0.1　2001 基礎

$\boxed{1}$ (1)$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が基底.

(2)$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_2, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - v_2$ である.

よって $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ が表現行列.

$\boxed{2}$ (1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $a \neq \pm 1$ で $\dim V = 3$ $a = -1$ で $\dim V = 2$ $a = 1$ で $\dim V = 1$ である.

(2)$\varphi\colon V + W \to V/(V \cap W); v + w \mapsto [v]$ で定める．$v + w = v' + w'$ なら $w - w' = v' - v \in V \cap W$ であるから $[v] = [v + w - w'] = [v']$ より well-defined である．φ は全射準同型であり，$w \in W \subset \ker\varphi$ は明らか. $\varphi(v + w) = 0$ なら $v \in V \cap W$ より $v + w \in W$ である.

よって $(V + W)/W \cong V/(V \cap W)$ であるから $\dim(V + W) - \dim W = \dim V - \dim(V \cap W)$ である．よって $1 = \dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W)$ である. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ より $\{v_1, w_1, w_2\}$ は一次独立．よって $\dim V + W = 3$ である．よって $\dim V + \dim W - \dim(V + W) = \dim V - 1 = 1$ より $a = -1$.

$\boxed{3}$ (1)$-2 < a_n < 2$ のとき，$0 < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < 2$ である．また $0 < x < 2$ なら $(x-2)(x+1) < 0$ より $x^2 < x + 2$．すなわち $x < \sqrt{x+2}$ である．したがって $-2 < x < 2$ で $x < \sqrt{x+2}$ が成り立つのは明らか. よって $-2 < a_1 < 2$ のとき $a_1 < a_2 < \cdots < 2$ となるから広義単調増加.

$a_1 = 2$ なら $a_2 = 2, \cdots, a_n = 2$ より広義単調数列.

$a_n > 2$ なら $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} > 2$ である．$x > 2$ なら $(x-2)(x+1) > 0$ より $x > \sqrt{x+2}$ である．よって $a_1 > 2$ のとき，$a_1 > a_2 > \cdots > 2$ となるから広義単調減少.

(2) 全ての場合において $\{a_n\}$ は有界単調数列であるから収束する．したがってその収束値を α とおけば $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ であるから $\alpha = 2$ である.

$\boxed{4}$ $R_1, R_2 > 1$ とする. $\left|\int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx\right| \leq \int_{-R_1}^{R_2} \left|\frac{1}{x^2+1}\right| dx \leq \int_{-R_1}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{R_2} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-R_1}^{-1} + 2 + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{R_2} = 4 - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \to 4 \quad (R_1, R_2 \to \infty)$ である．よって広義積分は収束する.

$R > 10$ とする．$\mathbb{C}$ 上の積分経路 D_R を $C_R = \left\{ Re^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in [0, \pi] \right\}$ と $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ の和集合とし，反時計回りの向きをとる. $\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz\right| = \int_0^{\pi} \left|\frac{\exp\left(iRe^{i\theta}\right)}{R^2 e^{2i\theta} + 1} Re^{i\theta} i\right| d\theta \leq \int_0^{\pi} \frac{R\exp(-R\sin\theta)}{R^2 - 1} d\theta \leq \frac{\pi}{R} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である.

また $\int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$ は被積分関数の特異点は $\pm i$ であり，積分領域内では i が唯一の特異点である．留数をもとめると $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{ii}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$ である．したがって留数定理から $\int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}$ である.

以上より $\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \lim_{R\to\infty} (\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx$ である.