## 0.1　H14 数学選択

$\boxed{\text{D}}$ (1)$f(t) = \sum a_i t^i, g(t) = \sum b_j t^j$ とする．$\deg f > \deg g$ なら $f(t)^2 + g(t)^2$ の次数は $2\deg f > 0$ となる．$\deg f = \deg g$ なら $f(t)^2 + g(t)^2$ なら最高次の係数は $a_n^2 + b_n^2 > 0$ より定数でない．

(2) 同型写像 $\phi : \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \to \mathbb{R}[t]$ があると仮定する．$x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ より $\phi(x)^2 + \phi(y)^2 = 1 \in \mathbb{R}[t]$ である．

$\psi$ は $\mathbb{R}$ 上の同型写像であるから $\phi(x), \phi(y) \notin \mathbb{R}$ である．これは (1) に矛盾．

(3)$(x^2+y^2-1)$ が素イデアルであることを示せばよく，そのためには $\mathbb{R}[x,y]$ は UFD であるから $x^2+y^2-1$ が既約であることを示せばよい．

$\mathbb{R}[x]$ は UFD であるから，$\mathbb{R}[x][y]$ 上の既約性は $\mathbb{R}(x)[y]$ 上の既約性と同値である．

可約なら $x^2 + \frac{f(x)^2}{g(x)^2} = 1$ となる $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する．このとき $x^2 g(x)^2 + f(x)^2 = g(x)^2$ である．$x$ の次数は $\max(2 + 2\deg g, 2\deg f) > 2\deg g$ となり矛盾．したがって $x^2 + y^2 - 1$ は既約である．