0.1 2007 午後

$\boxed{1}$ (1)$P(D)e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$ である．

$P(z)$ が重解 λ をもつから $P(D) = (D-\lambda)^2 = D^2 - 2\lambda D + \lambda^2$ である．よって $D^2 v(t) = D(-\lambda e^{-\lambda t}u(t) + e^{-\lambda t}Du(t)) = -\lambda(-\lambda e^{-\lambda t}u(t) + e^{-\lambda t}Du(t)) - \lambda e^{-\lambda t}Du(t) + e^{-\lambda t}D^2u(t) = e^{-\lambda t}(\lambda^2 - 2\lambda Du + D^2u) = e^{-\lambda t}P(D)u = 0$ である．

したがって Dv は定数関数であり，v は t の高々 1 次式である．

(2)(1) の逆，すなわち任意の 1 次式 $v(t) = ct + d$ について $u = ve^{\lambda t}$ は $P(D)u = 0$ を満たす．したがって $V = \left\{ve^{\lambda t} \mid c, d \in \mathbb{R}, v = ct + d\right\}$ である．よってベクトル空間であることは明らかで基底は $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$ である．

(3)$(ct+d)e^{\lambda t}$ が有界にとどまるから $\lambda < 0$ である．よって $a = -2\lambda > 0$．

$\boxed{2}$ (1)$\mathrm{Ker}\, f/(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) \cong (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f)/\mathrm{Im}\, f$ である．よって $\dim \mathrm{Ker}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) - \dim \mathrm{Im}\, f$ である．また次元定理より $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$ である．よって $\dim V - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f)$ である．すなわち $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) \Leftrightarrow= V = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$ である．

(2)$x \in \mathrm{Ker}\, f^i$ について $f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = f(0) = 0$ であるから $\mathrm{Ker}\, f^i \subset \mathrm{Ker}\, f^{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots)$ である．

$y \in \mathrm{Im}\, f^j$ とする．すなわちある $x \in V$ が存在して $f^j(x) = y$ である．このとき，$f^{j-1}(f(x)) = y$ であるから $y \in \mathrm{Im}\, f^{j-1}$ である．よって $\mathrm{Im}\, f^{j-1} \supset \mathrm{Im}\, f^j \quad (j = 1, 2 \cdots)$ である．

(3)V が有限次元であるから上昇列 $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \cdots$ はある N_1 が存在して $n \geq N_1$ なら $\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^{N_1}$ となる．

同様に下降列 $\mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \cdots$ もある N_2 が存在して $n \geq N_2$ なら $\mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^{N_2}$ となる．

$N = N_1 + N_2$ とする．$y \in \mathrm{Ker}\, f^N \cap \mathrm{Im}\, f^N$ とすれば $f^N(y) = 0$ であり，$f^N |_{\mathrm{Im}\, f^N} \colon \mathrm{Im}\, f^N \to \mathrm{Im}\, f^{2N}$ は全射な自己準同型であるから同型である．よって $f^N(y) = 0$ なら $y = 0$ である．すなわち $\mathrm{Ker}\, f^N \cap \mathrm{Im}\, f^N = \{0\}$ が言えたから (1) より $\mathrm{Ker}\, f^N + \mathrm{Im}\, f^N = V$ である．

$\boxed{3}$ (1)$\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q} / \frac{1}{|x|^{p+q}} = \frac{1}{|1-\frac{a}{x}|^p|1-\frac{b}{x}|^q} \to 1 \quad (x \to \pm\infty)$ である．よって十分大きな $M > b$ があって $|x| > M$ なら $\frac{1}{2|x|^{p+q}} < \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q} < \frac{3}{2|x|^{p+q}}$ である．したがって $\int_M^\infty \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx, \int_{-\infty}^{-M} \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx$ の収束性は $\int_M^\infty \frac{1}{|x|^{p+q}}dx$ の収束性と等しい．$\int_M^n \frac{1}{|x|^{p+q}}dx = \begin{cases} \frac{1}{-p-q+1}\left[\frac{1}{|x|^{p+q-1}}\right]_M^n & (p+q \neq 1) \\ [\log x]_M^n & (p+q = 1) \end{cases}$ でこれは $p+q-1 > 0$ のとき $n \to \infty$ で収束する．

$\frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q} / \frac{1}{|x-a|^p} = \frac{1}{|x-b|^q} \to \frac{1}{|a-b|^q} \quad (x \to a)$ である．よって十分小さな ε があって $|x-a| < \varepsilon$ なら $\frac{1}{2|a-b|^q|x-a|^p} < \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q} < \frac{3}{2|a-b|^q|x-a|^p}$ である．よって $\int_{a-\varepsilon}^a \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx, \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx$ の収束性は $\int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{|x-a|^p}dx$ の収束性と等しい．

$\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} \frac{1}{|x-a|^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left[|x-a|^{1-p}\right]_{a+\delta}^{a+\varepsilon} & (p \neq 1) \\ [\log x]_{a+\delta}^{a+\varepsilon} & (p = 1) \end{cases}$ でこれは $1-p > 0$ のとき $\delta \to +0$ で収束する．

$x = b$ 近くでも同様にして $1 - q > 0$ で収束すると分かる．$x = a, b, \pm\infty$ 付近以外では有界区間の有界関数の積分であるから有限値をとる．よって $\{(p,q) \mid p+q > 1, p < 1, q < 1\}$ で収束する．

(2)$\frac{x-a}{a-b} = y$ と変数変換すると $\frac{1}{a-b}dx = dy$ であり，$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx = \int_\infty^{-\infty} \frac{1}{|y|^p|a-b|^p|y+1|^q|a-b|^q}a - bdy = \frac{1}{|a-b|^{p+q-1}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|y|^p|y+1|^q}dy$ である．

(1) で $a = -1, b = 0$ とすれば $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|y|^p|y+1|^q}dy$ が収束することが分かる．収束値を C とおけば $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx = \frac{C}{|a-b|^{p+q-1}}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$X, Y \subset B$ に対して $g(X) = g(Y)$ とする．f が全射であるから任意の $b \in X$ に対してある $a \in g(X)$ が存在して $f(a) = b$ である．よって $a \in g(Y) = f^{-1}(Y)$ より $f(a) = b \in Y$ である．よって $X \subset Y$ がいえる．

同様にして $Y \subset X$ も言えるから $X = Y$．よって g は単射.

(2)A の部分集合 X を任意にとる．このとき $f(X) = Y$ とすると，$X \subset f^{-1}(Y) = g(Y)$ は明らか．任意の $a \in f^{-1}(Y)$ について $f(a) = b \in Y$ である．$f(X) = Y$ よりある $x \in X$ が存在して $f(x) = b$ とできる．f の単射性から $a = x \in X$ である．したがって $g(Y) = f^{-1}(Y) = X$ より g は全射.