0.1 H8 数学選択

$\boxed{6}$

群 G と $N \lhd G, H \leq G$ について $NH = G, H \cap N = \{e\}$ ならば半直積 $N \rtimes H \cong G$ である．

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}, H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \right\}$$ とする．

$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $NH = G$ でありまた $H \cap N = \{e\}$ である．よって $N \rtimes H \cong G$ である．

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は位数無限であり，$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は位数 2 である．

$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ を任意にとる．$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ は位数が無限であるから $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

同様に $\varphi\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって φ の全射性から $a = \pm 1$ である．逆に $a = \pm 1, b \in \mathbb{Z}$ が定まれば同型写像 φ が一意に定まる．半直積 $\mathbb{Z} \rtimes_f \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $f(i) = (n \mapsto (-1)^i n)$ で定める．このとき $\mathrm{Aut}(G) \to \mathbb{Z} \rtimes_f \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \varphi \mapsto (b, a)$ は全単射である．$\phi \mapsto (d, c)$ に対して $\varphi \circ \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi \circ \phi\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & b + ad \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $\varphi \circ \phi \mapsto (b + ad, ac) = (b + (-1)^a d, ac) = (b, a) \cdot (d, c)$ となるから $\mathrm{Aut}(G) \to \mathbb{Z} \rtimes_f \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同型射．

$\boxed{7}$ (1)$f(x^2) = f(x)g(x)$ なる $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在する．f の根 α に対して $f(\alpha^2) = f(\alpha)g(\alpha) = 0$ より α^2 も f の根である．f が n 次多項式であるから，異なる根は高々 n 個である．よって $\alpha^{2^m} = \alpha^{2^k}$ となる $m > k$ が存在する．このとき $\alpha^{2^m - 2^k} = 1$ となるから α は 1 の冪根である．

α が偶数位数の根であるとする．すなわち $\alpha^{2m} = 1$ となる最小の正の整数 m が存在する．このとき $\alpha^m = -1$ となる．また $x^m - 1 = 0$ は α^2 を根にもつ．f は α^2 の最小多項式であるから $x^m - 1 = f(x)h(x)$ となる $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在する．α を代入すると $-2 = \alpha^m - 1 = f(\alpha)h(\alpha) = 0$ となり矛盾する．よって α は奇数位数の根である．

(2)f の根 α, β の位数を $s > t$ とする．$f(x)|(x^t - 1)$ であるから $\alpha^t = 1$ である．これは $s > t$ であることに矛盾する．よって f の根は全て位数が等しい．

f の根 α の位数が m であるとする．$f(-\alpha) = 0$ なら $(-\alpha)^m = (-1)^m \alpha^m = (-1)^m = 1$ となり m は偶数である．これは矛盾．

$f((-\alpha)^2) = f(\alpha^2) = f(\alpha)g(\alpha) = 0$ であり，$f((-\alpha)^2) = f(-\alpha)g(-\alpha) = 0$ であるから $g(-\alpha) = 0$ である．g の次数は f と等しいから最高時の係数に注意すれば $g(x) = (-1)^n f(-x)$ である．

(3)f が奇数位数の冪根の最小多項式であるから f は円分多項式である．オイラーのトーシュエント関数を φ とすると，位数 m の 1 の冪根を解に持つ円分多項式の次数は $\varphi(m)$ である．

$\varphi(m) \leq 6$ となる奇数 m を考える．$1, 2, 4, 8, 16, m - 1, 32$ は m と互いに素である．したがって $m \geq 34$ なら $\varphi(m) > 6$ である．また $33 \geq m \geq 18$ で $3, 5, 7$ のいずれも素因数にもつ数は存在しない．よって $m \geq 18$ なら $\varphi(m) > 6$ である．$m = 1, 3, 5, 7, 9$ なら $\varphi(m) \leq 6$ であり，$m = 11, 13, 15, 17$ なら $\varphi(m) > 6$ である．$m = 1, 3, 5, 7$ に対応する円分多項式は $x - 1, x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で

ある．$m = 9$ なら $(x^9 - 1)/(x^3 - 1) = x^6 + x^3 + 1$ である．

この 5 つが求める $f(x)$ である．