0.1　R5 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1) (a)K のイデアル I が $a \in K^\times \cap I$ をもつなら $1 \in I$ より $I = K$ である．よって K のイデアルは $(0), K$ である．

(b)$\ker\rho = F$ なら $\rho|_K = \mathrm{id}$ に矛盾．よって $\ker\rho = (0)$ より ρ は単射である．

F, F' は体 K 上の有限次ベクトル空間とみなせる．$\rho : F \to F'$ が $\rho|_K = \mathrm{id}$ なら ρ はベクトル空間の単射準同型写像である．よって $[F : K] = \dim_K F \leq \dim_K F' = [F' : K]$ である．

(2) (a)$X^4 - 25X = X(X^3 - 25)$ である．$X^3 - 25$ の根は $\sqrt[3]{5}^2, \sqrt[3]{5}^2\omega, \sqrt[3]{5}^2\omega^2 \quad (\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}})$ である．

よって $\sqrt[3]{5}^2\omega/\sqrt[3]{5}^2 = \omega \in F$ である．$X^3 - 25$ はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[X]$ 上既約である．$\mathbb{Z}$ は UFD でその商体は $\mathbb{Q}$ であり，$X^3 - 25$ は原始多項式であるから $X^3 - 25$ は $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2) : \mathbb{Q}] = 3$ である．$\omega \in \mathbb{C}$ であり，$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2) \subset \mathbb{R}$ であるから $\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)$ である．$X^2 + X + 1$ が ω の最小多項式であるから $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)(\omega) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)] = 2$ である．よって $[F : \mathbb{Q}] = 6$ である．

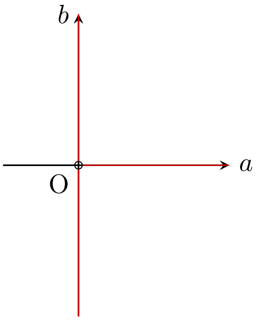
(b)$X^4 - 14X^2 - 14$ について $t = X^2$ とすれば $t^2 - 14t - 14$ であり根は $7 \pm \sqrt{7^2 + 14} = 7 \pm 3\sqrt{7}$ である．よって P の根は $\pm\sqrt{7 \pm 3\sqrt{7}}$ である．$\sqrt{7 + 3\sqrt{7}}\sqrt{7 - 3\sqrt{7}} = \sqrt{-14} \in F$ である．

$\sqrt{7 + 3\sqrt{7}} \in \mathbb{R}$ であるから $\sqrt{-14} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{7 + 3\sqrt{7}})$ である．よって $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7 + 3\sqrt{7}})(\sqrt{-14})$ である．P はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である．したがって $[\mathbb{Q}(\sqrt{7 + 3\sqrt{7}}) : \mathbb{Q}] = 4, [\mathbb{Q}(\sqrt{7 + 3\sqrt{7}})(\sqrt{-14}) : \mathbb{Q}(\sqrt{7 + 3\sqrt{7}})] = 2$ であるから $[F : \mathbb{Q}] = 8$ である．

$\boxed{\text{B}}$ (1)p を素元とする．$p = ab$ と表せるとき，$ab \in (p)$ であり，(p) は素イデアルであるから $a \in (p)$ または $b \in (p)$ である．$a \in (p)$ として一般性を失わない．$a = pc$ とかける．よって $p = pcb$ である．すなわち $p(1 - cb) = 0$ である．p は素元であるから $p \neq 0$．よって整域であるから $1 - cb = 0$ より $bc = 1$ すなわち b は単元である．よって p は既約元.

(2)$b \neq 0$ のとき，$I_{a,b} = (x^2 + ay^2, bx) = (x^2 + ay^2, x) = (ay^2, x)$ である．$\mathbb{R}[x, y]/I_{a,b} \cong \mathbb{R}[y]/(ay^2)$ である．$ay^2 = ay \cdot y$ であるから整域となるのは $a = 0$ のときのみ.

$b = 0$ のとき，$I_{a,b} = (x^2 + ay^2)$ である．$a \leq 0$ なら $x^2 + ay^2 = (x - \sqrt{-a}y)(x + \sqrt{-a}y)$ であるから $\mathbb{R}[x, y]/I_{a,b}$ は整域でない．$a > 0$ のとき，$(x^2 + ay^2)$ は $\mathbb{R}[x][y]$ 上可約なら，係数環が UFD であるからその商体上の多項式間 $\mathbb{R}(x)[y]$ 上可約である．よって $x^2 + a(\frac{f(x)}{g(x)})^2 = 0$ となる $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する．$g(x_0) \neq 0$ なる $x_0 \neq 0$ について $x_0^2 + a(\frac{f(x_0)}{g(x_0)})^2 > 0$ となり矛盾．よって既約である．したがって素イデアル.



(3) 素イデアル $\mathfrak{p}$ が全ての $I_{a,b}$ を含むとする．$x \in I_{a,1}$ であるから $x \in \mathfrak{p}$ である．また $y^2 \in I_{1,1}$ であるから $y^2 \in \mathfrak{p}$ である．よって $(x, y^2) \subset \mathfrak{p}$ である．逆にイデアル J について $(x, y^2) \subset J$ なら J は全ての $I_{a,b}$ を含む．(x, y^2) より大きい素イデアルは $\mathbb{R}[x, y]/(x, y^2) \cong \mathbb{R}[y]/(y^2)$ の素イデアルと対応する．

$\mathbb{R}[y]/(y^2)$ の非自明なイデアル J で $cy + d + (y^2) \in J$ とする．$c = 0$ なら $J = \mathbb{R}[y]/(y^2)$ であるから $c \neq 0$ である．よって $y + d + (y^2) \in J$ である．$(y + d)(y - d) = y^2 - d^2$ より $y + d + (y^2) \in J$ なら $d^2 + (y^2) \in J$ であるから，J が真のイデアルであるから $d = 0$ である．したがって $J = (y + (y^2))$ である．

すなわち J の逆像 $\mathfrak{p} = (x, y)$ が求める素イデアル.