## 0.1 2009 午前

$\boxed{1}$ (1)$S(1)=1, S(t)=1+2t, S(t^2)=(1+2t)^2=4t^2+4t+1$ より $S$ の表現行列は $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix}$ である．固有値は $1,2,4$ である．

固有値 $1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ である．

固有値 $2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．

固有値 $4$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ である．

(2)$2T(1)=T(1+t+1-t)=2(1+t^2)$ より，$T(1)=1+t^2$ である．$T(t)=T(t+1)-T(1)=2t, T(t^2)=1+t^2$ より基底 $\{1,t,t^2\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ である．したがって $T$ の像は $\{1+t^2, 2t\}$ により生成される部分空間である．よって $a=c$ が必要十分条件．$f_0(t)=a+\frac{b}{2}t$ とすると $T(f_0)=g$ である．$\ker T=\{k(1-t^2) \mid k\in\mathbb{C}\}$ である．よって $\{k(1-t^2)+f_0 \mid k\in\mathbb{C}\}$ が求める $f$ 全体.

$\boxed{2}$ $A=\begin{pmatrix}2&q-2&-4&-(p+3)&2\\0&p+1&2q&p+1&q\\6&p+3q-5&q-12&-(2p+8)&q+6\end{pmatrix}$ とすると，$V$ は $Ax=0$ の解空間である．

$B=\begin{pmatrix}2&p+q-1&q-4&-2&q+2\\0&p(p+1)&q&p(p+1)&p(p+1)\end{pmatrix}$ とすれば $W$ は $Bx=0$ の解空間である．

$A$ を簡約化すると，$A\to\begin{pmatrix}2&q-2&-4&-(p+3)&2\\0&p+1&2q&p+1&q\\0&p+1&q&p+1&q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&q-2&-4&-(p+3)&2\\0&0&q&0&0\\0&p+1&q&p+1&q\end{pmatrix}$ である．

(1)$V,W$ が同型になることは次元が等しいことが必要十分条件．$x\mapsto Ax$ で定まる線形写像も $A$ で表すとすれば $\dim V=\dim\operatorname{Ker}A=\dim\mathbb{R}^5-\dim\operatorname{Im}A=5-\operatorname{rank}A$ である．同様に $\dim W=5-\operatorname{rank}B$ より $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$ が必要十分条件.

$\operatorname{rank}B\le 2$ である．$q\neq 0\Leftrightarrow\operatorname{rank}A=3$ であるから $q=0$ が必要.

$q=0$ のとき $p(p+1)=0\Leftrightarrow\operatorname{rank}B=1$ である．また $p+1=0\Leftrightarrow\operatorname{rank}A=1$ である．したがって $\dim V=\dim W$ となるのは $q=0$ かつ $p\neq 0$ のとき.

(2)$V=W$ なら $V\cong W$ であるから $q=0$ かつ $p\neq 0$ は必要である．$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ としたときに $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}B=V\cap W$ である．よって $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A$ となる $p,q$ を求めればよい．$\operatorname{Ker}C\subset\operatorname{Ker}A$ であるから $\dim\operatorname{Ker}C=\dim\operatorname{Ker}A$ が $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A$ の必要十分条件．すなわち $\operatorname{rank}C=\operatorname{rank}A$ が必要十分条件.

$p+1=0$ のとき．$C$ を簡約化すると $C$ を簡約化すると，$C \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より

$\operatorname{rank} C = 1 = \operatorname{rank} A$ である．

$p \neq 0, -1$ のとき，$C$ を簡約化すると，$C \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0 \\ 2 & p-1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & p(p+1) & 0 & p(p+1) & p(p+1) \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0 \\ 0 & p(p+1) & 0 & p(p+1) & p(p+1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ,0 & 0 & 0 & 0 & p(p+1) \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} C = 3 \neq$

$2 = \operatorname{rank} A$ である．

以上より $(p,q) = (-1,0)$ が $V = W$ に必要十分条件．このとき $V$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

である．

(3)$5 - \operatorname{rank} A = \dim V < \dim W = 5 - \operatorname{rank} B$ が必要．すなわち $\operatorname{rank} B < \operatorname{rank} A$ が必要である．したがって $q \neq 0$ または，$q = p = 0$ が必要である．

$\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow V \subset W$ である．よって $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A$ かつ $\operatorname{rank} B < \operatorname{rank} A$ は $V \subsetneq W$ の必要十分条件．

$p = q = 0$ のとき，$C$ を簡約化すると $C \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} C = 2 = \operatorname{rank} A$ であるから

$\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A$ である．よって $V \subsetneq W$．

$q \neq 0$ のとき，$C$ を簡約化すると $C \to \begin{pmatrix} 2 & q-2 & -4 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & q & p+1 & q \\ 2 & p+q-1 & q-4 & -2 & q+2 \\ 0 & p(p+1) & q & p(p+1) & p(p+1) \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 2 & q-2 & -4 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & q & p+1 & q \\ 0 & p+1 & q & p+1 & q \\ 0 & p(p+1) & q & p(p+1) & p(p+1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & q-2 & 0 & -(p+3) & 2 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(p-q+1) \end{pmatrix}$ である．よって

$[p(p-q+1) = 0] \vee [p+1 = 0 \wedge q = p(p-q+1)] \Leftrightarrow \operatorname{rank} C = 3$ である．

以上より $(p,q)=0$ または $q\neq 0$ かつ $p=0,-1,q-1$ で $V\subsetneq W$ が成り立つ．

$p=q=0$ なら $\dim V=3,\dim W=4$ である．$q\neq 0,p=0,-1,q-1$ なら $\dim V=2,\dim W=3$ である．

$\boxed{3}$ (1) $\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}(e^{\varphi}\cos\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^{\varphi}\sin\theta)$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-e^{\varphi}\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^{\varphi}\cos\theta)$ である．よって $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}e^{-\varphi}\cos\theta-\frac{\partial g}{\partial\theta}e^{-\varphi}\sin\theta$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}e^{-\varphi}\sin\theta+\frac{\partial g}{\partial\theta}e^{-\varphi}\cos\theta$ である．

(2)

$$\int_\varepsilon^1\frac{\log x}{x^\alpha}dx=\left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{1-\alpha}\log x\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha}dx=\frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon-\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon-\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\varepsilon^{1-\alpha}$$

である．$1-\alpha>0$ のとき $\varepsilon^{1-\alpha}\to 0\quad(\varepsilon\to 0+)$ である．$\frac{\log\varepsilon}{-\varepsilon^{\alpha-1}}$ は分母分子が共に $-\infty$ へ発散する．$\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-2}}=\frac{1}{-(\alpha-1)}\varepsilon^{1-\alpha}\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$ となるのでロピタルの定理から $\frac{\log\varepsilon}{-\varepsilon^{\alpha-1}}$ は収束する．よって広義積分は収束する．

$1-\alpha=0$ なら $\log\varepsilon$ が発散するから収束しない．

$1-\alpha<0$ なら $\log\varepsilon,-\varepsilon^{1-\alpha}$ が共に $-\infty$ へ発散するから広義積分は収束しない．

よって $1>\alpha$ のとき収束し，そのとき $\int_0^1\frac{\log x}{x^\alpha}dx=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}$ である．

(3)

$$\iint_D ye^{x^3}dxdy=\int_0^2 e^{x^3}\int_0^x ydydx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{6}\left[e^{x^3}\right]_0^2=\frac{e^8-1}{6}$$

である．

$\boxed{4}$ (1)$n=0$ のとき左辺は $e^x$ であり，右辺は $\int_0^x e^tdt=e^x$ であるから成立．$n$ 以下で成立したとする．

$$\int_0^x e^t(x-t)^{n+1}dt=\left[e^t(x-t)^{n+1}\right]_0^x-\int_0^x e^t\frac{1}{n+1}(x-t)^ndt=-x^{n+1}-(n+1)\int_0^x e^t(x-t)^ndt$$

$$\sum_{j=0}^{n+1}\frac{x^j}{j!}+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x e^t(x-t)^{n+1}dt=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(-x^{n+1}-(n+1)\int_0^x e^t(x-t)^ndt\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}+\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^ndt=e^x$$

である．

(2)$x\geq 0$ なら $0\leq t\leq x$ について $1\leq e^t\leq e^x$ である．したがって $\int_0^x(x-t)^ndt=-\frac{1}{n+1}\left[(x-t)^{n+1}\right]_0^x=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ である．よって $\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x(x-t)^ndt\leq\int_0^x e^t(x-t)^ndt\leq\int_0^x e^x(x-t)^ndt=e^x\frac{x^{n+1}}{n+1}$ である．

(3)(1) より $e-\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}=\frac{1}{n!}\int_0^1 e^t(1-t)^ndt$ である．よって (2) から $\frac{1}{(n+1)!}\leq e-\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{(n+1)!}$ である．$n=4$ のとき，$\frac{1}{200}<\frac{1}{120}=\frac{1}{5!}\leq e-\sum_{j=0}^{4}\frac{x^j}{j!}$ である．$n=5$ のとき，$e-\sum_{j=0}^{5}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{6!}<\frac{3}{720}\leq\frac{1}{240}<\frac{1}{200}$ である．$n\geq 5$ なら $e-\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{(n+1)!}\leq\frac{e}{6!}<\frac{1}{200}$ である．よって $N=5$ である．