
Transformações Geométricas

Computação Gráfica





<http://hof.povray.org/images/office-13.jpg>

Sumário

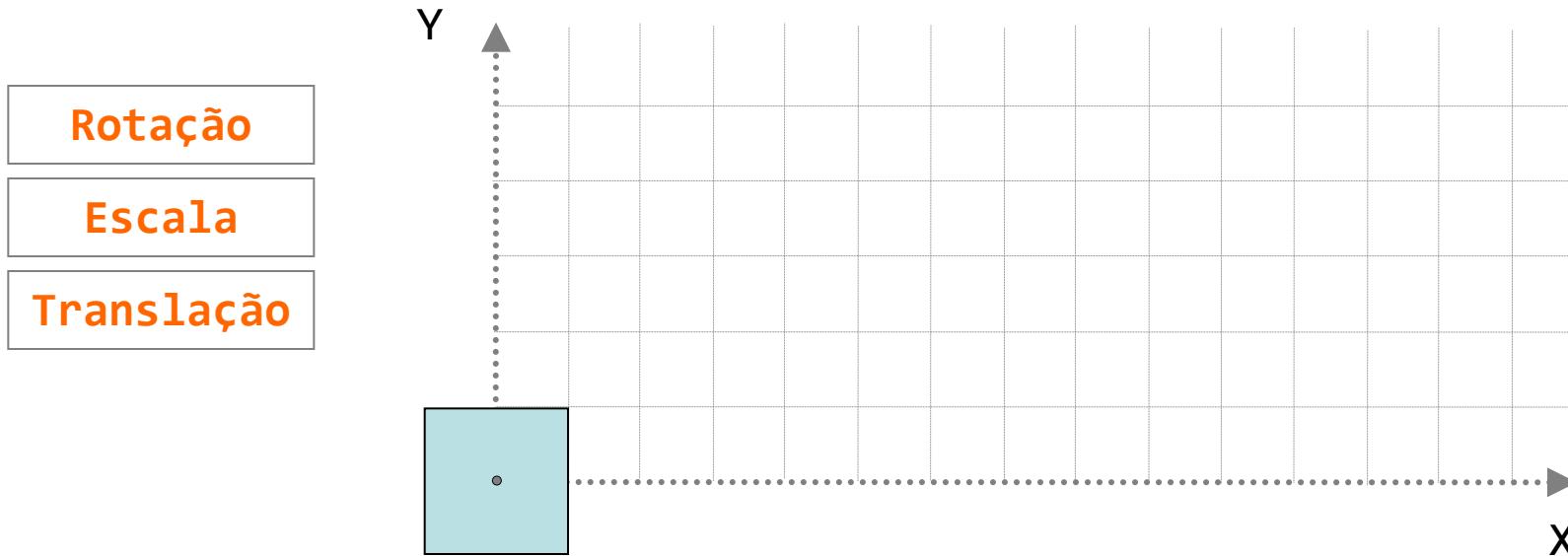
- Transformações geométricas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
 - Shearing
- Coordenadas homogéneas
- Cálculo com matrizes
- Composição de transformações
 - Ex: *Window viewport transform*
- Matrizes de transformações em 3D
- Modelação hierárquica

Sumário

- Transformações geométricas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
 - Shearing
- Coordenadas homogéneas
- Cálculo com matrizes
- Composição de transformações
 - Ex: *Window viewport transform*
- Matrizes de transformações em 3D
- Modelação hierárquica

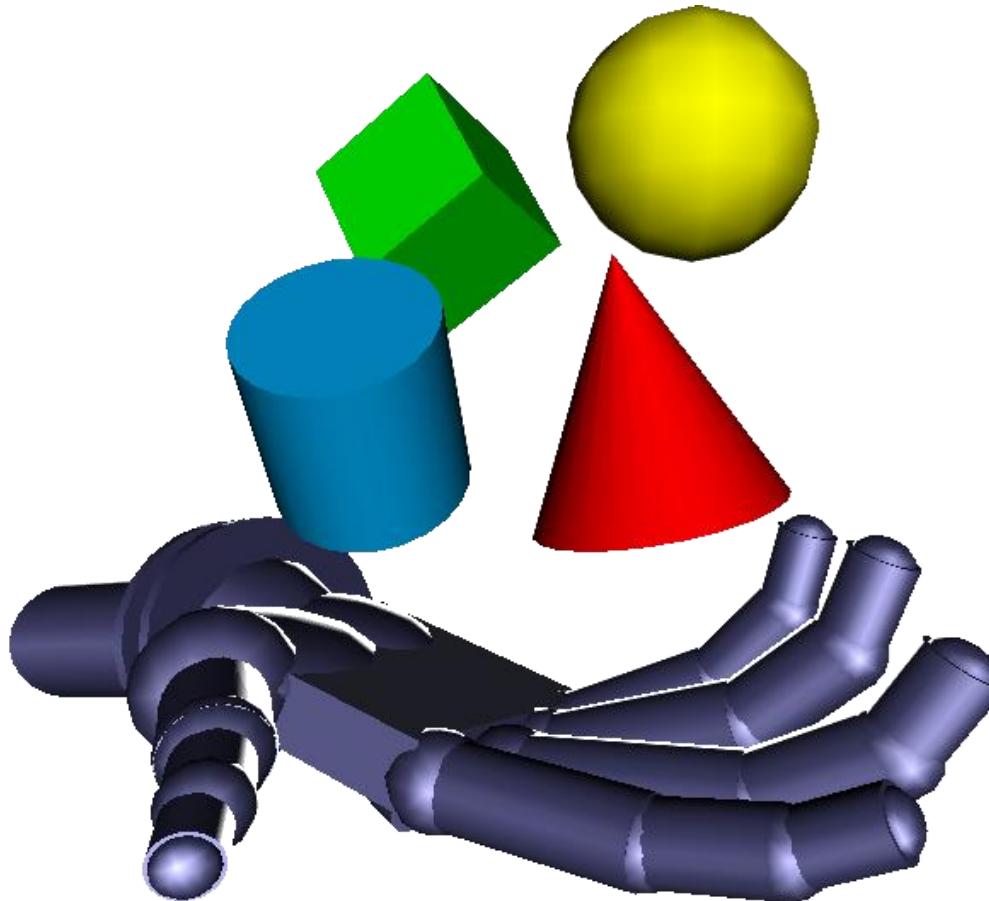
Transformações geométricas

- As transformações geométricas são essenciais nas aplicações gráficas
 - A composição de cenas feitas à custa de símbolos (ou objectos) aplica massivamente transformações a cada um dos constituintes
 - É possível posicionar, alterar a forma e animar objectos, luzes e câmaras
 - Transformações mais comuns:
 - Translação, rotação, escala



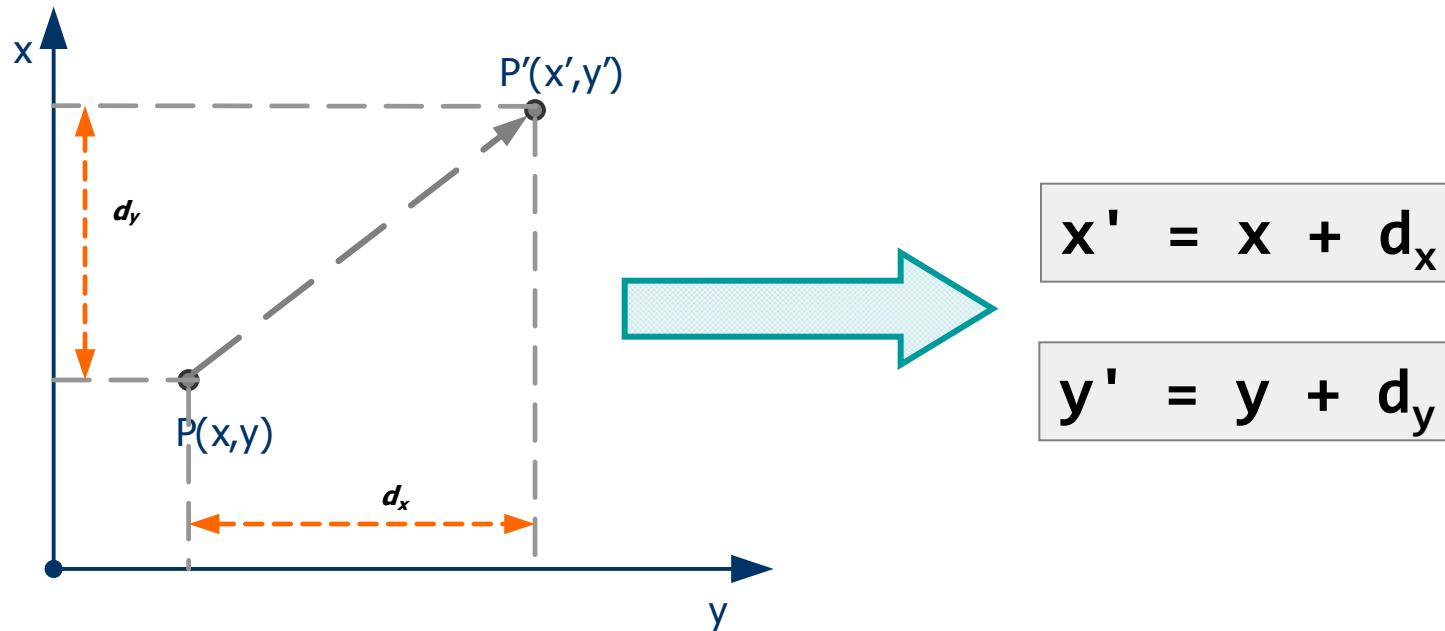
Transformações geométricas

- Como representar estas transformações geométricas?



Transformações geométricas – Translação

- A translação de um ponto, em 2D, é feita **somando um deslocamento a cada uma das coordenadas**



Transformações geométricas – Translação

- Podemos representar a translação através de **vectores coluna**

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix},$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

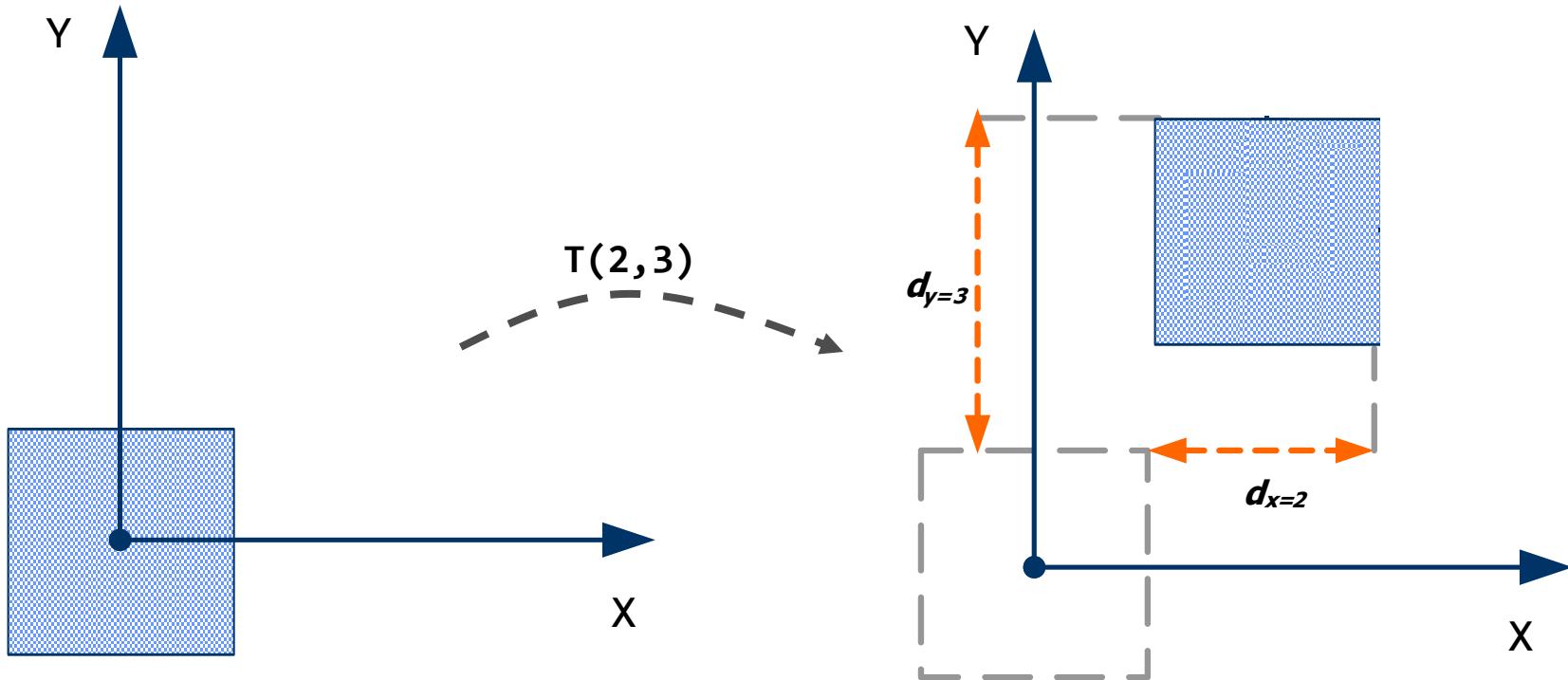


$$P' = T + P$$

Transformações geométricas – Translação

Exemplo

- Pretende -se aplicar a **translação $T(2,3)$** ao quadrado centrado na origem, com lado igual a 2
 - Aplicando a translação a cada um dos seus vértices...

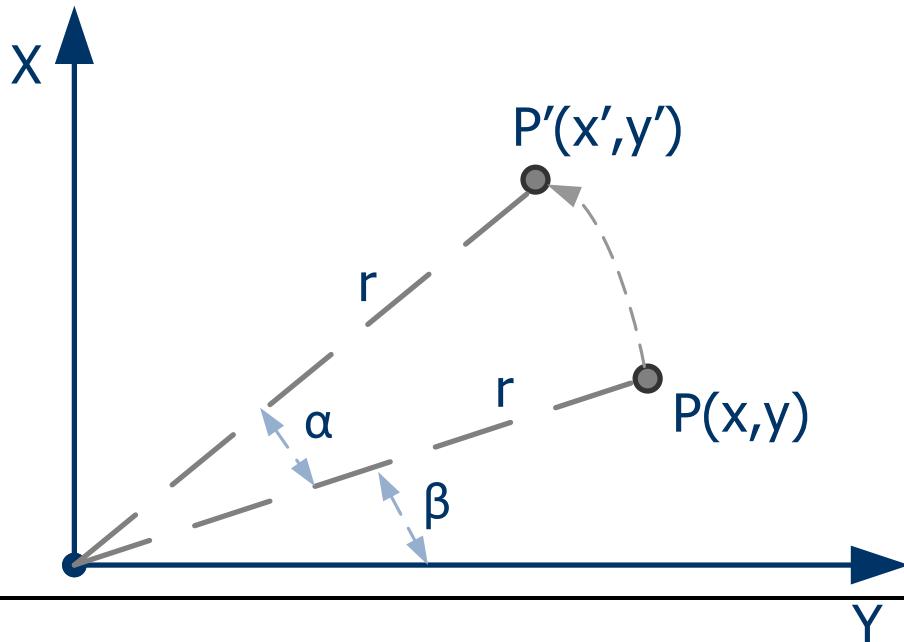


Transformações geométricas – Rotação

- Um ponto P pode ser **rodado** de um determinado ângulo, **em relação à origem**
- Matematicamente, esta transformação é definida por:

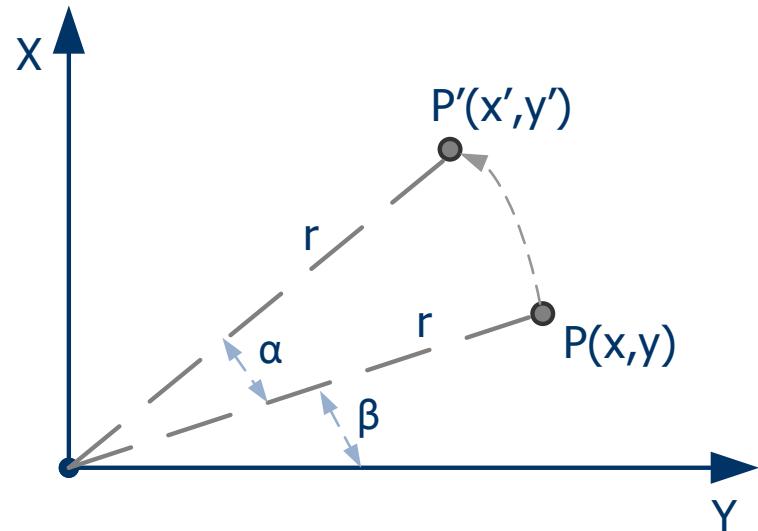
$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$

$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$



- Note-se que as equações apresentadas são para ângulos positivos
- Para ângulos negativos, utilizam-se as equivalências
 $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
 $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Transformações geométricas – Rotação



Dedução da expressão de rotação

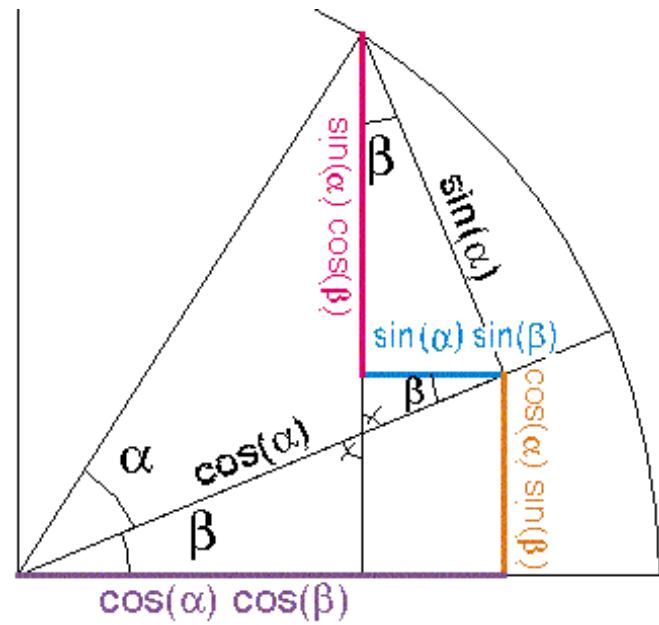
$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\beta) \\y &= r \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\y' &= r \cdot \sin(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot [\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)] \\x' &= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\x' &= r \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\x' &= x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

para y' é equivalente



<http://www.clowder.net/hop/cos%28a+b%29.gif>

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$

$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$

Transformações geométricas – Rotação

- Podemos representar a rotação através de **matrizes** e **vectores coluna**

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$, \quad R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

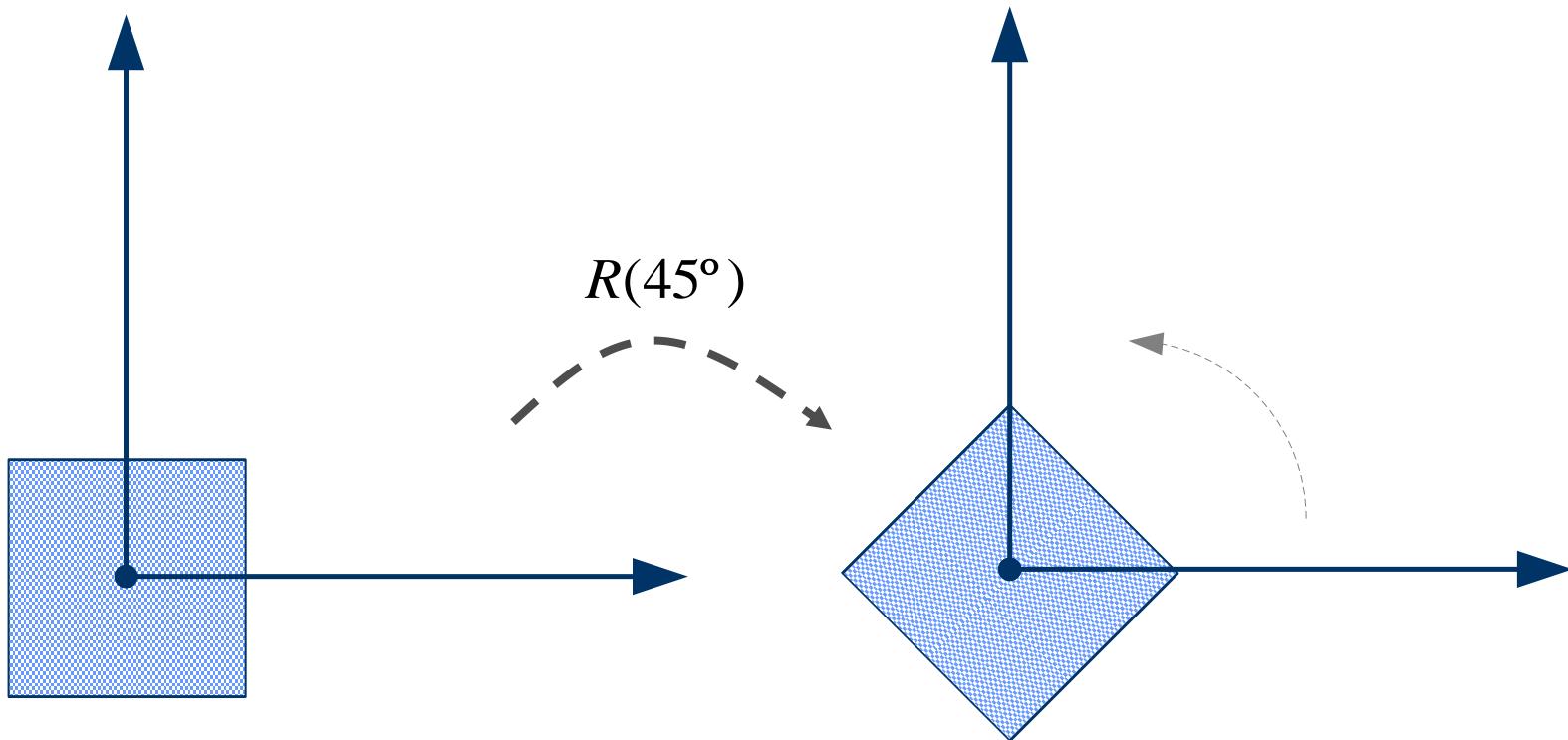


$$P' = R * P$$

Transformações geométricas – Rotação

Exemplo

- Pretende-se aplicar a rotação $R(45^\circ)$ ao quadrado, centrado na origem, com lado igual a 2



PS: Novamente, foi aplicada a transformação de rotação a todos os vértices do objecto... 😊

Transformações geométricas – Escala

- Um ponto P pode ser **expandido** de uma quantidade real, em **relação à origem**
- Matematicamente, esta transformação é definida por

$$x' = x \times s_x$$

$$y' = y \times s_y$$

- É difícil pensar como é que um ponto pode ser expandido!
 - Resposta: Dará sempre origem a outro ponto, noutras coordenadas
- No entanto, se esse ponto for, por exemplo, utilizado para representar o fim de um segmento de recta, rapidamente se comprehende que a recta sofreu uma expansão (positiva ou negativa) pelo simples facto do ponto se ter deslocado

Transformações geométricas – Escala

- Podemos, mais uma vez, representar a escala através de **matrizes e vectores coluna**

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

,

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

,

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

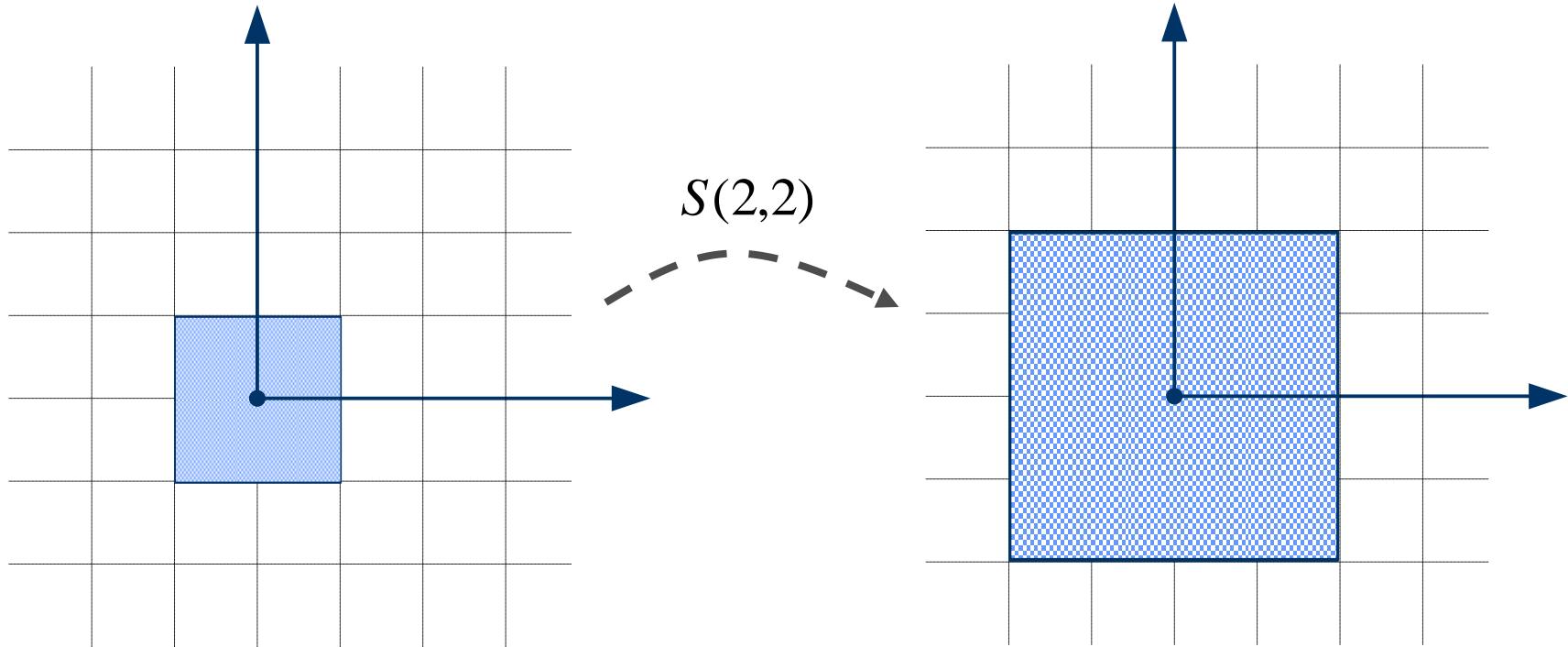


$$P' = S * P$$

Transformações geométricas – Escala

Exemplo I – escala uniforme, centrado

- Pretende-se aplicar uma escala $S(2,2)$ ao quadrado, **centrado na origem**, com lado igual a 2

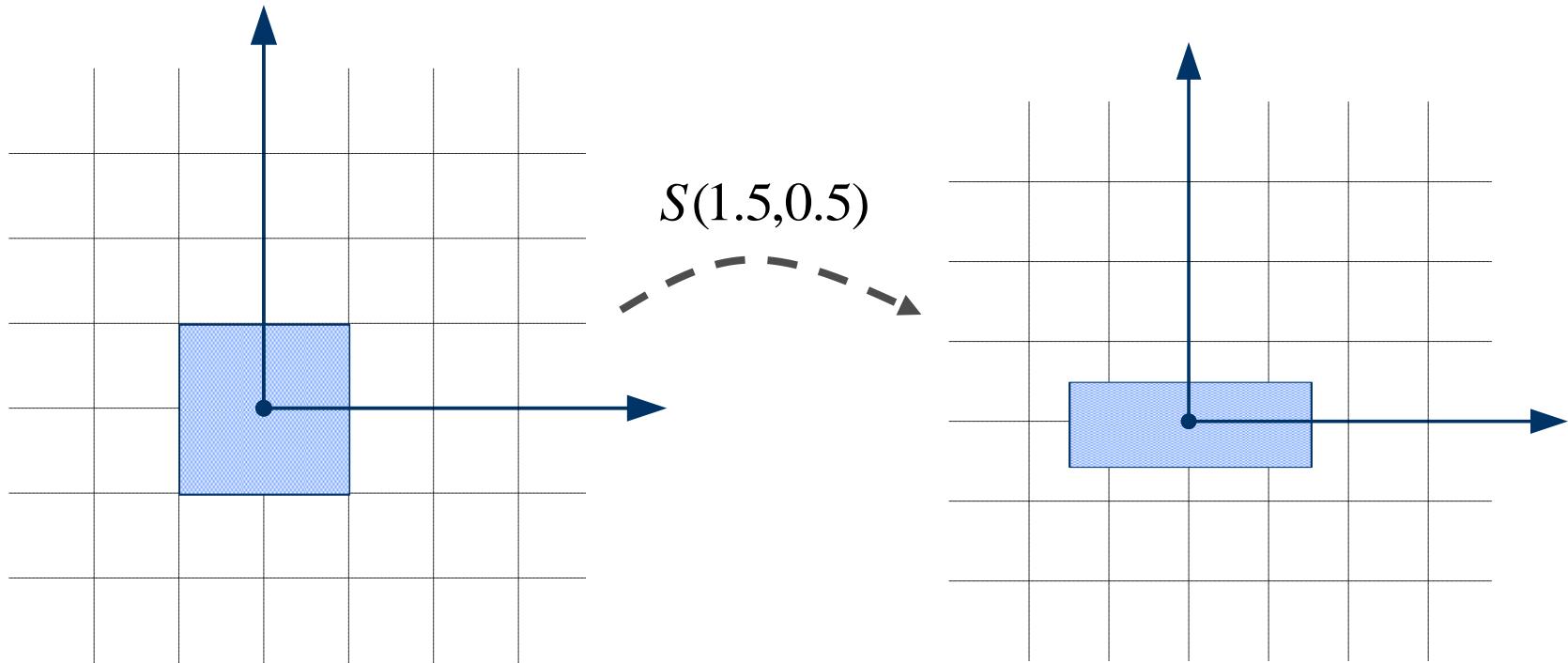


PS: Reparem, o quadrado passou a ter 4 unidades de lado (efeito de escala)... 😊

Transformações geométricas – Escala

Exemplo II – escala não uniforme, centrado

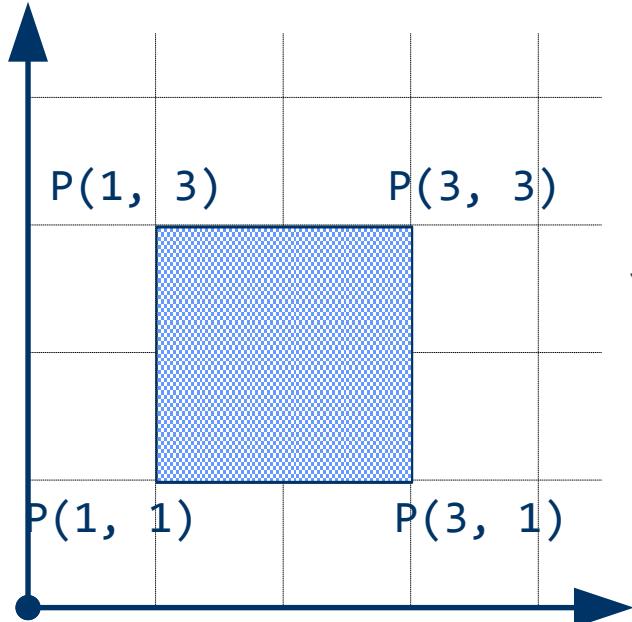
- Pretende-se aplicar uma escala $S(1.5, 0.5)$ ao quadrado, **centrado na origem**, com lado igual a 2



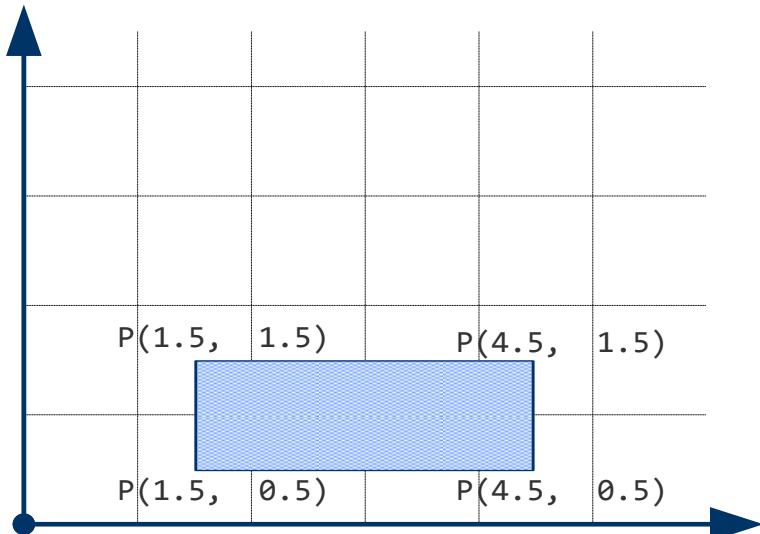
Transformações geométricas – Escala

Exemplo III – escala não uniforme, descentrado

- Pretende-se aplicar uma escala $S(1.5, 0.5)$ ao quadrado, **centrado em $P(2, 2)$** , com lado igual a 2



$S(1.5, 0.5)$



Transformações geométricas – Escala

- Note-se que na escala acontece um fenómeno interessante
 - Quando o valor é inferior a 1 a forma aparece mais próxima da origem
 - Quando o valor é superior a 1, a forma afasta-se da origem
- Esta constatação vem realçar o facto das escalas (à semelhança das rotações) serem efectuadas em **relação à origem**

Transformações geométricas – *Shearing*

- A operação de ***shearing*** aplica uma transformação a apenas um dos eixos, com uma proporção função do outro eixo
- Aplicando a um dado ponto **P**, a transformação **SH_x(2)**, obtemos

$$x' = x + ay$$

$$y' = y$$

- Aplicando a mesma transformação, mas agora sobre **yy**, obtemos

$$x' = x$$

$$y' = y + ax$$

Transformações geométricas – *Shearing*

- Podemos representar a escala através de **matrizes** e **vectores coluna**

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

,

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

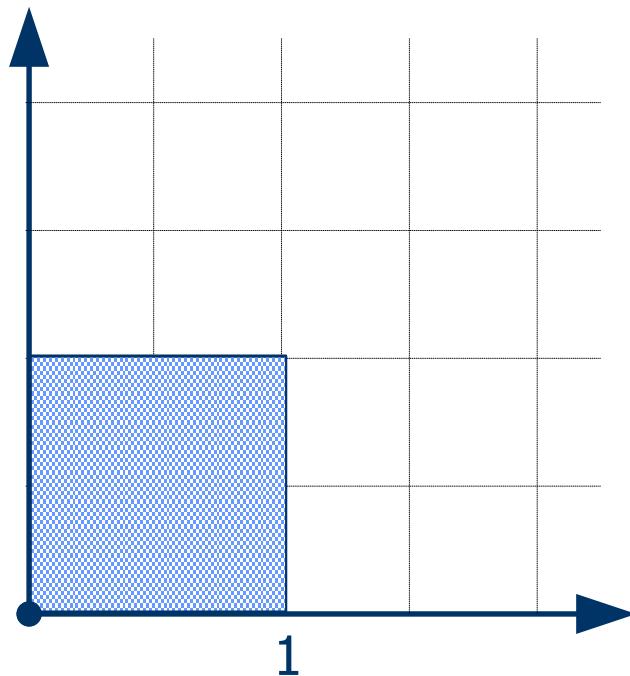


$$P' = SH * P$$

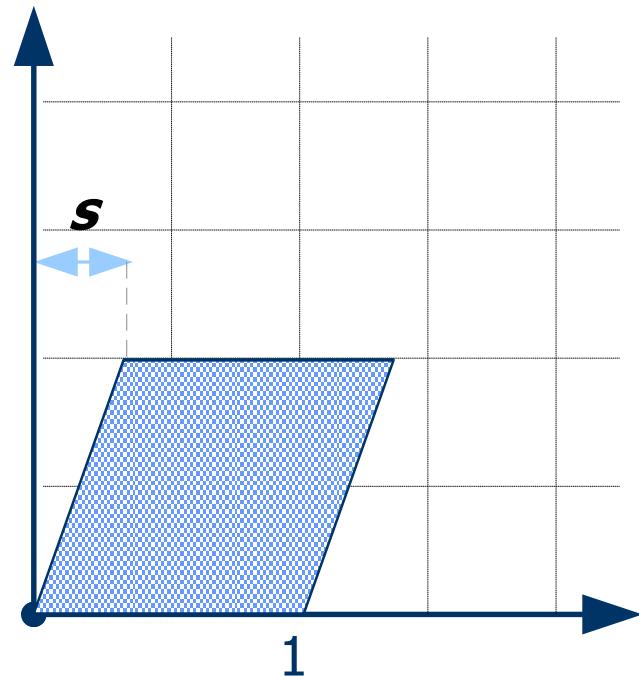
Transformações geométricas – *Shearing*

Exemplo

- Pretende-se aplicar uma deformação, no eixo do xx , de s unidades



$$SH_x(s)$$



Sumário

- Transformações geométricas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
 - Shearing
- Coordenadas homogéneas
- Cálculo com matrizes
- Composição de transformações
 - Ex: *Window viewport transform*
- Matrizes de transformações em 3D
- Modelação hierárquica

Coordenadas Homogéneas

- Resumindo as quatro transformação geométricas

– Translação



$$P' = T + P$$



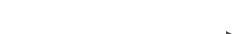
– Rotação



$$P' = R * P$$



– Escala



$$P' = S * P$$



– *Shearing*



$$P' = SH * P$$



- Fica claro que **existe um caso particular** na forma de tratar as translações
- Esse caso particular vem dificultar a **composição de transformações**

Coordenadas Homogéneas

- O objectivo é conseguir que **qualquer transformação** de um ponto seja feita na forma

$$P' = ? \times P$$

Como?

Coordenadas Homogéneas

- As coordenadas homogéneas foram inicialmente desenvolvidas na geometria e, posteriormente, foram utilizadas na computação gráfica (meados da década de 70)
- A ideia é **acrescentar uma dimensão ao espaço** que estamos a trabalhar. No caso de 2D, a representação de um ponto em coordenadas homogéneas é feita

$$P(x, y, w)$$

Coordenadas Homogéneas

- Podemos dizer que os triplos (x, y, w) e (x', y', w') representam o mesmo ponto, desde que sejam múltiplos
 - Ex: $(2, 3, 6)$ e $(4, 6, 12)$
- Isto quer dizer que um mesmo ponto pode ser representado com diferentes triplos em coordenadas homogéneas, desde que sejam diferentes do triplo $(0, 0, 0)$
- As coordenadas cartesianas de um ponto representado desta forma podem ser encontradas dividindo as coordenadas x e y por w

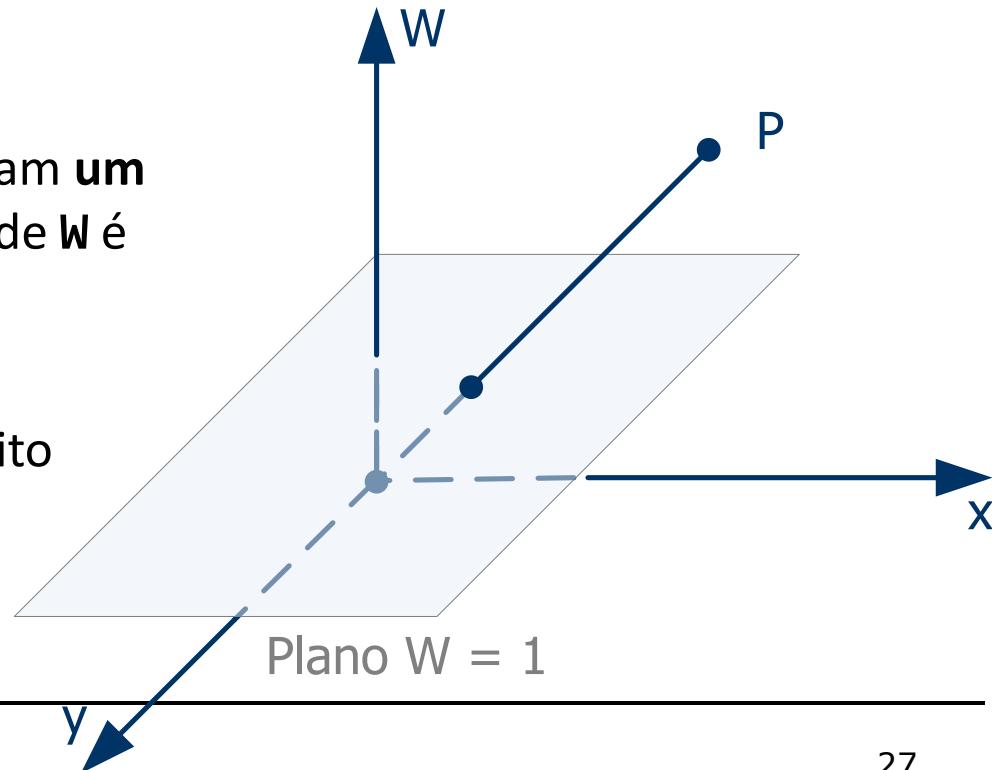
$$(x/W, y/W, 1)$$

O que isto significa realmente?

Coordenadas Homogéneas

Representação gráfica

- Se pegarmos em todos os triplos que representam o mesmo ponto, na forma (tx, ty, tw) , com $t \neq 0$, obtemos **uma recta** num espaço tridimensional
- Se o ponto for homogeneizado, obtém-se um nova representação na forma $(x', y', 1)$
- Os pontos homogeneizados formam **um plano** no espaço (x, y, w) , onde w é constante e igual a **1**
- $w=0$ representam pontos no infinito



Transformações geométricas – Translação

Com coordenadas homogêneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = T \times P$$

Transformações geométricas – Rotação

Com coordenadas homogêneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = R \times P$$

Transformações geométricas – Escala

Com coordenadas homogêneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = S \times P$$

Transformações geométricas – *Shearing*

Com coordenadas homogêneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$SH = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

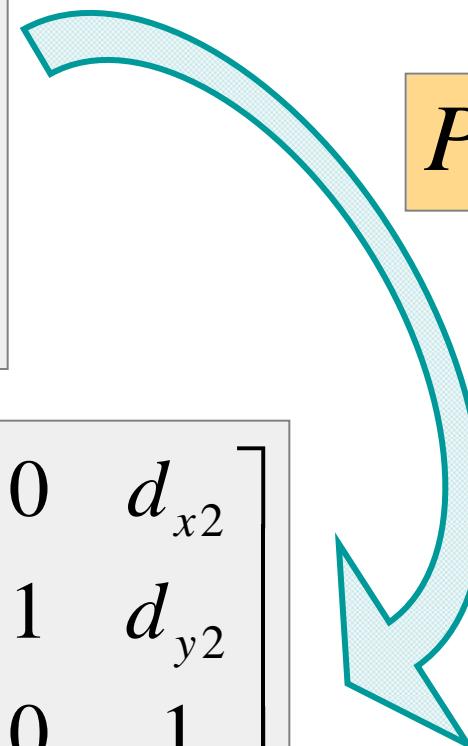


$$P' = SH \times P$$

Composição de transformações geométricas

- Vamos começar com uma composição muito simples
 - duas translações

$$T_1(d_{x1}, d_{y1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = T_2 \times T_1 \times P$$

$$T_1(d_{x2}, d_{y2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações geométricas

- A matriz resultante da composição das duas translações é a seguinte

$$T_2 \times T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T_2(d_{x_2}, d_{y_2}) \times T_1(d_{x_1}, d_{y_1}) = T(d_{x_1} + d_{x_2}, d_{y_1} + d_{y_2})$$

Composição de transformações geométricas

- Seguindo o mesmo raciocínio,

Rotação

$$R_1(\phi) \times R_2(\theta) = R(\phi + \theta)$$

Escala

$$S_1(s_{x_1}, s_{y_1}) \times S_2(s_{x_2}, s_{y_2}) = S(s_{x_1} \times s_{x_2}, s_{y_1} \times s_{y_2})$$

- No entanto, a composição de transformações deve ser feita com **cuidado**, dado que a **ordem interessa em muitos dos casos**

Composição de transformações geométricas

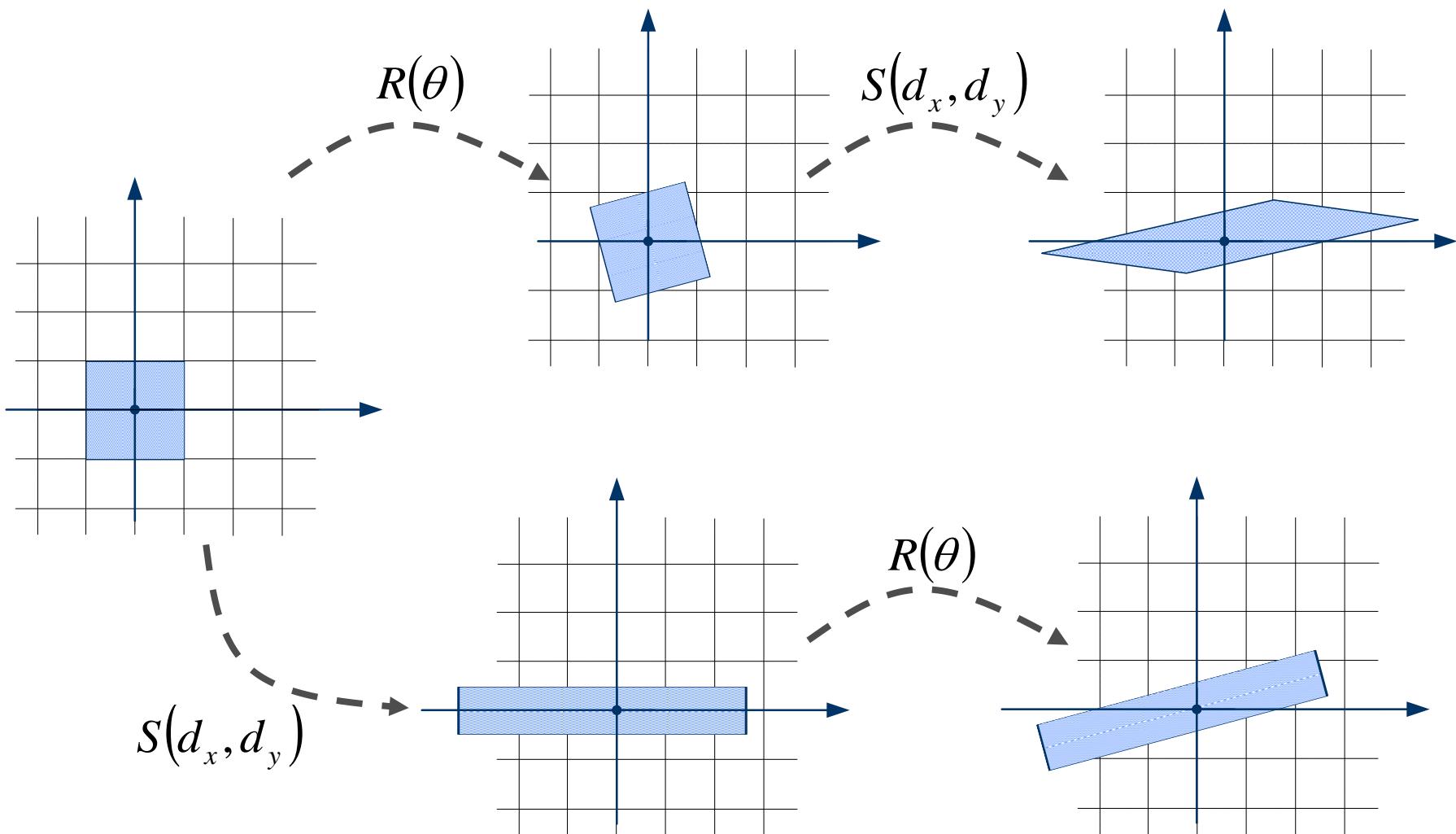
- De facto, existe uma ordem clara expressa na notação utilizada
- A ordem de aplicação das transformações é feita da **direita para a esquerda**, ou seja

$$PontoFinal = nesimaTr \times \dots \times 2^{\text{a}}Tr \times 1^{\text{a}}Tr \times PontoInicial$$

- Esta ordem é importante uma vez que a composição de transformações geométricas **não goza da propriedade comutativa**. Por exemplo

$$S(d_x, d_y) \times R(\theta) \neq R(\theta) \times S(d_x, d_y)$$

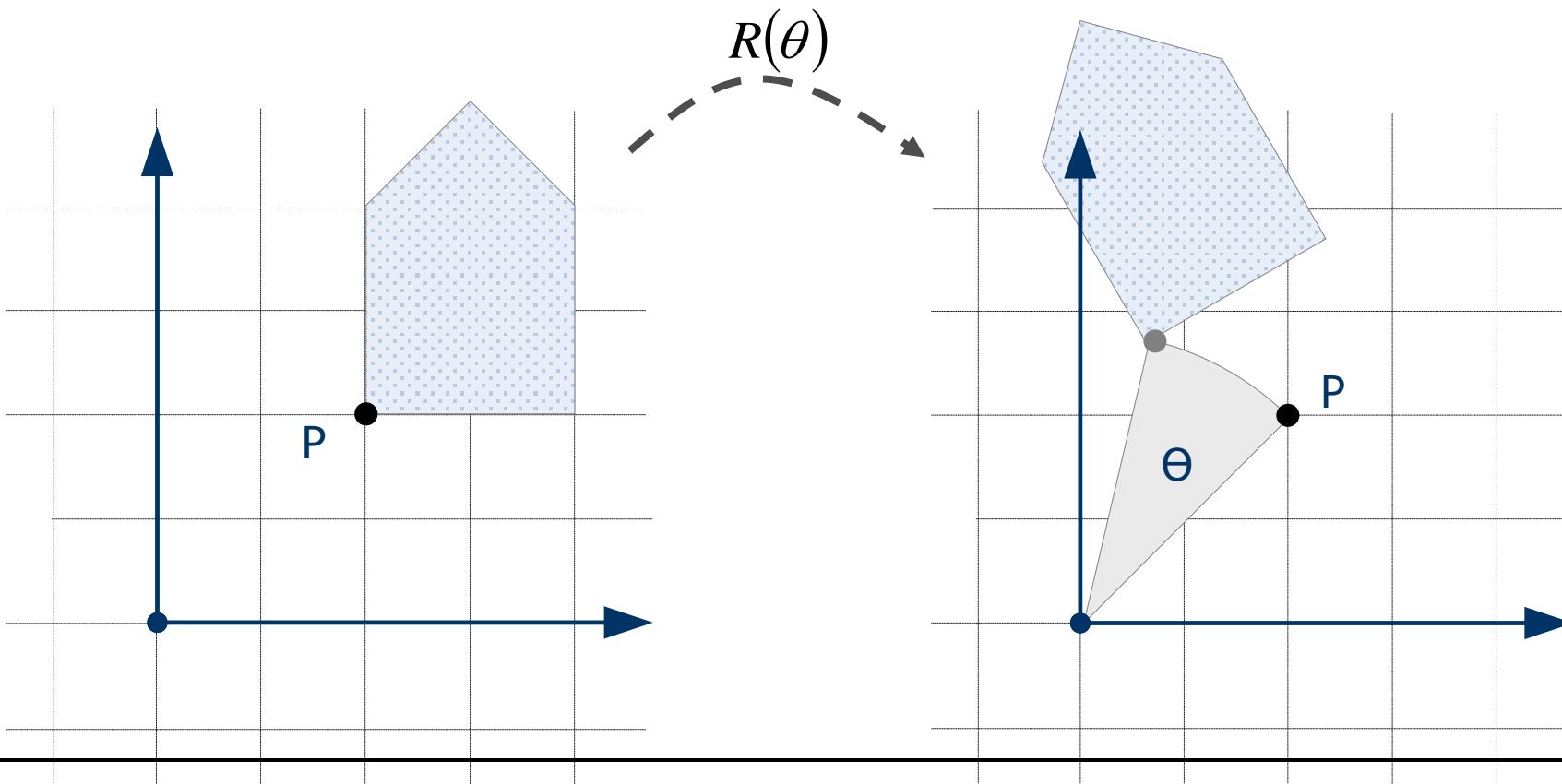
Composição de transformações geométricas



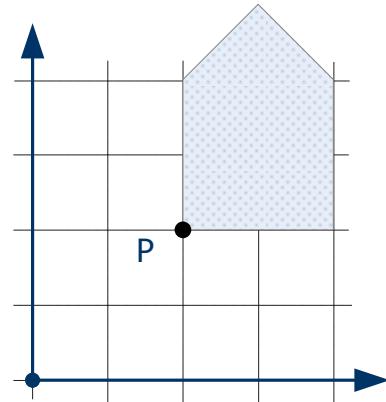
Composição de transformações geométricas

Rotação em torno de ponto arbitrário

- Como as rotações são sempre relativas à origem, a rotação de um ângulo Θ (seguinte casa), em torno do ponto P, não tem o efeito esperado



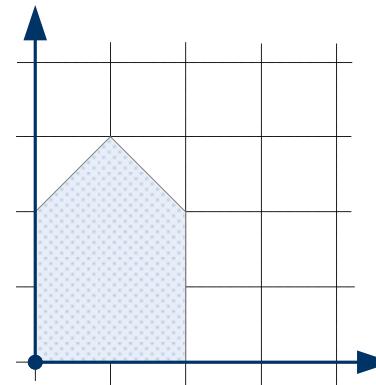
Composição de transformações geométricas



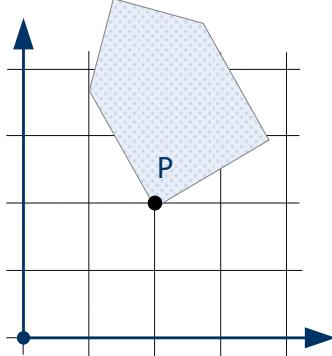
Original



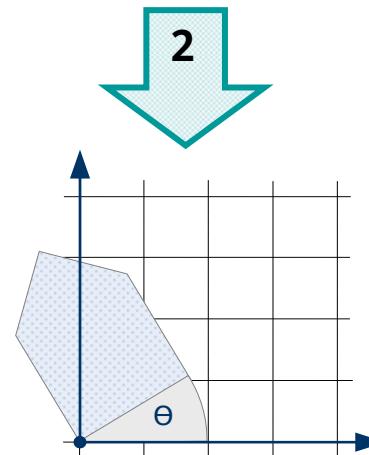
Rotação em torno de ponto arbitrário



Translação para a origem



Depois da translação para o ponto P



Depois da rotação

Composição de transformações geométricas

matriz resultante da composição

$$T(x_p, y_p) \times R(\theta) \times T(-x_p, -y_p)$$

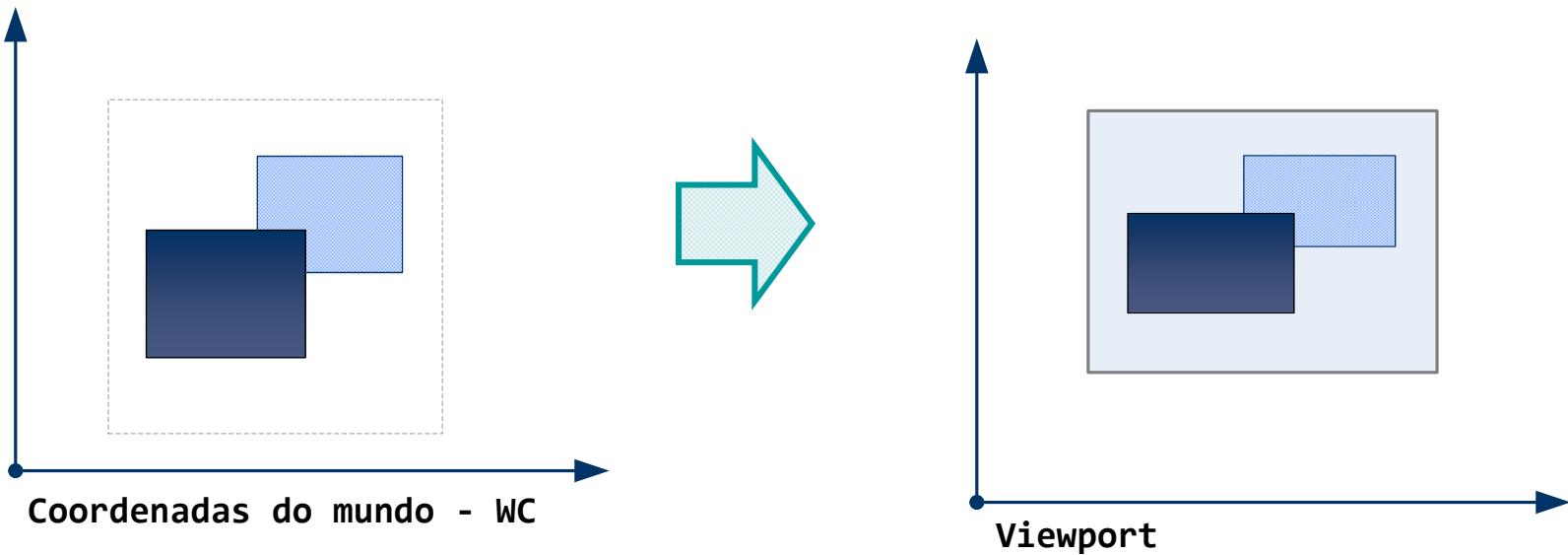


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_p(1-\cos \theta) + y_p \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & y_p(1-\cos \theta) - x_p \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

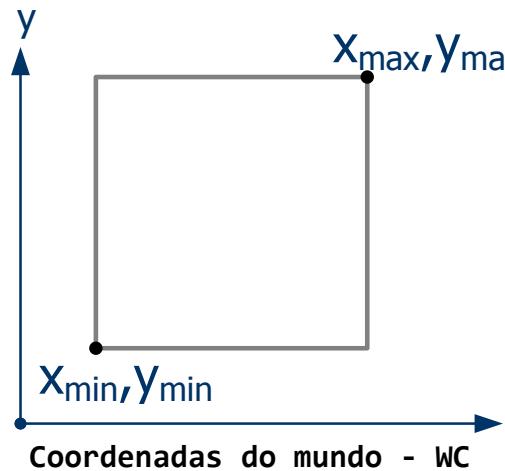
Composição de transformações geométricas

Ex: Transformação *Window-to-Viewport*



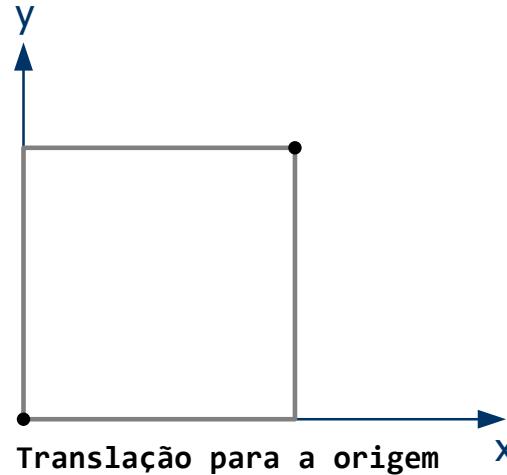
Como ficará esta transformação em termos de composição de transformações geométricas?

Composição de transformações geométricas

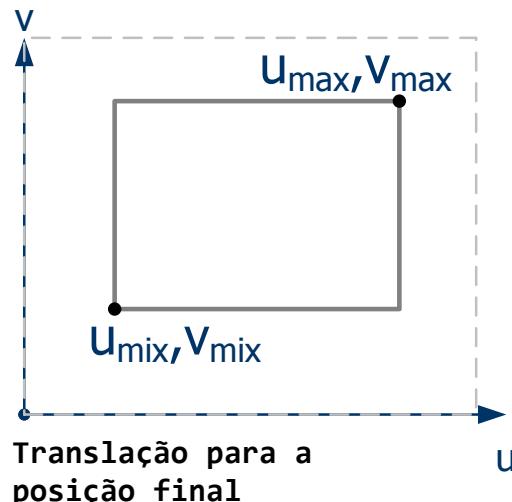


Coordenadas do mundo - WC

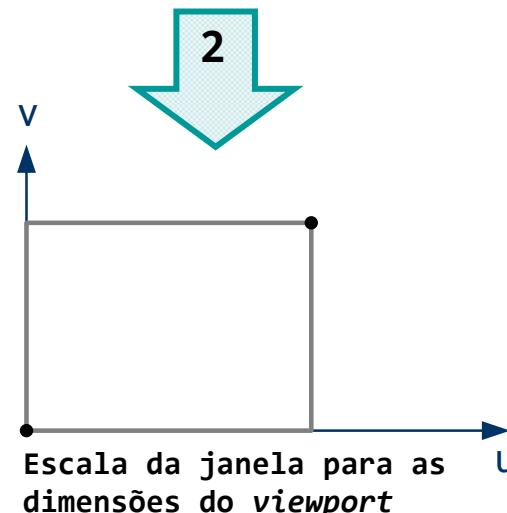
Ex: Transformação *Window-to-Viewport*



Translação para a origem



Translação para a posição final



Escala da janela para as dimensões do viewport

Composição de transformações geométricas

Ex: Transformação *Window-to-Viewport*

$$M_{xy} = T(u_{\min}, v_{\min}) \times S \left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \right) \times T(-x_{\min}, -y_{\min})$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{\min} \\ 0 & 1 & v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{\min} \\ 0 & 1 & -y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações geométricas

Ex: Transformação *Window-to-Viewport*

$$\begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & -x_{\min} \cdot \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + u_{\min} \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & -y_{\min} \cdot \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

- Transformações geométricas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
 - *Shearing*
- Coordenadas homogéneas
- Cálculo com matrizes
- Composição de transformações
 - Ex: *Window viewport transform*
- Matrizes de transformações em 3D
- Modelação hierárquica

Matrizes de transformações em 3D

- Os conceitos abordados para 2D continuam válidos
- A diferença reside na necessidade de mais uma coordenada para representar um ponto em 3D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ W \end{bmatrix}$$



É necessário compatibilizar as matrizes utilizadas para representar as transformações

Transformações geométricas – Translação

Com coordenadas homogéneas - 3D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



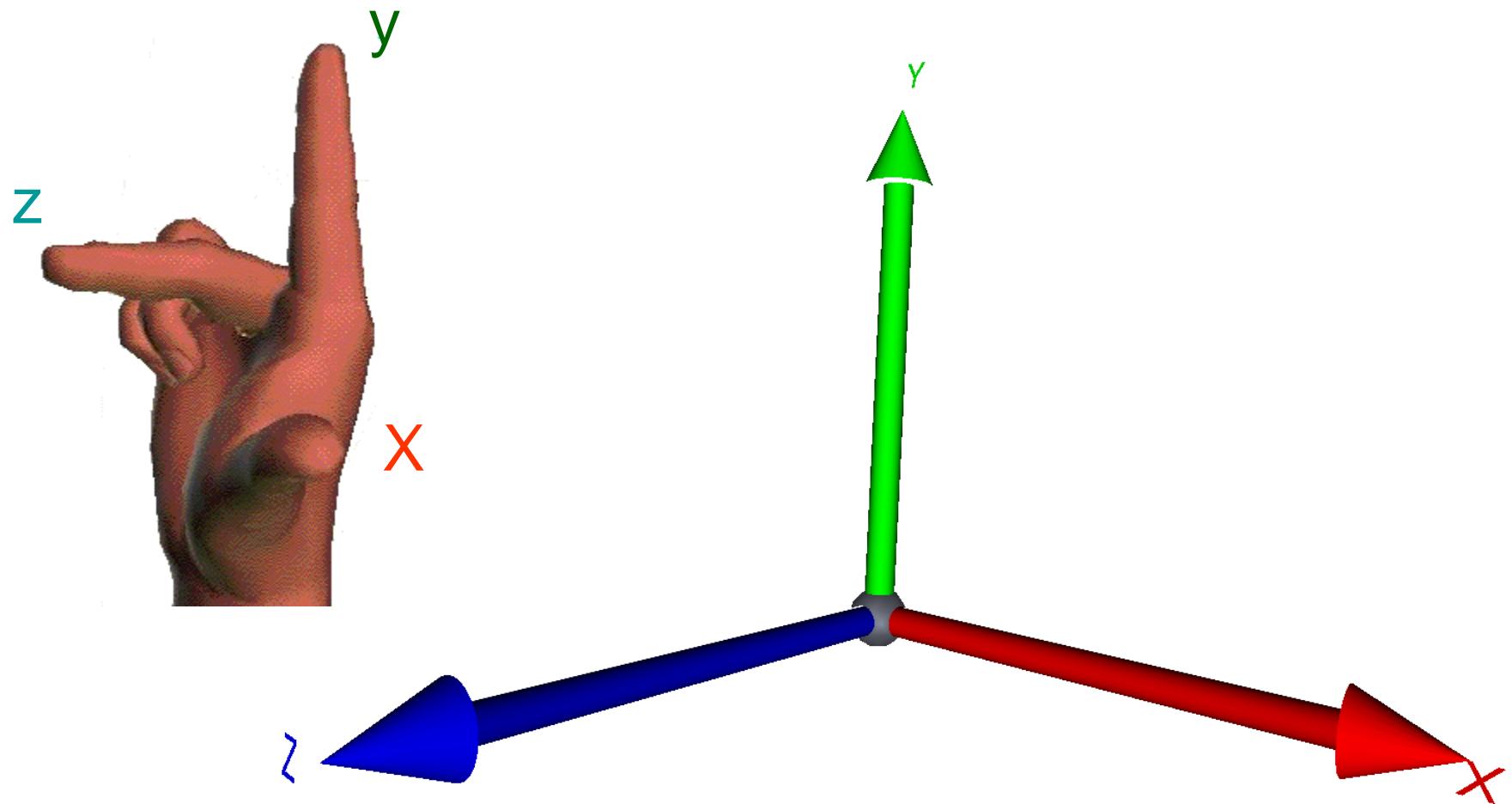
$$P' = T \times P$$

Eixos de coordenadas 3D

- Antes de falar na rotação, é necessário falar um pouco melhor sobre o sistema de coordenadas utilizado
- Existem basicamente dois sistemas
 - Mão direita – SMD
 - Mão esquerda – SME
- Adoptaremos o sistema SMD para apresentar tudo o que diz respeito a 3D
- Note-se que, através de rotações, é possível converter um sistema utilizando a SMD noutro sistema SMD

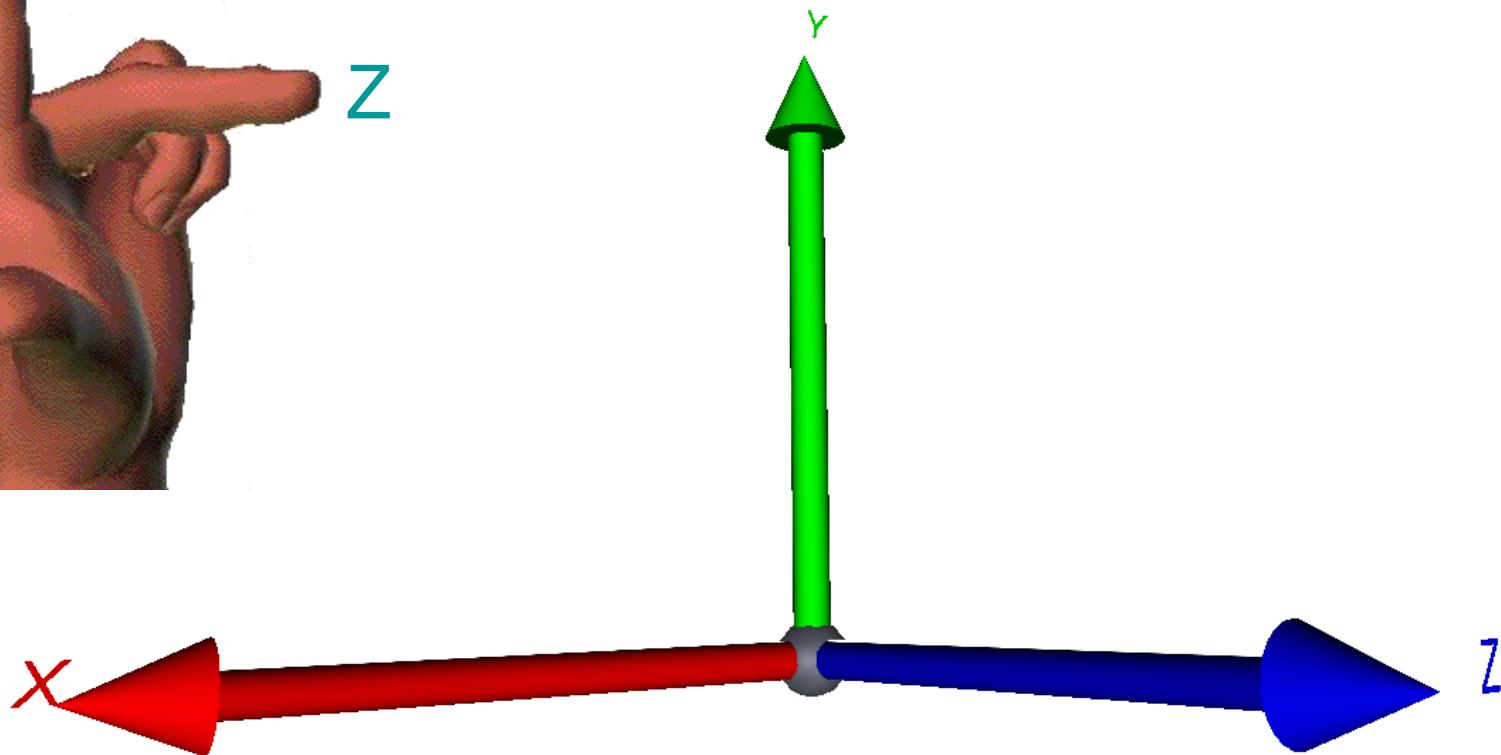
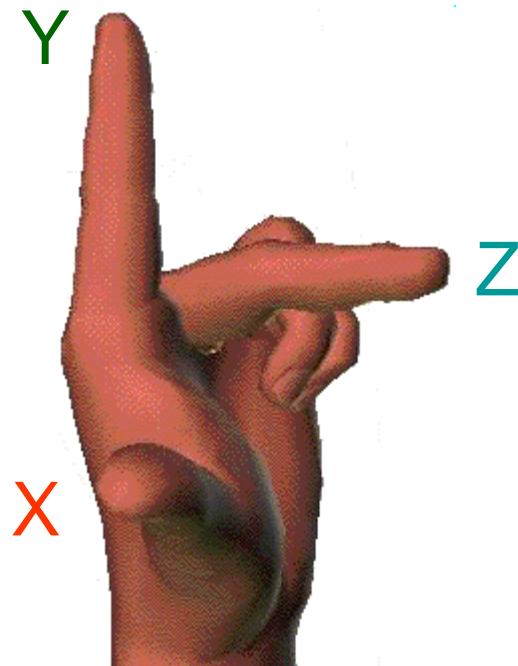
Eixos de coordenadas 3D

Mão direita - SMD



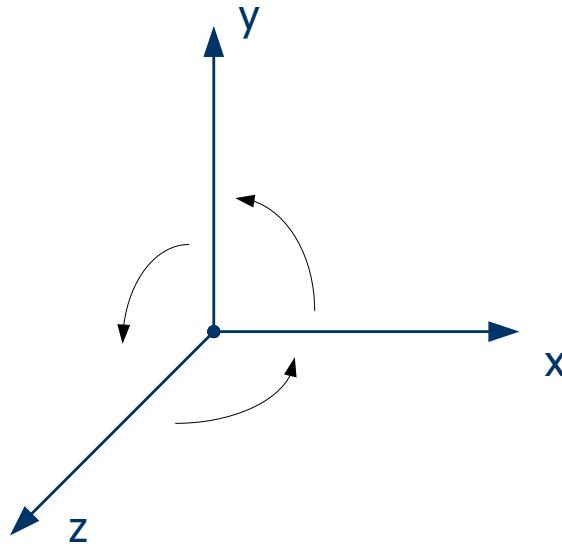
Eixos de coordenadas 3D

Mão esquerda - SME



Transformações geométricas - Rotação

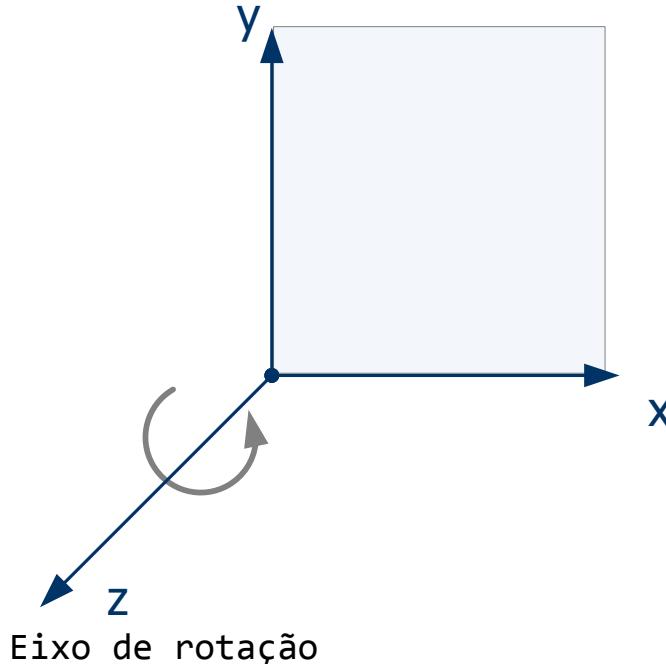
- No SMD, os **ângulos positivos** são calculados ao **contrário dos ponteiros do relógio**, como é ilustrado na figura



- Temos agora 3 planos onde efectuar a rotação de um ponto
 - xy
 - yz
 - zx

Transformações geométricas - Rotação

Com coordenadas homogéneas - 3D - Plano XY



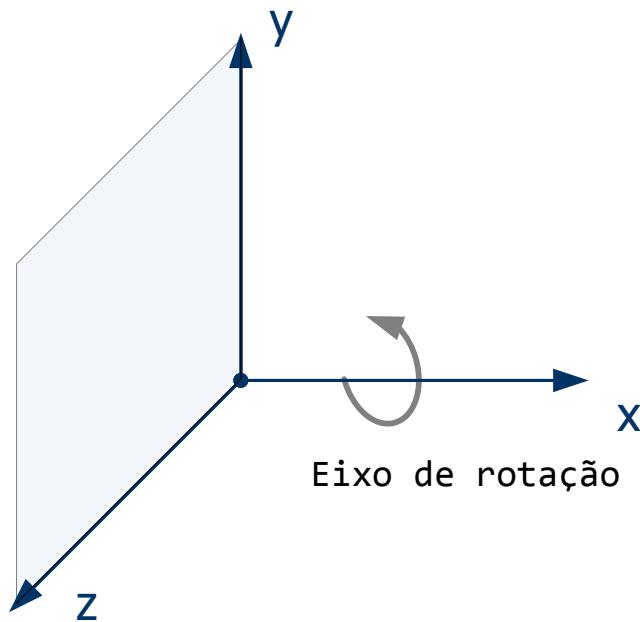
Rotação 2D

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas - Rotação

Com coordenadas homogéneas - 3D - Plano YZ



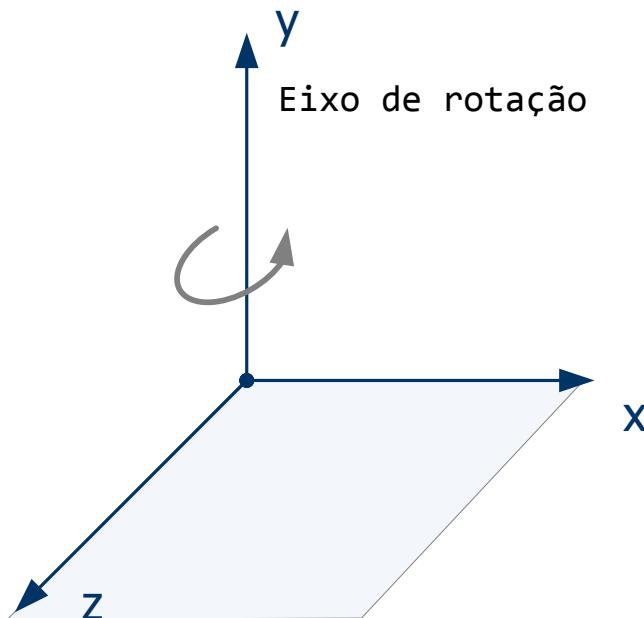
Rotação 2D

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas - Rotação

Com coordenadas homogéneas - 3D - Plano ZX



Rotação 2D

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas - Escala

Com coordenadas homogéneas - 3D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = S \times P$$

Transformações geométricas - Shearing

Com coordenadas homogéneas - 3D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$SH_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = S \times P$$

Transformações geométricas

Transformações inversas

$$T(d_x, d_y, d_z) \longrightarrow T(-d_x, -d_y, -d_z)$$

$$R_{eixo}(\phi) \longrightarrow R_{eixo}(-\phi)$$

$$S(a, b, c) \longrightarrow S(1/a, 1/b, 1/c)$$

Matriz resultante da composição

- A matriz resultante da multiplicação das várias matrizes que representam rotações, escalas e translações, é sempre da forma

$$M = \begin{bmatrix} rs_{11} & rs_{12} & rs_{13} & t_x \\ rs_{21} & rs_{22} & rs_{23} & t_y \\ rs_{31} & rs_{32} & rs_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Note-se que a sub-matriz 3 por 3 do canto superior esquerdo, **RS**, é o resultado da agregação de **rotações e escalas**
 - O vector coluna **T** é o resultado da agregação das várias **translações**
-

Características das transformações

- As matrizes de transformação aqui apresentadas (**translação, rotação, escala e *shearing***) têm em comum o facto de preservarem o **paralelismo das linhas**, mas não necessariamente os ângulos e dimensões dos objectos
- Estas matrizes designam-se de **afins**.
- Qualquer multiplicação de matrizes afins resultam numa outra matriz, também afim
- No entanto, certas matrizes, preservam o paralelismo das linhas, os ângulos e as distâncias
 - Por exemplo, quando se roda um objecto ou se move um objecto, apenas se alterou a orientação ou a localização - tudo o resto se mantém
- Este tipo de transformações designam-se de ***rigid-body***

Características das transformações

- É possível verificar se uma matriz representa uma transformação *rigid-body*, observando-a...

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Matriz A

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$



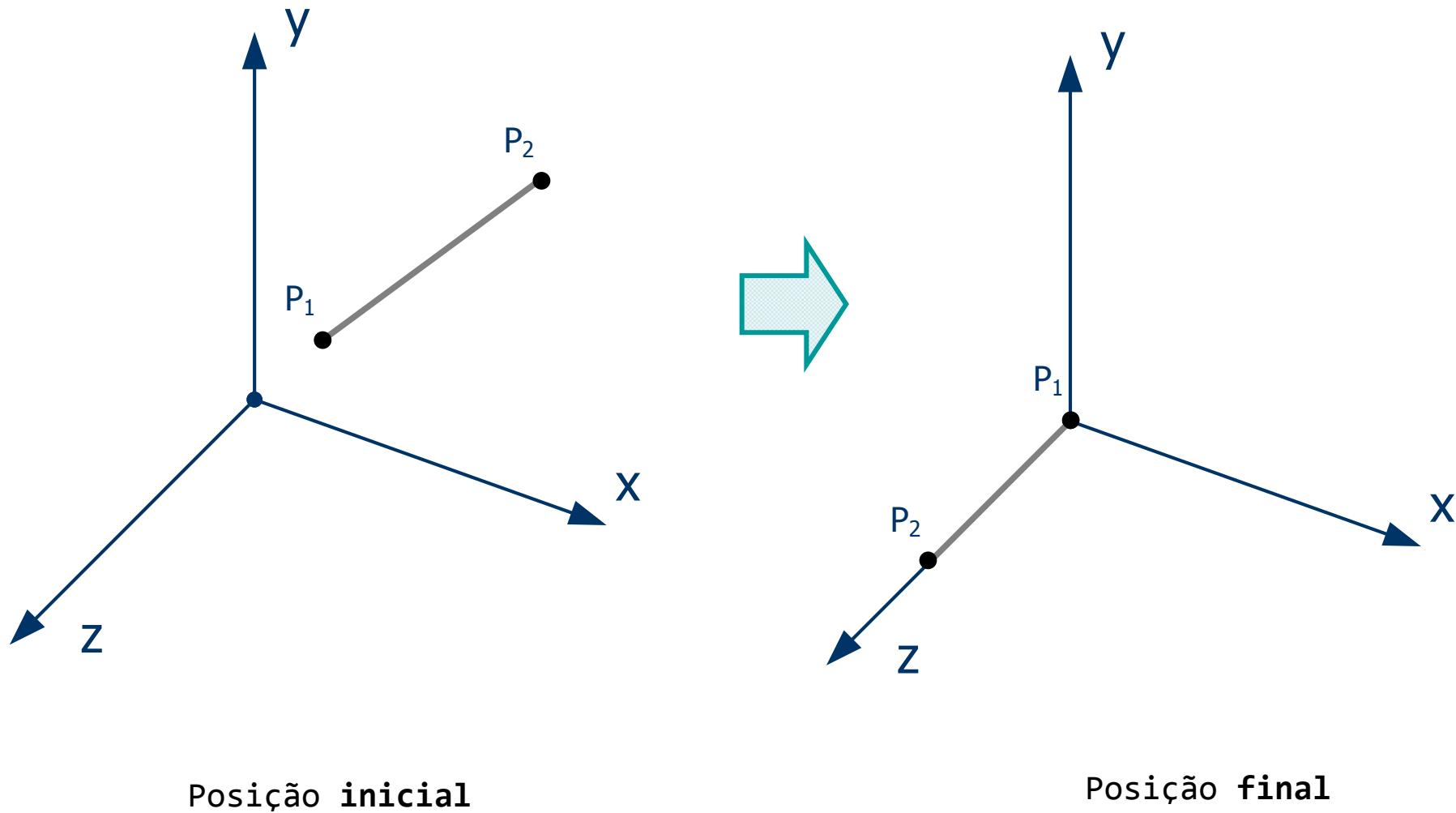
M é ***rigid-body***



Se for ortogonal

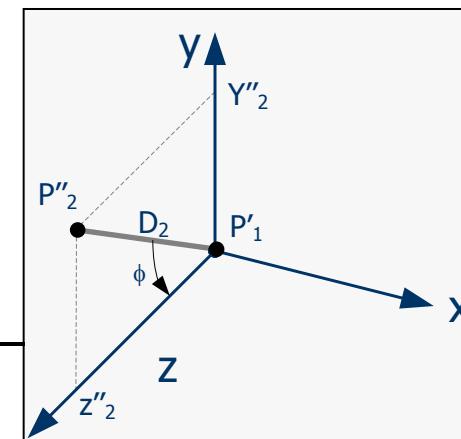
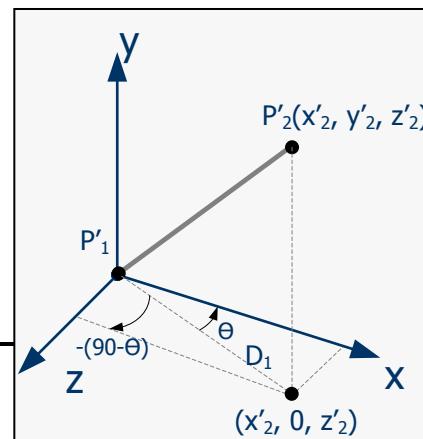
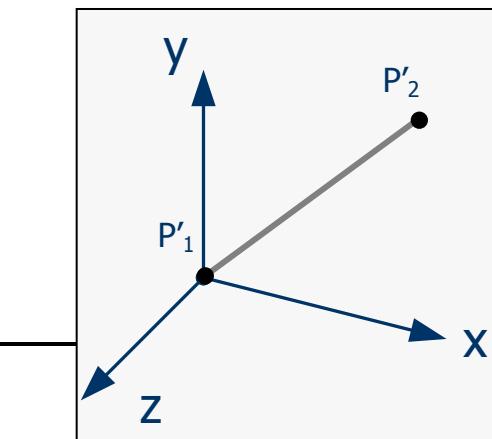
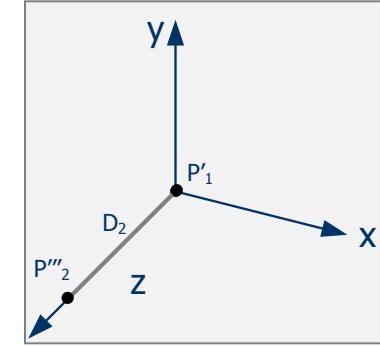
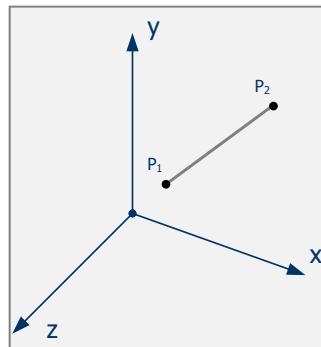
$$AA^t = I$$

Composição de transformações geométricas 3D



Composição de transformações geométricas 3D

- São necessárias as seguintes transformações (por exemplo):
 1. **Translação** de P_1 para a origem
 2. **Rotação** sobre o eixo yy , de forma a que P_1 e P_2 fiquem no plano YZ
 3. **Rotação** sobre o eixo xx , para que P_1 e P_2 fiquem sobre o eixo zz



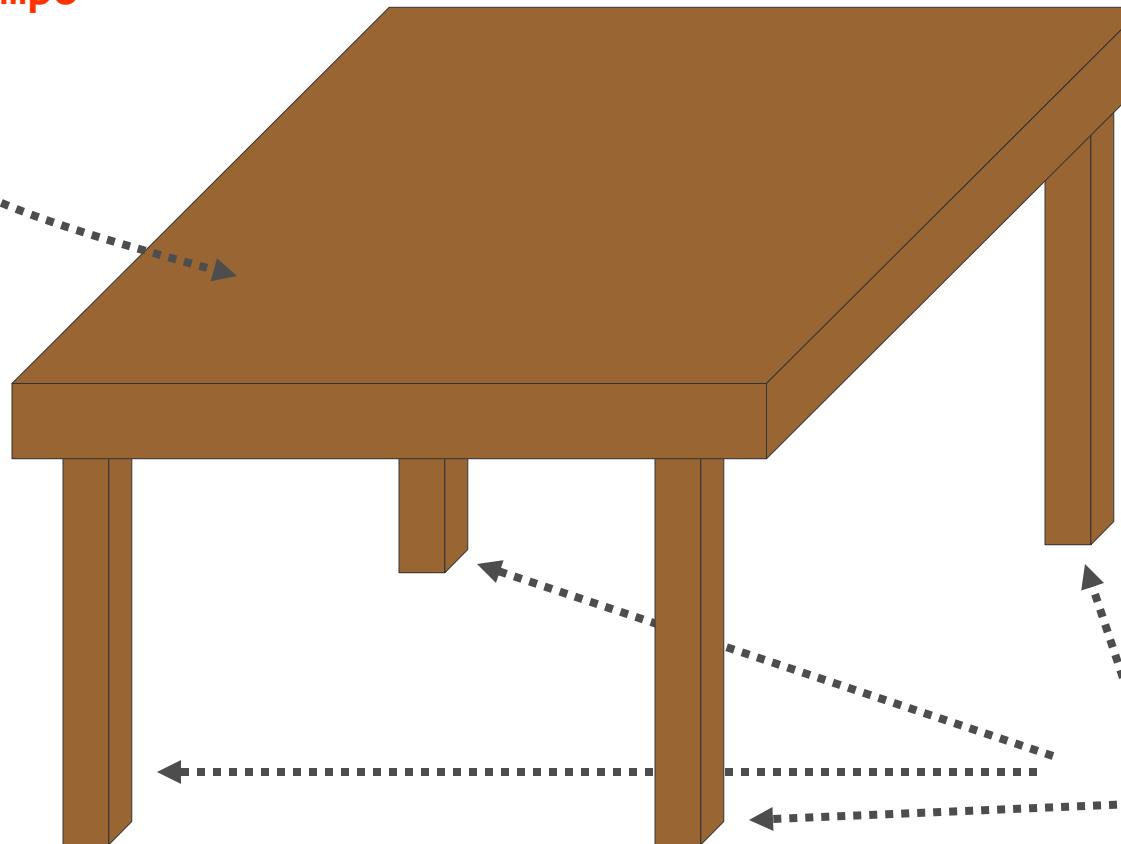
Sumário

- Transformações geométricas
 - Translação
 - Rotação
 - Escala
 - *Shearing*
- Coordenadas homogéneas
- Cálculo com matrizes
- Composição de transformações
 - Ex: *Window viewport transform*
- Matrizes de transformações em 3D
- Modelação hierárquica

Composição de transformações

- Uma cena é quase sempre resultado da composição de vários objectos, aos quais são aplicadas transformações

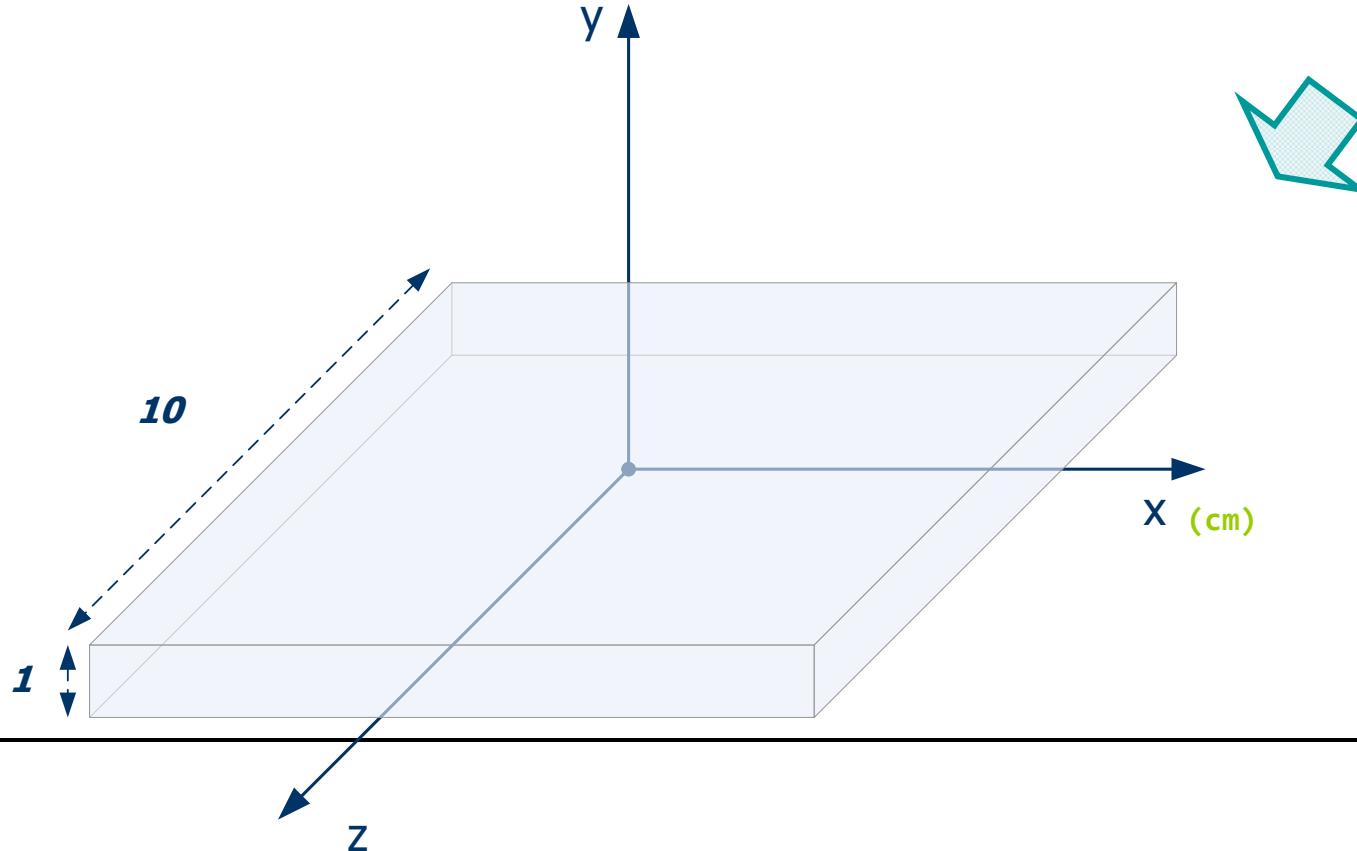
Um tampo



Quatro pernas

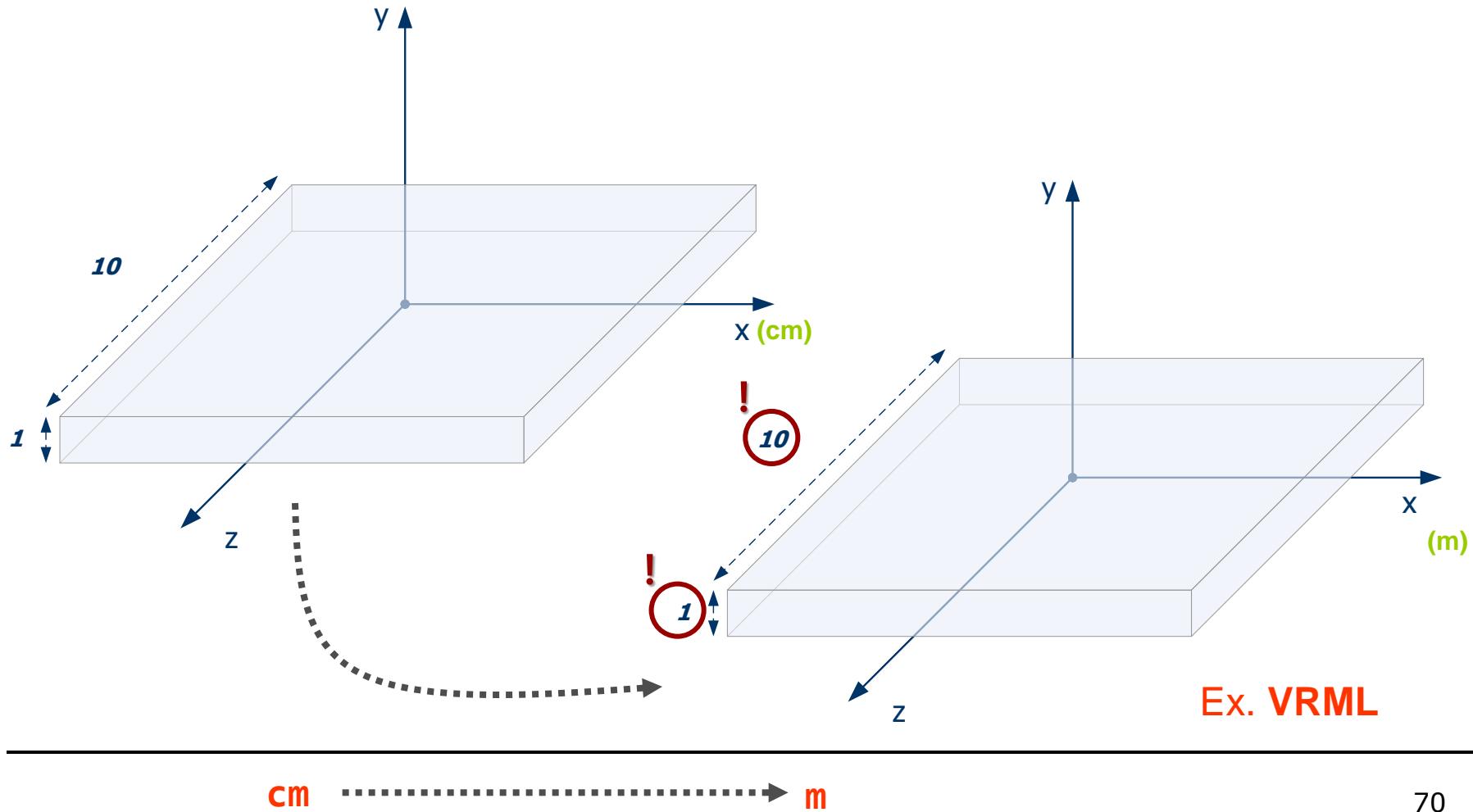
Composição de transformações

- Quando se modela um objecto, normalmente faz-se num sistemas de coordenadas diferentes do mundo:
 - Coordenadas de modelação ou coordenadas do objecto
- Regra geral, o que muda são as unidades do que se modela



Composição de transformações

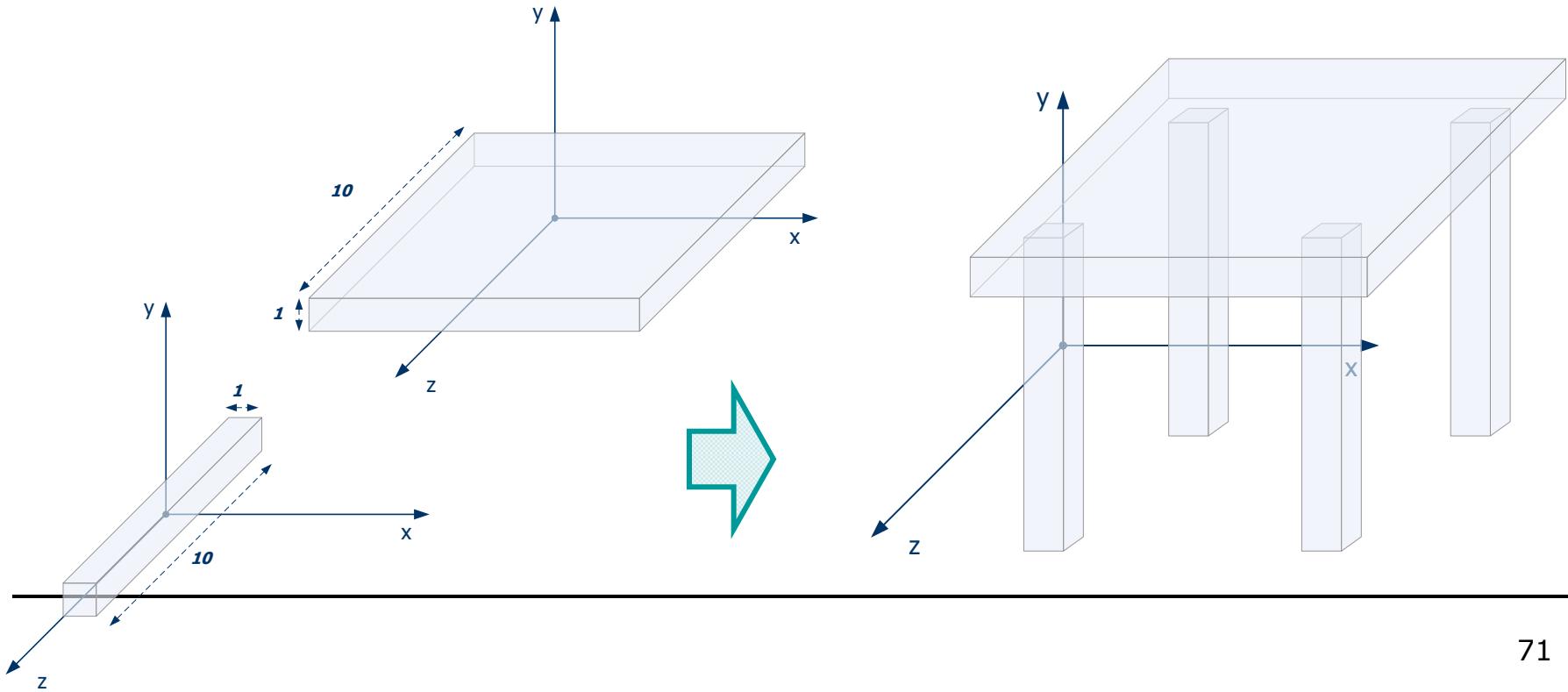
- De acordo com o sistema onde o mundo virtual será efectuado, poderá ter que ser realizada uma mudança de escala e/ou de unidades



Composição de transformações

Modelação Hierárquica

- Além disso, por questões de simplicidade, a modelação dos objectos faz-se na origem
- No entanto, a composição das cenas pode não ser feita na origem, ou seja, são necessárias algumas transformações geométricas



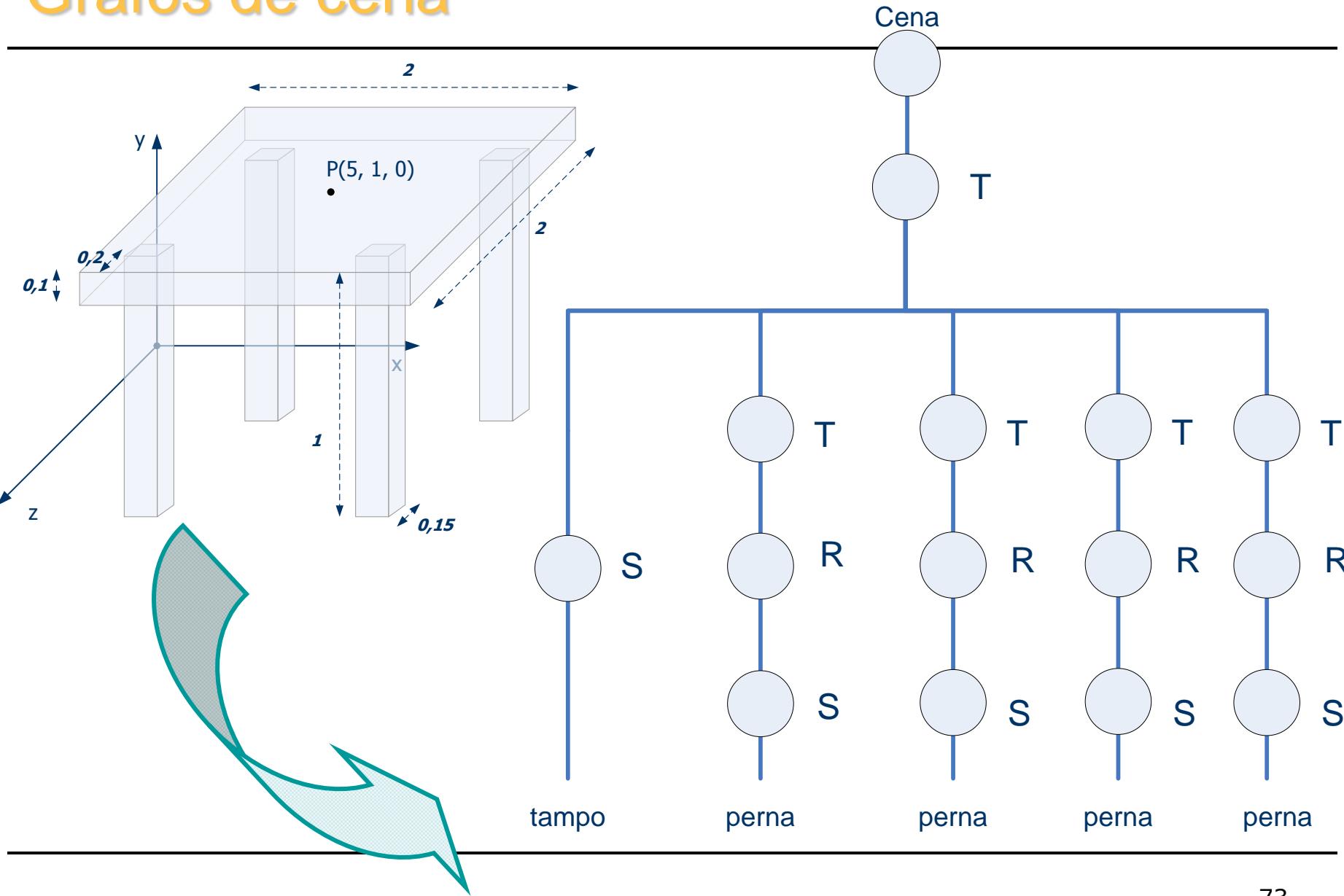
Composição de transformações

Modelação Hierárquica

- Para que esta composição seja feita de uma forma sistemática, é utilizada uma composição hierárquica
- Esta modelação é realizada através de grafos dirigidos acíclicos, que se designam de **grafos de cena**
- Um grafo de cena não é mais do que a representação de objectos e nós de transformações, de forma a representar o aspecto final da cena, nas coordenadas do mundo

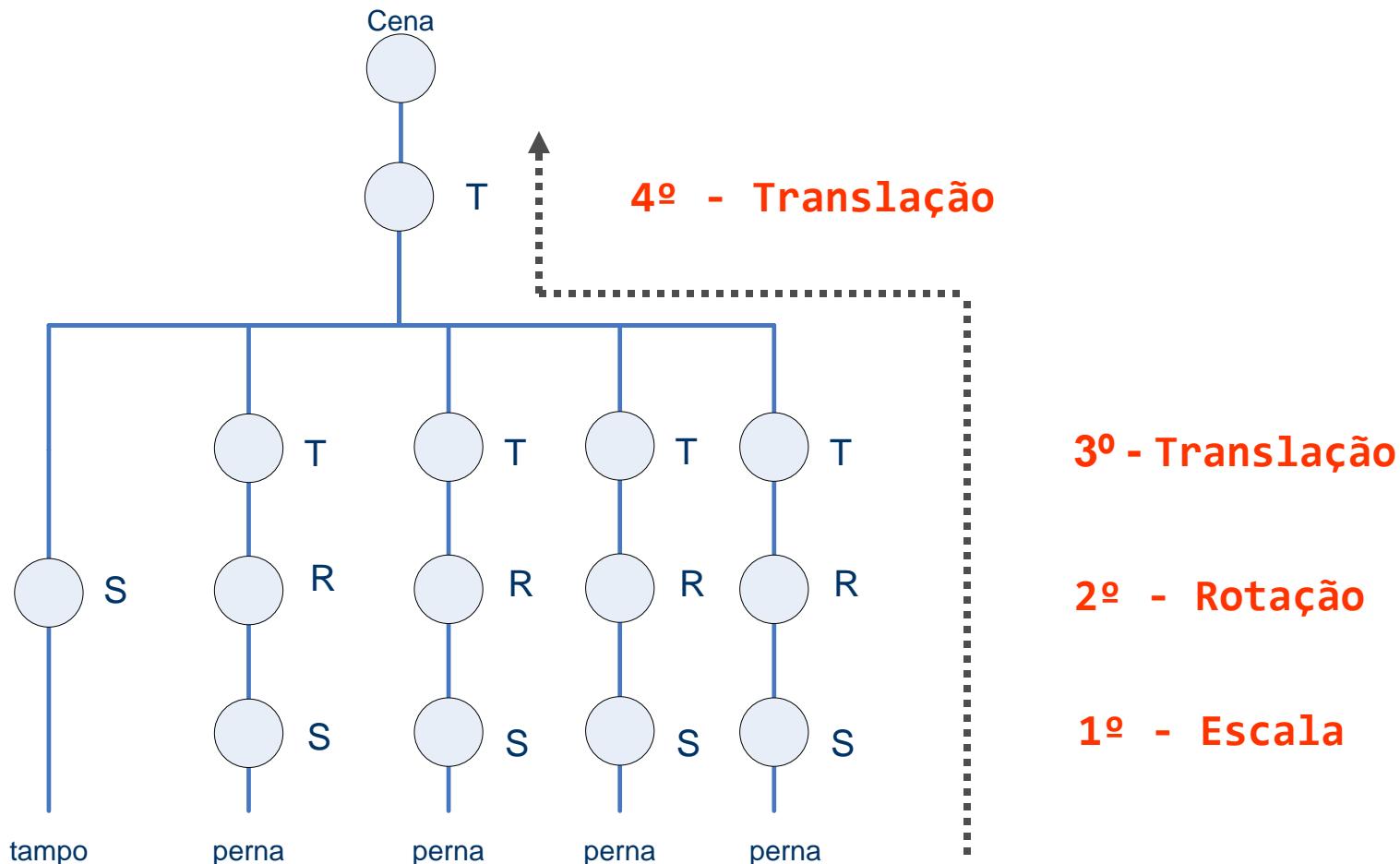
Como ficará o grafo de cena para a modelação da mesa?

Grafos de cena

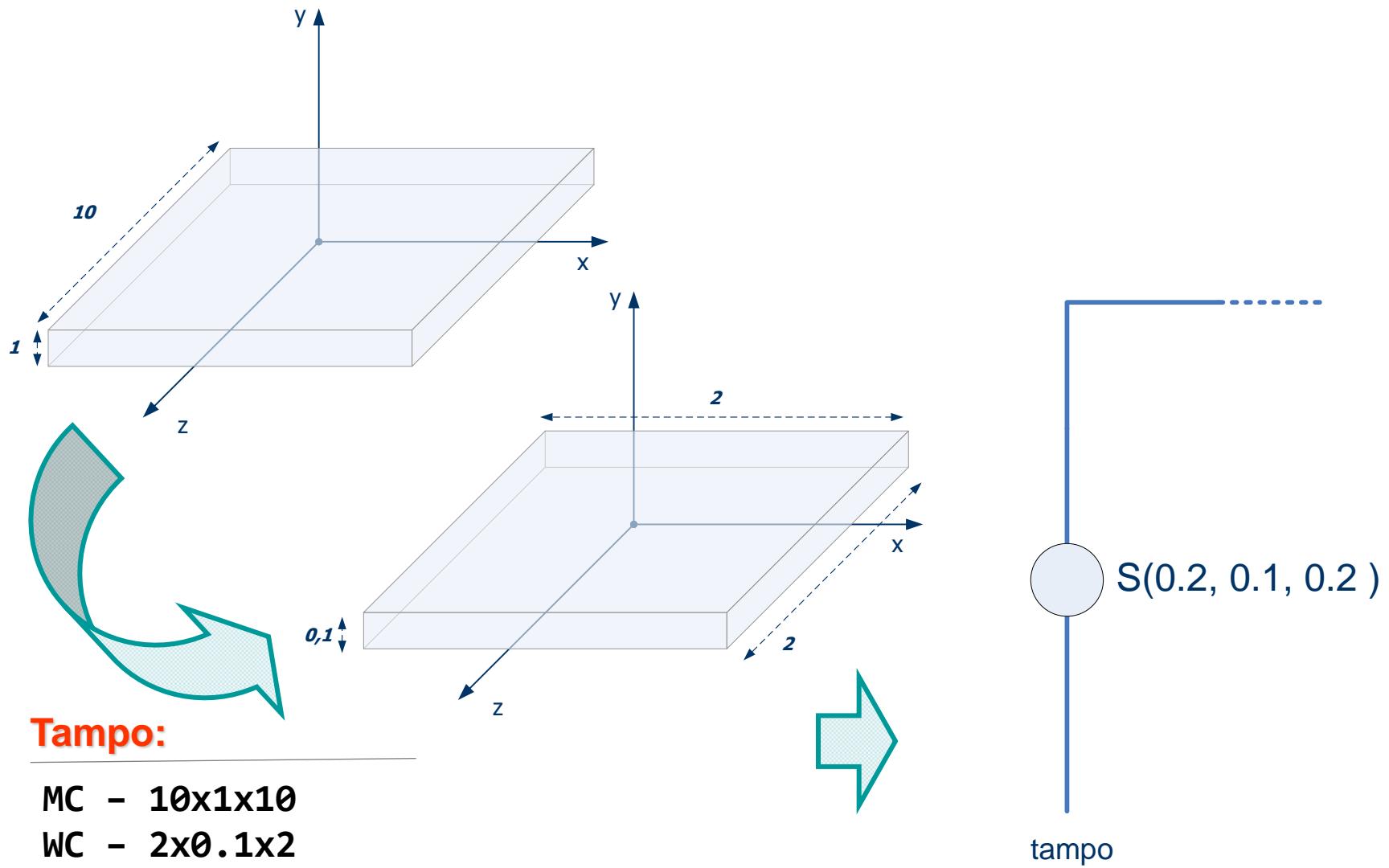


Grafos de cena

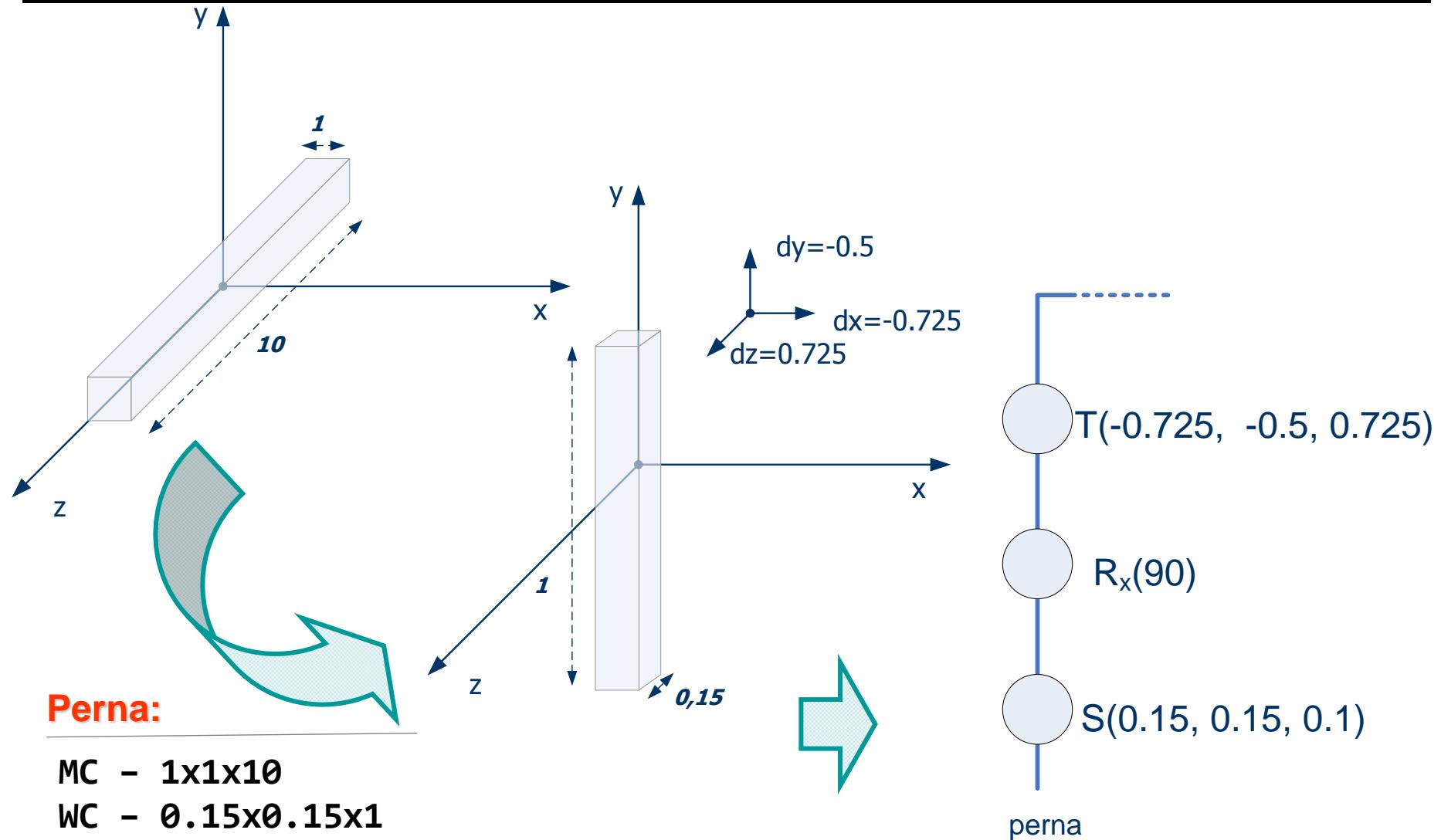
- **Atenção:** A ordem de execução das transformações é da raiz para as folhas



Grafos de cena



Grafos de cena

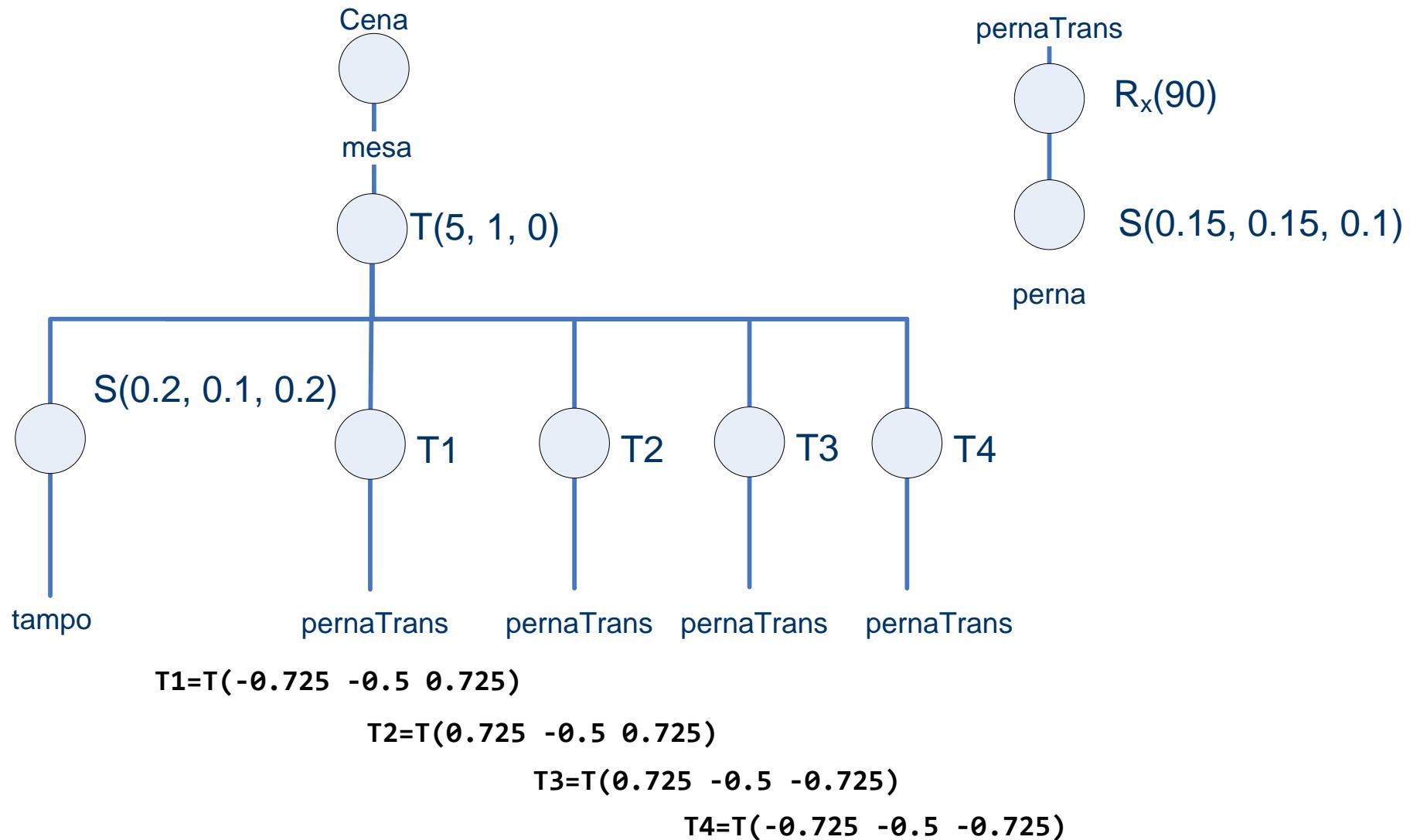


Perna:

MC - $1 \times 1 \times 10$

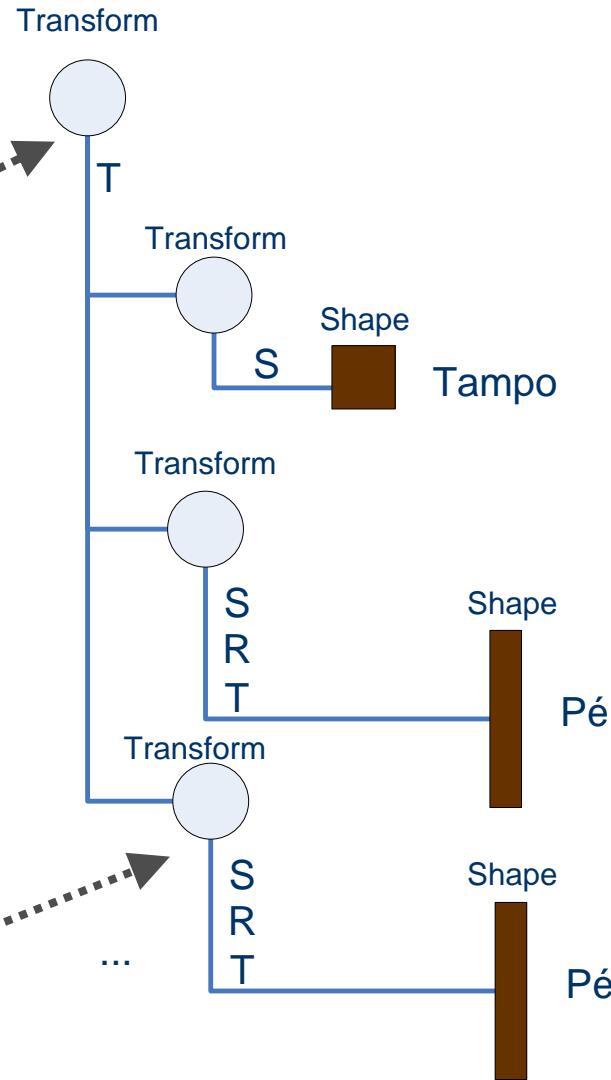
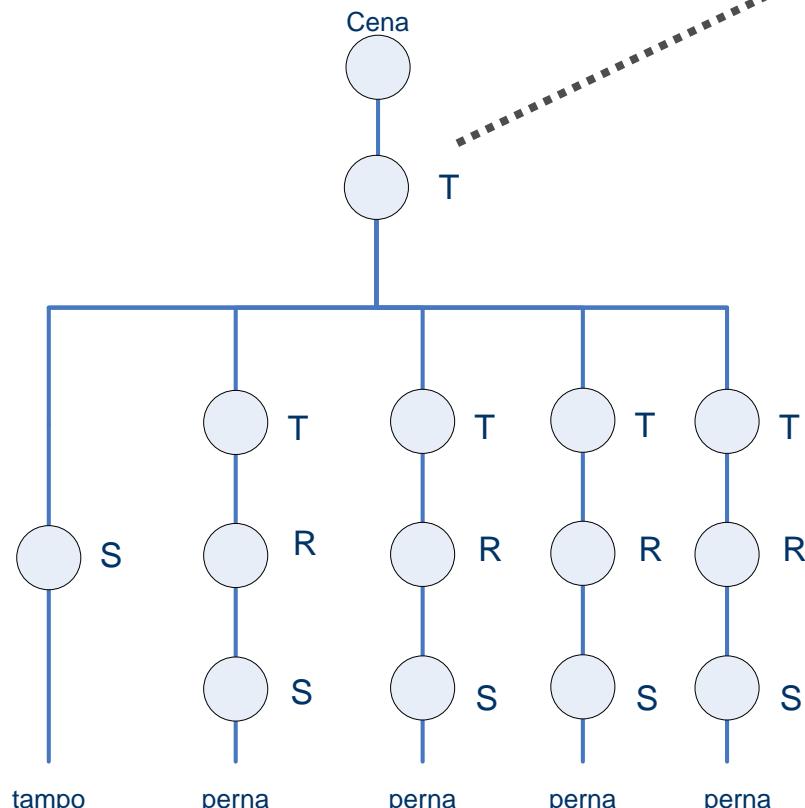
WC - $0.15 \times 0.15 \times 1$

Grafos de cena



Grafos de cena em VRML

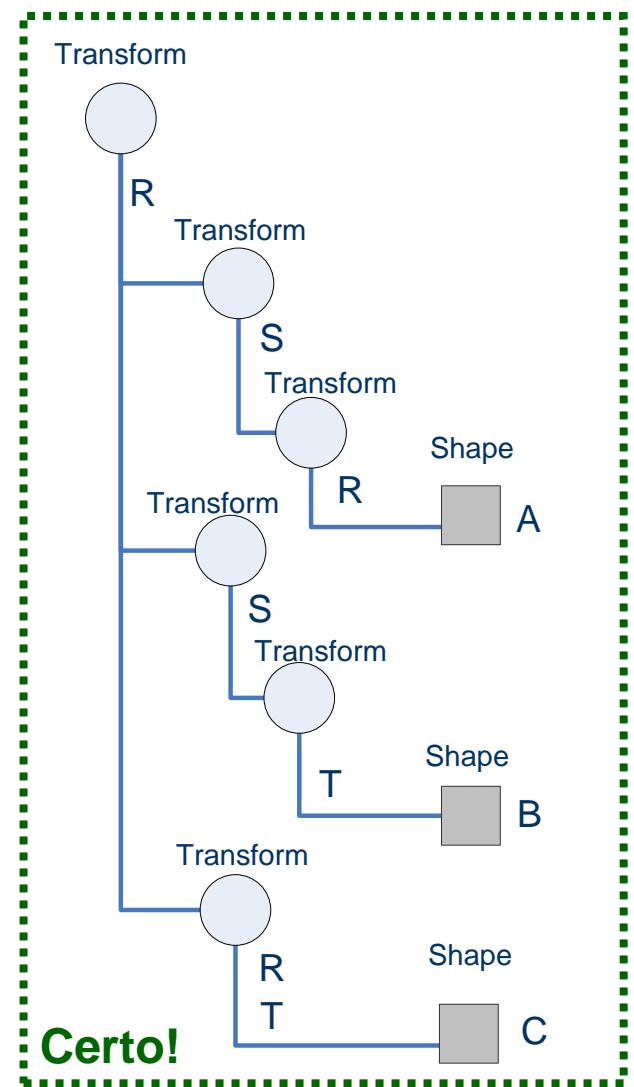
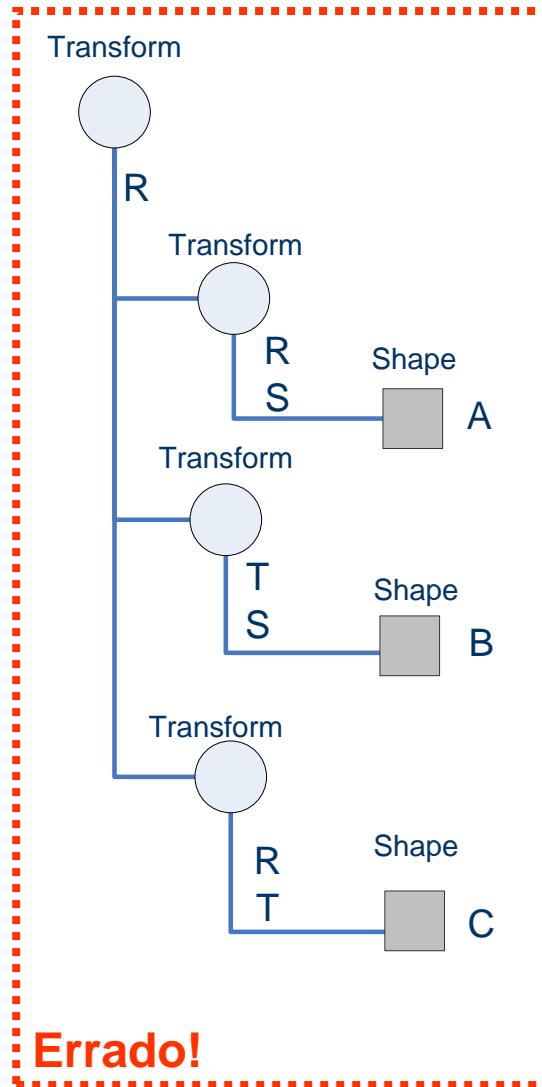
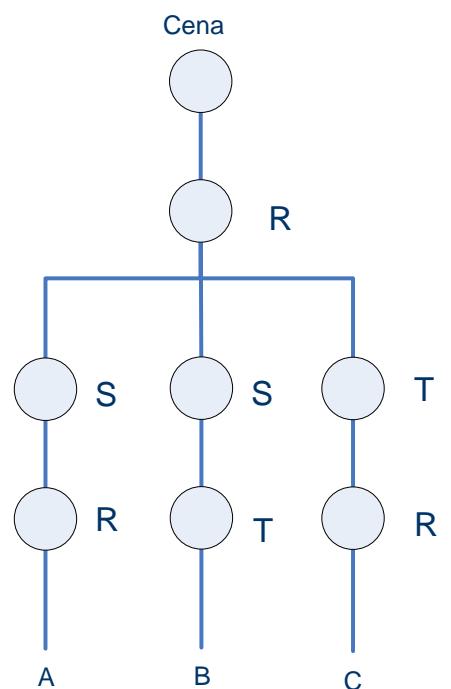
A passagem de um grafo de cena para VRML é bastante fácil



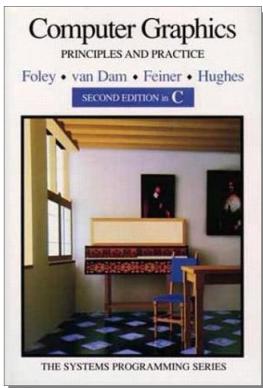
Grafos de cena em VRML

- Note que o exemplo aqui apresentado conduz a um grafo de cena onde o mapeamento para VRML é directo
- Em cada nó **Transform**, a ordem de execução das possíveis três transformações é bastante clara e independente da ordem de declaração
 - Escala -> Rotação -> Translação
- Como já foi referido, estas transformações não são comutativas, logo, existem grafos de cena que têm de ser trabalhados na passagem para VRML
 - A passagem não é directa

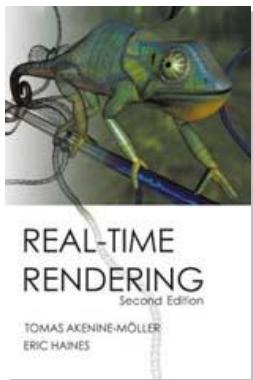
Grafos de cena em VRML



Referências



- **Computer Graphics: Principles and Practice in C,**
James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes,
Addison-Wesley Professional; 2nd edition (1995)
 - Capítulo 5



- **Real-time Rendering,**
Tomas Akenine-Möller and Eric Haines, A.K. Peters Ltd, 2nd edition
(2002)
 - Capítulo 3
- M. Próspero, FCT-UNL, Documentação da cadeira de computação gráfica, 2005
- Transformation Hierarchy @ Exploratories - <http://tinyurl.com/ze84j>