目次

0.1　2001 基礎

$\boxed{1}$ (1)$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$が基底.

(2)$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_2, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - v_2$ である.

よって $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ が表現行列.

$\boxed{2}$ (1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $a \neq \pm 1$ で $\dim V = 3$ $a = -1$ で $\dim V = 2$ $a = 1$ で $\dim V = 1$ である.

(2)$\varphi\colon V + W \to V/(V \cap W); v + w \mapsto [v]$ で定める．$v + w = v' + w'$ なら $w - w' = v' - v \in V \cap W$ であるから $[v] = [v + w - w'] = [v']$ より well-defined である．φ は全射準同型であり，$w \in W \subset \ker\varphi$ は明らか. $\varphi(v + w) = 0$ なら $v \in V \cap W$ より $v + w \in W$ である.

よって $(V+W)/W \cong V/(V \cap W)$ であるから $\dim(V+W) - \dim W = \dim V - \dim(V \cap W)$ である．よって

$1=\dim V\cap W=\dim V+\dim W-\dim(V+W)$ である．$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&-5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&-6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&-4\end{vmatrix}=8\neq 0$ より $\{v_1,w_1,w_2\}$ は一次独立．よって $\dim V+W=3$ である．よって $\dim V+\dim W-\dim(V+W)=\dim V-1=1$ より $a=-1$．

$\boxed{3}$ (1)$-2<a_n<2$ のとき，$0<a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}<2$ である．また $0<x<2$ なら $(x-2)(x+1)<0$ より $x^2<x+2$．すなわち $x<\sqrt{x+2}$ である．したがって $-2<x<2$ で $x<\sqrt{x+2}$ が成り立つのは明らか．よって $-2<a_1<2$ のとき $a_1<a_2<\cdots<2$ となるから広義単調増加．

$a_1=2$ なら $a_2=2,\cdots,a_n=2$ より広義単調数列．

$a_n>2$ なら $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}>2$ である．$x>2$ なら $(x-2)(x+1)>0$ より $x>\sqrt{x+2}$ である．よって $a_1>2$ のとき，$a_1>a_2>\cdots>2$ となるから広義単調減少．

(2) 全ての場合において $\{a_n\}$ は有界単調数列であるから収束する．したがってその収束値を α とおけば $\alpha=\sqrt{\alpha+2}$ であるから $\alpha=2$ である．

$\boxed{4}$ $R_1,R_2>1$ とする．$\left|\int_{-R_1}^{R_2}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right|\leq\int_{-R_1}^{R_2}\left|\frac{1}{x^2+1}\right|dx\leq\int_{-R_1}^{-1}\frac{1}{x^2}dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{R_2}\frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-R_1}^{-1}+2+\left[\frac{-1}{x}\right]_{1}^{R_2}=4-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\to 4\quad(R_1,R_2\to\infty)$ である．よって広義積分は収束する．

$R>10$ とする．$\mathbb{C}$ 上の積分経路 D_R を $C_R=\left\{Re^{i\theta}\;\middle|\;\theta\in[0,\pi]\right\}$ と $[-R,R]\subset\mathbb{R}$ の和集合とし，反時計回りの向きをとる．$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right|=\int_0^{\pi}\left|\frac{\exp\left(iRe^{i\theta}\right)}{R^2e^{2i\theta}+1}Re^{i\theta}i\right|d\theta\leq\int_0^{\pi}\frac{R\exp(-R\sin\theta)}{R^2-1}d\theta\leq\frac{\pi}{R}\to 0\quad(R\to\infty)$ である．

また $\int_{D_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$ は被積分関数の特異点は $\pm i$ であり，積分領域内では i が唯一の特異点である．留数をもとめると $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right)=\frac{e^{ii}}{i+i}=\frac{e^{-1}}{2i}$ である．したがって留数定理から $\int_{D_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=\frac{\pi}{e}$ である．

以上より $\frac{\pi}{e}=\lim_{R\to\infty}\int_{D_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=\lim_{R\to\infty}(\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz+\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$ である．

0.2　2001 数学専門

$\boxed{1}$ $A\in GL_2(\mathbb{F}_2)$ について $\det A\in\mathbb{F}^{\times}=1$ であるから $GL_2(\mathbb{F}_2)=SL_2(\mathbb{F}_2)$ である．

$GL_2(\mathbb{F}_2)=\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)$ である．$\varphi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2^2)$ は基底 $(1,0),(0,1)$ で定まる．$\mathbb{F}_2^2$ の元 v で生成される部分空間 $\mathrm{Span}(v)=\{0,v\}$ であるから,非零なベクトルは各対ごとに 1 次独立．よって $(0,0)\neq\varphi(0,1)\neq\varphi(1,0)\neq(0,0)$ なら $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)$ である．したがって φ は $\mathbb{F}_2^2\setminus\{0,0\}$ の置換である．集合 X の置換群を $\mathfrak{S}(X)$ で表すと，$f\colon\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)\to\mathfrak{S}(\mathbb{F}_2^2\setminus\{0,0\})$ が定まり，これが全単射準同型であることは明らか．したがって $SL_2(\mathbb{F}_2)\cong\mathfrak{S}_3$ である．

$\boxed{2}$ A は $x(x-1)$ を 0 でないべき零元としてもつ．

(a) 中国剰余定理から $\mathbb{R}[x]/(x(x-1))\cong\mathbb{R}[x]/(x)\times\mathbb{R}[x]/(x-1)\cong\mathbb{R}^2$ より零でないべき零元をもたない．よって同型でない．

(b)$x^2(-x^2+2)+(x-1)^2(x+1)^2=1$ であるから $(x^2)+((x-1)^2)=\mathbb{R}[x]$ である．$\varphi\colon\mathbb{R}[x]/(x^2(x-1)^2)\to\mathbb{R}[x]/(x^2)\times\mathbb{R}[x]/((x-1)^2);f+(x^2(x-1)^2)\mapsto(f+(x^2),f+(x-1)^2)$ と定める．φ が well-defined であるのは明らか．$\varphi(f+(x^2(x-1)^2))=0$ とすると，$f\in(x^2),f\in(x-1)^2$ である．$f=f\cdot(x^2(-x^2+2)+(x-1)^2(x+1)^2)=(-x^2+2)f\cdot x^2+(x+1)^2f\cdot(x-1)^2\in(x^2(x-1)^2)$ である．よって φ は単射．$g+(x^2),h+(x-1)^2$ に対して $f=g\cdot(x-1)^2(x+1)^2+h\cdot(-x^2+2)x^2$ とすれば $f+(x^2)=g+(h-g)\cdot(-x^2+2)x^2+(x^2)=g+(x^2),f+((x-1)^2)=h+(g-h)\cdot(x-1)^2(x+1)^2=h+(x-1)^2$ である．よって φ は全射．よって φ は同型写像．

(c)$\mathbb{R}[x]/(x(x-1))\times\mathbb{R}[x]/(x(x-1))\cong\mathbb{R}^4$ より零でないべき零元をもたない．よって同型でない．

$\boxed{4}$ (1)$\{1,\zeta,\cdots,\zeta^5\}$ が基底となる．一次独立であることは $\sum_{i=0}^{5}c_i\zeta_i=0$ であるについて $c_i\neq 0$ なら ζ の最小多項式が 4 次以下であるとわかる．ζ は 1 の原始 7 乗根であるから $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+\cdots+1)$ より

$p(x)=x^6+x^5+\cdots+1$ が ζ を根にもつ．$p(x+1)=\frac{(x+1)^7-1}{x}$ であり 7 は素数であるから $(x+1)^7$ の x^2 から x^6 までの係数は全て 7 の倍数である．よって $p(x+1)$ も最高次の係数は 1 でそれ以外は 7 の倍数であるからアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[x]$ 上既約である．$p(x)$ はモニックであるから $\mathbb{Q}[x]$ 上既約であるため，$p(x)$ も $\mathbb{Q}[x]$ 上既約．よって $p(x)$ が ζ の最小多項式である．$\deg p=6$ 矛盾．よって一次独立．

$\mathbb{Q}(\zeta)$ は $\mathbb{Q}[\zeta]$ の商体であるが，$\mathbb{Q}[\zeta]\cong\mathbb{Q}[x]/(p(x))$ で $p(x)$ は既約であり，$\mathbb{Q}[x]$ は PID であるから $(p(x))$ は極大イデアル．よって $\mathbb{Q}[\zeta]$ は体であるから $\mathbb{Q}[\zeta]=\mathbb{Q}(\zeta)$ である．$\mathbb{Q}[\zeta]$ の任意の元が $\{1,\zeta,\cdots,\zeta^5\}$ で生成されることは明らか．よって基底.

(2)$p(x)$ の根は $\zeta^i\quad(i=1,\cdots,6)$ である．よって $p(x)$ は $\mathbb{Q}(\zeta)$ で分解するから Galois 拡大.

$\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を $\sigma(\zeta)=\zeta^3$ とすれば $\sigma^i(\zeta)=\zeta^{3^i}$ であり，$3^i\equiv1\mod(7)$ なる最小の i は 6 であるから σ の位数は 6 である．$|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})|=[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]=6$ より $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である.

(3)$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の真部分群は $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．対応する中間体は σ^3 で固定される体と σ^2 で固定される体である．$\sigma^3(\zeta+\zeta^6)=\zeta+\zeta^6=2\cos\frac{2\pi}{7}$ であるから，$\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$ である.

$\sigma^2(\zeta+\zeta^2+\zeta^4)=\zeta^2+\zeta^4+\zeta$ であるから $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^2+\zeta^4)$ である.

よって求める中間体は $\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^2+\zeta^4),\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^6),\mathbb{Q}(\zeta)$ である.

0.3 2002 基礎

$\boxed{1}$ A を行基本変形すると，$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\-1&1&2&3\\2&1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ である．(1) $\dim\mathrm{Im}(T)=2$ で基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である.

(2)$\dim\ker(T)=2$ で基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である.

$\boxed{2}$ A の固有方程式を $g_a(t)$ とすれば $g_a(t)=\begin{vmatrix}1-t&0&1\\3&2-t&0\\a&0&1-t\end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix}1-t&1\\a&1-t\end{vmatrix}=(2-t)((1-t)^2-a)=(2-t)(t^2-2t-a+1)$ である.

(1)$a=4$ より $g_4(t)=(2-t)(t^2-2t-3)=(2-t)(t-3)(t+1)$ である．よって固有値は $2,3,-1$ であり，それぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ ととれる．よって $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&3\\0&2&2\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP$ は対角行列.

(2) 固有値が全て異なれば対角化可能である．したがって $g_a(t)$ が重解を持つことが必要. $(2-t)(t^2-2t-a+1)=0$ の解は $t=2,1\pm\sqrt{1-(1-a)}=2,1\pm\sqrt{a}$ である.

よって重解をもつのは $a=0,1$ のときである．$a=0$ のとき，固有値 1 の固有空間は $\begin{pmatrix}0&0&1\\3&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}x=0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対角化不可能.

$a=1$ のとき，固有値 2 の固有空間は $\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}x=0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対

角化不可能.

$\boxed{3}$ $(1)f^{(1)}(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f^{(2)}(x)=(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-\frac{5}{2}},\cdots f^{(n)}(x)=\frac{(2n-1)!!}{(-2)^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ であるから, $f^{(n)}(0)=\frac{(2n-1)!!}{(-2)^n}\quad(n\geq 1)$ である.

よって $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!}x^n$ がテイラー展開.

$(2)g'(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2x}(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})$ である.

よって $g'(x)=-\frac{1}{2x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!}x^n)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2(-2)^n n!}x^{n-1}$ である．項別積分すれば $g(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n2(-2)^n n!}x^n$ である.

$2^n n!=(2n)!!$ であるから，$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}x^n$ がわかる.

収束半径は $|(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}/(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2(n+1)(2n+2)!!}|=\frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+3)}\to 1\quad(n\to\infty)$ より 1 である.

$\boxed{4}$ $(1)x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換すると，ヤコビアンは r である．よって

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1\frac{1}{r^\lambda}rdrd\theta=2\pi\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr=\begin{cases}2\pi[\frac{1}{2-\lambda}r^{2-\lambda}]_\varepsilon^1 & (\lambda\neq 2)\\ 2\pi[\log r]_\varepsilon^1 & (\lambda=2)\end{cases}=\begin{cases}2\pi\frac{1}{2-\lambda}(1-\varepsilon^{2-\lambda}) & (\lambda\neq 2)\\ -2\pi\log\varepsilon & (\lambda=2)\end{cases}$$

である．したがって $2-\lambda>0$ なら収束し，値は $\frac{2\pi}{2-\lambda}$ である.

(2) $\lambda\neq 2$ のとき,

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1\frac{\log r}{r^\lambda}rdrd\theta=2\pi\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}\log rdr=2\pi[\frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log r]_\varepsilon^1-2\pi\int_\varepsilon^1\frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\frac{1}{r}dr=-2\pi\frac{\varepsilon^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log\varepsilon-\frac{2\pi}{2-\lambda}\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr$$
$$=-2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(\varepsilon^{2-\lambda}\log\varepsilon^{2-\lambda}+(1-\varepsilon^{2-\lambda}))=-2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(1+(\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}))$$

である.

$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}$ は $\lambda-2<0$ で分母分子共に $\varepsilon\to 0$ で無限大に発散する．よって $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{2-\lambda}(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}}{(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}}=0$ であるからロピタルの定理より，$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$ である.

$\lambda-2\geq 0$ なら無限大に発散する.

$\lambda=2$ のとき,

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1\frac{\log r}{r^2}rdrd\theta=2\pi\int_\varepsilon^1\frac{\log r}{r}dr=\left[\frac{1}{2}(\log r)^2\right]_\varepsilon^1=-\frac{1}{2}(\log\varepsilon)^2\to-\infty\quad(\varepsilon\to 0)$$

より発散する．したがって $\lambda<2$ で $-2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}$ に収束する.

0.4　2002 数学専門

$\boxed{1}$ $(1)F$ の階数が 1 であるから，$0\neq v_1\in V, f(v)\neq 0$ なる v_1 が存在する．$\ker F$ は 3 次元部分空間であるから基底 $\{v_2,v_3,v_4\}$ がとれる．$\sum c_iv_i=0$ とすると $F(\sum c_iv_i)=c_1f(v_1)=0$ より $c_1=0$．したがって $\{v_2,v_3,v_4\}$ は一次独立であるから $c_i=0\quad(i=2,3,4)$ である．$S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ とすれば一次独立．よって 4 つ元からなる一次独立な集合が得られたから，V の次元が 4 であることより，S は基底.

この S に関する表現行列は $F(v_i)=0\quad(i=2,3,4)$ であるから $\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\ \alpha_2&0&0&0\\ \alpha_3&0&0&0\\ \alpha_4&0&0&0\end{pmatrix}$ となる.

$(2)F(v_1)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4$ としたときに，$\alpha_1=0$ だとする．このとき，$F^2(v_1)=0$ であるから,

V の基底を $\{v_1, f(v_1), v_3', v_4'\}$ $(v_3', v_4' \in \ker F)$ ととれば表現行列が $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha_1 \neq 0$ のとき，$u_1 = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) \neq 0$ とすれば $F(u_1) = F(v_1) = \alpha_1 u_1$ より u_1 が固有値 α_1 の固有ベクトルとなる．よってジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1) 略.

(2)$\varphi\colon H \to K; A = [a_{ij}] \mapsto \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$ とすれば φ は全射準同型である．よって $N = \ker\varphi$ とすれば $H/N \cong K$ である．N は対角成分が全て 1 であるような上三角行列全体である．

$\boxed{3}$ (1)$\bar{R}$ において $f \in R$ の剰余類を $\bar{f}$ で表す．$S = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2\}$ が基底である．$c_0\bar{1} + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 = 0$ とすると，$c_0 + c_1x + c_2x^2 \in (x^3 - 2)$ である．よって $c_0 + c_1x + c_2x^2 = (x^3 - 2)f(x)$ なる $f(x) \in R$ が存在する．次数を比較すれば左辺は 2 以下で右辺は 0 か 3 以上かであるから，$f = 0$．よって $c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0$ より $c_0 = c_1 =_2 = 0$ である．すなわちい一次独立.

任意の $f(x) \in R$ は $f(x) = (x^3 - 2)g(x) + c_2x^2 + c_1x + c_0$ $(g(x) \in R, c_i \in K)$ と表せる．したがって $\bar{f} = c_2\bar{x}^2 + c_1\bar{x} + c_0$ より $\bar{R}$ を生成する．よって S は基底.

(2)$X^3 - 2$ は素数 2 に着目すれば $\mathbb{Z}[X]$ 上でアイゼンシュタインの既約判定法から既約である．$X^3 - 2$ は原始多項式であるから $\mathbb{Z}[X]$ 上既約であるなら $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である．$\mathbb{Q}[X]$ は PID であるから既約元は素元であり，素イデアル $(X^3 - 2)$ は極大イデアルである．よって $\bar{R}$ は体.

(3)$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2), (X - \sqrt[3]{2})$ は互いに素なイデアルであるから中国剰余定理より，$\bar{R} \cong \mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \times \mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ である．$\mathbb{R}[X]/(X - \sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{R}$ である．

$X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2$ は $\mathbb{R}[X]$ 上既約であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2)$ は $\mathbb{R}$ の代数拡大体となる．$\mathbb{C}$ は代数閉包で $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の拡大次数は 2 であるから，$\mathbb{R}[X]/(X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{2}^2) \cong \mathbb{C}$ である．

よって $\bar{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$x^2 = t$ として $t^2 - t + 1$ の根は $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ である．したがって $x^4 - x^2 + 1$ の根は $\pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ である．

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = 1$ である．したがって $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ は $\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}}$ を全て含む．よって $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}})$ であり，$[K : \mathbb{Q}] = 4$ である．また基底は $\{1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\}$ である．これは次のようにしてわかる．一次従属なら $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ の最小多項式を 3 次以下でとれる．$P(X) = X^4 - X^2 + 1$ とすれば $P(X)$ が $\mathbb{Z}[x]$ 上可約であると分かる．

$q(X) \mid P(X)$ なら $q(-X) \mid P(X)$ である．

(i) $q(X) = q(-X)$ のとき，$q(X) = X^2 - a$ とかける．よって $P(X) = (X^2 - a)(X^2 - b)$ である．係数比較をすれば $a + b = 1$，$ab = 1$ であるから，$(x - a)(x - b) = x^2 - x + 1$ である．しかし $x^2 - x + 1$ は $\mathbb{Z}[x]$ 上既約であるから矛盾.

(ii)$q(X) \neq q(-X)$ のとき，$q(X) = X^2 - aX + b$ とかける．$P(X) = (X^2 - aX + b)(X^2 + aX + b)$ である．係数比較をすれば $b^2 = 1$，$a^2 + 2b = 0$ である．よって $b = \pm 1$ である．$b = 1$ なら $a^2 + 2 = 0$ であるから，矛盾．$b = -1$ なら $a^2 - 2 = 0$ であるから，$a^2 = 2$ であるがこれは $a \in \mathbb{Q}$ より矛盾.

以上より $P(X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ 上既約である．よって $\mathbb{Q}[X]$ 上既約であるから，これは一次従属でないことを意味する．よって一次独立であるから基底であるとわかる．

(2)$\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\sigma(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\sigma^2(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \sigma(\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}) =$

$\sigma(1/\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ である．よって $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．また $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について $\tau(\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}$ とする．このとき $\tau^2 = \mathrm{id}$ である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 位数 4 の群であるから，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のいずれかである．位数 2 の元を 2 つ以上含むことから $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ である．また σ, τ によって生成されると分かる．(3)$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の非自明な部分群は $\langle\sigma\rangle, \langle\tau\rangle, \langle\sigma\circ\tau\rangle$ である．

σ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \alpha$ とすれば $\alpha^2 = 3$ であるから，α は $\pm\sqrt{3}$ のいずれかである．τ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}) = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ である．

$\sigma\circ\tau$ で不変な元 $\sqrt{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \beta$ とすれば $\beta^2 = -1$ であるから，β は $\pm i$ のいずれかである．

以上より非自明な中間体は $\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ である．これに $K, \mathbb{Q}$ を加えれば全ての中間体が得られる．

0.5 2003 基礎

$\boxed{1}$ (1)V の元の和が V の元に属すためには $a=b=c=d=0$ が必要十分である．V は $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p+1 & 3 & q \\ 1 & 2 & 2p+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -p & 4 & 4q \\ 0 & 1 & -p^2 & -1 & -2q \end{pmatrix}$ の解空間である．A を簡約化すると，

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & p+1 & 3 & q \\ 0 & 1 & p & -1 & -q \\ 0 & -1 & -2p-1 & 1 & 3q \\ 0 & 1 & -p^2 & -1 & -2q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 2q \\ 0 & 1 & p & -1 & -q \\ 0 & 0 & -p-1 & 0 & 2q \\ 0 & 0 & -p^2-p & 0 & -q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 2q \\ 0 & 1 & p & -1 & -q \\ 0 & 0 & -p-1 & 0 & 2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q-2pq \end{pmatrix}$$

である．これの解空間の次元が 3 になるためには $-p-1=0, 2q=0, -q-2pq=0$ が必要十分．したがって $p=-1, q=0$ である．

(2)$p=-1, q=0$ を代入して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の解空間が V である．よって基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$\boxed{2}$ (1)ω を 1 の原始三乗根として，$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+2a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = (1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} = (1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$ である．$1+a\omega+a\omega^2 = 1+a\omega+a(-1-\omega) = 1-a$ である．したがって固有値は $1+2a, 1-a$ である．

(2) 固有値が $1-a$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．直交化すると，$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ である．

正規化することで $T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ は直交行列．このとき，$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix}1+2a & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$ となる．

(3)$B = \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$ とする．T は直交行列であるから

$$\left[{}^\forall(x,y,z) \in B, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq -1\right] \Leftrightarrow \left[{}^\forall(x,y,z) \in B, \left(T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^t AT \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq -1\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[{}^\forall(x,y,z) \in B, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t T^{-1}AT \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq -1\right] \Leftrightarrow \left[{}^\forall(x,y,z) \in B, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t D \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq -1\right]$$

である．$(x,y,z)D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (1+2a)x^2+(1-a)y^2+(1-a)z^2 = (1-a)(x^2+y^2+z^2)+3ax^2 = 3ax^2+1-a \geq -1$ であるから，$x \in [-1,1]$ で $3ax^2+2-a \geq 0$ が成り立つ a をもとめる．$a>0$ のとき，左辺は $x=0$ で最小値 $2-a$ をとるから $2-a \geq 0$ より $0 < a \leq 2$ である．

$a=0$ なら明らかに成立する．

$a<0$ なら左辺は $x=\pm 1$ で最小値をとるから $3a+2-a \geq 0$ より $0 > a \geq -1$ である．よって $-1 \leq a \leq 2$ が必要十分条件.

$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq -1 \Leftrightarrow (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + (x,y,z)E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq 0 \Leftarrow (x,y,z)(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \geq 0$ これが任意の $(x,y,z) \in B$ について成り立つことは任意の $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ で成り立つことと同値である．(正規化すればよい．)

すなわち $A+E$ が半正定値であることと必要十分．これは $A+E$ 全ての固有値が非負であることと必要十分であり，$A+E$ の固有値は $2+2a, 2+a\omega^2+a\omega = 2-a$ である．よって $2+2a \geq 0, 2-a \geq 0$ より $2 \geq a \geq -1$ である．

$\boxed{3}$ (1) 分母分子の極限が ∞ であるからロピタルの定理を使う．$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{ax}+e^x}(a(e^{ax}+e^x)-(a-1)e^x) = \lim_{x\to\infty} a - \frac{1}{e^{(a-1)x}+1}(a-1)$ である．$a-1 \geq 0$ なら極限は a である．$a-1<0$ のとき，極限は 1 である．よって $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log(e^{ax}+e^x) = \max(a,1)$ である．

(2)$t+x=u$ と変数変換すれば $h(x) = \int_x^{2x} e^{e^u}du$ である．よって $h'(x) = 2e^{e^{2x}} - e^{e^x}$ である．

(3)$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}(r\cos\theta)$ である．よって $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\frac{-\sin\theta}{r}), \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\frac{\cos\theta}{r})$ である．また $r = \sqrt{x^2+y^2}$ より $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2r} = \cos\theta$ である．$\tan\theta = \frac{y}{x}$ より x で偏微分して

$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ より $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\cos^2\theta = \frac{-\sin\theta}{r}$ である．

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{-\sin\theta}{r}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\cos\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta\frac{-\sin\theta}{r}) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r}) + \frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{-\sin\theta}{r}\frac{-\sin\theta}{r} - \frac{\cos\theta}{r^2}\cos\theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}\theta\right) - \frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2}) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(\cos^2\theta - \sin\theta^2) + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2}) - \frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\end{aligned}$$

(4)$\iint_D xydxdy = \int_0^1\int_{x^2}^x xydydx = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 - x^5 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{24}$

$\boxed{4}$ (1)$\arcsin(\sin x) = x$ を x で微分すると，$(\arcsin)'(\sin x)\cos x = 1$ より $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos\arcsin x}$ である．$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$ より $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ である．$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos(\arcsin x) > 0$ である．よって $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ である．

よって $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．$g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2)$f'(x) = g(x)g'(x)$ である．よって $\sqrt{1-x^2}f'(x) = \arcsin x$ である．x で微分すれば $-\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})}f' + \sqrt{1-x^2}f'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．したがって $-xf'' + (1-x^2)f'' = 1$ である．

(3)$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ である．よって $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n x^{n-2} - n(n-1)a_n x^n) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = 1$ である．よって n の係数を比較すれば $2a_2 = 1, 3\cdot 2a_3 - a_1 = 0, (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n = 0 \quad (n \geq 2)$ である．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2} = n^2 a_n \quad (n \geq 2)$ である．この等式に $n = 1$ を代入すると，$3\cdot 2a_3 = a_1$ となりこれは成り立つ．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2} = n^2 a_n \quad (n \geq 1)$ である．また $a_0 = f(0) = \frac{1}{2}g(0)^2 = 0, a_1 = f'(0) = g(0)g'(0) = 0, a_2 = \frac{1}{2}$ である．

(4)$3\cdot 2a_3 = 1a_1 = 0$ より $a_3 = 0$ である．$4\cdot 3a_4 = 4a_2 = 2$ より $a_4 = \frac{1}{6}$ である．$5\cdot 4a_5 = 9a_3 = 0$ より $a_5 = 0$ である．$6\cdot 5a_6 = 16a_4$ より $a_6 = \frac{4}{45}$ である．

よって $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4)}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{45}x^6 + O(x^7)}{x^6} = \frac{4}{45}$ である．

0.6 2003 専門

$\boxed{1}$ (1)V は3次元線形空間であるから $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立であることを示せばよい．$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ とする．$F(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) = c_1f(v_1) = 0$ であり，$F(v_1) \neq 0$ より $c_1 = 0$ である．よって $c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ であるが v_2, v_3 は一次独立であるから $c_2 = c_3 = 0$ である．したがって $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底.

(2)$\{v_1, v_2, v_3\}$ が基底であるから $F(v_1) = av_1 + bv_2 + cv_3$ なる $a, b, c \in V$ が存在する．したがって表現行列は $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(3) $F(v_1) \notin U$ であるから $a \neq 0$ である．$u_1 = v_1 + \frac{b}{a}v_2 + \frac{c}{a}v_3$ とする．$F(u_1) = F(v_1) = a(v_1 + \frac{b}{a}v_2 + \frac{c}{a}v_3) = au_1$ である．$\{u_1, v_2, v_3\}$ に関する表現行列は対角行列である．

(4)U の一次独立な集合 $\{F(v_1)\}$ を延長して U の基底 $\{F(v_1), v_3\}$ をとる．このとき $\{v_1, F(v_1), v_3\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり，ジョルダン標準形である．

$\boxed{2}$ (1)U が開集合 $\Leftrightarrow {}^\forall x \in U, {}^\exists r > 0, B_r(x) \subset U$ である．

(2)((a)⇒(b)) U を $\mathbb{R}^N$ の開集合とする．$x \in f^{-1}(U)$ を任意にとる．$f(x) \in U$ より ${}^\exists r > 0, B_r(f(x)) \subset U$ である．したがって $f^{-1}(B_r(f(x))) \subset f^{-1}(U)$ がなりたつ．いま (a) より r に対してある $\delta > 0$ が存在して

$B_\delta(x) = f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}(B_r(f(x))) \subset f^{-1}(U)$ である．よって $f^{-1}(U)$ は開集合である．

((b)⇒(a)) 任意の $a \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ をとる．$B_\varepsilon(f(a))$ は開集合であるから $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ も開集合である．したがってある $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ である．f で送って $f(B_\delta(a)) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))) \subset B_\varepsilon(f(a))$ である．

(3)((a)⇒(c)) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ である．したがってある N が存在して $n > N$ なら $d(a_n, a) < \delta$ すなわち $a_n \in B_\delta(a)$ が成り立つ．よって $f(a_n) \in B_\varepsilon(f(a))$ であるから $d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ である．これは $\lim f(a_n) = f(a)$ を意味する．

((c)⇒(a)) 背理法を用いる．ある $a \in \mathbb{R}^N$ と $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $\delta > 0$ に対して $f(B_\delta(a)) \not\subset B_\varepsilon(f(a))$ であると仮定する．このとき $\delta = \frac{1}{n}$ とすれば $a_n \in B_\delta(a)$ で $f(a_n) \notin B_\varepsilon(f(a))$ なるものがとれる．これによって数列 $\{a_n\}$ を作れば $\{a_n\}$ は a に収束するが $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．これは矛盾．

$\boxed{3}$ (1)$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとヤコビアンは r である．よって $I_n = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr d\theta$ である．

(2)I_n の収束性は $\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr$ の収束性と同値．$[0,1]$ では被積分関数が有界であるから $\int_1^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr$ の収束性と同値．$n \geq 2$ のとき，$\int_1^M \frac{r^2}{1+r^{2n}} dr \leq \int_1^M r^{2-2n} dr = \left[\frac{1}{3-2n} r^{3-2n}\right]_1^M = \frac{1}{3-2n}(M^{3-2n} - 1) \to \frac{1}{3n-2} \quad (M \to \infty)$ である．$n = 1$ のとき．$r \geq 1$ より $r^2 \geq 1$ であるから $2r^2 \geq r^2 + 1$ である．よって $\int_1^M \frac{r^2}{1+r^2} dr \geq \int_1^M \frac{r^2}{2r^2} dr = \int_1^M \frac{1}{2} dr = \frac{1}{2}M \to \infty \quad (M \to \infty)$ より発散する．

よって求める最小値 a は $a = 2$ である．

(3)$\frac{z^k}{1+z^4}$ は $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$ をそれぞれ 1 位の極として持つ．積分路 Γ 内の特異点は $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ である．留数は $\mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = \left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}}, \mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = \left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}}$ である．したがって留数定理から $\int_\Gamma \frac{z^k}{1+z^4} dz = 2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}})$ である．

(4)

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{R^3}{1+R^4 e^{4i\theta}}\right| d\theta \leq \int_0^\pi \left|\frac{R^3}{R^4 - 1}\right| d\theta = \pi\frac{R^3}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

$$\int_{[-R,R]} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{[-R,0]} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{[0,R]} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_R^0 \frac{r^2}{1+r^4}(-1) dr + \int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr = 2\int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr$$

である．よって $\int_\Gamma \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz + 2\int_0^R \frac{r^2}{1+r^4} dr$ である．$R \to \infty$ として $2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(2-3)\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(3\cdot 2-1)\pi i}{4}}) = 0 + 2\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^4} dr$ である．したがって $\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^4} dr = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ である．よって $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4}\pi d\theta = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\varphi\colon K[X,Y] \to K[t]; x \mapsto t^3, y \mapsto t^2$ とする．このとき $\ker\varphi \supset (X^2 - Y^3)$ は明らか．$f(X,Y) \in \ker\varphi$ とすると，$f(X,Y) = (X^2 - Y^3)g(X,Y) + Xh_1(Y) + h_2(Y)$ とできる．φ でおくれば $0 = t^3 h_1(t^2) + h_2(t^2)$ である．t の次数について，偶数の次数を比較すれば $0 = h_2(t^2)$ であるから $h_2 = 0$ である．よって $0 = t^3 h_1(t^2)$ より $h_1 = 0$ である．すなわち $\ker\varphi = (X^2 - Y^3)$ である．

よって準同型定理から $R = K[X,Y]/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi = K[t^3, t^2]$ である．

$K[t^3, t^2]$ は $K[t]$ の部分環であるから整域であることは明らか．よって R は整域.

(2)$K[t^2, t^3]$ の商体は $t^3/t^2 = t$ より $K(t)$ である．$K[t^2, t^3][s] \ni s^2 - t^2$ は t を根にもつモニック多項式であるが，$t \notin K[t^2, t^3]$ であるから R は整閉でない.

0.7 2004 午前

$\boxed{1}$ (1) 和と定数倍で閉じているのでベクトル空間.

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とする．すなわち $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ である．このとき，$x_1 + (-x_3) + (x_2 + 2x_3) = 0$ であるから，$\phi(V) \subset V$ である．

(3)$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が V の基底である．

(4)$\phi(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2$ である．$\phi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -v_1 + 2v_2$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)(a)$(1,0,0),(0,1,0) \in W_1, (1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0) \notin W_1$

(b) ベクトル空間.

(c) ベクトル空間.

(d)$(\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, 1) \in W_4, 2(\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, 1) = (\frac{2}{9}, -\frac{20}{9}, 2) \notin W_4$

(2)(a)$f_1(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2f_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b)$f_2(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である.

(c) 線形写像.

(3) 像の基底は $\{1\}$ である．核の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1) $\int_C xydy = \int_0^2 xx^2 2xdx = 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{2^6}{5}$ である．

(2)$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x}f(u+v,uv) + \frac{\partial}{\partial y}f(u+v,uv)v, \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x}f(u+v,uv) + \frac{\partial}{\partial y}f(u+v,uv)u$ である．よって $\frac{1}{u-v}((u-1)\frac{\partial g}{\partial u} + (1-v)\frac{\partial g}{\partial v}) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ である．

(3) 極座標変換でのヤコビアンは r である．よって $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$f(x) = e^{x\log a}$ である．したがって Taylor 展開は $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!}x^n$ である．すなわち $a_n = \frac{(\log a)^n}{n!}$ であり，収束半径は e^x の収束半径が無限大であるから，この Taylor 展開の収束半径も無限大である．

(2)(1) で求めた Taylor 展開を用いると，$a^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!}\frac{1}{n^k}$ である．したがって $n(1-a^{\frac{1}{n}}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!}\frac{1}{n^{k-1}}$ である．この級数は一様収束するから，各項の極限をとることで，$\lim_{n\to\infty} n(1-a^{\frac{1}{n}}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{(\log a)^k}{k!}\frac{1}{n^{k-1}} = -\log a$ である．

(3)$1-a^{\frac{1}{n}} \geq 0$ である．$\lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = -\log a$ であるから，$\frac{1}{n} = O(1-a^{\frac{1}{n}})$ である．$\sum \frac{1}{n}$ は発散するから，$\sum 1-a^{\frac{1}{n}}$ も発散する．

0.8 2004 午後

$\boxed{1}$ (1) 次元定理より $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$ である．$\ker f = \mathrm{Im}\, f$ より $\dim\ker f = \dim \mathrm{Im}\, f$ であるから，$\dim V = 2\dim\ker f$ である．いま $V \neq 0$ より $\dim V \geq 1$ である．したがって $\dim\ker f \geq 1$ であるから，$\ker f \neq 0$ である．よって $\ker f \neq 0$ である．また $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V - \dim\ker f < \dim V$ である．よって $\mathrm{Im}\, f \neq V$ である．

(2)$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n + d_1w_1 + \cdots + d_nw_n = 0$ とする．f で送ると，$v_i \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$ より，$d_1f(w_1) + \cdots + d_nf(w_n) = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n = 0$ である．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底であるから，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ であ

る．したがって，$c_1v_1+\cdots+c_nv_n=0$ である．$\{v_1,\cdots,v_n\}$ は $\mathrm{Ker}\,f$ の基底であるから，$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ である．よって $\{v_1,\cdots,v_n,w_1,\cdots,w_n\}$ は一次独立である．

(3)$\dim\mathrm{Im}\,f=n$ である．よって $\dim V=2\dim\mathrm{Im}\,f=2n$ である．よって $2n$ 個の一次独立なベクトルからなる $\{v_1,\cdots,v_n,w_1,\cdots,w_n\}$ は V の基底である．

(4) 表現行列は $\begin{pmatrix} O & E_n \\ O & O \end{pmatrix}$ である．ただし E_n は n 次単位行列であり，O は n 次零行列である．

$\boxed{2}$ (1)$t>0$ より $f'(x)=3x^2+t^4>0$ であるから，f は狭義単調増加である．f は 3 次関数であるから解を必ずもち，狭義単調増加であるから解はただ一つである．

$f(0)=-t^3<0, f(t)=t^5>0$ であるから $0<\alpha(t)<t$ である．$f(\frac{1}{t})=\frac{1}{t^3}>0$ であるから，$0<\alpha(t)<\frac{1}{t}$ である．

(2)$F(x,t)=x^3+t^4x-t^3$ とする．$F(x,t)$ は C^∞ 級である．任意の $t>0$ に対して $F(\alpha(t),t)=0$ であり，$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t),t)=3\alpha(t)^2+t^4>0$ であるから，陰関数定理より，$\alpha(t)$ は C^∞ 級である．したがって $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ は存在して，$0=\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t),t)\frac{d\alpha(t)}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(t),t)=(3\alpha(t)^2+t^4)\frac{d\alpha(t)}{dt}+(4t^3\alpha(t)-3t^2)$ より $\frac{d\alpha(t)}{dt}=\frac{-4t^3\alpha(t)+3t^2}{3\alpha(t)^2+t^4}$ である．

(3)$\frac{d\alpha(t)}{dt}=0$ とすると，$-4t^3\alpha(t)+3t^2=0$ であるから $\alpha(t)=\frac{3}{4t}$ である．すなわち $f(\frac{3}{4t})=(\frac{3}{4t})^3+t^4(\frac{3}{4t})-t^3=0$ である．これを解くと $t^6=\frac{27}{16}$ より $t=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ である．$t_0=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ とすると，$t<t_0$ のとき $\frac{d\alpha(t)}{dt}>0$ で $t>t_0$ のとき $\frac{d\alpha(t)}{dt}<0$ であるから $\alpha(t)$ は $t=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ で最大値をもち，$\alpha(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}})=\frac{3}{4t_0}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ である．

$\boxed{3}$ (1)

$$\int_{\ell_2}\frac{z}{1+z^3}dz=\int_0^R\frac{e^{\frac{i2\pi}{3}}t}{1+(e^{\frac{i2\pi}{3}}t)^3}e^{\frac{i2\pi}{3}}dt=e^{\frac{i4\pi}{3}}\int_0^R\frac{t}{1+t^3}dt=e^{\frac{i4\pi}{3}}\int_{\ell_1}\frac{z}{1+z^3}dz$$

(2)

$$\left|\int_{C_R}\frac{z}{1+z^3}dz\right|=\left|\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{Re^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^3}Rie^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{R^2}{R^3-1}d\theta=\frac{2\pi}{3}\frac{R^2}{R^3-1}\to 0\quad(R\to\infty)$$

(3)$\ell_1+C_R-\ell_2$ で定まる積分曲線を C とする．$f(z)=\frac{z}{1+z^3}$ は $z=e^{\frac{i\pi}{3}},-1,e^{\frac{5i\pi}{3}}$ を $\mathbb{C}$ 上で孤立特異点としてもち，それ以外の点では正則である．したがって C を含むある有界領域 D で $z=e^{\frac{i\pi}{3}}$ を除いて D 上で f は正則である．$\mathrm{Res}\Big(f,e^{\frac{i\pi}{3}}\Big)=e^{\frac{i\pi}{3}}\frac{1}{3(e^{\frac{i\pi}{3}})^2}=\frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}$ であるから，留数定理より $\int_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(f,e^{\frac{i\pi}{3}}\Big)=\frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}$ である．

また $\int_C f(z)dz=\int_{\ell_1}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz-\int_{\ell_2}f(z)dz=(1-e^{\frac{i4\pi}{3}})\int_{\ell_1}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz$ である．$R\to\infty$ として $\frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}=(1-e^{\frac{i4\pi}{3}})\int_0^\infty\frac{t}{1+t^3}dt$ より，$\int_0^\infty\frac{t}{1+t^3}dt=\frac{2\pi}{9}$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の $\varepsilon>0$ をとる．(b) よりある N が存在して，$n\ge N$ のとき $a_n\in B_\varepsilon(x)$ である．$\{a_n\}$ は A の点列であるから $a_N\in A$ である．したがって，$a_N\in B_\varepsilon(x)\cap A$ である．すなわち，$B_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset$ である．

(2) 任意の n に対して $B_{\frac{1}{n}}(x)\cap A\neq\emptyset$ であるから，$a_n\in B_{\frac{1}{n}}(x)\cap A$ と定める．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して $\varepsilon>\frac{1}{N}$ となる N が存在して，$n\ge N$ のとき $a_n\in B_{\frac{1}{n}}(x)\cap A\subset B_\varepsilon(x)\cap A$ である．よって (b) が成り立つ．

(3) ある $\varepsilon>0$ が存在して，任意の N に対して，ある $n\ge N$ が存在して，$a_n\notin B_\varepsilon(x)$ である．

0.9 2005 午前

$\boxed{1}$ (1)$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4\\0&1&1&0&-1\\2&-3&-3&0&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-6\\1&1&1&1&-3\\1&1&1&0&-5\end{pmatrix}$ として，V,W は A,B の解空間である．簡約化すると $A\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4\\0&1&1&0&-1\\0&-3&-3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, B\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-6\\0&1&1&0&3\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

よって $\operatorname{rank} A = 2, \operatorname{rank} B = 3$ より $\dim V = 3, \dim W = 2$ である．

(2)$\dim(V \cap W)$ は $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ の解空間である．$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 4$ より $\dim V \cap W = 1$ である．

(3)$\varphi\colon V \to (V+W)/W; v \mapsto [v]$ で定める．明らかに全射準同型である．$\ker \varphi = V \cap W$ であるから次元定理より $\dim V - \dim(V \cap W) = \dim(V+W) - \dim W$ である．よって $\dim(V+W) = 3 - 1 + 2 = 4$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

$$\begin{aligned} g_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ -b^2+a & a+2b-\lambda & 1 \\ ab & -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda+b & 1 & 0 \\ b^2+a+ab-b\lambda & a+2b-\lambda & 1 \\ 0 & -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a+b-\lambda) \begin{vmatrix} a+2b-\lambda & 1 \\ -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} - (b^2+a+ab-b\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a+b-\lambda)((a+b-\lambda)(a+2b-\lambda) + a - (b^2+a+ab-b\lambda)) = (a+b-\lambda)^3 \end{aligned}$$

である．$\lambda = a+b$ とすると，$\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ -b^2+a & b & 1 \\ ab & -a & 0 \end{pmatrix}$ の解空間の次元は 3 でない．よって対角化不可能．

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2-3t & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = -2 - (2-3t)2t = 2(3t+1)(t-1)$ である．よって $t \neq \frac{-1}{3}, 1$ なら基底である．$t = \frac{-1}{3}, 1$ なら基底でない．

$\boxed{3}$ (1)$\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n} > 0$ だから相加相乗平均より $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a_n b_n}}$．したがって $\sqrt{a_n b_n} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} = b_{n+1}$ である．よって $b_{n+1} \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$ である．任意の n で成り立つから示された．

(2)$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{2a_n}{2} = a_n$ より広義単調減少．$b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \geq \frac{2}{\frac{2}{b_n}} = b_n$ より広義単調増加．

(3)$0 < a_n$ より $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界単調数列であるから収束する．$b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \leq a_n \leq a$ より $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界単調数列であるから収束する．$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限値を α，$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限値を β とする．

$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ の極限をとることで $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ となるから $\alpha = \beta$ である．

(4)$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n = \cdots = ab$ である．よって $\alpha^2 = ab$ より $\alpha = \sqrt{ab}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}c, \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}b + \frac{\partial f}{\partial y}d$ である．よって $\frac{1}{ad-bc}\left(d\frac{\partial g}{\partial u} - c\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{ad-bc}\left(-b\frac{\partial g}{\partial u} + a\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$

である．

(2)(1) で $d = -a$ とする．$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ である．すなわち g は v 以外を定数とみたときに定数関数となるから g は v に依らずに定まる．よって $g(u,v) = G(u)$ とできる．$u = \frac{1}{-a^2-bc}dx - by = \frac{1}{a^2+bc}(ax+by)$ であるから，$f(x,y) = G(\frac{1}{a^2+bc}(ax+by))$ となる．

(3)$x \in (0,1)$ で $2^\beta > (1+x)^\beta > 1$ である．よって $\frac{1}{x^\alpha 2^\beta} < \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$ が成り立つ．$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} [\log x]_\varepsilon^1 & (\alpha = 1) \\ [\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}]_\varepsilon^1 & (\alpha \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} -\log\varepsilon & (\alpha = 1) \\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) & (\alpha \neq 1) \end{cases}$ は $1 > \alpha$ で収束して，$\alpha \geq 1$ で発散する．よって $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx$ は $1 > \alpha$ で収束し，$\alpha \geq 1$ で発散する．

$x \in (1,\infty)$ で $x^\alpha < (1+x)^\alpha$ であるから，$\frac{1}{(1+x)^\alpha} < \frac{1}{x^\alpha}$ である．よって $\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}} < \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta} < \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ である．$\int_1^M \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}dx = \begin{cases} [\log x]_1^M & (\alpha+\beta = 1) \\ [\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}x^{1-(\alpha+\beta)}]_1^M & (\alpha+\beta \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} \log M & (\alpha+\beta = 1) \\ \frac{1}{1-(\alpha+\beta)}(M^{1-(\alpha+\beta)} - 1) & (\alpha+\beta \neq 1) \end{cases}$ は $\alpha+\beta > 1$ で収束して．$\alpha+\beta \leq 1$ で発散する．よって $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx$ は $1 < \alpha+\beta$ で収束し，$\alpha+\beta \leq 1$ で発散する．以上より $\{(\alpha,\beta) \mid \alpha < 1, \alpha+\beta > 1\}$ で収束する．

(4)

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+x)^\beta}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-\beta}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+x)^{\beta+1}}dx = \frac{\beta}{1-\alpha}I(\alpha-1,\beta+1)$$

0.10　2005 午後

$\boxed{1}$ (1)V の基底として $\{1,t,t^2\}$ がとれる．この基底のもとでベクトルを並べてできる行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\det A = -4$ であるから一次独立である．よって基底.

(2)$\phi_a(1) = a, \phi(t) = (a+1)t - 1, \phi(t^2) = (a+2)t^2 + 2$ である．よって $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ である．

(3)ϕ_a が全射であることが必要十分．有限次元ベクトル空間の自己準同型は全射なら同型であるから，A が正則であることが必要十分．$\det A = a(a+1)(a+2)$ より $a \neq 0,-1,-2$ が必要十分.

(4)$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$ が解を持つ必要十分条件は $[A:b]$ で拡大係数行列を表すとすると，$\operatorname{rank}[A:b] = \operatorname{rank} A$ である．$[A:b] = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{pmatrix}$ である．$a \neq 0,-1,-2$ なら $\operatorname{rank}[A:b] = \operatorname{rank} A$ である．$a = 0$ のとき，$\operatorname{rank}[A:b] = 3$ であるから解を持たない．$a = -1$ のとき，$\operatorname{rank}[A:b] = 2$ であるから解を持つ．$a = -2$ のとき，$\operatorname{rank}[A:b] = 3$ であるから解を持たない.

$\boxed{2}$ (1)$a_3 = -9a_1 + 6a_2$ である．よって $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ である．すなわち与えられた写像は線形写像で表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ である．

(2)A の固有多項式は $g_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -9 & 6-t \end{vmatrix} = (t-3)^2$ である．固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ より $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で

ある．よって固有空間の次元が固有方程式の重複度と一致しないため対角化不可能．$(A-3E)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとくと，$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である．

(3) $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ である．$A^{n-2} = P(P^{-1}AP)^{n-2}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{n-2} & (n-2)3^{n-3} \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-2} & (n-2)3^{n-3} \\ 3^{n-1} & (n-1)3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-n)3^{n-2} & (n-2)3^{n-3} \\ (2-n)3^{n-1} & (n-1)3^{n-2} \end{pmatrix}$ である．よって $\begin{pmatrix} (3-n)3^{n-2} & (n-2)3^{n-3} \\ (2-n)3^{n-1} & (n-1)3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-n)3^{n-2} \\ (2-n)3^{n-21} \end{pmatrix}$ より $a_n = (2-n)3^{n-1}$ である．

$\boxed{3}$ (1)C を原点中心の半径 1 の円を反時計回りに回る閉曲線とする．$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ である．よって

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} d\theta = \int_C f(z) \frac{z + \frac{1}{z}}{2iz} dz = \int_C \frac{f(z)}{2i} dz + \int_C \frac{f(z)}{2iz^2} dz$$

とできる．f は C を含む領域で正則であるから $\int_C \frac{f(z)}{2i} dz = 0$ である．$\frac{f(z)}{z^2}$ は原点を 2 位の極に持つ．$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2}, 0\right) = f'(0)$ であるから留数定理より $\int_C \frac{f(z)}{2iz^2} dz = \pi f'(0)$ である．よって $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta d\theta = \pi f'(0)$ である．

(2)$2^n \cos^n \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ であるから

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2^n} \int_C f(z)(z + \frac{1}{z})^n \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i2^n} \int_C f(z) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k-n-1} dz$$

である．$2k - n - 1 \geq 0$ のとき $f(z)\binom{n}{k} z^{2k-n-1}$ は C を含む領域で正則であるから $\int_C f(z)\binom{n}{k} z^{2k-n-1} dz = 0$ である．$2k - n - 1 < 0$ のとき $\mathrm{Res}\left(f(z)\binom{n}{k} z^{2k-n-1}, 0\right) = \binom{n}{k} \frac{1}{(n-2k)!} f^{(n-2k)}(0)$ である．よって $\int_C f(z)\binom{n}{k} z^{2k-n-1} dz = \frac{1}{i2^n} 2\pi i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-2k)!} f^{(n-2k)}(0) = \frac{\pi}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-2k)!} f^{(n-2k)}(0)$ である．

(3)$f(z) = z^n$ とする．$f^{(n-2k)}(0) = 0 \quad (k > 0), f^{(n)}(0) = n!$ であるから，$\int_0^{2\pi} f(z) \cos^n \theta d\theta = \frac{\pi}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-2k)!} f^{(n-2k)}(0) = \frac{\pi}{2^{n-1}} \binom{n}{0} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ である．これの実部が $\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos^n \theta d\theta$ であるから，$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos^n \theta d\theta = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が y に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して，任意の $n \geq N$ に対して，$d(x_n, y) < \varepsilon$ であることをいう．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して，任意の $n \geq N$ に対して，$d(x_n, y) < \varepsilon$ である．ここで $n(m) \geq m$ であるから，任意の $m \geq N$ に対して $d(x_{n(m)}, y) < \varepsilon$ である．よって部分列も y に収束する．

(3)$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が y に収束しないとする．すなわちある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の N に対して，ある $n \geq N$ が存在して $d(x_n, y) \geq \varepsilon$ である．

狭義単調数列 $n(m)$ を $n(1) = 1$ とし，$n(m-1)$ に対して $n(m)$ を $n(m) > n(m-1)$ で $d(x_{n(m)}, y) \geq \varepsilon$ を満たすもの数として定めることで，数列 $n(m)$ を定める．

このとき $\{x_{n(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は部分列であるから y に収束する部分列 $\{x_{n(m(\ell))}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ が存在する．このとき $d(x_{n(m(\ell))}, y) < \varepsilon$ となる ℓ_1 が存在する．これは $d(x_{n(m(\ell_1))}, y) \geq \varepsilon$ として $n(m(\ell_1))$ を定めたことに矛盾する．よって $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は y に収束する．

0.11　2006 午前

$\boxed{1}$ (1)$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-1\\1-a-b\end{pmatrix}=(a+b-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ より $a+b-1$ は固有値で $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトル.

$A-(a+b-1)E=\begin{pmatrix}1-b&1-b\\1-a&1-a\end{pmatrix}$ である．$A\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(1-b)+(1-a)(1-b)\\(1-a)(1-b)+b(1-a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}$ である．よって 1 は固有値で $\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトル.

$P=\begin{pmatrix}1&1-b\\-1&1-a\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a+b-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である．すなわち対角化可能である.

(2)$-1<a+b-1<1$ であるから，$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}(a+b-1)^n&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ である．よって $A^n=\frac{1}{2-(a+b)}P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\to\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1&1-b\\-1&1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a&b-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1-b&1-b\\1-a&1-a\end{pmatrix}$ である.

(3)$v_n=A^nv_1$ より $\lim v_n=(\lim A^n)v_1=\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1-b&1-b\\1-a&1-a\end{pmatrix}v_1\neq 0$ であるから $v_1\neq k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{R})$ なら 0 に収束しない.

$\boxed{2}$ (1) $\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}$ が共に $Ax=b$ の解であるから，$v_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ とすると，$Av_1=0$ である.

したがって $Av_1=\begin{pmatrix}2-3\alpha+\beta\\4-3\beta+10-\alpha\\2\alpha-12+\beta+4\\0\end{pmatrix}=0$ である．よって $\alpha=2,\beta=4$ である.

(2)$b=A(\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix})=A\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4&0\\2&4&10&2\\2&4&4&-4\\1&2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\26\\2\\5\end{pmatrix}$

(3)A を簡約化すると，$A\to\begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&0&2&2\\0&0&-4&-4\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ である．よって $\dim\mathrm{Im}\,A=2$ であり，

基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\10\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ である.

(4)$\dim\ker A=2$ であり，基底は $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

(5) 解を x_0 とする．$Ax_0=c\neq 0$ より $x_0\neq 0$ である．

$Ax=0$ の解 x について $A(x+x_0)=c$ であるから，$Ax=0$ の解全体を V とすれば $V+x_0$ は $Ax=c$ の解空間の部分集合である．逆に $Ax=c$ の解 y をとると，$A(y-x_0)=0$ より $y\in V+x_0$ である．

よって $Ax=c$ の解空間は V の平行移動であり，V の基底は $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$n>2006\cdot 2$ とすれば $\frac{2006}{n}<\frac{1}{2}$ である．したがって $0\leq\lim\frac{2006^n}{n!}\leq\lim(2006)^{2006\cdot 2}\frac{1}{2^{n-2006\cdot 2}}=0$ より $\lim\frac{2006^n}{n!}=0$ である．

(2)$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$ とできる．ここで $R_2(x)=\frac{e^c}{6}x^3\quad(0<c<x)$ である．よって $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\frac{1}{25}=1.22$ であり，$R_2(\frac{1}{5})<\frac{e^{\frac{1}{5}}}{6}\frac{1}{5^3}\leq\frac{1}{2\cdot 5^3}=\frac{1}{250}$ である．よって $1.22<e^{\frac{1}{5}}\leq 1.22+\frac{1}{250}=1.224$ である．よって小数以下 2 桁目までは 1.22 である．

(3)$\frac{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}{(x^{11})^{\frac{1}{10}}}=(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{10}}\to 1\quad(x\to\infty)$ である．よって十分大きな x では $\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}\leq\frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}\leq\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}$ とできる．

$\int_1^\infty\frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ の収束性は被積分関数が有界区間では有界関数であるから，$M>1$ として $\int_M^\infty\frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ の収束性と同じ．よって上の不等式から $\int_M^\infty\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}dx$ の収束性と同値.

$\int_M^n\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}dx=\left[-10x^{\frac{-1}{10}}\right]_M^n\to 10M^{-\frac{1}{10}}\quad(n\to\infty)$ より収束する．

$\frac{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}{(x^9)^{\frac{1}{10}}}=(x^2+1)^{\frac{1}{10}}\to 1\quad(x\to 0)$ である．$\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^{\frac{9}{10}}}dx=\left[\frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}}\right]_\varepsilon^1\to\frac{1}{10}\quad(\varepsilon\to 0)$ よって上と同様に $\int_0^1\frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ は収束する．

(4)$x=s, x-y=t$ と変数変換する．積分領域は $D'=\left\{(s,t)\mid s^2+t^2\leq 1\right\}$ となり，ヤコビ行列は $\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ であるから，$\iint_D(x-y)^2dxdy=\iint_{D'}t^2dsdt$ である．$s=r\cos\theta, t=r\sin\theta$ と変数変換すれば，ヤコビアンは r である．よって $\iint_{D'}t^2dsdt=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^2\theta drd\theta=[\frac{1}{4}r^4]_0^1[\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$ である．

$\boxed{4}$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{-x^2-y^2}(-2x)(4x^2+2y^2+1)+e^{-x^2-y^2}8x=e^{-x^2-y^2}(-8x^3-4xy^2+6x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-x^2-y^2}(-2y)(4x^2+2y^2+1)+e^{-x^2-y^2}4y=e^{-x^2-y^2}(-8x^2y-4y^3+2y)$$

である．よって $-8x^3-4xy^2+6x=2x(-4x^2-2y^2+3)=0, -8x^2y-4y^3+2y=2y(-4x^2-2y^2+1)=0$ である．$x=0$ なら $y=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$y=0$ なら $x=0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である．$x\neq 0\neq y$ のとき，$3=4x^2+2y^2=1$ となるため，臨界点は存在しない．よって $(0,0),(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}),(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ が全ての臨界点である．

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-x^2-y^2}(-2x)(-8x^3-4xy^2+6x)+e^{-x^2-y^2}(-24x^2-4y^2+6)=e^{-x^2-y^2}(16x^4+8x^2y^2-36x^2-4y^2+6)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-x^2-y^2}(-2y)(-8x^3-4xy^2+6x)+e^{-x^2-y^2}(-8xy)=e^{-x^2-y^2}(16x^3y+8xy^3-20xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=e^{-x^2-y^2}(-2y)(-8x^2y-4y^3+2y)+e^{-x^2-y^2}(-8x^2-12y^2+2)=e^{-x^2-y^2}(16x^2y^2+8y^4-16y^2-8x^2+2)$$

である．

$(0,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ より正定値対称行列であるから，$(0,0)$ は極小点.

$(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 4e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ となるから $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ は鞍点である.

$(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} -12e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$ であるから負定値対称行列．よって $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ は極大点.

(3)$\mathbb{R}^2$ 上であるから，最小値，最大値は存在すれば極値である．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると，$f(x,y) = e^{-r^2}(r^2(1+\cos^2\theta)+1) \to 0 \quad (r\to\infty)$ である．したがって $f(0,0)=1$ は最小値ではないため，最小値は存在しない.

また十分大きな原点中心の閉円板 D をとると，その境界と D の外側では f は 1 より小さな値をとる.．D 上での最大値は極値点か境界でとるから，D 上では $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0) = 4e^{-\frac{3}{4}}$ が最大値．D の外側でも f は 1 を超えないから，$\mathbb{R}^2$ 上で $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)=4e^{-\frac{3}{4}}$ は最大値.

0.12　2006 午後

$\boxed{1}$ (1)$D(t^k e^t) = kt^{k-1}e^t + t^k e^t$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2)$y'(t) = (n-1)t^{n-2}e^t + t^{n-1}e^t, y''(t) = (n-1)(n-2)t^{n-3}e^t + (n-1)t^{n-2}e^t + (n-1)t^{n-2}e^t + t^{n-1}e^t = (n-1)(n-2)t^{n-3}e^t + 2(n-1)t^{n-2}e^t + t^{n-1}e^t$ である.

$D^k y = (n-1)(n-2)\cdots(n-k)t^{n-k-1}e^t + a_{k,n-k}t^{n-k}e^t + \cdots + t^{n-1}e^t$ とかける．ただし $(a_{k,n-k}, a_{k,n-k+1}, \cdots, a_{k,n-1} = 1 \in \mathbb{R})$．すなわち $\mathcal{B}$ による表示は $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (n-1)! \\ 0 & \cdots & (n-1)!/1 & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ となる行列式は $1\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-1)! \neq 0$ より $\mathcal{C}$ は V の基底である.

(3) $(D-I)^n(y(t)) = (n-1)(D-I)^{n-1}(t^{n-2}e^t) = \cdots = (n-1)!(D-I)(e^t) = 0$

(4)$Dy^{(k)}(t) = y^{(k+1)}(t) \quad (k = 0,1,\cdots,n-2)$ であり，$Dy^{(n-1)}(t) = D^{(n)}(t) = (D-I)^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}D^{(k)}(-1)^{n-k}y(t) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}D^k y(t)$ である．よって $\mathcal{C}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-0+1}\binom{n}{0} \\ 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1+1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \end{pmatrix}$ である．ただし $(k,n-1)$ 成分は $(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}$ である.

$\boxed{2}$ (1)$\varphi \in V^*$ を任意にとる．$\varphi = \varphi(e_1)\varphi_1 + \cdots \varphi(e_n)\varphi_n$ と表せる．すなわち V^* を生成する．$\sum c_i\varphi_i = 0$ とする．$(\sum c_i\varphi_i)(e_j) = c_j = 0(e_j) = 0$．これが任意の j で成り立つから $c_j = 0 \quad (j = 1,\cdots n)$ である．よって一次独立．すなわち基底.

(2)$f,g \in W^\circ, k \in \mathbb{R}$ について，$(f+g)(w) = f(w)+g(w) = 0, (kf)(w) = kf(w) = 0$ より W° はベクトル空間．W の基底 $\{w_1,\cdots,w_m\}$ をとり，V の基底 $\{w_1,\cdots,w_m,w_{m+1},\cdots,w_n\}$ へと延長する．(1) の手法で $\psi_k(w_i) = \delta_{k,i}$ を定める．δ はクロネッカーのデルタ.

$\{\psi_{m+1},\cdots,\psi_n\}$ は W° の基底である．これは $f \in W^\circ$ は $f = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\psi_i = \sum_{i=m+1}^{n} f(w_i)\psi_i$ より分かる.

よって $\dim W^\circ = n - \dim W$ である．

(3)$f \in (W_1+W_2)^\circ$ とする．任意の $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ について $f(w_1+w_2)=0$ であるから，特に $w_1=0$ のとき $f(w_2)=0$，$w_2=0$ のとき $f(w_1)=0$ である．したがって $f \in W_1^\circ \cap W_2^\circ$ より $(W_1+W_2)^\circ \subset W_1^\circ \cap W_2^\circ$ である．

逆に $f \in W_1^\circ \cap W_2^\circ$ をとると，任意の $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ について $f(w_1+w_2)=f(w_1)+f(w_2)=0$ であるから，$f \in (W_1+W_2)^\circ$ である．よって $(W_1+W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$ である．

$\boxed{3}$ (1)f は 1 位の極 $z=c$ を除いて $\mathbb{C}$ 上で正則である．$\mathrm{Res}(f,c)=e^{i\xi c}$ である．$\mathrm{Im}\, c>0$ のとき，f の特異点は γ_R^+ の内部にあり，$\mathrm{Im}\, c<0$ のとき，f の特異点は γ_R^- の内部にある．したがって γ_R^- が時計回りであることに注意すれば $\int_{\gamma_R^+} f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i e^{i\xi c} & (\mathrm{Im}\, c>0) \\ 0 & (\mathrm{Im}\, c<0)\end{cases}$, $\int_{\gamma_R^-} f(z)dz = \begin{cases} 0 & (\mathrm{Im}\, c>0) \\ -2\pi i e^{i\xi c} & (\mathrm{Im}\, c<0)\end{cases}$ である．

(2)$\xi>0$ のとき，γ_{R^+} 上の積分を考える．$[0,\frac{\pi}{2}]$ 上で $\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta$ であるから，

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\exp\bigl(i\xi Re^{i\theta}\bigr)}{Re^{i\theta}-c} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{-\xi R\sin\theta}}{Re^{i\theta}-c}R\right| d\theta \le \frac{R}{R-|c|}\int_0^\pi e^{-\xi R\sin\theta}d\theta = \frac{2R}{R-|c|}\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \left[\frac{\pi}{-\xi R2}e^{-\xi R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R\xi}(1-e^{-R\xi})$$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \le \frac{2R}{R-|c|}\frac{\pi}{2R\xi}(e^{-R\xi}-1) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)dz - \int_{C_R^+} f(z)dz = \int_{\gamma_R^+} f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i e^{i\xi c} & (\mathrm{Im}\, c>0, \xi>0) \\ 0 & (\mathrm{Im}\, c<0, \xi>0)\end{cases}$

である．

$\xi<0$ のときは，γ_R^- 上の積分を考える．

$$\left|\int_{C_R^-} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{-\pi} \frac{\exp\bigl(i\xi Re^{i\theta}\bigr)}{Re^{i\theta}-c} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{-\pi} \left|\frac{e^{-\xi R\sin\theta}}{Re^{i\theta}-c}R\right| d\theta \le \frac{R}{R-|c|}\int_0^{-\pi} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta = \frac{2R}{R-|c|}\int_0^{\pi/2} e^{\xi R\sin\theta}d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\xi R\sin\theta}d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\xi R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \left[\frac{\pi}{\xi R2}e^{\xi R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R\xi}(e^{R\xi}-1)$$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \le \frac{2R}{R-|c|}\frac{\pi}{2R\xi}(e^{R\xi}-1) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^-} f(z)dz + \int_{C_R^-} f(z)dz = \int_{\gamma_R^-} f(z)dz = \begin{cases} 0 & (\mathrm{Im}\, c>0, \xi<0) \\ -2\pi i e^{i\xi c} & (\mathrm{Im}\, c<0, \xi<0)\end{cases}$

である．

$\boxed{4}$ (1)U が開集合であるとは，任意の点 $x \in U$ についてある $\varepsilon>0$ が存在して，$B_\varepsilon(x) \subset U$ となることである．

(2)($\Rightarrow$) $x \in f^{-1}(U)$ について $f(x) \in U$ よりある $\varepsilon>0$ が存在して $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ である．このときある $\delta>0$ が存在して $f(B_\delta(x)) \subset U$ である．よって $B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}(U)$ より $f^{-1}(U)$ は開集合である．

($\Leftarrow$) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon>0$ について，$B_\varepsilon(f(x))$ は開集合であるから，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ は開集合．したがってある $\delta>0$ が存在して $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ が成り立つ．よって $f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))) \subset B_\varepsilon(f(x))$ である．

(3)$f(A) \subset U \cup V, U\cap V\cap A=\emptyset$ なる開集合 U,V を任意にとる．$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U\cup V) = f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V), f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)\cap A \subset f^{-1}(U\cap V\cap f(A))=\emptyset$ である．したがって $f^{-1}(U)\cap A=\emptyset$ または $f^{-1}(V)\cap A=\emptyset$ が成り立つ．$f^{-1}(U)\cap A=\emptyset$ のとき．$y \in f(A)\cap U$ とすると，ある $x \in A$ について

$f(x)=y$ である．この x について $f(x)\in U$ より $x\in f^{-1}(U)$ であるが，これは $f^{-1}(U)\cap A$ に矛盾．よって $f(A)\cap U=\emptyset$ である．$f^{-1}(V)\cap A=\emptyset$ のときも同様．よって $f(A)$ は連結．

0.13　2007 午前

$\boxed{1}$ (1)A を簡約化すると，$A\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank}A=2$ である．

(2)$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&-1\\-2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&\lambda-2\\-2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)-\begin{vmatrix}1&\lambda-2\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}=$ $(\lambda-1)(\lambda+1)(2-\lambda)-((2-\lambda)+2(\lambda-2))=(\lambda-1)(\lambda+1)(2-\lambda)-(\lambda-2)=(2-\lambda)\lambda^2$ である．よって固有方程式は $\lambda^2(2-\lambda)=0$ である．

(3) 固有値 $\lambda=0$ の固有空間は A の rank が 2 であることから 1 次元である．したがって重複度と一致しないため，対角化不可能．

$\boxed{2}$ (1)$\phi_r(kA+B)=(kA+B)+r({}^t(kA+B))=(kA+B)+rk{}^tA+r{}^tB=\phi_r(kA)+\phi_r(B)$ である．よって線形変換．

(2)E_{ij} を (i,j) 成分が 1 でそれ以外が 0 の行列とする．このとき，$\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ は V の基底である．

$\phi_r(E_{ij})=E_{ij}+rE_{ji}$ であるから ϕ_r の表現行列は $X=\begin{pmatrix}1+r&0&0&0\\0&1&r&0\\0&r&1&0\\0&0&0&1+r\end{pmatrix}$ である．

X を簡約化すると，$X\to\begin{pmatrix}1+r&0&0&0\\0&1&r&0\\0&0&1-r^2&0\\0&0&0&1+r\end{pmatrix}$ である．

よって $r\neq\pm1$ のとき $\operatorname{rank}X=4$ より $\dim\ker\phi_r=0$ である．$r=1$ のとき, $\operatorname{rank}X=3$ より $\dim\ker\phi_y=1$ である．$r=-1$ のとき，$\operatorname{rank}X=1$ より $\dim\ker\phi_r=3$ である．

(3)$\dim V-\dim\ker\phi_r=\dim\operatorname{Im}\phi_r$ である．よって $r\neq\pm1$ のとき $\dim\ker\operatorname{Im}_r=4$ である．$r=1$ のとき，$\dim\operatorname{Im}\phi_r=3$ である．$r=-1$ のとき，$\dim\operatorname{Im}\phi_r=1$ である．

$\boxed{3}$ (1)$x=\frac{s+t}{2},y=\frac{s-t}{2}$ より $R'=\left\{(s,t)\;\middle|\;a\le s\le b,\frac{s+t}{2}\ge0,\frac{s-t}{2}\ge0\right\}$ にうつる．またヤコビ行列の行列式は $-\frac{1}{2}$ である．

$$\iint_R\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxxy=\iint_{R'}\frac{\frac{s^2+t^2}{2}}{s^3}\frac{1}{2}dsdt=\frac{1}{4}\int_a^b\int_{-s}^s\frac{s^2+t^2}{s^3}dtds=\frac{1}{4}\int_a^b\frac{1}{s^3}\left(\left[s^2t+\frac{1}{3}t^3\right]_{-s}^s\right)ds$$
$$=\frac{1}{4}\int_a^b\frac{8}{3}ds=\frac{2}{3}(b-a)$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{2}$$

である．よって $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=4\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}$ である．すなわち $\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}g=0$ が成り立つ．

よって $\frac{\partial}{\partial t}g$ は s についての定数関数である．したがって $\frac{\partial}{\partial t}g(s,t)=g_2(t)$ なる関数 g_2 が存在する．t について積分すれば $g(s,t)=f_1(s)+f_2(t)$ とできる．ここで f_2 は g_2 の不定積分の一つであり，f_1 は積分定数であ

る．よって $f(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)$ と表せる．

$\boxed{4}$ (1)$u(x)$ は $v(x)$ が正値関数のため，狭義単調増加な連続関数であり極限が無限大に発散するから u は全単射である．$u(x)=t$ で変数変換できて，$dt=u'(x)dx=v(x)dx$ である．したがって $\int_1^R u(x)^\alpha v(x)dx=\int_{u(1)}^{u(R)} t^\alpha dt=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_{u(1)}^{u(R)} & (\alpha\neq -1)\\ \left[\log t\right]_{u(1)}^{u(R)} & (\alpha=-1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}(u(R)^{\alpha+1}-u(1)^{\alpha+1}) & (\alpha\neq -1)\\ \log u(R)-\log u(1) & (\alpha=-1)\end{cases}$ である．よって $\alpha+1<0$ のときのみ，$u(R)\to\infty$ で収束する．それ以外では発散する．すなわち $\alpha<-1$ のときのみ $R\to\infty$ で収束し，それ以外では発散する．

0.14 2007 午後

$\boxed{1}$ (1)$P(D)e^{\lambda t}=\lambda^2 e^{\lambda t}+a\lambda e^{\lambda t}+be^{\lambda t}=(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda t}=0$ である．

$P(z)$ が重解 λ をもつから $P(D)=(D-\lambda)^2=D^2-2\lambda D+\lambda^2$ である．よって $D^2v(t)=D(-\lambda e^{-\lambda t}u(t)+e^{-\lambda t}Du(t))=-\lambda(-\lambda e^{-\lambda t}u(t)+e^{-\lambda t}Du(t))-\lambda e^{-\lambda t}Du(t)+e^{-\lambda t}D^2u(t)=e^{-\lambda t}(\lambda^2-2\lambda Du+D^2u)=e^{-\lambda t}P(D)u=0$ である．

したがって Dv は定数関数であり，v は t の高々 1 次式である．

(2)(1) の逆，すなわち任意の 1 次式 $v(t)=ct+d$ について $u=ve^{\lambda t}$ は $P(D)u=0$ を満たす．したがって $V=\left\{ve^{\lambda t}\ \middle|\ c,d\in\mathbb{R}, v=ct+d\right\}$ である．よってベクトル空間であることは明らかで基底は $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$ である．

(3)$(ct+d)e^{\lambda t}$ が有界にとどまるから $\lambda<0$ である．よって $a=-2\lambda>0$.

$\boxed{2}$ (1)$\operatorname{Ker} f/(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f)\cong(\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f)/\operatorname{Im} f$ である．よって $\dim\operatorname{Ker} f-\dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f)=\dim(\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f)-\dim\operatorname{Im} f$ である．また次元定理より $\dim\operatorname{Ker} f+\dim\operatorname{Im} f=\dim V$ である．よって $\dim V-\dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f)=\dim(\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f)$ である．すなわち $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}\Leftrightarrow\dim\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=0\Leftrightarrow\dim V=\dim(\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f)\Leftrightarrow= V=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f$ である．

(2)$x\in\operatorname{Ker} f^i$ について $f^{i+1}(x)=f(f^i(x))=f(0)=0$ であるから $\operatorname{Ker} f^i\subset\operatorname{Ker} f^{i+1}\quad(i=1,2,\cdots)$ である．

$y\in\operatorname{Im} f^j$ とする．すなわちある $x\in V$ が存在して $f^j(x)=y$ である．このとき，$f^{j-1}(f(x))=y$ であるから $y\in\operatorname{Im} f^{j-1}$ である．よって $\operatorname{Im} f^{j-1}\supset\operatorname{Im} f^j\quad(j=1,2\cdots)$ である．

(3)V が有限次元であるから上昇列 $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2\subset\cdots$ はある N_1 が存在して $n\geq N_1$ なら $\operatorname{Ker} f^n=\operatorname{Ker} f^{N_1}$ となる．

同様に下降列 $\operatorname{Im} f\supset\operatorname{Im} f^2\supset\cdots$ もある N_2 が存在して $n\geq N_2$ なら $\operatorname{Im} f^n=\operatorname{Im} f^{N_2}$ となる．

$N=N_1+N_2$ とする．$y\in\operatorname{Ker} f^N\cap\operatorname{Im} f^N$ とすれば $f^N(y)=0$ であり，$f^N|_{\operatorname{Im} f^N}\colon\operatorname{Im} f^N\to\operatorname{Im} f^{2N}$ は全射な自己準同型であるから同型である．よって $f^N(y)=0$ なら $y=0$ である．すなわち $\operatorname{Ker} f^N\cap\operatorname{Im} f^N=\{0\}$ が言えたから (1) より $\operatorname{Ker} f^N+\operatorname{Im} f^N=V$ である．

$\boxed{3}$ (1)$\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}/\frac{1}{|x|^{p+q}}=\frac{1}{|1-\frac{a}{x}|^p|1-\frac{b}{x}|^q}\to 1\quad(x\to\pm\infty)$ である．よって十分大きな $M>b$ があって $|x|>M$ なら $\frac{1}{2|x|^{p+q}}<\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}<\frac{3}{2|x|^{p+q}}$ である．したがって $\int_M^\infty\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx,\int_{-\infty}^{-M}\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx$ の収束性は $\int_M^\infty\frac{1}{|x|^{p+q}}dx$ の収束性と等しい．$\int_M^n\frac{1}{|x|^{p+q}}dx=\begin{cases}\frac{1}{-p-q+1}\left[\frac{1}{|x|^{p+q-1}}\right]_M^n & (p+q\neq 1)\\ \left[\log x\right]_M^n & (p+q=1)\end{cases}$ でこれは $p+q-1>0$ のとき $n\to\infty$ で収束する．

$\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}/\frac{1}{|x-a|^p}=\frac{1}{|x-b|^q}\to\frac{1}{|a-b|^q}\quad(x\to a)$ である．よって十分小さな ε があって $|x-a|<\varepsilon$ なら $\frac{1}{2|a-b|^q|x-a|^p}<\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}<\frac{3}{2|a-b|^q|x-a|^p}$ である．よって $\int_{a-\varepsilon}^a\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx,\int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx$ の収束性は $\int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{|x-a|^p}dx$ の収束性と等しい．

$\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon}\frac{1}{|x-a|^p}dx=\begin{cases}\frac{1}{1-p}\left[|x-a|^{1-p}\right]_{a+\delta}^{a+\varepsilon} & (p\neq 1)\\ \left[\log x\right]_{a+\delta}^{a+\varepsilon} & (p=1)\end{cases}$ でこれは $1-p>0$ のとき $\delta\to+0$ で収束する．

$x=b$ 近くでも同様にして $1-q>0$ で収束すると分かる．$x=a,b,\pm\infty$ 付近以外では有界区間の有界関数

の積分であるから有限値をとる．よって $\{(p,q) \mid\ p+q>1, p<1, q<1\}$ で収束する．

(2) $\frac{x-a}{a-b}=y$ と変数変換すると $\frac{1}{a-b}dx=dy$ であり，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{1}{|y|^p|a-b|^p|y+1|^q|a-b|^q}a-bdy=\frac{1}{|a-b|^{p+q-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|^p|y+1|^q}dy$ である．

(1) で $a=-1, b=0$ とすれば $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|^p|y+1|^q}dy$ が収束することが分かる．収束値を C とおけば $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx=\frac{C}{|a-b|^{p+q-1}}$ である．

$\boxed{4}$ (1) $X,Y\subset B$ に対して $g(X)=g(Y)$ とする．f が全射であるから任意の $b\in X$ に対してある $a\in g(X)$ が存在して $f(a)=b$ である．よって $a\in g(Y)=f^{-1}(Y)$ より $f(a)=b\in Y$ である．よって $X\subset Y$ がいえる．同様にして $Y\subset X$ も言えるから $X=Y$．よって g は単射．

(2) A の部分集合 X を任意にとる．このとき $f(X)=Y$ とすると，$X\subset f^{-1}(Y)=g(Y)$ は明らか．任意の $a\in f^{-1}(Y)$ について $f(a)=b\in Y$ である．$f(X)=Y$ よりある $x\in X$ が存在して $f(x)=b$ とできる．f の単射性から $a=x\in X$ である．したがって $g(Y)=f^{-1}(Y)=X$ より g は全射．

0.15　2008 午前

$\boxed{1}$ (1) A を簡約化すると，$A\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&0&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ である．

よって U の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\}$ である．

W の基底は $\left\{w_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

(2) $b=x_1w_1+x_2w_2$ とする．$\langle a-b,w_i\rangle=0\quad(i=1,2)$ である．$\langle a-b,w_i\rangle=\langle a,w_i\rangle-x_1\langle w_1,w_i\rangle-x_2\langle w_2,w_i\rangle$ であるから，$\langle a,w_1\rangle-x_1\langle w_1,w_1\rangle-x_2\langle w_2,w_1\rangle=-3-2x_1+x_2=0, \langle a,w_2\rangle-x_1\langle w_1,w_2\rangle-x_2\langle w_2,w_2\rangle=4+x_1-3x_2=0$ を解いて $x_1=-1, x_2=1$ である．よって $b=-w_1+w_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, c=a-b=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ である．

(3) $\|a-w\|^2=\langle b+c-w,b+c-w\rangle=\langle b-w,b-w\rangle+2\langle c,b-w\rangle+\langle c,c\rangle=\|b-w\|^2+\|c\|^2$ である．したがって $w=b$ のときが最小で最小値は $\|c\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\frac{d}{dt}\|x(t)\|=\frac{1}{2}\frac{2x_1x_1'+2x_2x_2'+2x_3x_3'}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\frac{\langle x(t),x'(t)\rangle}{\|x(t)\|}$ である．

$\langle x(t),x'(t)\rangle=\langle x(t),Ax(t)\rangle=\langle {}^tAx(t),x(t)\rangle=-\langle Ax(t),x(t)\rangle=-\langle x(t),Ax(t)\rangle$ より $2\langle x(t),Ax(t)\rangle=0$ である．よって $\langle x(t),x'(t)\rangle=\langle x(t),Ax(t)\rangle=0$．すなわち $\frac{d}{dt}\|x(t)\|=0$ であるから $\|x(t)\|$ は t に依らず一定．

(2) $\det A=\det{}^tA=\det(-A)=(-1)^3\det A$ より $\det A=0$ である．よって 0 を固有値として持つ．

(3) $\frac{d}{dt}\langle x(t),v\rangle=\langle Ax(t),v\rangle=\langle x(t),{}^tAv\rangle=\langle x(t),-Av\rangle=-\langle x(t),0\rangle=0$ である．

よって $\langle x(t),v\rangle$ は t に依らず一定．

(4) 任意の t で $\langle x(t)-x(0),v\rangle=0$ であるから，任意の t が $x(t)-x(0)$ は v と直交するため，$x(t)-x(0)$ は原点を通るある平面上にある．よって $x(t)$ はその平面を $x(0)$ 平行移動させた平面上の点であり，加えて半径 $\|x(t)\|$ の球上の点であるから $x(t)$ は半径 $\|x(t)\|$ の球と平面の共通部分上にある．すなわちある定円周上にある．

$\boxed{3}$ (1)$(a_{n+1}+1)^2 \geq 0$ であるから $(a_n-1)^2 \leq 2$ である．したがって $1-\sqrt{2} \leq a_n \leq 1+\sqrt{2}$ である．

(2)$(a_{n+1}+1)^2+(a_n-1)^2 \leq 2$ より $a_{n+1}^2+a_n^2+2a_{n+1}-2a_n \leq 0$ である．よって $0 \leq a_{n+1}^2+a_n^2 \leq 2(a_n-a_{n-1})$ より $a_{n-1} \leq a_n$ である．よって $a_1, a_2, \cdots$ は単調減少数列であるから $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在する．$a_{-1}, a_{-2}, \cdots$ は単調増加数列であるから $\lim_{n\to-\infty} a_n$ は存在する．

(3)$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，$(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2 \leq 2$ より $2\alpha^2 \leq 0$ であるから $\alpha = 0$ である．また $\lim_{n\to-\infty} a_n = \beta$ とすると，$(\beta+1)^2+(\beta-1)^2 \leq 2$ より $2\beta^2 \leq 0$ であるから $\beta = 0$ である．

$\{a_n\}$ の単調性から ${}^\forall n \in \mathbb{Z}, a_n = 0$ である．

$\boxed{4}$ (1)e^{2x+3y} の原点におけるテイラー展開は $e^{2x+3y} = 1+2x+3y+\frac{4}{2}x^2+\frac{6}{2}2xy+\frac{9}{2}y^2+o(x^2+y^2)$ である．よって $g(x,y) = 1+2x+3y+2x^2+6xy+\frac{9}{2}y^2$ である．

(2)(⇒)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}y, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial t}x$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy\frac{\partial g}{\partial t} - xy\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

(⇐) $h(s,t) = h(x,xy) = f(x,y) = f(s,\frac{t}{s})$ で h を定める．$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-t}{s^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x - \frac{\partial f}{\partial y}y\right) = 0$ より $f(x,y) = h(s,t) = h(t) = h(xy)$ と表せる．

(3)$\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}/r^{2b} = \frac{1}{1+r^{2a}} \to 1 \quad (r \to 0)$ である．したがって十分小さい r_0 に対して任意の $r \leq r_0$ で $\frac{1}{2}r^{2b} < \frac{r^{2b}}{1+r^{2a}} < \frac{3}{2}r^{2b}$ である．

よって $\int_0^{r_0} \frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ の収束性は $\int_0^{r_0} r^{2b}dr$ の収束性と等しい．$\int_\varepsilon^{r_0} r^{2b}dr = \left[\frac{1}{2b+1}r^{2b+1}\right]_\varepsilon^{r_0} = \frac{1}{2b+1}(r_0^{2b+1}-\varepsilon^{2b+1})$ は $\varepsilon \to 0$ で収束する．

$\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}/r^{2b-2a} = \frac{1}{1+r^{-2a}} \to 1 \quad (r \to \infty)$ である．したがって十分大きい R_0 に対して任意の $r \geq R_0$ で $\frac{1}{2}r^{2b-2a} < \frac{r^{2b}}{1+r^{2a}} < \frac{3}{2}r^{2b-2a}$ である．

よって $\int_{R_0}^\infty \frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ の収束性は $\int_{R_0}^\infty r^{2b-2a}dr$ の収束性と等しい．$\int_{R_0}^M r^{2b-2a}dr = \begin{cases} \frac{1}{2b-2a+1}\left[r^{2b-2a+1}\right]_{R_0}^M & (2b-2a \neq -1) \\ [\log r]_{R_0}^M & (2b-2a = -1) \end{cases}$ は $2b-2a+1 < 0$ のときのみ $M \to \infty$ で収束する．

以上より $\int_0^\infty \frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ が収束する条件は $2b-2a+1 < 0$ である．

(4)$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換すればヤコビアンは r である．$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos^{2a}\theta + \sin^{2a}\theta < 2$ である．

$$\int\int_D \frac{x^{2b}+y^{2b}}{1+x^{2a}+y^{2a}}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{r^{2b+1}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)\int_0^\infty \frac{r^{2b+1}}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}drd$$

内側の積分を考える．$\frac{r^{2b+1}}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}/r^{2b+1-2a} \to \frac{1}{\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}} > \frac{1}{2} > 0 \quad (r \to \infty)$ である．(3) から $2b+1-2a+1 < 0$ すなわち $b-a+1 < 0$ で収束する．このとき θ に関する積分も有界関数の有界領域上の積分であるから収束する．したがって $b-a+1 < 0$ で $\int\int_D \frac{x^{2b}+y^{2b}}{1+x^{2a}+y^{2a}}dxdy$ は収束する．

0.16　2008 午後

$\boxed{1}$ (1)$F(x) = 0$ とすると，$x = G\circ F(x) = G(0) = 0$ より $\mathrm{Ker}\,F = \{0\}$ であるから F は単射．

任意の $y \in V$ について $G\circ F(y) = y$ より G は全射．

(2)$y \in \mathrm{Im}\,F \cap \mathrm{Ker}\,G$ とする．ある $x \in V$ が存在して $y = F(x)$ である．$0 = G(y) = G\circ F(x) = x$ より $x = 0$ である．よって $\mathrm{Im}\,F \cap \mathrm{Ker}\,G = \{0\}$.

(3)$w \in W$ を任意に定める．$G(w - F\circ G(w)) = G(w) - G(w) = 0$ であり，$F\circ G(w) \in \mathrm{Im}\,F$ より $W = \mathrm{Im}\,F + \mathrm{Ker}\,G$ である．(2) より $\mathrm{Im}\,F \cap \mathrm{Ker}\,G = \{0\}$ であるから $W = \mathrm{Im}\,F \oplus \mathrm{Ker}\,G$ である．

(4)V の基底を $\{v_1,\cdots,v_n\}$ として一つ定める．$w_i=F(v_i)$ として w_i を定めたとき $\{w_1,\cdots,w_n\}$ は $\operatorname{Im}F$ の基底であることは F が単射であることからわかる．$\operatorname{Ker}G$ の基底を $\{w_{n+1},\cdots w_m\}$ として一つとる．このとき (3) より $\{w_1,\cdots,w_m\}$ は W の基底である．

$1\leq i\leq n$ なら $F(v_i)=w_i, G(w_i)=G(F(v_i))=v_i$ で $n+1\leq i$ なら $G(w_i)=0$ であるから表現行列は指定された形となっている．

$\boxed{2}$ (1) 固有多項式は $g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t & -1 & 1\\ -1 & 2-t & -1\\ 1 & -1 & 2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-t & 1-t & 1\\ -1 & 1-t & -1\\ 1 & 0 & 2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-t & 0 & 2\\ -1 & 1-t & -1\\ 1 & 0 & 2-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}3-t & 2\\ 1 & 2-t\end{vmatrix}=-(t-1)^2(t-4)=0$ である．

よって固有値は $1,4$ である．固有値 1 に対応する固有ベクトル空間の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．正規直交化すると，$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right\}$ である．

固有値 4 に対応する固有ベクトル空間の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．正規化すれば $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\}$ である．

よって $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ とすれば ${}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ である．

(2)$P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で変数変換すると，ヤコビアンは $\det p=1$ である．また $Q(x,y,z)=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}{}^tPAP\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=x^2+y^2+4z^2$ である．

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{-Q(x,y,z)}dxdydz&=\iiint_{\mathbb{R}^3}e^{-x'^2-y'^2-4z'^2}dx'dy'dz'=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x'^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y'^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4z'^2}dz\\&=\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z''^2}\frac{1}{2}dz''=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

(3)$P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で変数変換する．

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz=\iiint_{\mathbb{R}^3}(x'^2+y'^2+z'^2)e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\left[t\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{e^{-t^2}}{2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-4t^2}dt=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}t'^2e^{-t'^2}dt'=\frac{\sqrt{\pi}}{16}$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}x'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}=\iiint_{\mathbb{R}^3}y'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}z'^2e^{-(x'^2+y'^2+4z'^2)}dx'dy'dz'=\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{16}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{16}$$

である．よって $\iiint_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz = 2\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}+\frac{\pi\sqrt{\pi}}{16}=\frac{9\pi\sqrt{\pi}}{16}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$e^{2iz}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2iz)^n$ である．よって $f(z)=\frac{1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2iz)^n}{z^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}$ が原点におけるローラン展開．

(2)

$$\left|\int_{C_R}\frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{1-\exp\bigl(2iRe^{i\theta}\bigr)}{R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}\right|d\theta\leq\int_0^\pi\frac{1+e^{-2R\sin\theta}}{R}d\theta\leq\int_0^\pi\frac{2}{R}d\theta\to 0\quad(R\to\infty)$$

(3)$f(z)$ のローラン展開を考えると，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}$ の部分は原点近傍で正則であるから有界．したがって $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^ni^{n-2}}{n!}z^{n-2}dz=0$ である．$\int_{\Gamma_r}\frac{2}{iz}dz=\int_\pi^{2\pi}\frac{2}{ire^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=2\pi$ である．よって $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}f(z)dz=2\pi$.

(4) 区間 $[r,R],C_R,[-R,-r],\Gamma_r$ により定まる閉曲線に反時計回りの向きを入れた積分経路を C とする．留数定理より $\int_C f(z)dz=4\pi$ である．

$\int_r^R f(z)dz=\int_r^R\frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx=\int_r^R\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{-\sin 2x}{x^2}dx=2\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{-\sin 2x}{x^2}dx$ である．

$\int_{-R}^{-r}f(z)dz=\int_{-R}^{-r}f(x)dx=\int_r^R f(-x)dx=2\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+i\int_r^R\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$ である．

よって $4\pi=\int_r^R f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{-R}^{-r}f(z)dz+\int_{\Gamma_r}f(z)dz=4\int_r^R\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{\Gamma_r}f(z)dz\to 4\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+2\pi\quad(R\to\infty,r\to 0)$ より $\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ である．

$\boxed{4}$ (A)$\overline{(x,y)}=\overline{(x',y')}$ とする．すなわち $(x-x'),(y-y')\in\mathbb{Z}$ である．$f(\overline{(x,y)})=\overline{(ax+by,cx+dy)},f(\overline{(x',y')})=\overline{(ax'+by',cx'+dy')}$ である．

$(ax+by)-(ax'+by')=a(x-x')+b(y-y')\in\mathbb{Z},(cx+dy)-(cx'+dy')=c(x-x')+d(y-y')\in\mathbb{Z}$ より $f(\overline{(x,y)})=f(\overline{(x',y')})$ である．よって f は well-defined である．

(B)(1)f が連続 $\Leftrightarrow$ 任意の Y の開集合 U について $f^{-1}(U)$ が X の開集合である．

(2)Y の任意の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ をとる．$T=\left\{f^{-1}(U_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\right\}$ とすれば T は X の開被覆．よってコンパクト性から有限部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ が存在して $T'=\left\{f^{-1}(U_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda'\right\}\subset T$ が開被覆．f の全射性から $f(f^{-1}(U))=U$ である．よって $S'=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda'\}=\left\{f(f^{-1}(U_\lambda))\mid\lambda\in\lambda'\right\}\subset S$ は Y の有限開被覆.

よって Y はコンパクト．

0.17　2009 午前

$\boxed{1}$ (1)$S(1)=1,S(t)=1+2t,S(t^2)=(1+2t)^2=4t^2+4t+1$ より S の表現行列は $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix}$ である．固有値は $1,2,4$ である．

固有値 1 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ である．

固有値 2 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．

固有値 4 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ である．

(2)$2T(1)=T(1+t+1-t)=2(1+t^2)$ より，$T(1)=1+t^2$ である．$T(t)=T(t+1)-T(1)=2t,T(t^2)=1+t^2$

より基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ である．したがって T の像は $\{1+t^2, 2t\}$ により生成される部分空間である．よって $a = c$ が必要十分条件．$f_0(t) = a + \frac{b}{2}t$ とすると $T(f_0) = g$ である．$\ker T = \{k(1-t^2) \mid k \in \mathbb{C}\}$ である．よって $\{k(1-t^2) + f_0 \mid k \in \mathbb{C}\}$ が求める f 全体.

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix}2 & q-2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & p+1 & 2q & p+1 & q\\ 6 & p+3q-5 & q-12 & -(2p+8) & q+6\end{pmatrix}$ とすると，V は $Ax = 0$ の解空間である.

$B = \begin{pmatrix}2 & p+q-1 & q-4 & -2 & q+2\\ 0 & p(p+1) & q & p(p+1) & p(p+1)\end{pmatrix}$ とすれば W は $Bx = 0$ の解空間である.

A を簡約化すると，$A \to \begin{pmatrix}2 & q-2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & p+1 & 2q & p+1 & q\\ 0 & p+1 & q & p+1 & q\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & q-2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & 0 & q & 0 & 0\\ 0 & p+1 & q & p+1 & q\end{pmatrix}$ である.

(1)V, W が同型になることは次元が等しいことが必要十分条件．$x \mapsto Ax$ で定まる線形写像も A で表すとすれば $\dim V = \dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \operatorname{Im} A = 5 - \operatorname{rank} A$ である．同様に $\dim W = 5 - \operatorname{rank} B$ より $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ が必要十分条件.

$\operatorname{rank} B \leq 2$ である．$q \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3$ であるから $q = 0$ が必要.

$q = 0$ のとき $p(p+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} B = 1$ である．また $p+1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 1$ である．したがって $\dim V = \dim W$ となるのは $q = 0$ かつ $p \neq 0$ のとき.

(2)$V = W$ なら $V \cong W$ であるから $q = 0$ かつ $p \neq 0$ は必要である．$C = \begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ としたときに $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = V \cap W$ である．よって $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A$ となる p, q を求めればよい．$\operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ker} A$ であるから $\dim \operatorname{Ker} C = \dim \operatorname{Ker} A$ が $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A$ の必要十分条件．すなわち $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} A$ が必要十分条件.

$p+1 = 0$ のとき．C を簡約化すると C を簡約化すると，$C \to \begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} C = 1 = \operatorname{rank} A$ である.

$p \neq 0, -1$ のとき，C を簡約化すると，$C \to \begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0\\ 2 & p-1 & -4 & -2 & 2\\ 0 & p(p+1) & 0 & p(p+1) & p(p+1)\end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0\\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0\\ 0 & p(p+1) & 0 & p(p+1) & p(p+1)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & -(p+3) & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p+1 & 0 & p+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ ,0 & 0 & 0 & 0 & p(p+1)\end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} C = 3 \neq 2 = \operatorname{rank} A$ である.

以上より $(p,q)=(-1,0)$ が $V=W$ に必要十分条件．このとき V の基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

(3)$5-\operatorname{rank}A=\dim V<\dim W=5-\operatorname{rank}B$ が必要．すなわち $\operatorname{rank}B<\operatorname{rank}A$ が必要である．したがって $q\neq 0$ または，$q=p=0$ が必要である．

$\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}B=\operatorname{Ker}A\Leftrightarrow V\subset W$ である．よって $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A$ かつ $\operatorname{rank}B<\operatorname{rank}A$ は $V\subsetneq W$ の必要十分条件．

$p=q=0$ のとき，C を簡約化すると $C\to\begin{pmatrix}2&-2&-4&-3&2\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\2&-1&-4&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank}C=2=\operatorname{rank}A$ であるから $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Ker}A$ である．よって $V\subsetneq W$．

$q\neq 0$ のとき，C を簡約化すると $C\to\begin{pmatrix}2&q-2&-4&-(p+3)&2\\0&0&q&0&0\\0&p+1&q&p+1&q\\2&p+q-1&q-4&-2&q+2\\0&p(p+1)&q&p(p+1)&p(p+1)\end{pmatrix}\to$ $\begin{pmatrix}2&q-2&-4&-(p+3)&2\\0&0&q&0&0\\0&p+1&q&p+1&q\\0&p+1&q&p+1&q\\0&p(p+1)&q&p(p+1)&p(p+1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&q-2&0&-(p+3)&2\\0&0&q&0&0\\0&p+1&0&p+1&q\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&p(p-q+1)\end{pmatrix}$ である．よって $[p(p-q+1)=0]\vee[p+1=0\wedge q=p(p-q+1)]\Leftrightarrow\operatorname{rank}C=3$ である．

以上より $(p,q)=0$ または $q\neq 0$ かつ $p=0,-1,q-1$ で $V\subsetneq W$ が成り立つ．

$p=q=0$ なら $\dim V=3,\dim W=4$ である．$q\neq 0,p=0,-1,q-1$ なら $\dim V=2,\dim W=3$ である．

$\boxed{3}$ (1)$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}(e^{\varphi}\cos\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^{\varphi}\sin\theta)$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-e^{\varphi}\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^{\varphi}\cos\theta)$ である．よって $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}e^{-\varphi}\cos\theta-\frac{\partial g}{\partial\theta}e^{-\varphi}\sin\theta$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}e^{-\varphi}\sin\theta+\frac{\partial g}{\partial\theta}e^{-\varphi}\cos\theta$ である．

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\log x}{x^{\alpha}}dx&=\left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{1-\alpha}\log x\right]_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha}dx=\frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon-\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}x^{1-\alpha}\right]_{\varepsilon}^{1}\\
&=\frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon-\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\varepsilon^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

である．$1-\alpha>0$ のとき $\varepsilon^{1-\alpha}\to 0\quad(\varepsilon\to 0+)$ である．$\frac{\log\varepsilon}{-\varepsilon^{\alpha-1}}$ は分母分子が共に $-\infty$ へ発散する．$\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-2}}=\frac{1}{-(\alpha-1)}\varepsilon^{1-\alpha}\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$ となるのでロピタルの定理から $\frac{\log\varepsilon}{-\varepsilon^{\alpha-1}}$ は収束する．よって広義積分は収束する．

$1-\alpha=0$ なら $\log\varepsilon$ が発散するから収束しない．

$1-\alpha<0$ なら $\log\varepsilon,-\varepsilon^{1-\alpha}$ が共に $-\infty$ へ発散するから広義積分は収束しない．

よって $1>\alpha$ のとき収束し，そのとき $\int_0^1\frac{\log x}{x^{\alpha}}dx=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}$ である．

(3)

$$\iint_D ye^{x^3}dxdy = \int_0^2 e^{x^3}\int_0^x ydydx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{6}\left[e^{x^3}\right]_0^2 = \frac{e^8-1}{6}$$

である．

$\boxed{4}$ (1)$n=0$ のとき左辺は e^x であり，右辺は $\sum\limits_{j=0}^{0}\frac{x^j}{j!}+\int_0^x e^tdt = 1+e^x-1=e^x$ であるから成立．n 以下で成立したとする．

$$\int_0^x e^t(x-t)^{n+1}dt = \left[e^t(x-t)^{n+1}\right]_0^x + \int_0^x e^t(n+1)(x-t)^ndt = -x^{n+1}+(n+1)\int_0^x e^t(x-t)^ndt$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1}\frac{x^j}{j!}+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x e^t(x-t)^{n+1}dt &= \sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(-x^{n+1}+(n+1)\int_0^x e^t(x-t)^ndt\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}+\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^ndt = e^x\end{aligned}$$

である．

(2)$x\geq 0$ なら $0\leq t\leq x$ について $1\leq e^t\leq e^x$ である．したがって $\int_0^x(x-t)^ndt = -\frac{1}{n+1}\left[(x-t)^{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ である．よって $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x(x-t)^ndt \leq \int_0^x e^t(x-t)^ndt \leq \int_0^x e^x(x-t)^ndt = e^x\frac{x^{n+1}}{n+1}$ である．

(3)(1) より $e-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!} = \frac{1}{n!}\int_0^1 e^t(1-t)^ndt$ である．よって (2) から $\frac{1}{(n+1)!}\leq e-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{(n+1)!}$ である．$n=4$ のとき，$\frac{1}{200}<\frac{1}{120}=\frac{1}{5!}\leq e-\sum\limits_{j=0}^{4}\frac{x^j}{j!}$ である．$n=5$ のとき，$e-\sum\limits_{j=0}^{5}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{6!}<\frac{3}{720}\leq\frac{1}{240}<\frac{1}{200}$ である．$n\geq 5$ なら $e-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\leq\frac{e}{(n+1)!}\leq\frac{e}{6!}<\frac{1}{200}$ である．よって $N=5$ である．

0.18　2009 午後

$\boxed{1}$ (1)$cv+c'F(v)=0$ とする．$F(F(v))=-v\neq 0$ より $F(v)\neq 0$ であるから $c=0$ なら $c'=0$ である．$c\neq 0$ のとき，$v=-\frac{c'}{c}F(v)$ である．このとき $F(v)=\frac{c'}{c}v$ より $v=-\frac{c'^2}{c^2}v$ であるから $-\frac{c'^2}{c^2}=1$ である．$c',c\in\mathbb{R}$ より $-\frac{c'^2}{c^2}\leq 0$ であるからこれは矛盾．よって $c=c'=0$ より $v,F(v)$ は線形独立．

(2) 線形独立でないと仮定すると，$F(v_{k+1}) = \sum\limits_{i=0}^{k}(a_iv_i+b_iF(v_i))+cv_{k+1}$ とできる．$-v_{k+1} = \sum\limits_{i=0}^{k}(a_iF(v_i)-b_iv_i)+cF(v_{k+1}) = \sum\limits_{i=0}^{k}(a_iF(v_i)-b_iv_i)+c\left(\sum\limits_{i=0}^{k}(a_iv_i+b_iF(v_i))+cv_{k+1}\right) = \sum\limits_{i=0}^{k}((ca_i-b_i)v_i+(cb_i+a_i)F(v_i))+c^2v_{k+1}$ である．よって線形独立であるから $c^2+1=0$ であるが，これをみたす $c\in\mathbb{R}$ は存在しない．したがって矛盾するから線形独立．

(3) 基底でないとする．$v_1,\ldots,v_m,F(v_1),\ldots,F(v_m),v_{m+1}$ が線形独立であるように v_{m+1} が定まる．このとき (2) から $v_1,\ldots,v_m,F(v_1),\ldots,F(v_m),v_{m+1},F(v_{m+1})$ も線形独立であるが，これは m の最大性に矛盾．よって基底．

(4)0 行列を O，単位行列を E とすると，$\begin{pmatrix}O & -E\\ E & O\end{pmatrix}$ が表現行列である．

$\boxed{2}$ (1)$\det A-\lambda E = \begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -3\\ a-5 & a-\lambda & 4\\ 6 & 0 & -5-\lambda\end{vmatrix} = (a-\lambda)\left((\lambda-4)(\lambda+5)+18\right) = (a-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)$ である．

よって固有値は $a,-2,1$ である．

$a=-2$ のとき，$\mathrm{rank}(A+2E)=2$ より固有空間の次元は 1 である．固有多項式の根の重複度と一致しないから対角化不可能でジョルダン標準形は $J=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ である．

$a=1$ のとき，$\mathrm{rank}(A-E)=1$ より固有空間の次元は 2 である．固有多項式の根の重複度と一致するから対角化可能.

$a\neq 1,-2$ なら固有値が相異なるから対角化可能.

(2) 固有値 1 の固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ である．固有 -2 の固有空間の基底は $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ である．

$(A+2E)v_2=v_1$ とすれば $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ととれる．よって $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=J$ である．

$Ax=x'$ であるとき，$x=Py$ とすると，$APy=x'=Py'$ より $Jy=P^{-1}Apy=y'$ である．$Jy=y'$ を解く．$y_3'=y_3, y_2'=-2y_2$ より $y_3=k_3e^t, y_2=k_2e^{-2t}$ である．$y_1'=-2y_1+y_2=-2y_1+k_2e^{-2t}$ である．これを解くと $y_1(t)=(k_2t+k_1)e^{-2t}$ である．よって $x=Py=\begin{pmatrix}k_2e^{-2t}+k_3e^t\\(k_2t+k_1)e^{-2t}-k_3e^t\\2k_2e^{-2t}+k_3e^t\end{pmatrix}$ である．

(3)$|x(t)|^2=(k_2e^{-2t}+k_3e^t)^2+((k_2t+k_1)e^{-2t}-k_3e^t)^2+(2k_2e^{-2t}+k_3e^t)^2=3k_3^2e^{2t}+o(1)$ である．よって $k_3=0$ が $|x(t)|\to 0$ の必要十分条件で，$x(t)=\begin{pmatrix}k_2e^{-2t}\\(k_2t+k_1)e^{-2t}\\2k_2e^{-2t}\end{pmatrix}$ が求める解のすべて．

$\boxed{3}$ (1) 分枝の取り方を $-\frac{\pi}{2}\leq\arg z\leq\frac{3\pi}{2}$ に変えることで，$C_{R,r}$ を含む有界単連結開集合上で f は $z=ia$ を除いて正則である．上半平面上の点を考えるうちは分枝の取り方を変える前と変えた後で f の値は変わらない．すなわち上半平面上での積分はどちらの分枝でも値は変わらない．

$z=ia$ における留数は $\mathrm{Res}(f,ia)=\frac{\log(ia)}{2ia}=\frac{\log a+\frac{\pi}{2}i}{2ia}$ である．留数定理より $\int_{C_{R,r}}f(z)dz=\frac{\pi\log a+\frac{\pi^2}{2}i}{a}$ である．

(2)

$$\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{\log R+i\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}Rie^{i\theta}\right|d\theta\leq\left|\frac{2R\log R}{R^2-a^2}\right|\to 0\quad(R\to\infty)$$

である．

$|f(z)|/|\log z|\to\frac{1}{a^2}\quad(z\to 0)$ である．したがって十分小さい r_0 が存在して $r\leq r_0$ なら $|z|\leq r$ で $\left|\frac{\log z}{2a^2}\right|\leq|f(z)|\leq\left|\frac{3\log z}{2a^2}\right|$ である．よって

$$\left|\int_{C_r}f(z)dz\right|\leq\int_{C_r}\left|\frac{3\log z}{2a^2}\right|dz=\frac{3}{2a^2}\int_0^\pi r|\log r+i\theta|d\theta\leq\frac{3(r\log r+\theta r)}{2a^2}\to 0\quad(r\to 0)$$

である．

(3)$\int_{-R}^{-r}f(z)dz=\int_r^R f(-x)dx=\int_r^R\frac{\log x+i\pi}{x^2+a^2}dx=\int_r^R f(z)dz+i\pi\int_r^R\frac{1}{x^2+a^2}dx$ である．

(4)$\frac{\pi\log a+\frac{\pi^2}{2}i}{a}=\int_r^R f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_{-R}^{-r}f(z)dz-\int_{C_r}f(z)dz=2\int_r^R f(x)dx+i\pi\int_r^R\frac{1}{x^2+a^2}dx+\int_{C_R}f(z)dz-\int_{C_r}f(z)dz\to 2\int_0^\infty f(x)dx+i\pi\int_0^\infty\frac{1}{x^2+a^2}dx\quad(r\to 0,R\to\infty)$ である．したがって $\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi\log a}{2a}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が a に収束するとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $n\geq N$ に対して $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つことをいう．

(2)a に収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ をとる．任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，$|a_n-a|<\delta$

なら $|f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ．この δ に対してある N が存在して $n \geq N$ なら $|a_n - a| < \delta$ である．したがって $n \geq N$ なら $|f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$ より $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する．

(3) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対して，$|x-a|<\delta$ なる x で $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$ が成り立つような x が存在する．

(4)(A) が成り立たないとする．このとき任意の $\frac{1}{n} > 0$ に対して $|a_n - a| < \frac{1}{n}, |f(a_n)-f(a)| \geq \varepsilon$ となる a_n がとれる．このとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するが，$|f(a_n)-f(a)| < \varepsilon$ なる n が存在しないので $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束しない．よって (B) も成り立たない．対偶が示されたので (B) ならば (A) も真である．