0.1 2008 午後

$\boxed{1}$ (1)$F(x)=0$ とすると，$x=G\circ F(x)=G(0)=0$ より $\mathrm{Ker}\,F=\{0\}$ であるから F は単射．

任意の $y\in V$ について $G\circ F(y)=y$ より G は全射．

(2)$y\in\mathrm{Im}\,F\cap\mathrm{Ker}\,G$ とする．ある $x\in V$ が存在して $y=F(x)$ である．$0=G(y)=G\circ F(x)=x$ より $x=0$ である．よって $\mathrm{Im}\,F\cap\mathrm{Ker}\,G=\{0\}$．

(3)$w\in W$ を任意に定める．$G(w-F\circ G(w))=G(w)-G(w)=0$ であり，$F\circ G(w)\in\mathrm{Im}\,F$ より $W=\mathrm{Im}\,F+\mathrm{Ker}\,G$ である．(2) より $\mathrm{Im}\,F\cap\mathrm{Ker}\,G=\{0\}$ であるから $W=\mathrm{Im}\,F\oplus\mathrm{Ker}\,G$ である．

(4)V の基底を $\{v_1,\cdots,v_n\}$ として一つ定める．$w_i=F(v_i)$ として w_i を定めたとき $\{w_1,\cdots,w_n\}$ は $\mathrm{Im}\,F$ の基底であることは F が単射であることからわかる．$\mathrm{Ker}\,G$ の基底を $\{w_{n+1},\cdots w_m\}$ として一つとる．このとき (3) より $\{w_1,\cdots,w_m\}$ は W の基底である．

$1\le i\le n$ なら $F(v_i)=w_i,G(w_i)=G(F(v_i))=v_i$ で $n+1\le i$ なら $G(w_i)=0$ であるから表現行列は指定された形となっている．

$\boxed{2}$ (1) 固有多項式は $g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t&-1&1\\-1&2-t&-1\\1&-1&2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-t&1-t&1\\-1&1-t&-1\\1&0&2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-t&0&2\\-1&1-t&-1\\1&0&2-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}3-t&2\\1&2-t\end{vmatrix}=-(t-1)^2(t-4)=0$ である．

よって固有値は $1,4$ である．固有値 1 に対応する固有ベクトル空間の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．正規直交化すると，$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\right\}$ である．

固有値 4 に対応する固有ベクトル空間の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．正規化すれば $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\right\}$ である．

よって $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$ とすれば ${}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ である．

(2)$P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で変数変換すると，ヤコビアンは $\det p=1$ である．また $Q(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}{}^tPAP\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=x^2+y^2+4z^2$ である．

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{-Q(x,y,z)}dxdydz&=\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{-x'^2-y'^2-4z'^2}dx'dy'dz'=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x'^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y'^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4z'^2}dz\\&=\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z''^2}\frac{1}{2}dz''=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

(3)$P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で変数変換する．

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz=\iiint_{\mathbb{R}^3}(x'^2+y'^2+z'^2)e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\left[t\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{e^{-t^2}}{2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-4t^2}dt=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}t'^2e^{-t'^2}dt'=\frac{\sqrt{\pi}}{16}$$
$$\iiint_{\mathbb{R}^3}x'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}=\iiint_{\mathbb{R}^3}y'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'$$
$$\iiint_{\mathbb{R}^3}z'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'=\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{16}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{16}$$

である．よって $\iiint_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz=2\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}+\frac{\pi\sqrt{\pi}}{16}=\frac{9\pi\sqrt{\pi}}{16}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$e^{2iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2iz)^n$ である．よって $f(z)=\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2iz)^n}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}$ が原点におけるローラン展開.

(2)

$$\left|\int_{C_R}\frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz\right|\leq\int_0^{\pi}\left|\frac{1-\exp\left(2iRe^{i\theta}\right)}{R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}\right|d\theta\leq\int_0^{\pi}\frac{1+e^{-2R\sin\theta}}{R}d\theta\leq\int_0^{\pi}\frac{2}{R}d\theta\to 0\quad(R\to\infty)$$

(3)$f(z)$ のローラン展開を考えると，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}$ の部分は原点近傍で正則であるから有界．したがって $\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}dz=0$ である．$\int_{\Gamma_r}\frac{2}{iz}dz=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2}{ire^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=2\pi$ である．よって $\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}f(z)dz=2\pi$.

(4) 区間 $[r,R],C_R,[-R,-r],\Gamma_r$ により定まる閉曲線に反時計回りの向きを入れた積分経路を C とする．留数定理より $\int_C f(z)dz=4\pi$ である．

$\int_r^R f(z)dz=\int_r^R\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx=\int_r^R\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{-\sin 2x}{x^2}dx=2\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{-\sin 2x}{x^2}dx$ である．

$\int_{-R}^{-r}f(z)dz=\int_{-R}^{-r}f(x)dx=\int_r^R f(-x)dx=2\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$ である．

よって $4\pi=\int_r^R f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{-R}^{-r}f(z)dz+\int_{\Gamma_r}f(z)dz=4\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{\Gamma_r}f(z)dz\to 4\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+2\pi\quad(R\to\infty,r\to 0)$ より $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ である．

$\boxed{4}$ (A)$\overline{(x,y)}=\overline{(x',y')}$ とする．すなわち $(x-x'),(y-y')\in\mathbb{Z}$ である．$f(\overline{(x,y)})=\overline{(ax+by,cx+dy)},f(\overline{(x',y')})=\overline{(ax'+by',cx'+dy')}$ である．

$(ax+by)-(ax'+by')=a(x-x')+b(y-y')\in\mathbb{Z},(cx+dy)-(cx'+dy')=c(x-x')+d(y-y')\in\mathbb{Z}$ より $f(\overline{(x,y)})=f(\overline{(x',y')})$ である．よって f は well-defined である．

(B)(1)f が連続 $\Leftrightarrow$ 任意の Y の開集合 U について $f^{-1}(U)$ が X の開集合である．

(2)Y の任意の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ をとる．$T=\left\{f^{-1}(U_\lambda)\bigm|\lambda\in\Lambda\right\}$ とすれば T は X の開被覆．よってコンパクト性から有限部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ が存在して $T'=\left\{f^{-1}(U_\lambda)\bigm|\lambda\in\Lambda'\right\}\subset T$ が開被覆．f の全射性から $f(f^{-1}(U))=U$ である．よって $S'=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda'\}=\left\{f(f^{-1}(U_\lambda))\bigm|\lambda\in\lambda'\right\}\subset S$ は Y の有限開被覆.

よって Y はコンパクト.