0.1　2002 数学専門

$\boxed{1}$ (1)F の階数が 1 であるから，$0 \neq v_1 \in V, f(v) \neq 0$ なる v_1 が存在する．$\ker F$ は 3 次元部分空間であるから基底 $\{v_2, v_3, v_4\}$ がとれる．$\sum c_i v_i = 0$ とすると $F(\sum c_i v_i) = c_1 f(v_1) = 0$ より $c_1 = 0$．したがって $\{v_2, v_3, v_4\}$ は一次独立であるから $c_i = 0 \quad (i = 2, 3, 4)$ である．$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ とすれば一次独立．よって 4 つ元からなる一次独立な集合が得られたから，V の次元が 4 であることより，S は基底.

この S に関する表現行列は $F(v_i) = 0 \quad (i = 2, 3, 4)$ であるから $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(2)$F(v_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ としたときに，$\alpha_1 = 0$ だとする．このとき，$F^2(v_1) = 0$ であるから，V の基底を $\{v_1, f(v_1), v_3', v_4'\} \quad (v_3', v_4' \in \ker F)$ ととれば表現行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

$\alpha_1 \neq 0$ のとき，$u_1 = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) \neq 0$ とすれば $F(u_1) = F(v_1) = \alpha_1 u_1$ より u_1 が固有値 α_1 の固有ベクトルとなる．よってジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

$\boxed{2}$ (1) 略.

(2)$\varphi \colon H \to K; A = [a_{ij}] \mapsto \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$ とすれば φ は全射準同型である．よって $N = \ker\varphi$ とすれば $H/N \cong K$ である．N は対角成分が全て 1 であるような上三角行列全体である.

$\boxed{3}$ (1)$\bar{R}$ において $f \in R$ の剰余類を $\bar{f}$ で表す．$S = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2\}$ が基底である．$c_0\bar{1} + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 = 0$ とすると，$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \in (x^3 - 2)$ である．よって $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = (x^3 - 2)f(x)$ なる $f(x) \in R$ が存在する．次数を比較すれば左辺は 2 以下で右辺は 0 か 3 以上かであるから，$f = 0$．よって $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$ より $c_0 = c_1 =_2 = 0$ である．すなわちい一次独立.

任意の $f(x) \in R$ は $f(x) = (x^3 - 2)g(x) + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \quad (g(x) \in R, c_i \in K)$ と表せる．したがって $\bar{f} = c_2\bar{x}^2 + c_1\bar{x} + c_0$ より $\bar{R}$ を生成する．よって S は基底.

(2)$X^3 - 2$ は素数 2 に着目すれば $\mathbb{Z}[X]$ 上でアイゼンシュタインの既約判定法から既約である．$X^3 - 2$ は原始多項式であるから $\mathbb{Z}[X]$ 上既約であるなら $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である．$\mathbb{Q}[X]$ は PID であるから既約元は素元であり，素イデアル $(X^3 - 2)$ は極大イデアルである．よって $\bar{R}$ は体.

(3)$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2), (X - \sqrt[3]{2})$ は互いに素なイデアルであるから中国剰余定理より，$\bar{R} \cong \mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \times \mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$\mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{R}$ である.

$X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2$ は $\mathbb{R}[X]$ 上既約であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ は $\mathbb{R}$ の代数拡大体となる．$\mathbb{C}$ は代数閉包で $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の拡大次数は 2 であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2) \cong \mathbb{C}$ である.

よって $\bar{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ である.

$\boxed{4}$ (1)$x^2 = t$ として $t^2 - t + 1$ の根は $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ である．したがって $x^4 - x^2 + 1$ の根は $\pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ である.

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = 1$ である．したがって $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ は $\pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ を全て含む．よって $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ であり，$[K : \mathbb{Q}] = 4$ である．また基底は $\{1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\}$ である．これは

次のようにしてわかる．一次従属なら $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ の最小多項式を 3 次以下でとれる．$P(X)=X^4-X^2+1$ とすれば $P(X)$ が $\mathbb{Z}[x]$ 上可約であると分かる．

$q(X) \mid P(X)$ なら $q(-X) \mid P(X)$ である．

(i) $q(X)=q(-X)$ のとき，$q(X)=X^2-a$ とかける．よって $P(X)=(X^2-a)(X^2-b)$ である．係数比較をすれば $a+b=1$，$ab=1$ であるから，$(x-a)(x-b)=x^2-x+1$ である．しかし x^2-x+1 は $\mathbb{Z}[x]$ 上既約であるから矛盾．

(ii)$q(X) \neq q(-X)$ のとき，$q(X)=X^2-aX+b$ とかける．$P(X)=(X^2-aX+b)(X^2+aX+b)$ である．係数比較をすれば $b^2=1$，$a^2+2b=0$ である．よって $b=\pm 1$ である．$b=1$ なら $a^2+2=0$ であるから，矛盾．$b=-1$ なら $a^2-2=0$ であるから，$a^2=2$ であるがこれは $a \in \mathbb{Q}$ より矛盾．

以上より $P(X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ 上既約である．よって $\mathbb{Q}[X]$ 上既約であるから，これは一次従属でないことを意味する．よって一次独立であるから基底であるとわかる．

(2)$\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\sigma(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})=\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\sigma^2(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})=\sigma(\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}})=\sigma(1/\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ である．よって $\sigma^2=\mathrm{id}$ である．また $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\tau(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\tau^2=\mathrm{id}$ である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 位数 4 の群であるから，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のいずれかである．位数 2 の元を 2 つ以上含むことから $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ である．また σ, τ によって生成されると分かる．(3)$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の非自明な部分群は $\langle\sigma\rangle, \langle\tau\rangle, \langle\sigma\circ\tau\rangle$ である．

σ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}+\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}=\alpha$ とすれば $\alpha^2=3$ であるから，α は $\pm\sqrt{3}$ のいずれかである．τ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ である．

$\sigma\circ\tau$ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}-\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}=\beta$ とすれば $\beta^2=-1$ であるから，β は $\pm i$ のいずれかである．

以上より非自明な中間体は $\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ である．これに $K, \mathbb{Q}$ を加えれば全ての中間体が得られる．