0.1　H25 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)x^2-5 は既約．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}):\mathbb{Q}]=2$ である．最小多項式の根は $\pm\sqrt{5}$ である．すなわち $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である．Galois 群は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．中間体は $\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である．

(2)x^3-5 は既約．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}):\mathbb{Q}]=3$ である．最小多項式の根は $\sqrt[3]{5},\omega\sqrt[3]{5},\omega^2\sqrt[3]{5}$ である．ただし $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ とする．$\omega\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ であるから $\omega\notin\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})\subset\mathbb{R}$ である．よって $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大でない．

Galois 閉包は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\omega)$ である．x^2+x+1 は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ 上既約であるから $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\omega):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})]=2$ である．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\omega):\mathbb{Q}]=6$ である．

(3)x^2+x+1 は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上唯一の 2 次の既約なモニック多項式である．したがって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の可約な 4 次多項式で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に根を持たない多項式は $(x^2+x+1)^2=x^4+x^2+1$ のみである．すなわち $x^4+x^3+x^2+x+1$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上既約である．

仮に $x^4+x^3+x^2+x+1$ が $\mathbb{Q}[x]$ 上可約であるとする．これは $\mathbb{Z}[x]$ 上可約であることを意味する．このとき $\pi\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から誘導される写像で $x^4+x^3+x^2+x+1$ を送ると，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ 上で可約となり矛盾する．したがって $x^4+x^3+x^2+x+1$ は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．

すなわち $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ は 4 次の Galois 拡大である．

$\sigma(\zeta_5)=\zeta_5^2$ とする．$\sigma^2(\zeta_5)=\zeta_5^4\neq\zeta_5$ であるから $\sigma^2\neq\mathrm{id}$ である．よって σ の位数は 4 であるから $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である．

よって中間体はただ一つ存在して $\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})=\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{5})$ である．

円分体の知識をみとめれば，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ であることがすぐにわかる．