0.1 R3 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\varphi\colon k[x,y] \to k; x \mapsto a, y \mapsto b$ とする．φ は全射環準同型である．$\ker\varphi \supset (x-a, y-b)$ である．$f \in \ker\varphi$ とする．$f(x,y) = (x-a)g(x,y) + (y-b)h(y) + c \quad (g \in k[x,y], h \in k[y], c \in k)$ とできる．$\varphi(f) = 0$ より $c = 0$ である．よって $\ker\varphi = (x-a, y-b)$ である．

すなわち $k[x,y]/(x-a, y-b) \cong k$ である．k は体であるから $(x-a, y-b)$ は極大イデアルである．

(2)$x^2+y^2-1 \in (x-a, y-b)$ なら $\varphi(x^2+y^2-1) = 0$ より $a^2+b^2 = 1$ である．$a^2+b^2-1 = 0$ なら $\varphi(x^2+y^2-1) = 0$ より $x^2+y^2-1 \in (x-a, y-b)$ である．

(3)J を $I = (xy, x^2+y^2-1)$ を含む極大イデアルとする．$(x+J)(y+J) = 0 \in k[x,y]/J$ より $x+J = 0$ または $y+J = 0$ である．すなわち $x \in J$ または $y \in J$ である．

$x \in J$ なら $y^2-1 \in J$ であるから $y-1 \in J$ または $y+1 \in J$ である．ここで $\langle x, y-1\rangle \subset J$ とすると，左辺は極大イデアルであるから $J = \langle x, y-1\rangle$ である．

同様にして J の候補は $\langle x, y+1\rangle, \langle x, y-1\rangle, \langle x+1, y\rangle, \langle x-1, y\rangle$ でつくされるとわかる．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$(\alpha-\omega)^3 = 5$ より $\alpha^3 - 3\alpha^2\omega + 3\alpha\omega^2 - 1 = 5$ である．$\omega^2 = -1-\omega$ より $6 - \alpha^3 + 3\alpha = \omega(-3\alpha^2 - 3\alpha)$ である．$\alpha \neq 0, \alpha \neq -1$ より $\omega = \frac{\alpha^3-3\alpha-6}{3\alpha^2+3\alpha}$ と表せる．よって $\omega \in F$ より $F \supset M$ である．

$\omega \in F$ より $\alpha - \omega = \sqrt[3]{5} \in F$ である．よって $\sqrt[3]{5}\omega \in F$ であるから，$F \supset L$ である．

(2)(1) より $F = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{5}\omega) = L(\omega)$ である．$\omega \in L$ なら L/M となる．$L/\mathbb{Q}$ の拡大次数は x^3-5 が最小多項式となるため 3 である．$M/\mathbb{Q}$ の拡大次数は x^2+x+1 が最小多項式となるため 2 である．これは $[L:\mathbb{Q}] = [L:M][M:\mathbb{Q}]$ に矛盾．したがって $\omega \notin L$ である．よって $[F:L] = 2$ であるから $[F:\mathbb{Q}] = [F:L][L:\mathbb{Q}] = 6$ である．

(3)$(\alpha-\omega)^3 = 5$ より $p(x) = x^3 - 3\omega x^2 + 3x\omega^2 - 6$ は α を根にもつ．$[F:M] = 3$ であるから α の M 上最小多項式は 3 次である．よって $p(x)$ が最小多項式.

(4)$F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \omega)$ である．$\sqrt[3]{5}, \omega$ の $\mathbb{Q}$ 上共役は全て F に属すから $F/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である．したがって $F/L, F/M$ は Galois 拡大である．また $M/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大で $L/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大でない.

(5)$\alpha^3 = 5 + 3\sqrt[3]{5}^2\omega + 3\sqrt[3]{5}\omega^2 + 1$ である．$\sqrt[3]{5}\omega = \beta$ とすれば $R(x) = x^3 - 3\beta x - 6$ が L 上の α を根にもつ多項式である．F/L の拡大次数が 2 であるから，R は既約でないため R は L に根を持つはずである．$(x^3 - 3\beta x - 6) = (x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 3\beta)$ である．よって $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha^2-3\beta)}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-3}\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$ である．$\alpha^2 - 4\beta = \sqrt[3]{5}^2 - 2\beta + \omega^2 = (\sqrt[3]{5} - \omega)^2$ より $\frac{-(\sqrt[3]{5}+\omega) \pm (2\omega+1)(\sqrt[3]{5}-\omega)}{2}$ である．ここで $+$ のときは $\beta + 1$ となる．よって $x^3 - 3\beta x - 6 = (x - (\beta+1))(x^2 + (\beta+1)x + \beta^2 - \beta + 1)$ であるから $Q(x) = x^2 + (\beta+1)x + \beta^2 - \beta + 1$ である．