

0.1 H21 数学選択

[A] (1) $\tau^2 = \text{id}$ であり $\sigma^2(a) = -a - b, \sigma^2(b) = a$ より $\sigma^3 = \text{id}$ である. $\tau \circ \sigma \circ \tau(a) = \tau \circ \sigma(b) = \tau(-a - b) = -a - b = \sigma^2(a), \tau \circ \sigma \circ \tau(b) = \tau \circ \sigma(a) = \tau(b) = \sigma^2(b)$ である.

よって $\tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma^{-1}$ となるから $G \cong D_3 \cong S_3$ である.

(2) $\tau(p) = p, \tau(q) = q, \sigma(p) = b(-a - b) + b^2 + (-a - b)^2 = ab + a^2 + b^2 = p, \sigma(q) = -b(-a - b)(b - a - b) = -ab(a + b) = q$ である. よって G 不変.

(3) $s_1 = a + b, s_2 = ab$ とする. $\tau(s_1) = s_1, \tau(s_2) = s_2$ である. τ 不変な元は対称式である. 対称式は基本対称式の多項式として表せるから $\mathbb{C}[s_1, s_2]$ が H 不変な元からなる環である.

(4) $h(s_1, s_2) = (s_1^2 - s_2, -s_1 s_2)$ とすれば $h \circ g(a, b) = h \circ (a + b, ab) = (ab + a^2 + b^2, -ab(a + b)) = f(a, b)$ である.

(5) $\mathbb{C}[P, X]$ は UFD であるから $X^3 - PX - Q$ の既約性はその商体 $\mathbb{C}(P, X)$ における既約性と等しい. $\mathbb{C}(P, X)[Q]$ は体上の多項式環であるから PID である. $\varphi: \mathbb{C}(P, X)[Q] \rightarrow \mathbb{C}(P, X); Q \mapsto X^3 - PX$ とすればこれは環準同型である. $\mathbb{C}(P, X)[Q]/(X^3 - PX - Q) \cong \mathbb{C}(P, X)$ より $(X^3 - PX - Q)$ は素イデアル. したがって $X^3 - PX - Q$ は既約である.

よって $X^3 - PX - Q$ は $\mathbb{C}[P, X][Q] = \mathbb{C}[P, Q, X]$ 上で既約.

(6) $X^3 - (ab + a^2 + b^2)X + ab(a + b) = X^3 - (S_1^2 - S_2)X + S_1 S_2 = (X + S_1)(X^2 - S_1 X + S_2) = (X + a + b)(X^2 - (a + b)X + ab)$ となるから既約でない.

[B] (1) $x^p - q$ はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[x]$ 上既約である. \mathbb{Z} は UFD であるから $\mathbb{Q}[x]$ 上でも既約. $\zeta_p = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$ とすると, 根は $\zeta_p^i \sqrt[p]{q}$ ($i = 0, 1, \dots, p-1$) である.

また $\zeta_p \sqrt[p]{q} / \sqrt[p]{q} = \zeta_p$ であるから $\zeta_p \in K$ である. よって $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{q})$ である.

(2) $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であり, Galois 群は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ で与えられる. また $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})/\mathbb{Q}$ は p 次拡大である. $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q}) \cdot \mathbb{Q}(\zeta_p) = K$ となるから $K/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ は p 次拡大である. よって $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である. $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とすれば $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であるから $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \triangleleft G$ である. また推進定理より $K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})$ は Galois 拡大で $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ である.

$\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})/\mathbb{Q}$ は非自明な中間体をもたないから $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_p) = \mathbb{Q}$ である. $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cap \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) = \text{Gal}(K/K) = 1, \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cdot \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = G$ である. よって $G \cong \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$