## 0.1 H19 数学選択

$\boxed{7}$ (1)ch$F \neq 2$ より $\alpha \neq -\alpha$ である．したがって $F(\alpha)/F$ は Galois 拡大である．$\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)$ をとる．$\sigma(\alpha) = -\alpha$ である．$F(\beta) = F(\alpha)$ より $\sigma(\beta) = -\beta$ である．よって $F(\alpha\beta) = \alpha\beta$ より $\alpha\beta \in F$ である．すなわち $ab = (\alpha\beta)^2$ となり $F$ の平方数.

(2)(a)$\mathrm{Gal}(L/F) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\right\}$ であるから，唯一の真部分群 $\left\{\bar{0}, \bar{2}\right\}$ に対応する中間体 $K$ が唯一の非自明な中間体である.

(b)$F$ 上 2 次の元とすると $F(\xi)/F$ は 2 次拡大であるから $F(\xi) = K = F(\gamma)$ である．このとき $L = K(\xi) = F(\xi)$ となり矛盾する．したがって 4 次の元である.

(c)$\xi$ の $F$ 上の最小多項式は $(x^2-p)^2 = q^2c$ である．この方程式の解は $\pm\sqrt{p \pm q\gamma}$ である．$L/K$ は Galois 拡大であるから，$L = K(\sqrt{p+q\gamma}) = K(\sqrt{p-q\gamma})$ である．したがって $(p+q\gamma)(p-q\gamma) = p^2 - q^2\gamma^2 = (a+b\gamma)^2$ なる $a, b \in F$ が存在する．$p^2 - q^2c - a^2 - b^2c = 2ab\gamma$ より $ab = 0$ である.

$a = 0$ のとき，$p^2 - q^2c = b^2c$ より $p^2 = (b^2+q^2)c$ である．よって $c = (\frac{pb}{b^2+q^2})^2 + (\frac{pq}{b^2+q^2})^2$ とできる.

$b = 0$ なら $\sqrt{p^2 - q^2c} = a \in F$ である．$\sigma(\sqrt{p+q\gamma}) = \sqrt{p-q\gamma}$ に対して $\sigma(\sqrt{p-q\gamma}) = \sigma(a/\sqrt{p+q\gamma}) = \frac{a}{\sqrt{p-q\gamma}} = \sqrt{p+q\gamma}$ である．したがって $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．$\tau(\sqrt{p+q\gamma}) = -\sqrt{p+q\gamma}$ とすると $\tau^2 = \mathrm{id}$ である．これは $\mathrm{Gal}(L/K)$ が巡回拡大であることに矛盾.