0.1 H6 数学選択

$\boxed{3}$ (1)E_1 上で $0 < f(x) < 1$ であるから，$f(x)^n > f(x)^{n+1}$ である．よって $f(x)^{\frac{1}{n+1}} > f(x)^{\frac{1}{n}}$ となるから $\{f(x)^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加．また $\lim_{n\to\infty} f(x)^{\frac{1}{n}} = 1$ である．よって単調収束定理から $\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{\frac{1}{n}}dx = \int_{E_1}\lim_{n\to\infty} f(x)^{\frac{1}{n}}dx = \int_{E_1} 1dx = \mu(E_1)$ となる．

(2)E_2 上で $1 \leq f(x)$ であるから, $f(x) \leq f(x)^n$ より $f(x)^{\frac{1}{n}} \leq f(x)$ となる．また $\lim_{n\to\infty} f(x)^{\frac{1}{n}} = 1$ である．$f(x)$ は E_2 上可積分であるから, ルベーグの収束定理より $\lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{\frac{1}{n}}dx = \int_{E_2}\lim_{n\to\infty} f(x)^{\frac{1}{n}}dx = \int_{E_2} 1dx = \mu(E_2)$ となる．

(3)$\mathbb{R}$ 上可積分であるから，E_2 上可積分である．また $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ であるから，$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_1\cup E_2} f(x)^{\frac{1}{n}}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)^{\frac{1}{n}}dx$ となる．

$\boxed{4}$ (1)0 が M の内点でないことを示す．内点ならば ε 近傍 $B(0,\varepsilon)$ がとれる．X の基底の各ベクトル v について $\varepsilon\frac{v}{2\|v\|}$ とすることで，$B(0,\varepsilon)$ の部分集合で X の基底となるものが存在すると分かる．これは $M \neq X$ に矛盾．よって 0 は内点でない．

任意の $v \in M$ について v が内点ならば，v の ε 近傍 $B(v,\varepsilon)$ が存在する．$B(v,\varepsilon) - v = \varepsilon B(0,\varepsilon) \subset M$ となり，0 も内点である．これは矛盾．

(2)X を $L^1([0,1])$ とする．これは Banach 空間である．

$L^\infty([0,1])$ は $L^1([0,1])$ の無限次元の部分空間である．$\frac{1}{x} \in L^1([0,1])$ であるが，$\frac{1}{x} \notin L^\infty([0,1])$ である．したがって真部分空間である．また完備であるから閉集合である．これが (i) の例.

$C^0([0,1])$ を $[0,1]$ 上の連続関数全体とすればこれは，無限次元の部分空間である．$\{x^n\}$ は X の収束列であり，$C^0([0,1])$ の数列であるが，極限は $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ であり，$C^0([0,1])$ には属さない．これが (ii) の例.

(3) すべての F_n が内点をもたないとする．$x_1 \in X \setminus F_1$ を任意にとる．このとき開集合であるから $\mathrm{Cl}(B(x_1,\delta_1)) \subset X \setminus F_1$ となる δ_1 をとれる．(Cl で閉包をあらわす．)$x_1 \in F_a$ となる a が存在する．$a = 2$ としても一般性を失わない．$x_1 \in F_2$ であるが，F_2 は内点をもたないため，$B(x_1,\delta_1) \cap X \setminus F_2 \neq \emptyset$ である．よって $x_2 \in B(x_1,\delta_1) \cap X \setminus F_2$ となる x_2 がとれる．$0 < \delta_2 < \frac{\delta_1 - d(x_1,x_2)}{2}$ をみたし，$\mathrm{Cl}(B(x_2,\delta_2)) \subset X \setminus F_2$ となる δ_2 がとれる．δ_2 の定め方から，$B(x_2,\delta_2) \subset B(x_1,\delta_1)$ である．これを繰り返して点列 $\{x_n\}$ と数列 $\{\delta_n\}$ を得る．$n \geq m$ に対して $\|x_n - x_m\| \leq \delta_m \leq \frac{\delta_1}{2^m} \to 0 \quad (m,n \to \infty)$ であるから $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．X は完備であるから $\{x_n\}$ は収束する．$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ とする．$x_* \in F_N$ なる N が存在する．$\mathrm{Cl}(B(x_N,\delta_N)) \subset X \setminus F_N$ であり，$\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ は閉集合 $\mathrm{Cl}(B(x_N,\delta_N))$ の収束点列であるから，$x_* \in \mathrm{Cl}(B(x_N,\delta_N)) \subset X \setminus F_N$ となる．これは矛盾.

$\boxed{6}$ (1) 斉次式であることから可約であれば，$x^2 + xy + y^2 = (x - ay)(x - by) \quad (a,b \in F)$ とできる．$x^2 + xy + y^2 = x^2 - (a+b)xy + abx^2$ となるから，$a + b = -1, ab = 1$ より $a^2 + a + 1 = 0$ をみたす．また $b = a^2$ である．よって可約であれば $x^2 + xy + y^2 = (x - \varepsilon y)(x - \varepsilon^2 y)$ となる ε が存在して $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ を満たす.

逆に $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ をみたす $\varepsilon \in F$ が存在すれば，可約である．

$\mathrm{ch}F \neq 3$ のとき．$\varepsilon \neq 1$ である．φ: $F^2 \to F^2; (x,y) \mapsto (x - \varepsilon y, x - \varepsilon^2 y)$ とする．φ は加法群として準同型である．$x - \varepsilon y = 0 = x - \varepsilon^2 y$ となるとき，$\varepsilon \neq 1$ より $y = 0, x = 0$ となる．よって φ は単射であるから，全単射である．任意の $a \in F^\times$ に対して $uv = a$ なら $u = av^{-1}$ である．したがって $uv = a$ となる (u,v) の組は $|F| - 1$ 個である．$a = 0$ なら $u = 0$ または $v = 0$ であるから $2|F| - 1$ 個である．φ が全単射であるから，これが求める解の個数.

$\mathrm{ch}F = 3$ のとき．$\varepsilon = 1$ より $x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 = a$ である．よって $a = 0$ なら解は $\{(x,x) \in F^2 \mid x \in F\}$ より $|F|$ 個である．$a \neq 0$ なら二乗して a になる数が存在するとき, $\mathrm{ch}F \neq 2$ より解は 2 個あるから $2|F|$ 個で

ある．存在しないなら 0 個である．

(2)F の位数を q とする．既約であるから ch$F \neq 3$ である．すなわち $3 \nmid q$ である．また $3 \mid q-1$ なら乗法群は巡回群であるから，位数 3 の元 ε が存在する．このとき $\varepsilon^3-1=0$ であり，$\varepsilon \neq 1$ であるから $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ である．これは既約性に矛盾．よって $3 \nmid q-1$ である．

$a=0$ のとき．解 $(x,y) \neq (0,0)$ を持つと仮定する．対称性から $y \neq 0$ としてよい．$x=\varepsilon y$ を満たす $\varepsilon \in F$ が存在する．このとき $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ となり，既約性に矛盾．したがって解は 1 個である．

$a \neq 0$ のとき，$\varepsilon^2+\varepsilon+1$ をみたす ε を F に添加した拡大体 $K := F(\varepsilon)$ を考える．$\varepsilon^q = \varepsilon^2$ である．K は F 上の 2 次元ベクトル空間であるから，任意の $z \in K$ は $z = \alpha - \varepsilon\beta \quad (\alpha, \beta \in F)$ と一意にあらわせる．$z^{q+1} = zz^q = (\alpha-\varepsilon\beta)(\alpha-\varepsilon^2\beta) = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ である．したがって $\phi\colon K^\times \to F^\times; z \mapsto z^{q+1}$ は群準同型である．$K^\times = \langle g \rangle$ となる g が存在する．$z \in ker\phi$ について $g^k = z$ なる k が存在する．$(g^k)^{q+1} = 1$ より $(q^2-1) \mid k(q+1)$ である．これをみたす $0 \leq k < q^2-1$ は $0, q-1, 2(q-1), \cdots, q(q-1)$ の $q+1$ 個である．したがって $|ker\phi| = q+1$ である．よって $|\operatorname{Im}\phi| = |q^2-1|/|\ker\phi| = q-1 = |F^\times|$ である．よって ϕ は全射である．以上より $0 \neq a \in F$ に対して $\phi^{-1}(a) \ni z = \alpha+\beta\varepsilon$ とすれば，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = a$ であり，$K^\times$ の元は $F^2 \setminus \{(0,0)\}$ と一対一対応するから，解の個数は $q+1$ である．

(3) 単射にならない a を考える．$f(x)=f(y)$ かつ $x \neq y$ とする．$x^3+ax = y^3+ay$ より $(x-y)(x^2+xy+y^2) = -a(x-y)$ であるから $x^2+xy+y^2 = -a$ である．

$3 \mid (q+1)$ のとき，すなわち x^2+xy+y^2 が既約なとき，$a \neq 0$ なら $x^2+xy+y^2=-a$ を満たす (x,y) は $q+1$ 個あるから，$x \neq y$ となる解も存在する．よって単射でない．$a=0$ なら解は $(0,0)$ のみであるから単射.

$3 \mid q$ のとき，(1) から $a=0$ あるいは二乗して $-a$ になる数が存在しないときに単射，それ以外は単射でない.

$3 \mid (q-1)$ のとき，$a=0$ なら単射でない．$a \neq 0$ で単射な a が存在すると仮定する．解の個数が $q-1$ であり，$(0,0)$ は解でないから解は $(x,x) \quad (x \in F^\times)$ である．すなわち $x^2+x^2+x^2=-a$ より $x^2 = -3^{-1}a \quad (x \in F^\times)$ である．二次方程式であるから解は重複を含めて 2 個．よって $q-1 = |F^\times| \leq 2$ である．$3 \mid (q-1)$ よりこれを満たす $q \geq 2$ は存在しない．したがって $a \neq 0$ なら単射でない.

$\boxed{7}$ 帰納法でとく．$n=1$ は明らか．$n-1$ 以下で成立すると仮定する．H_{n-1} を $n-1$ 次正方行列ですべての主小行列式が非零な行列な行列とする．下三角行列 P_{n-1} と上三角行列 Q_{n-1} を用いて $H_{n-1} = P_{n-1}Q_{n-1}$ とできる．$0 \neq \det H_{n-1} = \det P_{n-1} \det Q_{n-1}$ であるから，$\det P_{n-1} \neq 0, \det Q_{n-1} \neq 0$ である．

$$H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & a \\ b^T & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & 0 \\ b^T Q_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{n-1} & P_{n-1}^{-1}a \\ 0 & c - b^T Q_{n-1}^{-1} P_{n-1}^{-1} a \end{pmatrix} = P_n Q_n$$

とすれば，P_n は下三角行列であり，Q_n は上三角行列である．