Практический линал. Лабораторная работа № 2

Троицкая Тамара 368924

12 октября 2023 г.

Задание 1. Придумайте. Придумайте матрицы 2×2, которые задают:

Готовы: 12, 13, 14

Только проверка осталась: 1, 2, 3, 4

Проверка и графики: 6, 7, 8, 11

Отдельно: 5(нужны две стрелочки), 9(корни, пи), 10, 15-16 (не сделано вообще совсем)

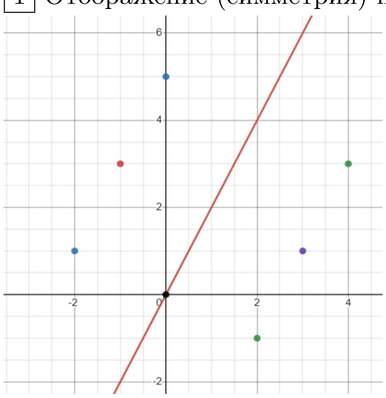
Подумать: второе не должно быть симметричным?

Todo:

1. добавить ответы в рамочке
2. добавить графики вручную
3. написать проверку!! в том числе №1

1. Содержание с навигацией
2. Может подрисовать стрелочки на картинках, какая точка во что переходит
3. Прокомментировать некоторые матрицы (матрица поворота (3, 5), матрица последовательных преобразований (5))
4. Подписать чему равны a, b, c, d
5. Поподробнее расписать, как строить матрицы B, C
6. Вставить код умножения матриц

$\boxed{1}$ Отображение (симметрия) плоскости относительно y = ax (a = 2)



Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = C$

$A = C \cdot B^{-1}$

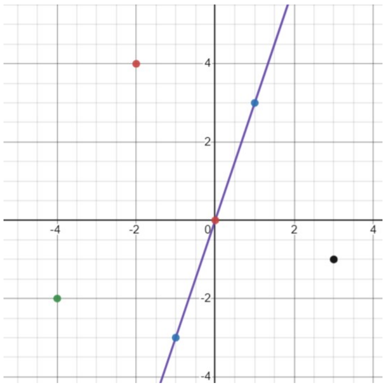
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Отображение всей плоскости в прямую y = bx (b = 3)



Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}$

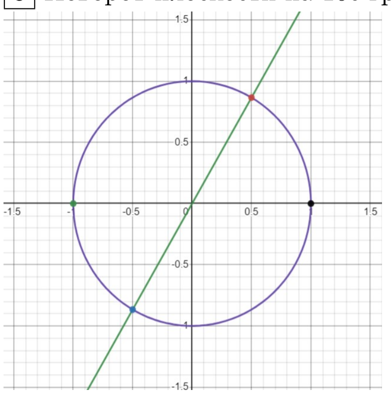
$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ Поворот плоскости на 10с градусов против часовой стрелки.



Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

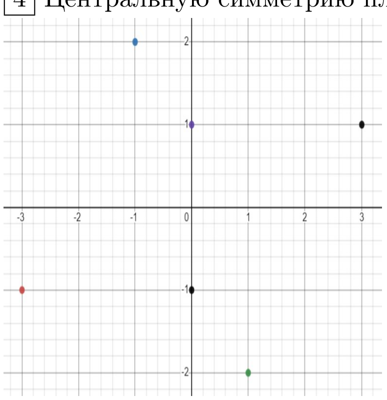
$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.



Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-3 & -1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$

$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой y = ax, потом поворот на 10d градусов по часовой стрелке.

$\boxed{6}$ Отображение, которое переводит прямую y = 0 в y = ax и прямую x = 0 в y = bx.

Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$

$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 1/3\\ 2 & 1\end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix}0 & 6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ Отображение, которое переводит прямую y = ax в y = 0 и прямую y = bx в x = 0.

Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix}$

$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & -2\end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix}-1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ Отображение, которое меняет местами прямые y = ax и y = bx.

Примеры преобразования точек:

$\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1.5 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}$

$C \cdot B^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}-1 & 5/6\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Для проверки

$\begin{pmatrix}-1 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1.5 & -3\end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c.

$\boxed{10}$ Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d.

$\boxed{11}$ Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой y = 0 или y = x.

Пусть $v_1 = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$,

$v_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 3/2$

A $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ = -1 $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} = 3/2 \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1.5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1.5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{12}$ Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Это Жорданова клетка для $\lambda = 2$ с геометрической кратностью 1. Все собственные векторы пропорциональны $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть коллинеарны. (Если говорить безграмотно, у неё только один собственный вектор)

$\boxed{13}$ Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).

$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}}$

$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 9 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)^2 + 9 = 0$

$\lambda_1 = -2 - 3i \ v_1 = \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2 + 3i \ v_2 = \begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{14}$ Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$

$\lambda = 4$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$

$\forall x, y$

$\boxed{15}$ Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: AB = BA.

$\boxed{16}$ Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: AB = BA. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.