目次

0.1　2001 基礎

$\boxed{1}$ (1)$\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ が基底.

(2)$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_2, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - v_2$ である.

よって $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ が表現行列.

$\boxed{2}$ (1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $a \neq \pm 1$ で $\dim V = 3$ $a = -1$ で $\dim V = 2$ $a = 1$ で $\dim V = 1$ である.

(2)$\varphi\colon V + W \to V/(V \cap W); v + w \mapsto [v]$ で定める．$v + w = v' + w'$ なら $w - w' = v' - v \in V \cap W$ であるから $[v] = [v + w - w'] = [v']$ より well-defined である．φ は全射準同型であり，$w \in W \subset \ker \varphi$ は明らか. $\varphi(v + w) = 0$ なら $v \in V \cap W$ より $v + w \in W$ である.

よって $(V + W)/W \cong V/(V \cap W)$ であるから $\dim(V + W) - \dim W = \dim V - \dim(V \cap W)$ である．よって $1 = \dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W)$ である. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ より $\{v_1, w_1, w_2\}$ は一次独立．よって $\dim V + W = 3$ である．よって $\dim V + \dim W - \dim(V + W) = \dim V - 1 = 1$ より $a = -1$.

$\boxed{3}$ (1)$-2 < a_n < 2$ のとき，$0 < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < 2$ である．また $0 < x < 2$ なら $(x-2)(x+1) < 0$ より $x^2 < x + 2$．すなわち $x < \sqrt{x+2}$ である．したがって $-2 < x < 2$ で $x < \sqrt{x+2}$ が成り立つのは明らか. よって $-2 < a_1 < 2$ のとき $a_1 < a_2 < \cdots < 2$ となるから広義単調増加.

$a_1 = 2$ なら $a_2 = 2, \cdots, a_n = 2$ より広義単調数列.

$a_n > 2$ なら $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} > 2$ である．$x > 2$ なら $(x-2)(x+1) > 0$ より $x > \sqrt{x+2}$ である．よって $a_1 > 2$ のとき，$a_1 > a_2 > \cdots > 2$ となるから広義単調減少.

(2) 全ての場合において $\{a_n\}$ は有界単調数列であるから収束する．したがってその収束値を α とおけば $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ であるから $\alpha = 2$ である.

$\boxed{4}$ $R_1, R_2 > 1$ とする．$\left|\int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right| \leq \int_{-R_1}^{R_2} \left|\frac{1}{x^2+1}\right| dx \leq \int_{-R_1}^{-1} \frac{1}{x^2}dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{R_2} \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-R_1}^{-1} + 2 + \left[\frac{-1}{x}\right]_{1}^{R_2} = 4 - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \to 4 \quad (R_1, R_2 \to \infty)$ である．よって広義積分は収束する．

$R > 10$ とする．$\mathbb{C}$ 上の積分経路 D_R を $C_R = \left\{Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\right\}$ と $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ の和集合とし，反時計回りの向きをとる．$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right| = \int_0^\pi \left|\frac{\exp\left(iRe^{i\theta}\right)}{R^2e^{2i\theta}+1}Re^{i\theta}i\right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R\exp(-R\sin\theta)}{R^2-1}d\theta \leq \frac{\pi}{R} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．

また $\int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$ は被積分関数の特異点は $\pm i$ であり，積分領域内では i が唯一の特異点である．留数をもとめると $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{ii}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$ である．したがって留数定理から $\int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \frac{\pi}{e}$ である．

以上より $\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty} \int_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \lim_{R\to\infty} (\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$ である．

0.2　2001 数学専門

$\boxed{1}$ $A \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ について $\det A \in \mathbb{F}^\times = 1$ であるから $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2)$ である．

$GL_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)$ である．$\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2^2)$ は基底 $(1,0), (0,1)$ で定まる．$\mathbb{F}_2^2$ の元 v で生成される部分空間 $\mathrm{Span}(v) = \{0, v\}$ であるから, 非零なベクトルは各対ごとに 1 次独立．よって $(0,0) \neq \varphi(0,1) \neq \varphi(1,0) \neq (0,0)$ なら $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)$ である．したがって φ は $\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0,0\}$ の置換である．集合 X の置換群を $\mathfrak{S}(X)$ で表すと，$f\colon \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2) \to \mathfrak{S}(\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0,0\})$ が定まり，これが全単射準同型であることは明らか．したがって $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$ である．

$\boxed{2}$ A は $x(x-1)$ を 0 でないべき零元としてもつ．

(a) 中国剰余定理から $\mathbb{R}[x]/(x(x-1)) \cong \mathbb{R}[x]/(x) \times \mathbb{R}[x]/(x-1) \cong \mathbb{R}^2$ より零でないべき零元をもたない．よって同型でない．

(b)$x^2(-x^2+2) + (x-1)^2(x+1)^2 = 1$ であるから $(x^2) + ((x-1)^2) = \mathbb{R}[x]$ である．$\varphi\colon \mathbb{R}[x]/(x^2(x-1)^2) \to \mathbb{R}[x]/(x^2) \times \mathbb{R}[x]/((x-1)^2); f + (x^2(x-1)^2) \mapsto (f + (x^2), f + (x-1)^2)$ と定める．φ が well-defined であるのは明らか．$\varphi(f + (x^2(x-1)^2)) = 0$ とすると，$f \in (x^2), f \in (x-1)^2$ である．$f = f \cdot (x^2(-x^2+2) + (x-1)^2(x+1)^2) = (-x^2+2)f \cdot x^2 + (x+1)^2 f \cdot (x-1)^2 \in (x^2(x-1)^2)$ である．よって φ は単射．$g + (x^2), h + (x-1)^2$ に対して $f = g \cdot (x-1)^2(x+1)^2 + h \cdot (-x^2+2)x^2$ とすれば $f + (x^2) = g + (h-g) \cdot (-x^2+2)x^2 + (x^2) = g + (x^2), f + ((x-1)^2) = h + (g-h) \cdot (x-1)^2(x+1)^2 = h + (x-1)^2$ である．よって φ は全射．よって φ は同型写像.

(c)$\mathbb{R}[x]/(x(x-1)) \times \mathbb{R}[x]/(x(x-1)) \cong \mathbb{R}^4$ より零でないべき零元をもたない．よって同型でない．

$\boxed{4}$ (1)$\left\{1, \zeta, \cdots, \zeta^5\right\}$ が基底となる．一次独立であることは $\sum_{i=0}^{5} c_i\zeta_i = 0$ であるについて $c_i \neq 0$ なら ζ の最小多項式が 4 次以下であるとわかる．ζ は 1 の原始 7 乗根であるから $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + \cdots + 1)$ より $p(x) = x^6 + x^5 + \cdots + 1$ が ζ を根にもつ．$p(x+1) = \frac{(x+1)^7-1}{x}$ であり 7 は素数であるから $(x+1)^7$ の x^2 から x^6 までの係数は全て 7 の倍数である．よって $p(x+1)$ も最高次の係数は 1 でそれ以外は 7 の倍数であるからアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[x]$ 上既約である．$p(x)$ はモニックであるから $\mathbb{Q}[x]$ 上既約であるため，$p(x)$ も $\mathbb{Q}[x]$ 上既約．よって $p(x)$ が ζ の最小多項式である．$\deg p = 6$ 矛盾．よって一次独立.

$\mathbb{Q}(\zeta)$ は $\mathbb{Q}[\zeta]$ の商体であるが，$\mathbb{Q}[\zeta] \cong \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ で $p(x)$ は既約であり，$\mathbb{Q}[x]$ は PID であるから $(p(x))$ は極大イデアル．よって $\mathbb{Q}[\zeta]$ は体であるから $\mathbb{Q}[\zeta] = \mathbb{Q}(\zeta)$ である．$\mathbb{Q}[\zeta]$ の任意の元が $\left\{1, \zeta, \cdots, \zeta^5\right\}$ で生成されることは明らか．よって基底.

(2)$p(x)$ の根は $\zeta^i \quad (i = 1, \cdots, 6)$ である．よって $p(x)$ は $\mathbb{Q}(\zeta)$ で分解するから Galois 拡大.

$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を $\sigma(\zeta) = \zeta^3$ とすれば $\sigma^i(\zeta) = \zeta^{3^i}$ であり，$3^i \equiv 1 \mod (7)$ なる最小の i は 6 であるから σ の位数は 6 である．$|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 6$ より $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．

(3)$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の真部分群は $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．対応する中間体は σ^3 で固定される体と σ^2 で固定される体である．$\sigma^3(\zeta + \zeta^6) = \zeta + \zeta^6 = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ であるから，$\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$ である．

$\sigma^2(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4) = \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta$ であるから $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4)$ である．

よって求める中間体は $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^2+\zeta^4), \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^6), \mathbb{Q}(\zeta)$ である．

0.3 2002 基礎

$\boxed{1}$ A を行基本変形すると，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．(1) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ で基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

(2)$\dim \ker(T) = 2$ で基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$\boxed{2}$ A の固有方程式を $g_a(t)$ とすれば $g_a(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 3 & 2-t & 0 \\ a & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ a & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)((1-t)^2 - a) = (2-t)(t^2-2t-a+1)$ である．

(1)$a=4$ より $g_4(t) = (2-t)(t^2-2t-3) = (2-t)(t-3)(t+1)$ である．よって固有値は $2, 3, -1$ であり，それぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる．よって $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP$ は対角行列.

(2) 固有値が全て異なれば対角化可能である．したがって $g_a(t)$ が重解を持つことが必要. $(2-t)(t^2-2t-a+1) = 0$ の解は $t = 2, 1 \pm \sqrt{1-(1-a)} = 2, 1 \pm \sqrt{a}$ である．

よって重解をもつのは $a = 0, 1$ のときである．$a = 0$ のとき，固有値 1 の固有空間は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対角化不可能.

$a = 1$ のとき，固有値 2 の固有空間は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対角化不可能.

$\boxed{3}$ (1)$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f^{(2)}(x) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \cdots f^{(n)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ であるから，$f^{(n)}(0) = \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n} \quad (n \geq 1)$ である．

よって $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!} x^n$ がテイラー展開.

(2)$g'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2x}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}})$ である．

よって $g'(x) = -\frac{1}{2x}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!} x^n) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2(-2)^n n!} x^{n-1}$ である．項別積分すれば $g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n2(-2)^n n!} x^n$ である．

$2^n n! = (2n)!!$ であるから，$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} x^n$ がわかる．

収束半径は $|(-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} / (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2(n+1)(2n+2)!!}| = \frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+3)} \to 1 \quad (n \to \infty)$ より 1 である．

$\boxed{4}$ (1)$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換すると，ヤコビアンは r である．よって

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^\lambda} r dr d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr = \begin{cases} 2\pi[\frac{1}{2-\lambda}r^{2-\lambda}]_\varepsilon^1 & (\lambda\neq 2) \\ 2\pi[\log r]_\varepsilon^1 & (\lambda=2)\end{cases} = \begin{cases} 2\pi\frac{1}{2-\lambda}(1-\varepsilon^{2-\lambda}) & (\lambda\neq 2) \\ -2\pi\log\varepsilon & (\lambda=2)\end{cases}$$

である．したがって $2-\lambda>0$ なら収束し，値は $\frac{2\pi}{2-\lambda}$ である．

(2) $\lambda\neq 2$ のとき，

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r^\lambda} r dr d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}\log r dr = 2\pi[\frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log r]_\varepsilon^1 - 2\pi\int_\varepsilon^1 \frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\frac{1}{r}dr = -2\pi\frac{\varepsilon^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log\varepsilon - \frac{2\pi}{2-\lambda}\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr$$
$$= -2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(\varepsilon^{2-\lambda}\log\varepsilon^{2-\lambda} + (1-\varepsilon^{2-\lambda})) = -2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(1+(\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}))$$

である．

$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}$ は $\lambda-2<0$ で分母分子共に $\varepsilon\to 0$ で無限大に発散する．よって $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{2-\lambda}(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}}{(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}} = 0$ であるからロピタルの定理より，$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$ である．

$\lambda-2\geq 0$ なら無限大に発散する．

$\lambda=2$ のとき，

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r^2} r dr d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r}dr = \left[\frac{1}{2}(\log r)^2\right]_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2}(\log\varepsilon)^2 \to -\infty \quad (\varepsilon\to 0)$$

より発散する．したがって $\lambda<2$ で $-2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}$ に収束する．

0.4　2002 数学専門

$\boxed{1}$ (1)F の階数が 1 であるから，$0\neq v_1\in V, f(v)\neq 0$ なる v_1 が存在する．$\ker F$ は 3 次元部分空間であるから基底 $\{v_2,v_3,v_4\}$ がとれる．$\sum c_i v_i = 0$ とすると $F(\sum c_i v_i) = c_1 f(v_1) = 0$ より $c_1 = 0$．したがって $\{v_2,v_3,v_4\}$ は一次独立であるから $c_i=0 \quad (i=2,3,4)$ である．$S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ とすれば一次独立．よって 4 つ元からなる一次独立な集合が得られたから，V の次元が 4 であることより，S は基底．

この S に関する表現行列は $F(v_i)=0 \quad (i=2,3,4)$ であるから $\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ となる．

(2)$F(v_1)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4$ としたときに，$\alpha_1=0$ だとする．このとき，$F^2(v_1)=0$ であるから，V の基底を $\{v_1, f(v_1), v_3', v_4'\} \quad (v_3', v_4'\in\ker F)$ ととれば表現行列が $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ となる．

$\alpha_1\neq 0$ のとき，$u_1=\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4)\neq 0$ とすれば $F(u_1)=F(v_1)=\alpha_1 u_1$ より u_1 が固有値 α_1 の固有ベクトルとなる．よってジョルダン標準形は $\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1) 略．

(2)$\varphi\colon H\to K; A=[a_{ij}]\mapsto \mathrm{diag}[a_{11},a_{22},a_{33}]$ とすれば φ は全射準同型である．よって $N=\ker\varphi$ とすれば $H/N\cong K$ である．N は対角成分が全て 1 であるような上三角行列全体である．

$\boxed{3}$ (1)$\bar{R}$ において $f \in R$ の剰余類を $\bar{f}$ で表す．$S = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2\}$ が基底である．$c_0\bar{1} + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 = 0$ とすると，$c_0 + c_1x + c_2x^2 \in (x^3 - 2)$ である．よって $c_0 + c_1x + c_2x^2 = (x^3 - 2)f(x)$ なる $f(x) \in R$ が存在する．次数を比較すれば左辺は 2 以下で右辺は 0 か 3 以上かであるから，$f = 0$．よって $c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0$ より $c_0 = c_1 =_2 = 0$ である．すなわちい一次独立．

任意の $f(x) \in R$ は $f(x) = (x^3 - 2)g(x) + c_2x^2 + c_1x + c_0 \quad (g(x) \in R, c_i \in K)$ と表せる．したがって $\bar{f} = c_2\bar{x}^2 + c_1\bar{x} + c_0$ より $\bar{R}$ を生成する．よって S は基底．

(2)$X^3 - 2$ は素数 2 に着目すれば $\mathbb{Z}[X]$ 上でアイゼンシュタインの既約判定法から既約である．$X^3 - 2$ は原始多項式であるから $\mathbb{Z}[X]$ 上既約であるなら $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である．$\mathbb{Q}[X]$ は PID であるから既約元は素元であり，素イデアル $(X^3 - 2)$ は極大イデアルである．よって $\bar{R}$ は体．

(3)$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2), (X - \sqrt[3]{2})$ は互いに素なイデアルであるから中国剰余定理より，$\bar{R} \cong \mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \times \mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$\mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{R}$ である．

$X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2$ は $\mathbb{R}[X]$ 上既約であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ は $\mathbb{R}$ の代数拡大体となる．$\mathbb{C}$ は代数閉包で $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の拡大次数は 2 であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2) \cong \mathbb{C}$ である．

よって $\bar{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$x^2 = t$ として $t^2 - t + 1$ の根は $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ である．したがって $x^4 - x^2 + 1$ の根は $\pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ である．

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = 1$ である．したがって $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ は $\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}}$ を全て含む．よって $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ であり，$[K : \mathbb{Q}] = 4$ である．また基底は $\{1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\}$ である．これは次のようにしてわかる．一次従属なら $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ の最小多項式を 3 次以下でとれる．$P(X) = X^4 - X^2 + 1$ とすれば $P(X)$ が $\mathbb{Z}[x]$ 上可約であると分かる．

$q(X) \mid P(X)$ なら $q(-X) \mid P(X)$ である．

(i) $q(X) = q(-X)$ のとき，$q(X) = X^2 - a$ とかける．よって $P(X) = (X^2 - a)(X^2 - b)$ である．係数比較をすれば $a + b = 1$，$ab = 1$ であるから，$(x - a)(x - b) = x^2 - x + 1$ である．しかし $x^2 - x + 1$ は $\mathbb{Z}[x]$ 上既約であるから矛盾．

(ii)$q(X) \neq q(-X)$ のとき，$q(X) = X^2 - aX + b$ とかける．$P(X) = (X^2 - aX + b)(X^2 + aX + b)$ である．係数比較をすれば $b^2 = 1$，$a^2 + 2b = 0$ である．よって $b = \pm 1$ である．$b = 1$ なら $a^2 + 2 = 0$ であるから，矛盾．$b = -1$ なら $a^2 - 2 = 0$ であるから，$a^2 = 2$ であるがこれは $a \in \mathbb{Q}$ より矛盾．

以上より $P(X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ 上既約である．よって $\mathbb{Q}[X]$ 上既約であるから，これは一次従属でないことを意味する．よって一次独立であるから基底であるとわかる．

(2)$\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\sigma(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\sigma^2(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \sigma(\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}) = \sigma(1/\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ である．よって $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．また $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\tau(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\tau^2 = \mathrm{id}$ である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 位数 4 の群であるから，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のいずれかである．位数 2 の元を 2 つ以上含むことから $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ である．また σ, τ によって生成されると分かる．(3)$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の非自明な部分群は $\langle\sigma\rangle, \langle\tau\rangle, \langle\sigma \circ \tau\rangle$ である．

σ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \alpha$ とすれば $\alpha^2 = 3$ であるから，α は $\pm\sqrt{3}$ のいずれかである．τ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ である．

$\sigma \circ \tau$ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \beta$ とすれば $\beta^2 = -1$ であるから，β は $\pm i$ のいずれかである．

以上より非自明な中間体は $\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ である．これに $K, \mathbb{Q}$ を加えれば全ての中間体が得られる．

0.5　2003 基礎

$\boxed{1}$ (1)V の元の和が V の元に属すためには $a=b=c=d=0$ が必要十分である．V は $A=\begin{pmatrix}1&1&p+1&3&q\\1&2&2p+1&2&0\\1&0&-p&4&4q\\0&1&-p^2&-1&-2q\end{pmatrix}$ の解空間である．A を簡約化すると，

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&p+1&3&q\\0&1&p&-1&-q\\0&-1&-2p-1&1&3q\\0&1&-p^2&-1&-2q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&4&2q\\0&1&p&-1&-q\\0&0&-p-1&0&2q\\0&0&-p^2-p&0&-q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&4&2q\\0&1&p&-1&-q\\0&0&-p-1&0&2q\\0&0&0&0&-q-2pq\end{pmatrix}$$

である．これの解空間の次元が 3 になるためには $-p-1=0, 2q=0, -q-2pq=0$ が必要十分．したがって $p=-1, q=0$ である．

(2)$p=-1, q=0$ を代入して $\begin{pmatrix}1&0&1&4&-2\\0&1&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ の解空間が V である．よって基底は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{2}$ (1)ω を 1 の原始三乗根として，$\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(1+2a)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}=(1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}=(1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}$ である．$1+a\omega+a\omega^2=1+a\omega+a(-1-\omega)=1-a$ である．したがって固有値は $1+2a, 1-a$ である．

(2) 固有値が $1-a$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．直交化すると，$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ である．

正規化することで $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ は直交行列．このとき，$D=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1+2a&0&0\\0&1-a&0\\0&0&1-a\end{pmatrix}$ となる．

(3)$B=\left\{(x,y,x)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$ とする．T は直交行列であるから

$$\left[{}^{\forall}(x,y,z)\in B,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]\Leftrightarrow\left[{}^{\forall}(x,y,z)\in B,\left(T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^t AT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]$$
$$\Leftrightarrow\left[{}^{\forall}(x,y,z)\in B,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t T^{-1}AT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]\Leftrightarrow\left[{}^{\forall}(x,y,z)\in B,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]$$

である．$(x,y,z)D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1+2a)x^2+(1-a)y^2+(1-a)z^2=(1-a)(x^2+y^2+z^2)+3ax^2=3ax^2+1-a\geq -1$ であるから，$x\in[-1,1]$ で $3ax^2+2-a\geq 0$ が成り立つ a をもとめる．$a>0$ のとき，左辺は $x=0$ で最小値 $2-a$ をとるから $2-a\geq 0$ より $0<a\leq 2$ である．

$a=0$ なら明らかに成立する．

$a<0$ なら左辺は $x=\pm 1$ で最小値をとるから $3a+2-a\geq 0$ より $0>a\geq -1$ である．よって $-1\leq a\leq 2$ が必要十分条件.

$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\Leftrightarrow(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(x,y,z)E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq 0\Leftarrow(x,y,z)(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq 0$ これが任意の $(x,y,z)\in B$ について成り立つことは任意の $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ で成り立つことと同値である．(正規化すればよい．)

すなわち $A+E$ が半正定値であることと必要十分．これは $A+E$ 全ての固有値が非負であることと必要十分であり，$A+E$ の固有値は $2+2a, 2+a\omega^2+a\omega=2-a$ である．よって $2+2a\geq 0, 2-a\geq 0$ より $2\geq a\geq -1$ である．

$\boxed{3}$ (1) 分母分子の極限が ∞ であるからロピタルの定理を使う．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^x}(a(e^{ax}+e^x)-(a-1)e^x)=\lim\limits_{x\to\infty}a-\frac{1}{e^{(a-1)x}+1}(a-1)$ である．$a-1\geq 0$ なら極限は a である．$a-1<0$ のとき，極限は 1 である．よって $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(e^{ax}+e^x)=\max(a,1)$ である．

(2)$t+x=u$ と変数変換すれば $h(x)=\int_x^{2x}e^{e^u}du$ である．よって $h'(x)=2e^{e^{2x}}-e^{e^x}$ である．

(3)$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial\theta}(r\cos\theta)$ である．よって $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{-\sin\theta}{r}), \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r})$ である．また $r=\sqrt{x^2+y^2}$ より $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2r}=\cos\theta$ である．$\tan\theta=\frac{y}{x}$ より x で偏微分して $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$ より $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\cos^2\theta=\frac{-\sin\theta}{r}$ である．

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{-\sin\theta}{r}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\cos\theta+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta)+\frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta\frac{-\sin\theta}{r})+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r})+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{-\sin\theta}{r}\frac{-\sin\theta}{r}-\frac{\cos\theta}{r^2}\cos\theta)\\&=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}\theta\right)-\frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2})\\&=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(\cos^2\theta-\sin\theta^2)+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2})-\frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\end{aligned}$$

(4)$\iint_D xydxdy=\int_0^1\int_{x^2}^x xydydx=\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3-x^5dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{24}$

$\boxed{4}$ (1)$\arcsin(\sin x)=x$ を x で微分すると，$(\arcsin)'(\sin x)\cos x=1$ より $\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos\arcsin x}$ であ

る．$\cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=1$ より $\cos^2(\arcsin x)=1-x^2$ である．$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ であるから $\cos(\arcsin x)>0$ である．よって $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ である．

よって $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．$g''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2)$f'(x)=g(x)g'(x)$ である．よって $\sqrt{1-x^2}f'(x)=\arcsin x$ である．x で微分すれば $-\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})}f'+\sqrt{1-x^2}f''=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．したがって $-xf''+(1-x^2)f''=1$ である．

(3)$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ である．よって $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_nx^{n-2}-n(n-1)a_nx^n)-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=1$ である．よって n の係数を比較すれば $2a_2=1, 3\cdot 2a_3-a_1=0, (n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n=0\quad(n\geq 2)$ である．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2}=n^2a_n\quad(n\geq 2)$ である．この等式に $n=1$ を代入すると，$3\cdot 2a_3=a_1$ となりこれは成り立つ．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2}=n^2a_n\quad(n\geq 1)$ である．また $a_0=f(0)=\frac{1}{2}g(0)^2=0, a_1=f'(0)=g(0)g'(0)=0, a_2=\frac{1}{2}$ である．

(4)$3\cdot 2a_3=1a_1=0$ より $a_3=0$ である．$4\cdot 3a_4=4a_2=2$ より $a_4=\frac{1}{6}$ である．$5\cdot 4a_5=9a_3=0$ より $a_5=0$ である．$6\cdot 5a_6=16a_4$ より $a_6=\frac{4}{45}$ である．

よって $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4)}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{45}x^6+O(x^7)}{x^6}=\frac{4}{45}$ である．

0.6 2003 専門

$\boxed{1}$ (1)V は3次元線形空間であるから $\{v_1,v_2,v_3\}$ が一次独立であることを示せばよい．$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$ とする．$F(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)=c_1f(v_1)=0$ であり，$F(v_1)\neq 0$ より $c_1=0$ である．よって $c_2v_2+c_3v_3=0$ であるが v_2,v_3 は一次独立であるから $c_2=c_3=0$ である．したがって $\{v_1,v_2,v_3\}$ は基底.

(2)$\{v_1,v_2,v_3\}$ が基底であるから $F(v_1)=av_1+bv_2+cv_3$ なる $a,b,c\in V$ が存在する．したがって表現行列は $\begin{pmatrix}a&0&0\\b&0&0\\c&0&0\end{pmatrix}$ である．

(3) $F(v_1)\notin U$ であるから $a\neq 0$ である．$u_1=v_1+\frac{b}{a}v_2+\frac{c}{a}v_3$ とする．$F(u_1)=F(v_1)=a(v_1+\frac{b}{a}v_2+\frac{c}{a}v_3)=au_1$ である．$\{u_1,v_2,v_3\}$ に関する表現行列は対角行列である．

(4)U の一次独立な集合 $\{F(v_1)\}$ を延長して U の基底 $\{F(v_1),v_3\}$ をとる．このとき $\{v_1,F(v_1),v_3\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ であり，ジョルダン標準形である．

$\boxed{2}$ (1)U が開集合 $\Leftrightarrow^{\forall} x\in U,^{\exists} r>0, B_r(x)\subset U$ である．

(2)((a)⇒(b)) U を $\mathbb{R}^N$ の開集合とする．$x\in f^{-1}(U)$ を任意にとる．$f(x)\in U$ より ${}^{\exists}r>0, B_r(f(x))\subset U$ である．したがって $f^{-1}(B_r(f(x)))\subset f^{-1}(U)$ がなりたつ．いま (a) より r に対してある $\delta>0$ が存在して $B_\delta(x)=f^{-1}f(B_\delta(x))\subset f^{-1}(B_r(f(x)))\subset f^{-1}(U)$ である．よって $f^{-1}(U)$ は開集合である．

((b)⇒(a)) 任意の $a\in\mathbb{R}^N, \varepsilon>0$ をとる．$B_\varepsilon(f(a))$ は開集合であるから $a\in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ も開集合である．したがってある $\delta>0$ が存在して $B_\delta(a)\subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ である．f で送って $f(B_\delta(a))\subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))))\subset B_\varepsilon(f(a))$ である．

(3)((a)⇒(c)) 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して $f(B_\delta(a))\subset B_\varepsilon(f(a))$ である．したがってある N が存在して $n>N$ なら $d(a_n,a)<\delta$ すなわち $a_n\in B_\delta(a)$ が成り立つ．よって $f(a_n)\in B_\varepsilon(f(a))$ であるから $d(f(a_n),f(a))<\varepsilon$ である．これは $\lim f(a_n)=f(a)$ を意味する．

((c)⇒(a)) 背理法を用いる．ある $a\in\mathbb{R}^N$ と $\varepsilon>0$ が存在して任意の $\delta>0$ に対して $f(B_\delta(a))\not\subset B_\varepsilon(f(a))$ であると仮定する．このとき $\delta=\frac{1}{n}$ とすれば $a_n\in B_\delta(a)$ で $f(a_n)\notin B_\varepsilon(f(a))$ なるものがとれる．これによって

数列 $\{a_n\}$ を作れば $\{a_n\}$ は a に収束するが $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．これは矛盾．

$\boxed{3}$ (1)$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとヤコビアンは r である．よって $I_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr d\theta$ である．

(2)I_n の収束性は $\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr$ の収束性と同値．$[0,1]$ では被積分関数が有界であるから $\int_1^{\infty} \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr$ の収束性と同値．$n \geq 2$ のとき，$\int_1^M \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr \leq \int_1^M r^{2-2n} dr = \left[\frac{1}{3-2n} r^{3-2n}\right]_1^M = \frac{1}{3-2n}(M^{3-2n}-1) \to \frac{1}{3n-2} \quad (M \to \infty)$ である．$n=1$ のとき．$r \geq 1$ より $r^2 \geq 1$ であるから $2r^2 \geq r^2+1$ である．よって $\int_1^M \frac{r^2}{1+r^2} dr \geq \int_1^M \frac{r^2}{2r^2} dr = \int_1^M \frac{1}{2} dr = \frac{1}{2}M \to \infty \quad (M \to \infty)$ より発散する．

よって求める最小値 a は $a = 2$ である．

(3)$\frac{z^k}{1+z^4}$ は $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$ をそれぞれ 1 位の極として持つ．積分路 Γ 内の特異点は $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ である．留数は $\mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = \left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}}, \mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = \left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}}$ である．したがって留数定理から $\int_\Gamma \frac{z^k}{1+z^4} dz = 2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}})$ である．

(4)

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{R^3}{1+R^4 e^{4i\theta}}\right| d\theta \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{R^3}{R^4-1}\right| d\theta = \pi\frac{R^3}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

$$\int_{[-R,R]} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{[-R,0]} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{[0,R]} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_R^0 \frac{r^2}{1+r^4}(-1) dr + \int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr = 2\int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr$$

である．よって $\int_\Gamma \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz + 2\int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr$ である．$R \to \infty$ として $2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(2-3)\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(3\cdot 2-1)\pi i}{4}}) = 0 + 2\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^4} dr$ である．したがって $\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^4} dr = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ である．よって $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4}\pi d\theta = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\varphi\colon K[X,Y] \to K[t]; x \mapsto t^3, y \mapsto t^2$ とする．このとき $\ker\varphi \supset (X^2 - Y^3)$ は明らか．$f(X,Y) \in \ker\varphi$ とすると，$f(X,Y) = (X^2-Y^3)g(X,Y) + Xh_1(Y) + h_2(Y)$ とできる．φ でおくれば $0 = t^3 h_1(t^2) + h_2(t^2)$ である．t の次数について，偶数の次数を比較すれば $0 = h_2(t^2)$ であるから $h_2 = 0$ である．よって $0 = t^3 h_1(t^2)$ より $h_1 = 0$ である．すなわち $\ker\varphi = (X^2 - Y^3)$ である．

よって準同型定理から $R = K[X,Y]/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi = K[t^3, t^2]$ である．

$K[t^3, t^2]$ は $K[t]$ の部分環であるから整域であることは明らか．よって R は整域．

(2)$K[t^2, t^3]$ の商体は $t^3/t^2 = t$ より $K(t)$ である．$K[t^2, t^3][s] \ni s^2 - t^2$ は t を根にもつモニック多項式であるが，$t \notin K[t^2, t^3]$ であるから R は整閉でない．