0.1 H9 数学選択

$\boxed{6}$ (1)$p(t) = t^3 - x^3 \in L[t]$ が x の最小多項式であることを示す．$p(t) = (t-x)(t-e^{2\pi i/3}x)(t-e^{4\pi i/3}x)$ である．したがって $p(t)$ は L 上で既約なモニック多項式.

(2)$L(x) \ni x^{-1}(xy) = y$ より $K = L(x)$ である．$p(t)$ の根をすべて K は含むから K/L は正規拡大．よって K/L はガロア拡大で拡大次数は 3．すなわち $\mathrm{Gal}(K/L) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(3)$M(x) \cdot M(y) = M(x,y) = K$ であり，$M(x) \cap M(y) = L$ である．$M(x)/M, M(y)/M$ は galois 拡大で $\mathrm{Gal}(M(x)/M) \cong \mathrm{Gal}(M(y)/M) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．galois 拡大の推進定理より $\mathrm{Gal}(K/M) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の非自明な部分群は $\langle(1,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(1,2)\rangle, \langle(0,1)\rangle$ である．$\sigma \in \mathrm{Gal}(M(x)/M)$ を $\sigma(x) = e^{2\pi i/3}x$ とし，$\tau \in \mathrm{Gal}(M(y)/M)$ を $\tau(y) = e^{2\pi i/3}y$ とする．(σ, id) で不変な K の元は y であるから $\langle(1,0)\rangle$ に対応する中間体は $M(y)$ である．同様にしてそれぞれ $M(xy^2), M(xy), M(x)$ が対応する．

以上より中間体は $M, M(x), M(y), M(xy), M(xy^2), K$ である．

$\boxed{8}$ (1) 位相空間 X が連結であるとは，X の空でない開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = X$ を満たすものが存在しないことである．

位相空間 X が弧状連結であるとは，X の任意の 2 点 x, y に対して連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ を満たすものが存在することである．

(2)X を局所弧状連結であり連結である位相空間とする．連結性から $X \neq \emptyset$ である．$x, y \in X$ に対して, 連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ を満たすものが存在するとき $x \sim y$ とかく．

$U = \{y \in X \mid x \sim y\}$ とする．$y \in U$ に対して弧状連結な開近傍 U_y が存在する．任意の $z \in U_y$ に対して $z \sim y \sim x$ であるから $z \in U$ である．よって $U_y \subset U$ である．すなわち U は開集合である．

$z \in X \setminus U$ とする．z に対して弧状連結な開近傍 U_z が存在する．$U_z \cap U \neq \emptyset$ であるとすると $y \in U_z \cap U$ が存在する．このとき $x \sim y \sim z$ であるから $z \in X \setminus U$ に矛盾する．よって $U_z \cap U = \emptyset$ である．z は任意であるから $X \setminus U$ は開集合である．よって U は開かつ閉である．X は連結であるから $U = X$ である．すなわち X は弧状連結である．

(3)M を連結な多様体とする．(2) より局所弧状連結であることを示せばよい．M の点 x に対して x を含む開集合 U と同相写像 $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．$\varphi(x) \subset B(\varphi(x), \varepsilon) \subset V$ となる ε 開球が存在する．$x \in \varphi^{-1}(B(\varphi(x), \varepsilon))$ は x を含む弧状連結な開集合である．よって局所弧状連結.