0.1　H29 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\varphi(f+g)=f+g, \varphi(fg)=fg, \varphi(1)=1$ より部分環.

(2)$\psi(f(s,t,u)) = f(x^3,y^3,xy)$ とする．$\varphi(f(x^3,y^3,xy)) = f(x^3,y^3,xy)$ より $\psi(f) \in R$ である．準同型であることは明らか．R の任意の元は $g(x,y) = \sum_{3|(i+2j)} a_{ij}x^iy^j$ と表される．$\sum_{3|(i+2j)} a_{ij}x^iy^j = \sum_{i\equiv 0\equiv j} a_{ij}x^iy^j + \sum_{i\equiv 1,j\equiv =1} a_{ij}x^iy^j + \sum_{i\equiv 2,j\equiv 2} a_{ij}x^iy^j = \sum_{i\equiv 0\equiv j} a_{ij}x^iy^j + xy\sum_{i\equiv 1,j\equiv =1} a_{ij}x^{i-1}y^{j-1} + (xy)^2\sum_{i\equiv 2,j\equiv 2} a_{ij}x^{i-2}y^{j-2}$ とできる．

$k \leq \ell$ に対して $x^{3k}y^{3\ell} = (xy)^{3k}y^{3(\ell-k)} = u^{3\ell}t^{\ell-k}$ とできるから $\sum_{i\equiv 0\equiv j} a_{ij}x^iy^j$ は ψ の像である．他の項も同様であるから ψ は全射である．

(3)$(st-u^3) \subset \ker\psi$ は明らかである．$f \in \ker\psi$ に対して $f(s,t,u) = (st-u^3)g(s,t,u) + u^2h_1(s,t) + uh_2(s,t) + h_3(s,t)$ である．ψ で送れば $(xy)^2h_1(x^3,y^3) + xyh_2(x^3,y^3) + h_3(x^3,y^3) = 0$ である．x,y の次数について 3 の剰余に着目すれば $h_1(x^3,y^3) = h_2(x^3,y^3) = h_3(x^3,y^3) = 0$ より $h_i = h_2 = h_3 = 0$ がわかる．よって $\ker\psi = (st-u^3)$ である．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$f(T) = \frac{T^{17}-1}{T-1}$ である．よって $f(T+1) = \frac{(T+1)^{17}-1}{T}$ である．0 次の係数は $\binom{17}{1} = 17$ である．17 は素数であるから $T^i \quad (i=1,2,\cdots,15)$ の係数は 17 の倍数である．よってアイゼンシュタインの既約判定法から $f(T+1)$ は既約である．よって $f(T)$ も既約である．

(2)$f(T)$ の根は $\zeta_i \quad (i=1,2,\cdots,16)$ である．したがって $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるから $\mathbb{Q}$ が完全体であることより Galois 拡大である．

(3)$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ の任意の元は ζ の行き先で定まり，行き先の候補は $\zeta_i \quad (i=1,2,\cdots,16)$ のいずれかである．$\sigma(\zeta) = \zeta_i$ について φ: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times; \sigma \mapsto [i]$ とする．

全射準同型であることは明らか．$\varphi(\sigma)=1$ は $\sigma(\zeta)=\zeta$ を意味するから φ は単射である．よって同型.

(4)$\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ である．よって $\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}(\zeta)$ の真の部分体である．$x^2-\alpha x+1$ とすれば根は ζ, ζ^{-1} である．よって $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)$ は 2 次拡大である．$\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ が体であるから乗法群は巡回群となる．よって $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ である．$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ において位数 2 の元は $[8]$ のみであるから，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)) \cong \{[0],[8]\}$ である．よって正規部分群であるから $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})/\{[0],[8]\} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ である．