## 0.1　2003 基礎

$\boxed{1}$ (1)$V$ の元の和が $V$ の元に属すためには $a=b=c=d=0$ が必要十分である．$V$ は $A=\begin{pmatrix}1&1&p+1&3&q\\1&2&2p+1&2&0\\1&0&-p&4&4q\\0&1&-p^2&-1&-2q\end{pmatrix}$ の解空間である．$A$ を簡約化すると，

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&p+1&3&q\\0&1&p&-1&-q\\0&-1&-2p-1&1&3q\\0&1&-p^2&-1&-2q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&4&2q\\0&1&p&-1&-q\\0&0&-p-1&0&2q\\0&0&-p^2-p&0&-q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&4&2q\\0&1&p&-1&-q\\0&0&-p-1&0&2q\\0&0&0&0&-q-2pq\end{pmatrix}$$

である．これの解空間の次元が 3 になるためには $-p-1=0, 2q=0, -q-2pq=0$ が必要十分．したがって $p=-1, q=0$ である．

(2)$p=-1, q=0$ を代入して $\begin{pmatrix}1&0&1&4&-2\\0&1&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ の解空間が $V$ である．よって基底は $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\omega$ を 1 の原始三乗根として，$\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(1+2a)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}=(1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}=(1+a\omega+a\omega^2)\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}$ である．$1+a\omega+a\omega^2=1+a\omega+a(-1-\omega)=1-a$ である．したがって固有値は $1+2a, 1-a$ である．

(2) 固有値が $1-a$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．直交化すると，$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ である．

正規化することで $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ は直交行列．このとき，$D=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1+2a&0&0\\0&1-a&0\\0&0&1-a\end{pmatrix}$ となる．

(3)$B=\left\{(x,y,x)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$ とする．$T$ は直交行列であるから

$$\left[{}^\forall(x,y,z)\in B,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]\Leftrightarrow\left[{}^\forall(x,y,z)\in B,\ \left(T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^t AT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]$$
$$\Leftrightarrow\left[{}^\forall(x,y,z)\in B,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t T^{-1}AT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]\Leftrightarrow\left[{}^\forall(x,y,z)\in B,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\right]$$

である．$(x,y,z)D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1+2a)x^2+(1-a)y^2+(1-a)z^2=(1-a)(x^2+y^2+z^2)+3ax^2=3ax^2+1-a\geq -1$ であるから，$x\in[-1,1]$ で $3ax^2+2-a\geq 0$ が成り立つ $a$ をもとめる．$a>0$ のとき，左辺は $x=0$ で最小値 $2-a$ をとるから $2-a\geq 0$ より $0<a\leq 2$ である．

$a=0$ なら明らかに成立する．

$a<0$ なら左辺は $x=\pm 1$ で最小値をとるから $3a+2-a\geq 0$ より $0>a\geq -1$ である．よって $-1\leq a\leq 2$ が必要十分条件.

$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq -1\Leftrightarrow (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(x,y,z)E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq 0\Leftarrow (x,y,z)(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geq 0$ これが任意の $(x,y,z)\in B$ について成り立つことは任意の $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ で成り立つことと同値である．(正規化すればよい．)

すなわち $A+E$ が半正定値であることと必要十分．これは $A+E$ 全ての固有値が非負であることと必要十分であり，$A+E$ の固有値は $2+2a, 2+a\omega^2+a\omega=2-a$ である．よって $2+2a\geq 0, 2-a\geq 0$ より $2\geq a\geq -1$ である．

$\boxed{3}$ (1) 分母分子の極限が $\infty$ であるからロピタルの定理を使う．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^x}(ae^{ax}+e^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^x}(a(e^{ax}+e^x)-(a-1)e^x)=\lim\limits_{x\to\infty}a-\frac{1}{e^{(a-1)x}+1}(a-1)$ である．$a-1\geq 0$ なら極限は $a$ である．$a-1<0$ のとき，極限は $1$ である．よって $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(e^{ax}+e^x)=\max(a,1)$ である．

(2)$t+x=u$ と変数変換すれば $h(x)=\int_x^{2x}e^{e^u}du$ である．よって $h'(x)=2e^{e^{2x}}-e^{e^x}$ である．

(3)$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial\theta}(r\cos\theta)$ である．よって $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{-\sin\theta}{r}), \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r})$ である．また $r=\sqrt{x^2+y^2}$ より $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2r}=\cos\theta$ である．$\tan\theta=\frac{y}{x}$ より $x$ で偏微分して $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$ より $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\cos^2\theta=\frac{-\sin\theta}{r}$ である．

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{-\sin\theta}{r}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\cos\theta+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta}{r}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}(\sin\theta)+\frac{\partial g}{\partial r}(\cos\theta\frac{-\sin\theta}{r})+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r})+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{-\sin\theta}{r}\frac{-\sin\theta}{r}-\frac{\cos\theta}{r^2}\cos\theta)\\&=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}\theta\right)-\frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2})\\&=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(\cos^2\theta-\sin\theta^2)+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial g}{\partial\theta}(\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2})-\frac{\partial g}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\end{aligned}$$

(4)$\iint_D xydxdy=\int_0^1\int_{x^2}^x xydydx=\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3-x^5dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{24}$

$\boxed{4}$ (1)$\arcsin(\sin x)=x$ を $x$ で微分すると，$(\arcsin)'(\sin x)\cos x=1$ より $\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos\arcsin x}$ であ

る．$\cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=1$ より $\cos^2(\arcsin x)=1-x^2$ である．$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ であるから $\cos(\arcsin x)>0$ である．よって $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ である．

よって $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．$g''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2)$f'(x)=g(x)g'(x)$ である．よって $\sqrt{1-x^2}f'(x)=\arcsin x$ である．$x$ で微分すれば $-\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})}f'+\sqrt{1-x^2}f''=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．したがって $-xf''+(1-x^2)f''=1$ である．

(3)$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ である．よって $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_nx^{n-2}-n(n-1)a_nx^n)-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=1$ である．よって $n$ の係数を比較すれば $2a_2=1, 3\cdot 2a_3-a_1=0, (n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n=0 \quad (n\geq 2)$ である．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2}=n^2a_n \quad (n\geq 2)$ である．この等式に $n=1$ を代入すると，$3\cdot 2a_3=a_1$ となりこれは成り立つ．よって $(n+2)(n+1)a_{n+2}=n^2a_n \quad (n\geq 1)$ である．また $a_0=f(0)=\frac{1}{2}g(0)^2=0, a_1=f'(0)=g(0)g'(0)=0, a_2=\frac{1}{2}$ である．

(4)$3\cdot 2a_3=1a_1=0$ より $a_3=0$ である．$4\cdot 3a_4=4a_2=2$ より $a_4=\frac{1}{6}$ である．$5\cdot 4a_5=9a_3=0$ より $a_5=0$ である．$6\cdot 5a_6=16a_4$ より $a_6=\frac{4}{45}$ である．

よって $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4)}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{45}x^6+O(x^7)}{x^6}=\frac{4}{45}$ である．