0.1 2003 専門

$\boxed{1}$ (1)V は3次元線形空間であるから $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立であることを示せばよい．$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$ とする．$F(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)=c_1f(v_1)=0$ であり，$F(v_1)\neq 0$ より $c_1=0$ である．よって $c_2v_2+c_3v_3=0$ であるが v_2, v_3 は一次独立であるから $c_2=c_3=0$ である．したがって $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底.

(2)$\{v_1, v_2, v_3\}$ が基底であるから $F(v_1)=av_1+bv_2+cv_3$ なる $a, b, c \in V$ が存在する．したがって表現行列は $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(3) $F(v_1)\notin U$ であるから $a\neq 0$ である．$u_1=v_1+\frac{b}{a}v_2+\frac{c}{a}v_3$ とする．$F(u_1)=F(v_1)=a(v_1+\frac{b}{a}v_2+\frac{c}{a}v_3)=au_1$ である．$\{u_1, v_2, v_3\}$ に関する表現行列は対角行列である.

(4)U の一次独立な集合 $\{F(v_1)\}$ を延長して U の基底 $\{F(v_1), v_3\}$ をとる．このとき $\{v_1, F(v_1), v_3\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり，ジョルダン標準形である.

$\boxed{2}$ (1)U が開集合 $\Leftrightarrow ^\forall x\in U, ^\exists r>0, B_r(x)\subset U$ である.

(2)((a)⇒(b)) U を $\mathbb{R}^N$ の開集合とする．$x\in f^{-1}(U)$ を任意にとる．$f(x)\in U$ より $^\exists r>0, B_r(f(x))\subset U$ である．したがって $f^{-1}(B_r(f(x)))\subset f^{-1}(U)$ がなりたつ．いま (a) より r に対してある $\delta>0$ が存在して $B_\delta(x)=f^{-1}f(B_\delta(x))\subset f^{-1}(B_r(f(x)))\subset f^{-1}(U)$ である．よって $f^{-1}(U)$ は開集合である.

((b)⇒(a)) 任意の $a\in\mathbb{R}^N, \varepsilon>0$ をとる．$B_\varepsilon(f(a))$ は開集合であるから $a\in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ も開集合である．したがってある $\delta>0$ が存在して $B_\delta(a)\subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ である．f で送って $f(B_\delta(a))\subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))))\subset B_\varepsilon(f(a))$ である.

(3)((a)⇒(c)) 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して $f(B_\delta(a))\subset B_\varepsilon(f(a))$ である．したがってある N が存在して $n>N$ なら $d(a_n, a)<\delta$ すなわち $a_n\in B_\delta(a)$ が成り立つ．よって $f(a_n)\in B_\varepsilon(f(a))$ であるから $d(f(a_n), f(a))<\varepsilon$ である．これは $\lim f(a_n)=f(a)$ を意味する.

((c)⇒(a)) 背理法を用いる．ある $a\in\mathbb{R}^N$ と $\varepsilon>0$ が存在して任意の $\delta>0$ に対して $f(B_\delta(a))\not\subset B_\varepsilon(f(a))$ であると仮定する．このとき $\delta=\frac{1}{n}$ とすれば $a_n\in B_\delta(a)$ で $f(a_n)\notin B_\varepsilon(f(a))$ なるものがとれる．これによって数列 $\{a_n\}$ を作れば $\{a_n\}$ は a に収束するが $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．これは矛盾.

$\boxed{3}$ (1)$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくとヤコビアンは r である．よって $I_n=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}}drd\theta$ である.

(2)I_n の収束性は $\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}}dr$ の収束性と同値. $[0,1]$ では被積分関数が有界であるから $\int_1^\infty \frac{r^2}{1+r^{2n}}dr$ の収束性と同値．$n\geq 2$ のとき，$\int_1^M \frac{r^2}{1+r^{2n}}dr \leq \int_1^M r^{2-2n}dr=\left[\frac{1}{3-2n}r^{3-2n}\right]_1^M=\frac{1}{3-2n}(M^{3-2n}-1)\to\frac{1}{3n-2}\quad(M\to\infty)$ である．$n=1$ のとき．$r\geq 1$ より $r^2\geq 1$ であるから $2r^2\geq r^2+1$ である．よって $\int_1^M \frac{r^2}{1+r^2}dr\geq\int_1^M\frac{r^2}{2r^2}dr=\int_1^M\frac{1}{2}dr=\frac{1}{2}M\to\infty\quad(M\to\infty)$ より発散する.

よって求める最小値 a は $a=2$ である.

(3)$\frac{z^k}{1+z^4}$ は $z=e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$ をそれぞれ1位の極として持つ．積分路 Γ 内の特異点は $z=e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ である．留数は $\mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}=\frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}}, \mathrm{Res}\left(\frac{z^k}{1+z^4}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=\left(\frac{z^k}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}=\frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}}$ である．したがって留数定理から $\int_\Gamma\frac{z^k}{1+z^4}dz=2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(k-3)\pi i}{4}}+\frac{1}{4}e^{\frac{(3k-1)\pi i}{4}})$ である.

(4)

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^2}{1+z^4}dz\right|=\left|\int_0^\pi\frac{R^2e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{R^3}{1+R^4e^{4i\theta}}\right|d\theta\leq\int_0^\pi\left|\frac{R^3}{R^4-1}\right|d\theta=\pi\frac{R^3}{R^4-1}\to 0\quad(R\to\infty)$$

$$\int_{[-R,R]}\frac{z^2}{1+z^4}dz=\int_{[-R,0]}\frac{z^2}{1+z^4}dz+\int_{[0,R]}\frac{z^2}{1+z^4}dz=\int_R^0\frac{r^2}{1+r^4}(-1)dr+\int_0^R\frac{r^2}{1+r^4}dr=2\int_0^R\frac{r^2}{1+r^4}dr$$

である．よって $\int_\Gamma \frac{z^2}{1+z^4}dz = \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}dz + 2\int_0^R \frac{r^2}{1+r^4}dr$ である．$R \to \infty$ として $2\pi i(\frac{1}{4}e^{\frac{(2-3)\pi i}{4}} + \frac{1}{4}e^{\frac{(3\cdot 2-1)\pi i}{4}}) = 0 + 2\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^4}dr$ である．したがって $\int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^4}dr = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ である．よって $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4}\pi d\theta = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\varphi\colon K[X,Y] \to K[t]; x \mapsto t^3, y \mapsto t^2$ とする．このとき $\ker\varphi \supset (X^3 - Y^2)$ は明らか．$f(X,Y) \in \ker\varphi$ とすると，$f(X,Y) = (X^3 - Y^2)g(X,Y) + Yh_1(X) + h_2(X)$ とできる．φ でおくれば $0 = t^2h_1(t^3) + h_2(t^3)$ である．t の次数について，3 の倍数の次数を比較すれば $0 = h_2(t^3)$ であるから $h_2 = 0$ である．よって $0 = t^2h_1(t_3)$ より $h_1 = 0$ である．すなわち $\ker\varphi = (X^3 - Y^2)$ である．

よって準同型定理から $R = K[X,Y]/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi = K[t^2,t^3]$ である．

$K[t^2,t^3]$ は $K[t]$ の部分環であるから整域であることは明らか．よって R は整域.

(2)$K[t^2,t^3]$ の商体は $t^3/t^2 = t$ より $K(t)$ である．$K[t^2,t^3][s] \ni s^2 - t^2$ は t を根にもつモニック多項式であるが，$t \notin K[t^2,t^3]$ であるから R は整閉でない.