0.1 R3 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\varphi\colon k[x,y] \to k; x \mapsto a, y \mapsto b$ とする．φ は全射環準同型である．$\ker\varphi \supset (x-a, y-b)$ である．$f \in \ker\varphi$ とする．$f(x,y) = (x-a)g(x,y) + (y-b)h(y) + c \quad (g \in k[x,y], h \in k[y], c \in k)$ とできる．$\varphi(f) = 0$ より $c = 0$ である．よって $\ker\varphi = (x-a, y-b)$ である．

すなわち $k[x,y]/(x-a, y-b) \cong k$ である．k は体であるから $(x-a, y-b)$ は極大イデアルである．

(2)$x^2 + y^2 - 1 \in (x-a, y-b)$ なら $\varphi(x^2+y^2-1) = 0$ より $a^2 + b^2 = 1$ である．$a^2 + b^2 - 1 = 0$ なら $\varphi(x^2+y^2-1) = 0$ より $x^2+y^2-1 \in (x-a, y-b)$ である．

(3)J を $I = (xy, x^2+y^2-1)$ を含む極大イデアルとする．$(x+J)(y+J) = 0 \in k[x,y]/J$ より $x + J = 0$ または $y + J = 0$ である．すなわち $x \in J$ または $y \in J$ である．

$x \in J$ なら $y^2 - 1 \in J$ であるから $y - 1 \in J$ または $y + 1 \in J$ である．ここで $\langle x, y-1\rangle \subset J$ とすると，左辺は極大イデアルであるから $J = \langle x, y-1\rangle$ である．

同様にして J の候補は $\langle x, y+1\rangle, \langle x, y-1\rangle, \langle x+1, y\rangle, \langle x-1, y\rangle$ でつくされるとわかる．

$\boxed{\text{B}}$ (1)