0.1　H12 数学選択

$\boxed{8}$ (1) $\pi(ab)=(ab)^2=a^2b^2=\pi(a)\pi(b)$ である．よって準同型．

(2)$\pi(a)=b\in\operatorname{Im}\pi$ に対して，$\pi(x)=b$ なら x は $x^2-b=0$ の根である．したがって $\pi(x)=b$ となる x は $a,-a$ のみ．

$a=-a$ なら $a=0\vee 2=0\in\mathbb{F}_p^\times$ である．$a\in\mathbb{F}_p^\times$ より $a\neq 0$ で p は奇素数であるから $2\neq 0$ である．よって $a\neq -a$ である．

したがって位数は $\frac{p-1}{2}$ である．

(3)$\ker\pi^2=\left\{x\mid x^4=1\right\}$ である．$x^2=1$ となる x は $1,-1$ のみ．$x\in\ker\pi^2$ で $x\neq\pm1$ なら $x^2=-1$ である．

したがって $p-1$ が 4 の倍数ならば -1 は平方剰余であるから $\ker\pi^2$ は位数 4 の群 $\{-1,1,a,-a\}\quad(a^2=-1)$ となる．

$p-1$ が 4 の倍数でないならば -1 は平方非剰余であるから $\ker\pi^2$ は位数 2 の群 $\{-1,1\}$ となる．

(4)$1^2=1,2^2=4,3^2=9,4^2=5,5^2=3$ であるから，$\mathbb{F}_{11}^\times$ は x^2-2 の根を持たない．よって x^2-2 は既約である．

$x^4-2=(x^2+4x+8)(x^2+7x+8)$ であるから既約でない．

$\boxed{9}$ (1)G による不変体を L^G とする．$G=\{\sigma,\tau,\sigma\circ\tau\}$ である．$\sigma(x^2+y^2)=y^2+x^2,\sigma(xy)=yx,\tau(x^2+y^2)=x^2+y^2,\tau(xy)=xy$ であるから $K\subset L^G$ である．$[L:L^G]=|\operatorname{Gal}(L/L^G)|=|G|=4$ である．

$L=K(x)$ である．$(t-x)(t+x)(t-y)(t+y)=t^4-(x^2+y^2)t^2+x^2y^2$ であるから $[L:K]\leq 4$ である．したがって $K=L^G$ である．よって L/K は Galois 拡大で galois 群は G である．

(2)G の非自明な部分群は $\langle\sigma\rangle,\langle\tau\rangle,\langle\sigma\circ\tau\rangle$ である．$\sigma(x+y)=y+x,\tau(x^2-y^2)=x^2-y^2,\sigma\circ\tau(x-y)=x-y$ であり，また $\tau(x+y)=-x-y,\sigma(x^2-y^2)=y^2-x^2,\tau(x-y)=-x+y$ である．よって $K(x+y),K(x^2-y^2),K(x-y)$ がそれぞれに対応する中間体である．これに L,K を加えたものが全ての中間体である．