0.1　R2 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$R=\mathbb{Z}_{(p)}$ である．ただし $\mathbb{Z}_{(p)}$ は積閉集合 $S=\mathbb{Z}\setminus(p)$ による $\mathbb{Z}$ の局所化である．

したがって $\mathbb{Q}$ の部分環となる．

(2) イデアル $pR\subsetneq J$ をとる．$\frac{m}{n}\in J\setminus pR, \frac{m}{n}\notin R^\times$ が存在する．しかし $p\nmid m$ であるから $\frac{m}{n}\frac{n}{m}=1$ となり，$J=R$ となる．よって pR は極大イデアルである．

(3) 異なる極大イデアル J をもてば $J-pR$ の元について (2) と同様にして単元であるとわかるので矛盾．

(3) で局所環であることを示すから R の単元全体に着目する．$\frac{m}{n}\in R^\times$ とする．ある $\frac{a}{b}$ が存在して $\frac{m}{n}\frac{a}{b}=1$ となる．よって $ma=nb\in S$ である．逆に $ma\in S$ なる a が存在すれば $\frac{m}{n}\frac{an}{ma}=1$ となるから $\frac{m}{n}\in R^\times$ である．すなわち $R^\times=\left\{\frac{m}{n}\;\middle|\;{}^\exists a, ma\in S\right\}$ である．
$R\setminus pR=\left\{\frac{m}{n}\;\middle|\;p\nmid m\right\}=R^\times$ であるから R は局所環で極大イデアルは pR である．

(4)$\mathbb{Z}$ は UFD であるから原始多項式 x^2+1 の既約性は $\mathbb{Q}[x]$ での既約性と同値である．同様に $\mathbb{Z}_{(p)}$ も UFD でその商体は $\mathbb{Q}$ であり，既約性が同値になる．

したがって x^2+1 は $\mathbb{Z}[x]$ 上既約であるから $\mathbb{Z}_{(p)}[x]=R[x]$ 上でも既約である．

(5)$\varphi\colon R\to R[x]/J$ を考えれば $\ker\varphi=R\cap J$ である．$R/(R\cap J)=\mathrm{Im}(\varphi)\subset R[x]/J$ より整域であるから $R\cap J$ は素イデアルである．

$i\colon\mathbb{Z}\to R$ について $i^{-1}(R\cap J)=(q)\quad(q\text{は素数か}0)$ である．$0\neq q\neq p$ なら $i(q)\in R^\times$ となるから $q=0,p$ である．$q=0$ なら $R\cap J=0$ である．このとき $x^2+1\in J$ より $f(x)\in J\setminus(x^2+1)$ なら $0\neq ax+b\in J$ とできる．$(ax+b)(ax-b)=a^2x^2-b^2\in J$ より $a^2+b^2\in J$ である．すなわち $a=b=0$ である．よって $J=I$ であるが I は極大イデアルでないから矛盾．

よって $q=p$ である．すなわち $pR[x]\subset J$ である．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$Q(\alpha^3)=0$ は明らか．$P(X)$ は α の最小多項式である．$\alpha^3\in K$ なら最小多項式の次数が 3 以下となり矛盾．したがって $\alpha^3\notin K$ であるから $Q(X)$ は既約である．

(2)(1) より $[L:K]=2$ である．また $[F:K]=6$ であるから $[F:L]=3$ である．

(3)L/K は完全体上の 2 次拡大であるから Galois 拡大である．

(2) より α の L 上最小多項式の次数が 3 であるから $X^3-\alpha^3$ が L 上の最小多項式である．(最小多項式でなければ拡大次数が 2 以下となり矛盾する．)

その根は $\alpha,\omega\alpha,\omega^2\alpha$ であり，全て F に含まれる．よって F/L は Galois 拡大である．

(4)$Q(\beta^3)=\beta^6+a\beta^3+b=c^6\alpha^{-6}+ac^3\alpha^{-3}+c^3=c^3\alpha^{-6}(c^3+a\alpha^3+\alpha^6)=0$ であるから $Q(X)=(X-\alpha^3)(X-\beta^3)$ である．

$P(X)$ の根は $\alpha,\omega\alpha,\omega^2\alpha,\beta,\omega\beta,\omega^2\beta$ であるから全て F に含まれる．よって F/K は Galois 拡大である．

$\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(F/K)$ について $\sigma(\alpha)=\omega\alpha,\tau(\alpha)=\beta$ とする．

$\sigma\circ\tau(\alpha)=\sigma(\beta)=\sigma(c\alpha^{-1})=c\omega^2\alpha^{-1},\tau\circ\sigma(\alpha)=\tau(\omega\alpha)=\omega c\alpha^{-1}$ であるから $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$ である．よって非可換群．