0.1 H22 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\mathbb{Z}[x]$ 上で 2 が $\mathbb{Z}$ の素元であるからアイゼンシュタインの既約判定法より x^2-2 は既約である．$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Z}$ の商体であり $\mathbb{Z}$ が UFD であることから，$\mathbb{Z}[x]$ 上の既約性と $\mathbb{Q}$ 上の既約性が同値であることから x^2-2 は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．

したがって $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=2$ である．

x^3-3 も同様に既約．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[2]{3}),\mathbb{Q}]=3$ である．

(2)x^2-2 は $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}]$ 上既約である．もし可約なら $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ となり $\mathbb{Q}$ 上拡大次 2 の中間体を含むがこれは $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}]$ が 3 次であることに矛盾．

よって $[F:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})]=2$ より $[F:\mathbb{Q}]=6$ である．

(3)$L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\zeta_3)\quad(\zeta_3=e^{\frac{2\pi i}{3}})$ である．これは x^3-3 の根が $\zeta_3^i\sqrt[3]{3}\quad(i=0,1,2)$ であり $\zeta_3=\zeta_3\sqrt[3]{3}/\sqrt[3]{3}$ であることからわかる．

$[\mathbb{Q}(\zeta_3):\mathbb{Q}]=2$ である．$L=F\cdot\mathbb{Q}(\zeta_3)$ である．また $\mathbb{Q}(\zeta_3)\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}$ より $F\cap\mathbb{Q}(\zeta_3)=\mathbb{Q}$ である．よって $[F:\mathbb{Q}]=12$ である．