

Практический линал. Лабораторная работа № 2

Троицкая Тамара Андреевна, 368924

21 октября 2023 г.

Если Вам совсем лень читать отчёт, зайдите на стр [23](#) и [24](#), пожалуйста.

В прошлый раз я написала код на C, но не заморочилась с оформлением. На этот раз я написала на C++ код для умножения матриц и, как видите, оформила отчёт в латехе. Основные функции из кода я вставлю в конце отчёта, чтобы не смущать людей так сразу. Для визуализации использовала python, библиотеку matplotlib.pyplot. При желании все исходники можно найти здесь:

https://github.com/cgsg-tt6ITMO/s3_practlinal_lab2

В первом задании я рисовала графики в desmos, чтобы показать, откуда берутся точки. Хорошая визуализация представлена в третьем задании, хотя иногда она почти дублируется.

Вывод. Эта лаба заняла у меня 30 часов. Я освоила латех, построение графиков с помощью пайтона, выделение памяти в c++, наглядно увидела, что собственные вектора преобразуются в коллинеарные им самим. Несколько раз писала автоматизацию муторных процессов (нахождение матрицы по двум точкам и их образам, запись матрицы в формате латеха, нахождение образа многоугольника и его изображение в пайтоне). Я стала ценить оформление, оно создаёт иное впечатление от работы. И вообще латех позволяет более понятно объяснить все ходы. Также я стала меньше брезговать пайтоном. И вообще эта лаба помогла мне отвлечься от плохих мыслей и послушать много музыки.

Enjoy!

NB $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$, $d = 9$.

Содержание

1	Задание 1. Придумайте.	3
1.1	1 Отображение (симметрия) плоскости относительно $y = ax$ ($a = 2$)	3
1.2	2 Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ ($b = 3$)	3
1.3	3 Поворот плоскости на $10c$ (60) градусов против часовой стрелки.	4
1.4	4 Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.	4
1.5	5 Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$ ($y = 2x$), потом поворот на $10d$ (90) градусов по часовой стрелке.	5
1.6	6 Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ ($y = 2x$) и прямую $x = 0$ в $y = bx$ ($y = 3x$).	6
1.7	7 Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ ($y = 2x$) в $y = 0$ и прямую $y = bx$ ($y = 3x$) в $x = 0$.	7
1.8	8 Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$ ($y = 2x$ и $y = 3x$).	7
1.9	9 Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c ($c = 6$).	8
1.10	10 Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d ($d = 9$).	8

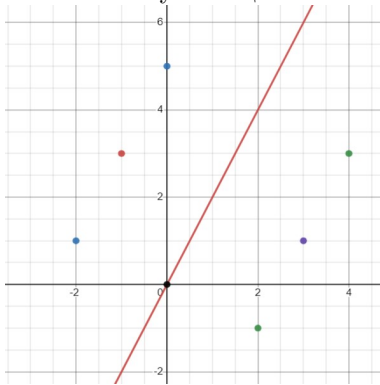
1.11	11	Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.	9
1.12	12	Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.	9
1.13	13	Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).	9
1.14	14	Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.	10
1.15	15	Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$.	10
1.16	16	Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.	11
2		Задание 2. Проанализируйте.	12
2.1	•	Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.	12
2.2	•	Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.	13
2.3	•	Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.	15
2.4	•	В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?	15
3		Задание 3. Визуализируйте.	16
3.1	1)	!	16
3.2	2)		17
3.3	3)		17
3.4	4)		18
3.5	5)		18
3.6	6)		19
3.7	7)		19
3.8	8)		20
3.9	9)		20
3.10	10)		20
3.11	11)	!	21
3.12	12)	!	21
3.13	13)		22
3.14	14)	!	22
3.15	15)	!	23
3.16	16)	!	24
4		Приложение (код)	25
4.1		Вспомогательные функции для подсчёта определителя (с++)	25
4.2		Функции для работы с матрицами для первого задания (с++)	26
4.3		Функции для автоматического подсчёта образа многоугольника (python)	28

1 Задание 1. Придумайте.

Придумайте матрицы 2×2 , которые задают:

1.1 1 Отображение (симметрия) плоскости относительно $y = ax$ ($a = 2$)

В начало: [1](#) Визуализация: [16](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

где матрица A - искомая матрица преобразования, столбцы матрицы B - это исходные векторы, а столбцы матрицы C - это полученные в результате преобразования векторы.

$$A = C \cdot B^{-1}$$

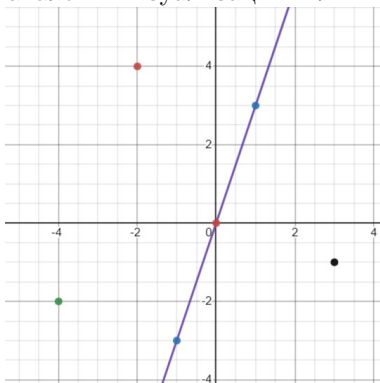
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0.6) \cdot (-2) + 0.8 \cdot 1 \\ 0.8 \cdot (-2) + 0.6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.2 2 Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$ ($b = 3$)

В начало: [1](#) Визуализация: [17](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

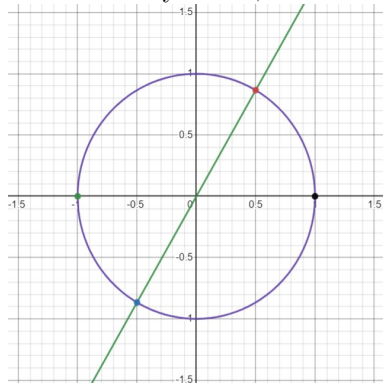
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 3 + 0.3 \cdot (-1) \\ 0.3 \cdot 3 + 0.9 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3 3 Поворот плоскости на 10с (60) градусов против часовой стрелки.

В начало: [1](#) Визуализация: [17](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Вспомним, что матрица поворота на α :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

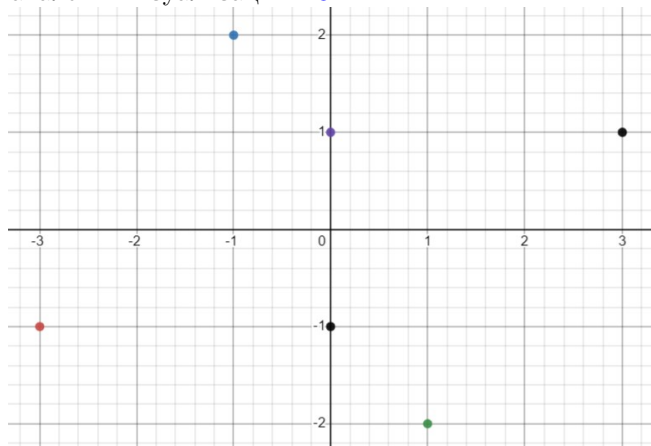
Полученный нами результат согласуется с теорией.

Проверка:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4 4 Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.

В начало: [1](#) Визуализация: [18](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

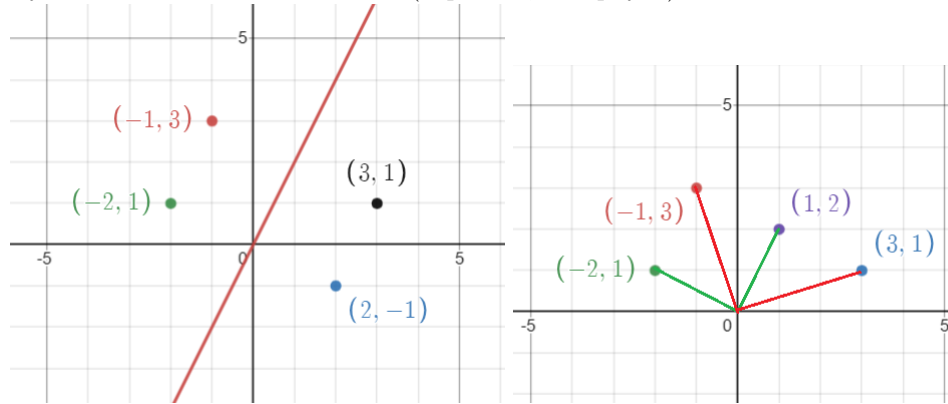
Проверка:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.5 5 Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$ ($y = 2x$), потом поворот на 10d (90) градусов по часовой стрелке.

В начало: [1](#) Визуализация: [18](#)

Будем искать точки в два этапа (отразить, повернуть):



Запишем преобразование векторов в два этапа:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

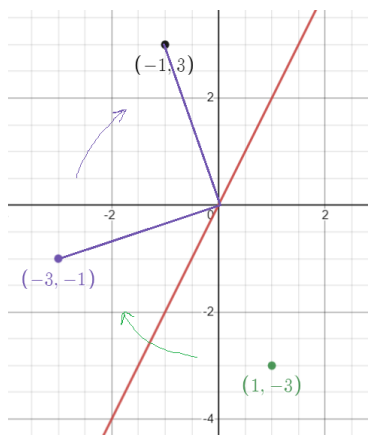
$$C \cdot B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix}}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix}$$

То есть эту матрицу можно получить последовательным умножением матрицы поворота (см. п. 3) и матрицы отражения (см. п. 1). Порядок именно такой, потому что при умножении этой конструкции на вектор сначала на него умножится матрица отражения, находящаяся правее, а потом уже матрица поворота. Можно сказать, что действие произойдёт справа налево.

Проверка:

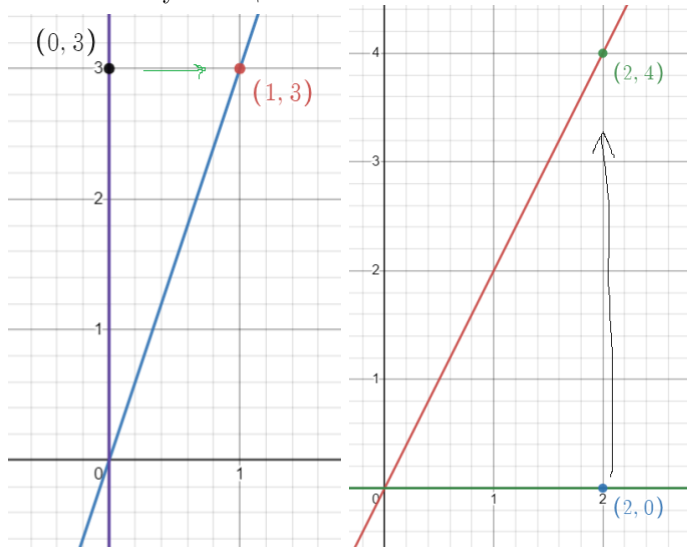


$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.6 6 Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ ($y = 2x$) и прямую $x = 0$ в $y = bx$ ($y = 3x$).

В начало: [1](#) Визуализация: [19](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

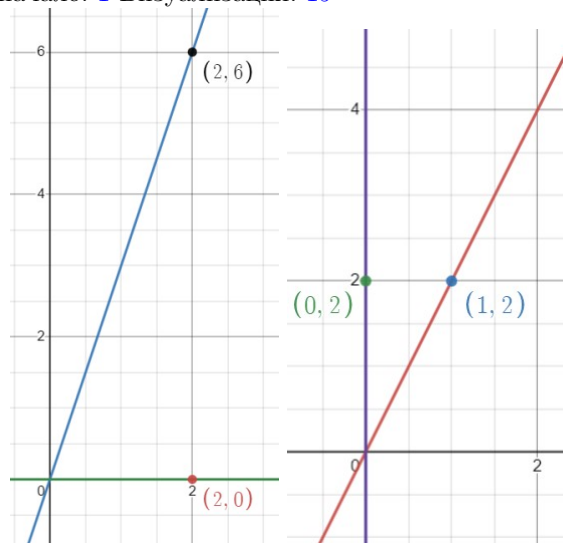
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1.7 7 Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ ($y = 2x$) в $y = 0$ и прямую $y = bx$ ($y = 3x$) в $x = 0$.

В начало: [1](#) Визуализация: [19](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

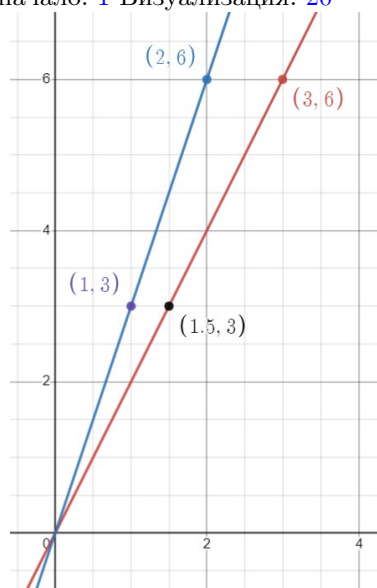
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.8 8 Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$ ($y = 2x$ и $y = 3x$).

В начало: [1](#) Визуализация: [20](#)



Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B^{-1} = A$$

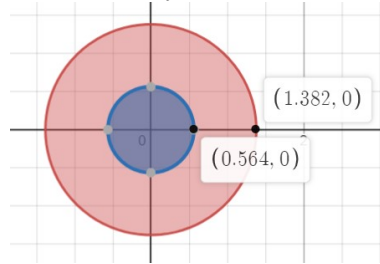
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 5/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.9 9 Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c ($c = 6$).

В начало: [1](#) Визуализация: [20](#)



$$\pi r^2 = 1$$

$$r = 1/\sqrt{\pi}$$

$$\pi R^2 = c$$

$$R = \sqrt{c/\pi} = \sqrt{6/\pi}$$

Примеры преобразования точек:

$$\begin{pmatrix} 0 & r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\pi} \\ 1/\sqrt{\pi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6/\pi} \\ \sqrt{6/\pi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}}$$

1.10 10 Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d ($d = 9$).

В начало: [1](#) Визуализация: [20](#)

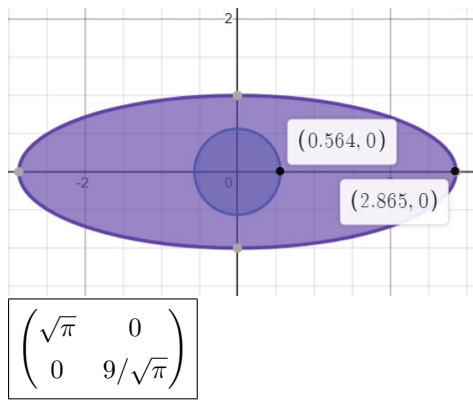
$$\pi r^2 = 1$$

$$r = 1/\sqrt{\pi}$$

Допустим, некруг это эллипс. Площадь эллипса вычисляется как $S = ab\pi$. Например, $a = 9/\pi$, $b = 1$. Тогда по оси ox фигура растягивается в $1 : (1/\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$ раз, по оси oy в $\frac{9}{\pi} : \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 9/\sqrt{\pi}$ раз.

То есть собственные векторы: $v_1 = (1, 0)$ и $v_2 = (0, 1)$,

а соответствующие им собственные числа: $\lambda_1 = \sqrt{\pi}$, $\lambda_2 = 9/\sqrt{\pi}$



1.11 [11] **Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.**

В начало: [1](#) Визуализация: [21](#)

$$\text{Пусть } v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \lambda_1 = -1,$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \lambda_2 = 3/2$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1.5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1.5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

1.12 [12] **Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.**

В начало: [1](#) Визуализация: [21](#)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Это Жорданова клетка для $\lambda = 2$ с геометрической кратностью 1. Все собственные векторы пропорциональны $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть коллинеарны. (Если говорить безграмотно, у неё только один собственный вектор)

1.13 [13] **Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).**

В начало: [1](#) Визуализация: [22](#)

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 9 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 2)^2 + 9 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 - 3i \quad v_1 = \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 + 3i \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.14 14 Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

В начало: [1](#) Визуализация: [22](#)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$\forall x, y$$

1.15 15 Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$.

В начало: [1](#) Визуализация: [23](#)

Отразим относительно прямой $y = x$ и повернём на 90° против часовой стрелки.

Матрица поворота на 90° против часовой стрелки:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица отражения относительно прямой $y = x$:

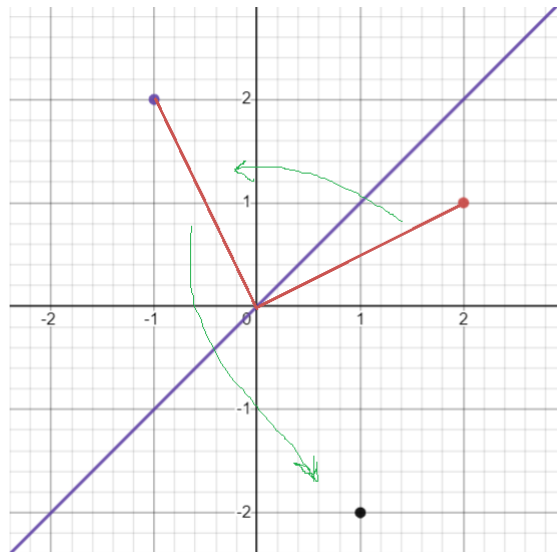
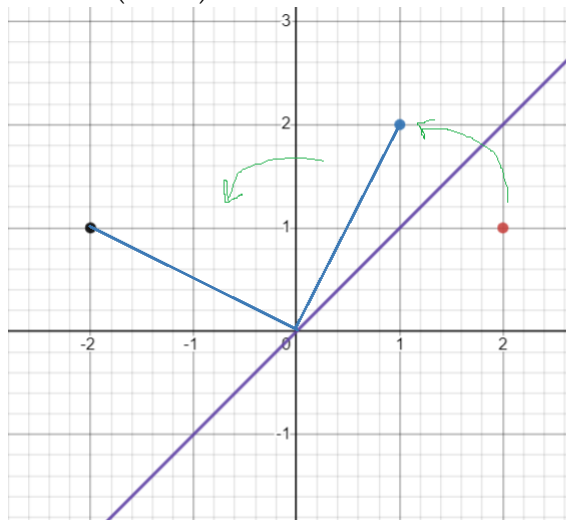
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отразить и потом повернуть:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Повернуть и потом отразить:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Слева отразили и повернули, справа повернули и отразили. Результаты не совпали.

1.16 16 Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.

В начало: [1](#) Визуализация: [24](#)

Сделать два поворота. Сначала на 60° , потом на 30° . И в обратной последовательности.

Матрица поворота на 60° против часовой стрелки:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Матрица поворота на 30° против часовой стрелки:

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что в обоих случаях получилась матрица поворота на 90° против часовой оси. Это согласуется с теорией (и здравым смыслом) – порядок выполнения двух поворотов неважен, повороты "складываются".

2 Задание 2. Проанализируйте.

2.1 • Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.

В начало: [1](#)

$$1) \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1.25 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Получаем образ:

$$\text{im}(A) = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}\right] = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$\text{nullity}(A) = 0$$

$$\ker f(A) = \{0\}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 1$$

$$\text{nullity}(A) = 1$$

$$\text{im}(A) = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Ядро: } 0.1x + 0.3y = 0$$

$$\ker f(A) = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$13) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -6.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$\text{im}(A) = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{nullity}(A) = 0$$

$$\ker f(A) = \{0\}$$

$$14) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$\text{nullity}(A) = 0$$

Образ – любой вектор длины 2.

$$\text{Im}(A) = \text{Span}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\ker f(A) = \{0\}$$

2.2 • Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

В начало: [1](#)

$$1) \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -0.6 - \lambda & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 0.6) \cdot (\lambda - 0.6) - 0.64 = \lambda^2 - 0.36 - 0.64 = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0.1 - \lambda & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 - \lambda \end{pmatrix} = (0.1 - \lambda) \cdot (0.9 - \lambda) - 0.9 = \lambda^2 - \lambda + 0.9 - 0.9 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{3}i+1}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}i+1}{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} -1 & 5/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$11) \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.5$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$13) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 - 3i, \lambda_2 = -2 + 3i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$14) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$15)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$16)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{3}i+1}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}i+1}{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 • Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.

В начало: [1](#)

$$1) \det \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = -0.36 - 0.64 = -1$$

$$2) \det \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = 0$$

$$3) \det \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 1/4 + 3/4 = 1$$

$$4) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$5) \det \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} = -0.64 - 0.36 = -1$$

$$9) \det \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = 6$$

$$10) \det \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 9/\sqrt{\pi} \end{pmatrix} = 9/\pi$$

2.4 • В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

В начало: [1](#)

Точно да: 1, 2, 4, 5, 9, 10 (если делать эллипс), 11, 14.

(точно будет 2 вещественных собственных вектора и вещественные собственные числа, собственные векторы ортогональные)

Точно не: 3, 6, 7, 8, 12, 13, 15, 16.

3 Задание 3. Визуализируйте.

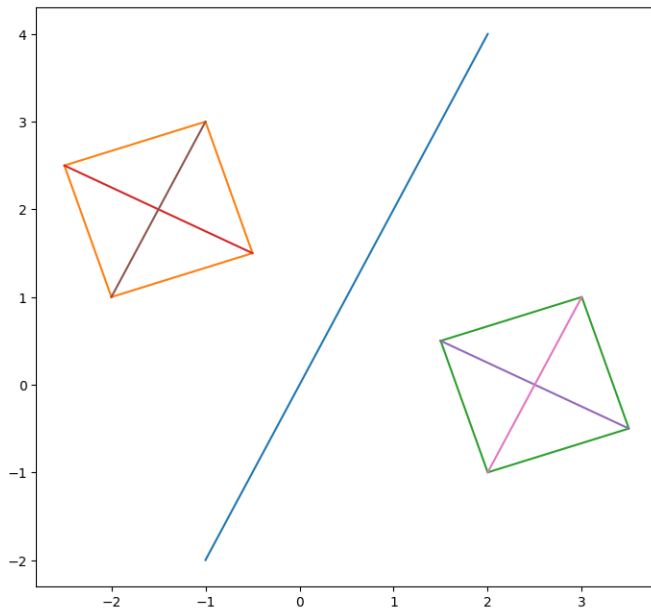
Используя MATLAB или Python, выполните визуализацию полученных линейных преобразований. Для этого:

- Задайте произвольную фигуру как многоугольник с вершинами в выбранных вами точках. Постройте её графическое изображение. Это – оригинал.
- Найдите образ каждой вершины многоугольника при линейном отображении рассматриваемой матрицей. Постройте графическое изображение многоугольника на полученных (отображённых) вершинах. Это – результат преобразования, образ.
- Выполните указанную визуализацию для всех отображений из первого задания.
- При работе с пунктами 15 и 16 сделайте визуализацию всех рассматриваемых отображений, а именно: А, В, АВ и ВА.
- Для пунктов 1, 11, 12, 14, 15, 16 добавьте на картинку прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.

В отображениях, где поворот или отражение производится относительно центра, я добавила оси. Восклицательным знаком пометила те задачи, в которых нужно также изобразить собственные векторы.

3.1 1) !

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [3](#) Собственные векторы: [13](#)

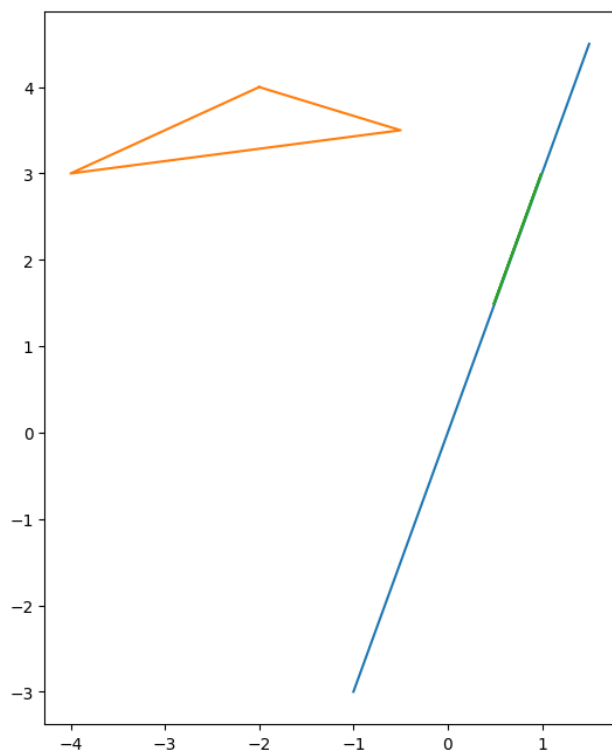


Зелёный – оригинал, рыжий – его образ. Но вообще они переходят друг в друга. Синия прямая – ось симметрии.

Фиолетовый и красный, розовый и коричневый соответственно коллинеарны собственным векторам матрицы этого отображения, поэтому они не изменили направления.

3.2 2)

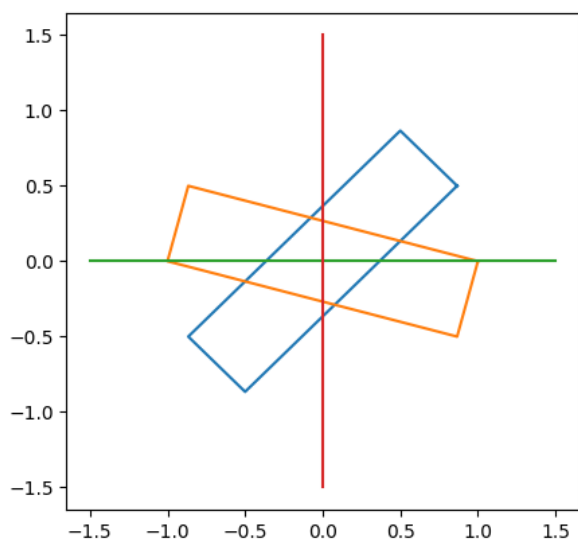
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [3](#)



Рыжий – оригинал, он перешёл в зелёный отрезок.

3.3 3)

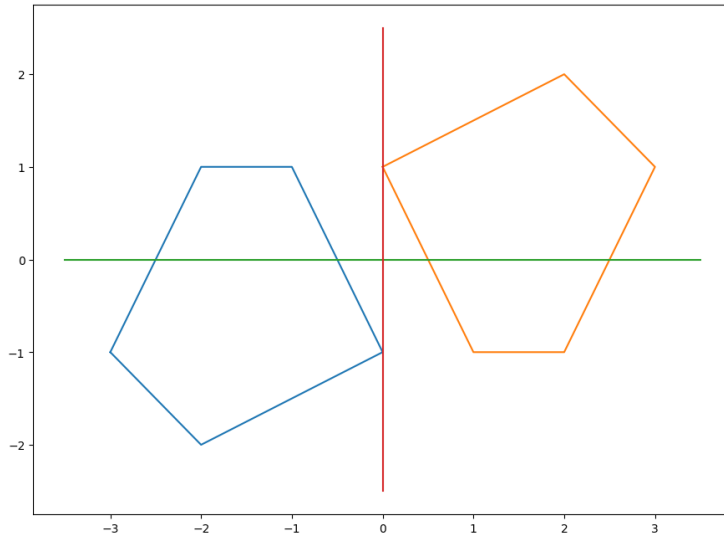
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [4](#)



Рыжий – оригинал, синий – его образ

3.4 4)

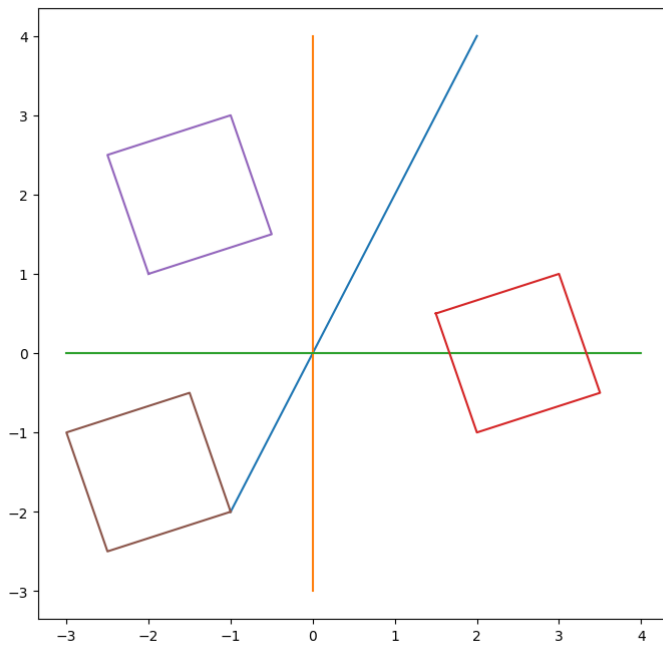
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [4](#)



Рыжий – оригинал, синий – его образ (но они переходят друг в друга вообще)

3.5 5)

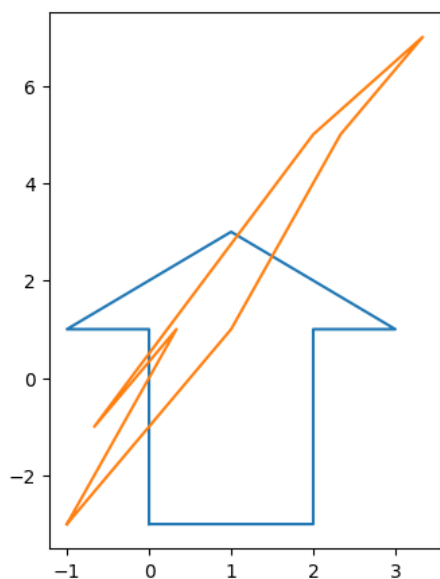
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [5](#)



Красный квадратик отразили, получили фиолетовый. Фиолетовый повернули на 90 градусов – получили коричневый.

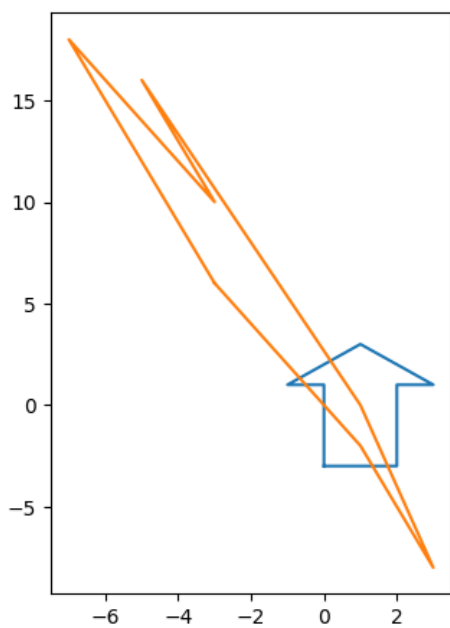
3.6 6)

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [6](#)



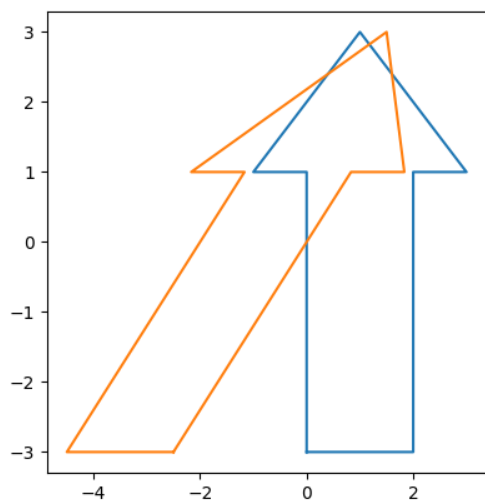
3.7 7)

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [6](#)



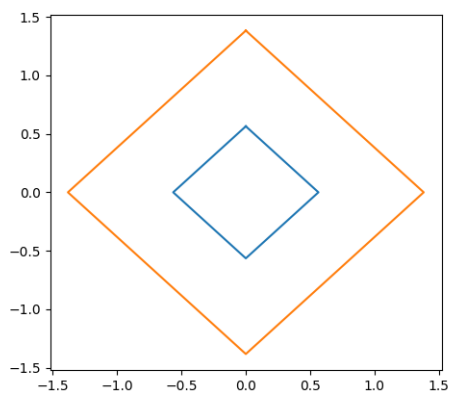
3.8 8)

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [7](#)



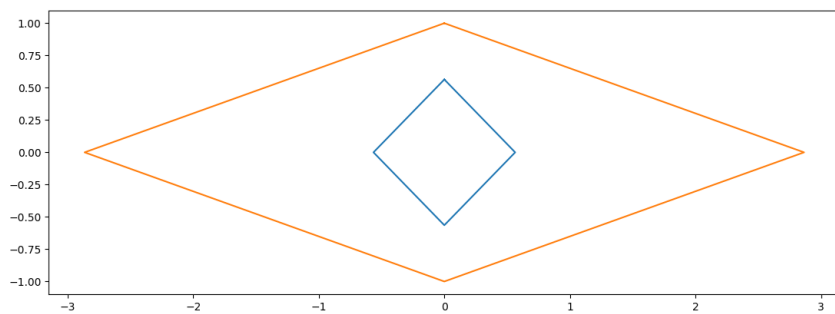
3.9 9)

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [8](#)



3.10 10)

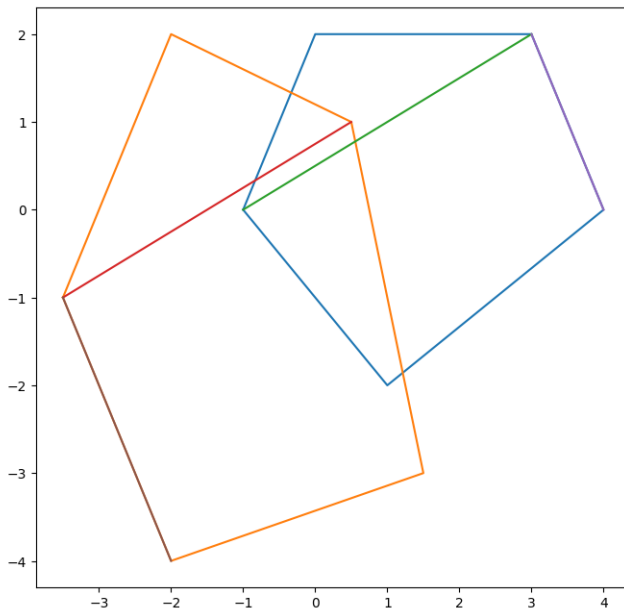
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [8](#)



Синий – оригинал, рыжий – образ.

3.11 11) !

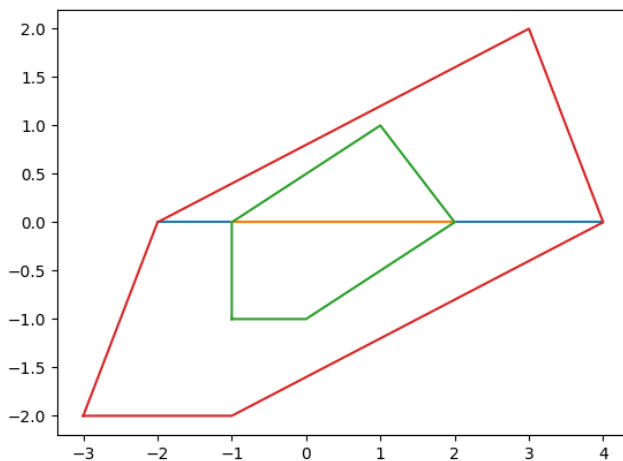
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [9](#) Собственные векторы: [13](#)



Синий – оригинал, рыжий – его образ. Причём зелёный и красный отрезки остались параллельными, аналогично – фиолетовое и коричневое рёбра. Это произошло потому, что они коллинеарны собственным векторам матрицы данного отображения и не меняют направления, меняют только длину в соответствии с собственными числами.

3.12 12) !

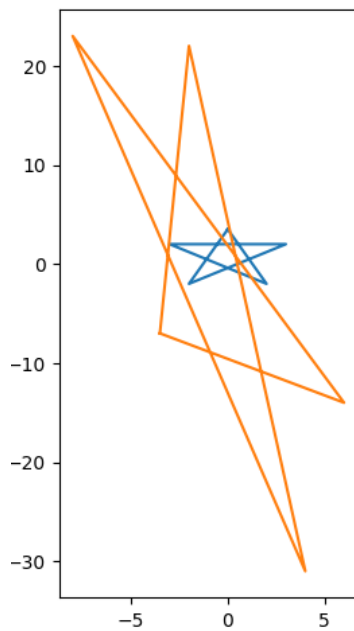
В начало: [1](#) К описанию матрицы: [9](#) Собственные векторы: [13](#)



Зелёный – оригинал, красный – его образ. У данного отображения только один собственный вектор, и вот, не изменили направление только рыжий отрезок, перейдя в синий.

3.13 13)

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [9](#)

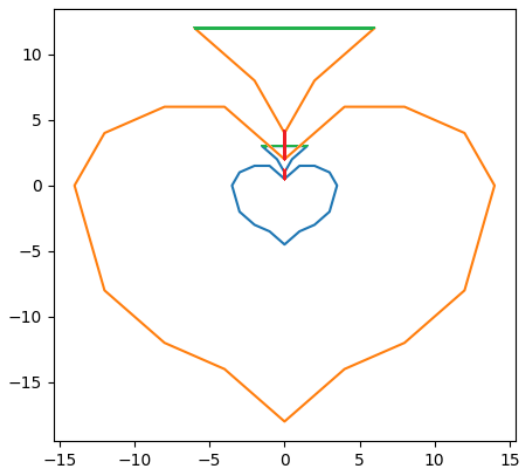


У этого отображения нет вещественных собственных векторов, то есть все векторы будут поворачиваться. Оригинал синий, его образ рыжий.

3.14 14) !

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [10](#) Собственные векторы: [14](#)

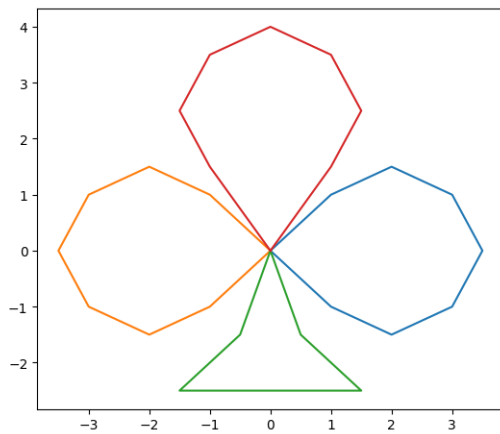
Можно заметить, что перемычка, соединяющая «треугольник» и «типо сердечко» не поменяла направления. Также горизонтальная часть «треугольника» не поменяла своего направления. Эти отрезки коллинеарны собственным векторам. (отмечены красным и зелёным)



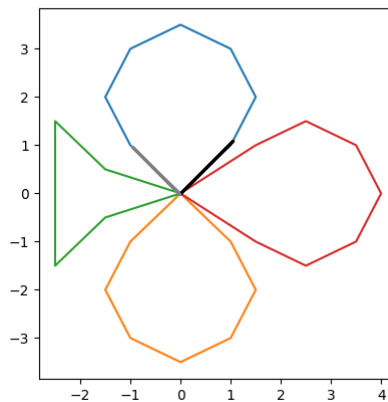
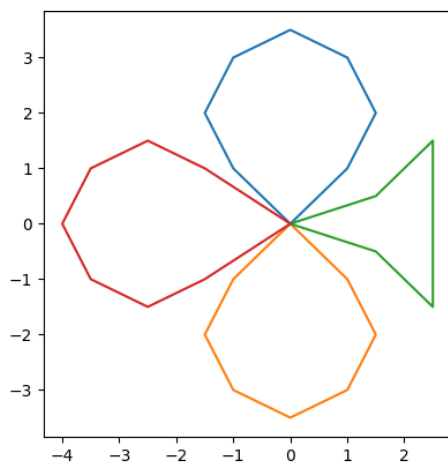
3.15 15) !

В начало: [1](#) К описанию матрицы: [10](#) Собственные векторы: [14](#)

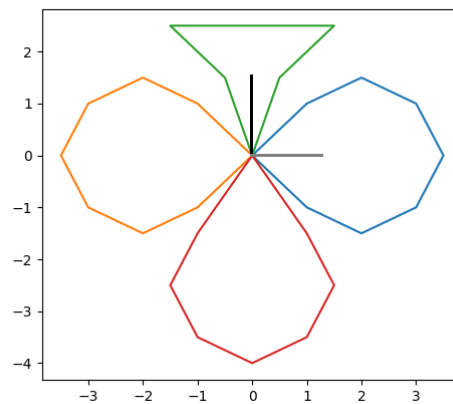
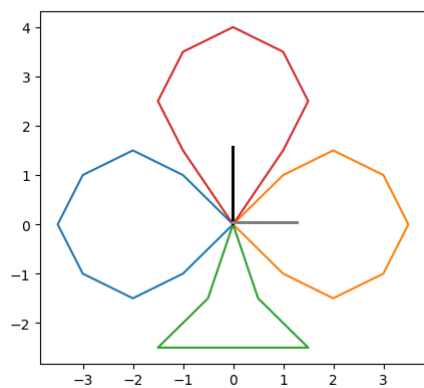
Исходное изображение:



Действие матриц A (нет вещ. собств. в-в), B (серый и чёрный)



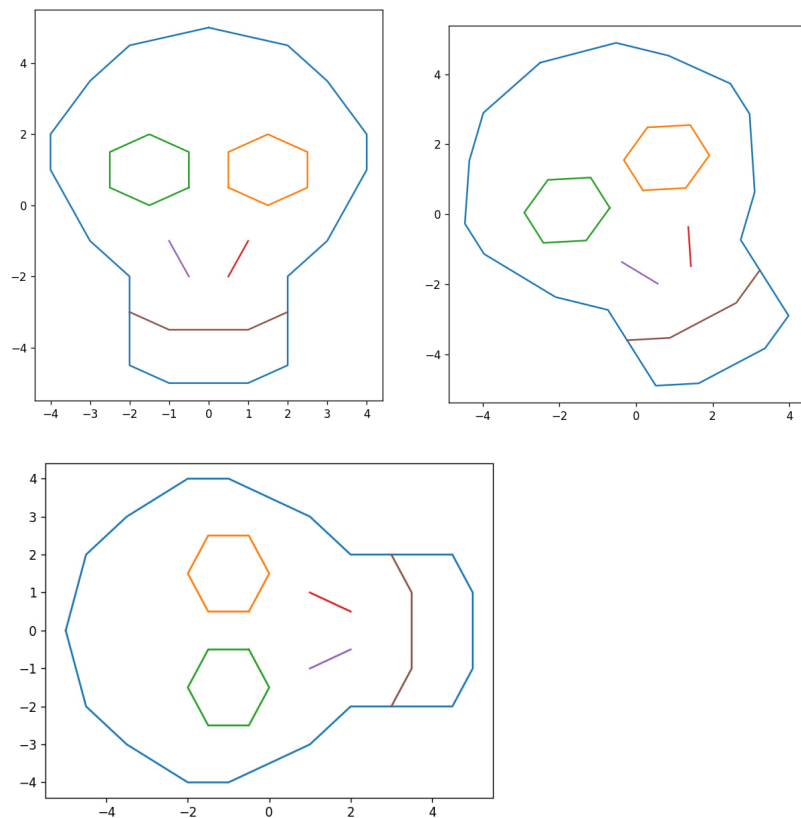
Действие матриц AB и BA (отражение по вертикали и по горизонтали)



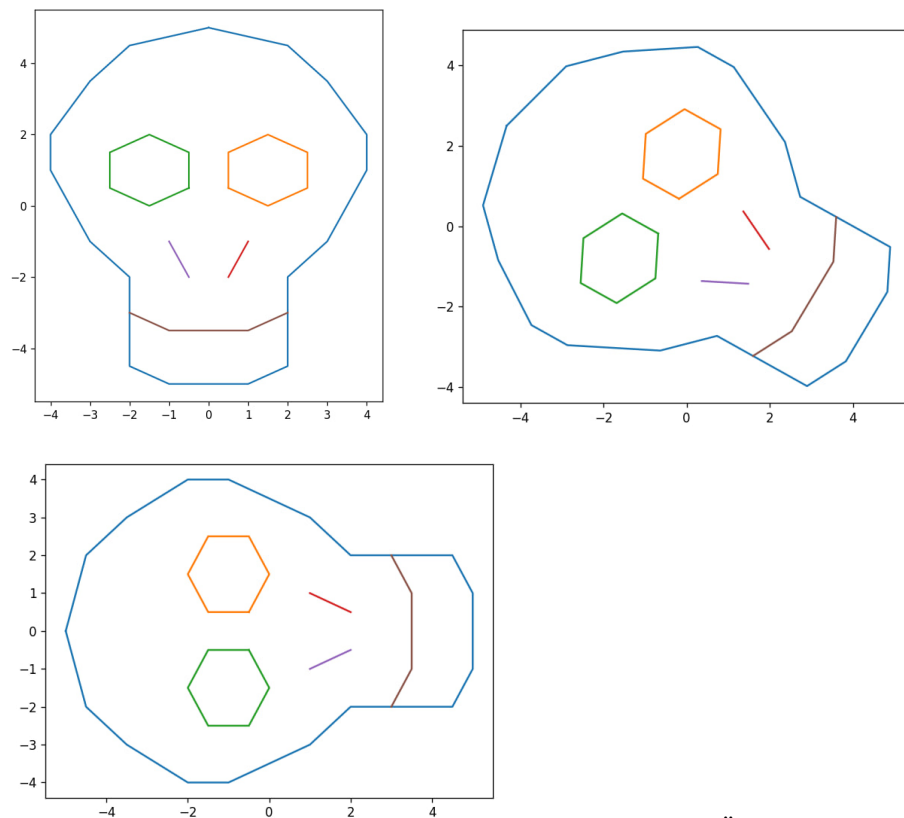
3.16 16) !

Собственные векторы этих отображений комплексные, поэтому изобразить их не представляется возможным.

Сначала на 30, потом на 60:



Сначала на 60, потом на 30:



я вертела это всё короче

4 Приложение (код)

В начало: [1](#).

А здесь мой уважаемый читатель может наконец увидеть небольшую выжимку из самых важных функций моего проекта.

4.1 Вспомогательные функции для подсчёта определителя (с++)

```
144  /* Calculates minor of the matrix.
145  *... Arguments:
146  *... - pointer to the matrix nxm:
147  *... - matrix* M.
148  *... - indexes of row and column to be deleted:
149  *... - size_t x, size_t y.
150  *... Returns:
151  *... (matrix) - minor matrix (n-1)x(m-1)
152  */
153  matrix::math::matr_minor(matrix* M, size_t x, size_t y) {
154      size_t n = M->n, m = M->m;
155      double** a = M->arr;
156      double** res = allocate_memory(n - 1, m - 1);
157      size_t i_m = 0, j_m;
158      for (size_t i = 0; i < n; i++) {
159          if (i == x) continue;
160          j_m = 0;
161          for (size_t j = 0; j < m; j++) {
162              if (j != y && i_m < (n - 1) && j_m < (m - 1)) {
163                  res[i_m][j_m] = a[i][j];
164                  j_m++;
165              }
166          }
167          if (i != x) {
168              i_m++;
169          }
170      }
171      return matrix{ n - 1, m - 1, res };
172  }
```

```

174  /* Calculates the determinant.
175  *...Arguments:
176  *...-- pointer to the matrix:
177  *...-- matrix *M.
178  *...Returns:
179  *...-- (double) -- the determinant.
180  */
181  double math::determinant(matrix* M) {
182      size_t n = M->n;
183      if (n != M->m) {
184          std::cout << "This matrix is not squared, determinant cannot be calculated."
185          << std::endl;
186      }
187      double** a = M->arr;
188      if (M->n == 1) return a[0][0];
189      if (M->n == 2) return a[0][0] * a[1][1] - a[0][1] * a[1][0];
190
191      double res = 0, coef = 1;
192      for (size_t i = 0; i < n; i++) {
193          matrix cur_minor = matr_minor(M, 0, i);
194          res += coef * a[0][i] * determinant(&cur_minor);
195          coef *= -1;
196      }
197      return res;
198  }
199

```

4.2 Функции для работы с матрицами для первого задания (с++)

```

200  /* Calculates inverted matrix.
201  *...Arguments:
202  *...-- pointer to matrix to be inverted:
203  *...-- matrix *M.
204  *...Returns:
205  *...-- (matrix) -- the inverted matrix.
206  */
207  matrix math::matr_invert(matrix* M) {
208      size_t n = M->n, m = M->m;
209      if (n != m) {
210          std::cout << "This matrix cannot be inverted." << std::endl;
211          return matrix{ 0, 0, NULL };
212      }
213      double** arr = allocate_memory(n, m);
214      double coef;
215      // adjusted
216      for (size_t i = 0; i < n; i++) {
217          for (size_t j = 0; j < n; j++) {
218              if (i % 2 != j % 2) {
219                  coef = -1;
220              }
221              else coef = 1;
222              matrix minorr = matr_minor(M, i, j);
223              arr[i][j] = determinant(&minorr) * coef;
224          }
225      }
226      // transpose
227      matrix res = matr_transpose(matrix{ n, m, arr });
228      // multiply to inv to det
229      return num_mul_matr(1.0 / determinant(M), res);
230  }

```

```

39  /* Multiplies two matrices. Validates sizes.
40  *** Arguments:
41  *-----first matrix:
42  *-----matrix A,
43  *-----second matrix:
44  *-----matrix B.
45  *** Returns:
46  *----- (matrix) -- result of multiplication.
47  *** Notes:
48  *----- Returns {0, 0, NULL}, if matrices are incompatible.
49  */
50  matrix math::matr_mul_matr(matrix A, matrix B) {
51      size_t n = A.n, m = B.m, l = A.m;
52      // validate sizes
53      if (l != B.n) {
54          printf("Those matrices cannot be multiplied\n");
55          printf("A: %zux%zu, B: %zux%zu\n", n, l, B.n, m);
56          matrix res = {0, 0, NULL};
57          return res;
58      }
59      double** a = A.arr, ** b = B.arr;
60      double** res = allocate_memory(n, m);
61      // calculations
62      for (size_t i = 0; i < n; i++) {
63          for (size_t j = 0; j < m; j++) {
64              res[i][j] = 0;
65              for (size_t k = 0; k < l; k++) {
66                  res[i][j] += a[i][k] * b[k][j];
67              }
68          }
69      }
70      matrix matr = {n, m, res};
71      return matr;
72  }
73
232 /* There is an equation A*B=C. Get matrix A.
233 *** Arguments:
234 *-----matrix B:
235 *-----matrix B,
236 *-----matrix C:
237 *-----matrix C.
238 *** Returns:
239 *----- (matrix) -- matrix A.
240 */
241 matrix math::get_matrix(matrix B, matrix C) {
242     return matr_mul_matr(C, matr_invert(&B));
243 }

```

4.3 Функции для автоматического подсчёта образа многоугольника (python)

Многоугольник здесь может состоять из нескольких фигур. Его вбиваете в was. Также нужна сама матрица преобразования, M. Будет изображён оригинал и образ.

```
127 def countPoint(m, x, y):
128     X = m[0][0]*x + m[0][1]*y
129     Y = m[1][0]*x + m[1][1]*y
130     return [X,Y]
131
132 def getRes(frame, m):
133     framerexX = []
134     framerexY = []
135     for i in range(len(frame[0])):
136         tmp = countPoint(m, frame[0][i], frame[1][i])
137         framerexX.append(tmp[0])
138         framerexY.append(tmp[1])
139     return [framerexX, framerexY]
140
```

```
178 res = []
179 for i in was:
180     plt.plot(i[0],i[1])
181     res.append(getRes(i, M))
182
183 for i in res:
184     plt.plot(i[0],i[1])
185
186 plt.show()
187
```