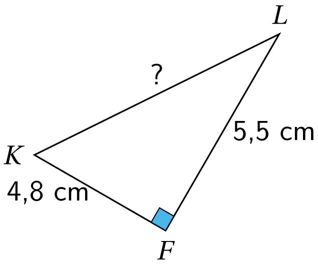


Théorème de Pythagore

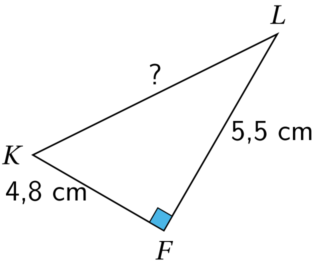
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.



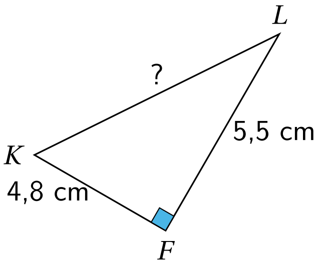




Le triangle KFL est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore on a :

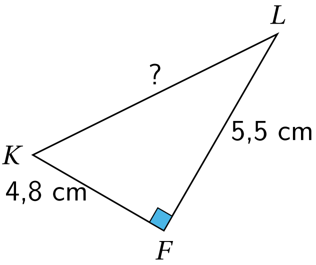


Le triangle KFL est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore on a : $KL^2 = KF^2 + FL^2$



Le triangle KFL est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore on a : $KL^2 = KF^2 + FL^2$

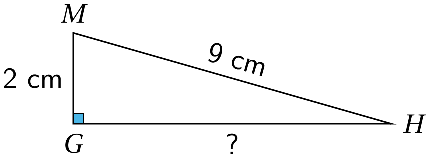
$KL^2 = (4,8\text{ cm})^2 + (5,5\text{ cm})^2 = 53,29\text{ cm}^2$



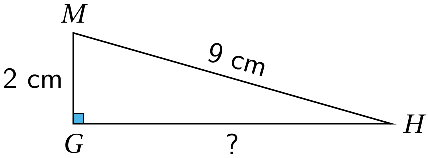
Le triangle KFL est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore on a : $KL^2 = KF^2 + FL^2$

$KL^2 = (4,8 \text{ cm})^2 + (5,5 \text{ cm})^2 = 53,29 \text{ cm}^2$

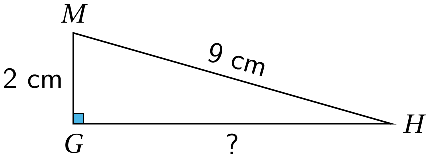
$KL = \sqrt{53,29} \text{ cm} = 7,3 \text{ cm}$



Le triangle GHM est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore on a :

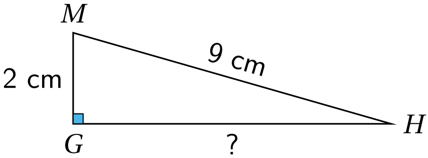


Le triangle GHM est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MH^2 = GM^2 + GH^2$



Le triangle GHM est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MH^2 = GM^2 + GH^2$

$(9\text{ cm})^2 = (2\text{ cm})^2 + GH^2$



Le triangle GHM est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MH^2 = GM^2 + GH^2$

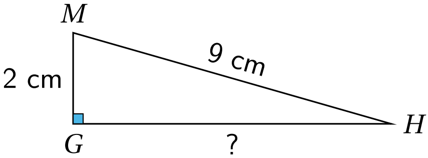
$(9\text{ cm})^2 = (2\text{ cm})^2 + GH^2$

$GH^2 = (9\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2 = 77\text{ cm}^2$

$GH = \sqrt{77}\text{ cm}$

Théorème de Pythagore

Application 2



Le triangle GHM est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MH^2 = GM^2 + GH^2$

$(9 \text{ cm})^2 = (2 \text{ cm})^2 + GH^2$

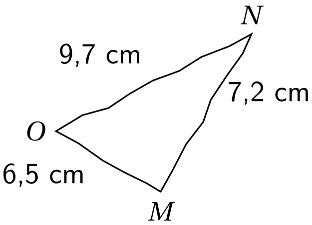
$GH^2 = (9 \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2 = 77 \text{ cm}^2$

$GH = \sqrt{77} \text{ cm} \approx 8{,}8 \text{ cm}$

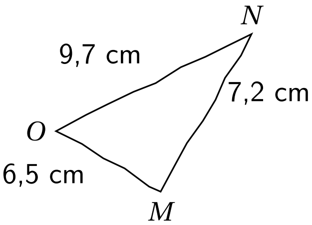
Pour faire l'arrondi au millimètre près on regarde le chiffre des dixièmes de millimètre.

Réciproque du théorème de Pythagore

Un triangle avec ces dimensions est-il rectangle ?

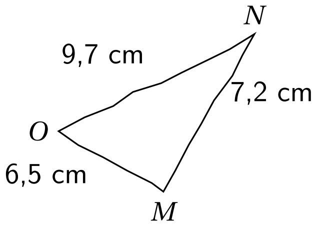


Un triangle avec ces dimensions est-il rectangle ?



D'une part : $NO^2 = (9,7\text{ cm})^2 = 94,09\text{ cm}^2$

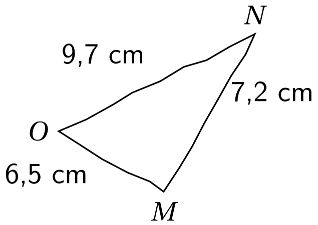
Un triangle avec ces dimensions est-il rectangle ?



D'une part : $NO^2 = (9,7\text{ cm})^2 = 94,09\text{ cm}^2$

D'autre part : $MO^2 + MN^2 = (6,5\text{ cm})^2 + (7,2\text{ cm})^2 = 94,09\text{ cm}^2$

Un triangle avec ces dimensions est-il rectangle ?



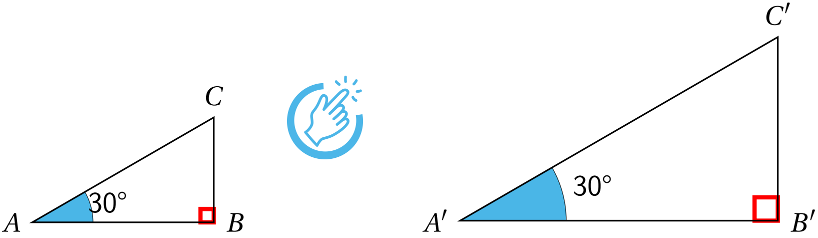
D'une part : $NO^2 = (9,7 \text{ cm})^2 = 94,09 \text{ cm}^2$

D'autre part : $MO^2 + MN^2 = (6,5 \text{ cm})^2 + (7,2 \text{ cm})^2 = 94,09 \text{ cm}^2$

On constate que $NO^2 = MO^2 + MN^2$ donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** le triangle MNO est rectangle en M.

Trigonométrie dans le triangle rectangle

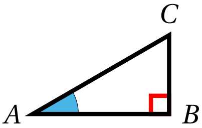
Lorsqu'on fixe un angle aigu dans un triangle rectangle, on obtient des triangles **semblables**.



On a donc $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ soit $AC \times A'B' = A'C' \times AB$ ou encore $\dfrac{A'B'}{A'C'} = \dfrac{AB}{AC}$.

Cela signifie que ce rapport ne dépend pas du triangle mais seulement de l'angle. On le définit comme le **cosinus** de l'angle.

Fonctions trigonométriques

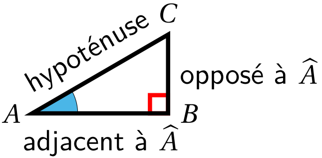


$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} =$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} =$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}} =$$

Fonctions trigonométriques

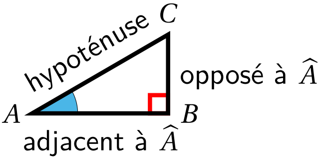


$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} =$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}} =$$

Fonctions trigonométriques

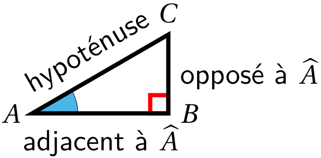


$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}} =$$

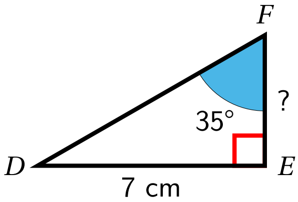
Fonctions trigonométriques



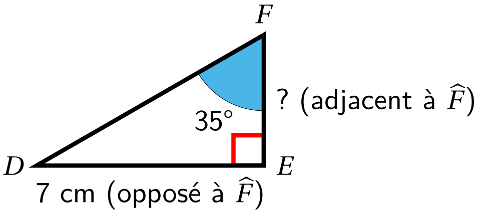
$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

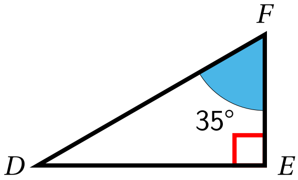
$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{A}} = \frac{AB}{AC}$$

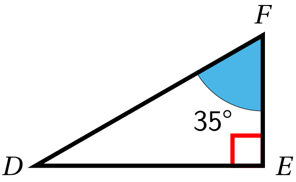

F
?
35°
D
E
7 cm

Déterminer une longueur manquante



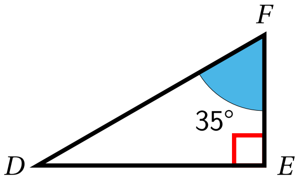


Le triangle DEF est rectangle en E, on a donc $\tan\widehat{F} = \dfrac{DE}{DF}$.



Le triangle DEF est rectangle en E, on a donc $\tan\widehat{F} = \dfrac{DE}{DF}$.

$\tan(35°) = \dfrac{7 \text{ cm}}{EF}$



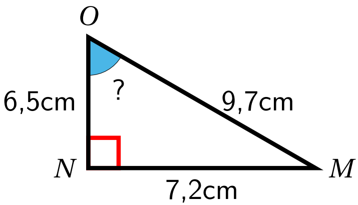
Le triangle DEF est rectangle en E, on a donc $\tan \widehat{F} = \frac{DE}{DF}$.

$\tan(35°) = \frac{7 \text{ cm}}{EF}$

$EF = \frac{7}{\tan(35°)} \approx 10$ cm (arrondi au millimètre près)

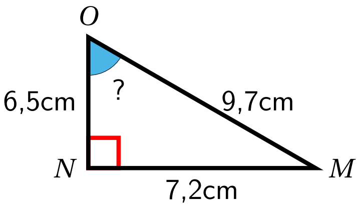
Utilisation des fonctions trigonométriques

Déterminer une mesure d'angle



Utilisation des fonctions trigonométriques

Déterminer une mesure d'angle

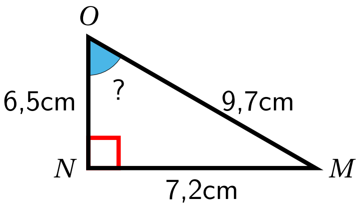


Le triangle MNO est rectangle en O donc (au choix) :

$\cos\widehat{O} = \dfrac{NO}{MO}$ $\sin\widehat{O} = \dfrac{NM}{NO}$ $\tan\widehat{O} = \dfrac{NM}{NO}$

Utilisation des fonctions trigonométriques

Déterminer une mesure d'angle



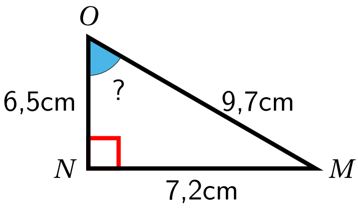
Le triangle MNO est rectangle en O donc (au choix) :

$$\cos \widehat{O} = \frac{NO}{MO} \qquad \sin \widehat{O} = \frac{NM}{NO} \qquad \tan \widehat{O} = \frac{NM}{NO}$$

$$\cos \widehat{O} = \frac{6,5}{9,7}$$

Utilisation des fonctions trigonométriques

Déterminer une mesure d'angle



Le triangle MNO est rectangle en O donc (au choix) :

$\cos\widehat{O} = \dfrac{NO}{MO}$ $\sin\widehat{O} = \dfrac{NM}{NO}$ $\tan\widehat{O} = \dfrac{NM}{NO}$

$\cos\widehat{O} = \dfrac{6,5}{9,7}$ d'où $\widehat{O} \approx 48°$ (arrondi au degré près)

On utilise la fonction inverse du cosinus (arccos ou $\cos^{-1}$). On tape acs$\left(\frac{6,5}{9,7}\right)$.