## 0.1 H16 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$x^4-14x^2+9=0$ とする．$x^2=y$ とおけば $y^2-14y+9=0$ より $y=7\pm2\sqrt{10}$ となる．よって $x=\pm\sqrt{7\pm2\sqrt{10}}$ が根である．

$\sqrt{7+2\sqrt{10}}\sqrt{7-2\sqrt{10}}=3$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{10}})/\mathbb{Q}$ は 4 次 Galois 拡大である．

$\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{10}})/\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のいずれかである．

$\sigma(\sqrt{7+2\sqrt{10}})=\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ とする．$\sigma^2(\sqrt{7+2\sqrt{10}})=\sigma(\sqrt{7-2\sqrt{10}})=\sigma(3/\sqrt{7+2\sqrt{10}})=3/\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ より $\sigma^2=\mathrm{id}$ である．

$\sigma(\sqrt{7+2\sqrt{10}})=-\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ とする．これも $\sigma^2=\mathrm{id}$ である．

位数が 2 の元を 2 つ以上もつから $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{10}})/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

(2)$x^4-20x^2+98=0$ とする．$x^2=y$ とおけば $y^2-20y+98=0$ より $y=10\pm\sqrt{2}$ となる．よって $x=\pm\sqrt{10\pm\sqrt{2}}$ が根である．

$\sqrt{10+\sqrt{2}}\sqrt{10-\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$ であり $(\sqrt{10+\sqrt{2}})^2=10+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{10+\sqrt{2}})$ であるから $\mathbb{Q}(\sqrt{10+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ は 4 次 Galois 拡大である．

$\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{10+\sqrt{2}})/\mathbb{Q})$ として $\sigma(\sqrt{10+\sqrt{2}})=\sqrt{10-\sqrt{2}}$ とする．$10+\sigma(\sqrt{2})=\sigma((\sqrt{10+\sqrt{2}})^2)=(\sqrt{10-\sqrt{2}})^2=10-\sqrt{2}$ より $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ である．$\sigma^2(\sqrt{10+\sqrt{2}})=\sigma(\sqrt{10-\sqrt{2}})=\sigma(7\sqrt{2}/\sqrt{10+\sqrt{2}})=-7\sqrt{2}/\sqrt{10-\sqrt{2}}=-\sqrt{10+\sqrt{2}}$ より $\sigma^2\neq\mathrm{id}$ である．

位数が 2 でない元が属すから $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{10+\sqrt{2}})/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$k$ 上 1 次元ベクトル空間は $k$ と同型である．よって $\rho\colon\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to GL(k)$ としてよい．

$f\in GL(k)$ の元は $a\in k$ に対して $f(a)=f(a\cdot1_k)=af(1_k)$ であるから $f(1_k)$ で定まる．$i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に対して $\rho(i)(1_k)=\alpha\in k$ とする．$\rho(i+i+i)=\rho(0)=\mathrm{id}$ より $\rho^3(1_k)=\alpha^3=1_k$ である．$k$ の標数は 3 であるから $x^3-1_k=(x-1_k)^3$ より $\alpha=1_k$ である．よって $\rho(i)=\mathrm{id}$ である．すなわち $\rho(G)=\{\mathrm{id}\}$ である．

(2) 略

(3)$V=W_1\oplus W_2$ が存在するとする．$\rho(1+3\mathbb{Z})$ の $V$ 上の最小多項式は $W_1,W_2$ 上の最小多項式の最小公倍数である．$\rho(1+3\mathbb{Z})v=\lambda v\quad(\lambda\in k)$ とすると，$v=\rho(0+3\mathbb{Z})v=\rho(1+3\mathbb{Z})^3v=\lambda^3v$ より $1_k=\lambda^3$ である．よって $\lambda=1_k$ である．最小多項式は固有値以外を根に持たないから $W_1$ 上の最小多項式は $(t-1_k)$ の因数，$W_2$ 上の最小多項式は $(t-1_k)^2$ の因数である．すなわち $V$ 上の最小多項式は $W_2$ 上の最小多項式と一致して 2 次以下である．

$V$ の基底 $\{v_1,v_2,v_3\}$ による $\rho(1+3\mathbb{Z})$ の表現行列は $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ であり $(A-E_3)^2\neq0$ であるから最小多項式は 3 次である．これは矛盾．

(4)$W_1=\langle v_1+v_2+v_3\rangle,W_2=\langle -v_2+v_3,v_1-v_3\rangle$ とする．$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=3\neq0$ より $V=W_1\oplus W_2$ である．

$\rho(1+3\mathbb{Z})(v_1+v_2+v_3)=v_1+v_2+v_3$ より $\rho(G)W_1\subset W_1$ である．$\rho(1+3\mathbb{Z})(-v_2+v_3)=v_1-v_3\in W_2,\rho(1+3\mathbb{Z})(v_1-v_3)=-v_1+v_2=-(-v_2+v_3)-(v_1-v_3)\in W_2$ より $\rho(G)W_2\subset W_2$ である．