0.1 H11 数学選択

$\boxed{7}$ Galois 群が推移的なとき．$f(x)$ が可約であると仮定する．$f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)$ と $K[x]$ 上で既約分解される．g_1 の根 α と g_2 の根 β を任意にとって固定する．$f(x)$ の最小分解体を F で表す．推移的であるから $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$ で $\sigma(\alpha) = \beta$ となるものが存在する．このとき $\sigma(g_1)(\beta) = \sigma(g_1(\alpha)) = 0$ であるから $\sigma(g_1)$ は β を根にもつ．よって $\sigma(g_1)$ と g_2 は共に β の最小多項式と同伴である．$g_1 \in K[x]$ より $\sigma(g_1) = g_1$ であるから g_1 と g_2 は同伴である．このとき α は g_1, g_2 のどちらの根でもあるがこれは f の分離性に矛盾.

$f(x)$ が $K[x]$ 上で既約であるとき．$f(x)$ の 2 根 α, β をとって固定する．$\mathrm{Gal}(F/K)\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ とする．$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ とする．このとき $\mathrm{Gal}(F/K)g(x) = g(x)$ より $g(x) \in K[x]$ である．$g(x)$ の根は α の共役であるから $g(x) \mid f(x)$ である．既約性から $cg(x) = f(x) \quad (c \in K)$ とできる．これは $\mathrm{Gal}(F/K)$ が推移的であることを意味する.

$\boxed{8}$ (1)$f(x,y) = \sum a_{ij}x^iy^j$ とできる．$f(tx,ty) = \sum a_{ij}t^{i+j}x^iy^j = t^nf(x,y) = \sum a_{ij}t^nx^iy^j$ である．$K(x,y)[t]$ における等式とみれば $\sum_{i+j=k} a_{ij}t^kx^iy^j = 0, \quad (k \neq n)$ である．したがって $a_{ij} = 0 \quad (i+j \neq n)$ である．よって $f(x) = \sum\limits_{i+j=n} a_{ij}x^iy^j$ である.

$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\sum\limits_{i+j=n} a_{ij}ix^{i-1}y^j + y\sum\limits_{i+j=n} a_{ij}jx^iy^{j-1} = \sum\limits_{i+j=n} a_{ij}(i+j)x^iy^j = nf(x,y)$ である.

(2)$f(tx,ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2+xy+y^2) = t^2f(x,y)$ である．したがって (1) より $2f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ である.

よって $J_f = (f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ である.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by, \frac{\partial f}{\partial y} = 2bx + 2cy$ であるから $J_f = (2ax+2by, 2bx+2cy)$ である.

$a = b = 0$ のとき．$J_f = (y)$ より $\mathbb{C}[x,y]/J_f \cong \mathbb{C}[x]$ である．これは無限次元．$b = c = 0$ のときも同様.

$a = c = 0, b \neq 0$ のとき．$J_f = (x,y)$ である．$\mathbb{C}[x,y]/J_f \cong \mathbb{C}$ である．これは有限次元.

$a = 0, b \neq 0 \neq c$ のとき．$J_f = (2by, 2bx+2cy) = (x,y)$ である．$\mathbb{C}[x,y]/J_f \cong \mathbb{C}$ である．これは有限次元. $c = 0, a \neq 0 \neq b$ のときも同様.

$b = 0, a \neq 0 \neq c$ のとき．$J_f = (2ax, 2cy) = (x,y)$ である．よって有限次元.

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ のとき．$J_f = (\frac{a}{b}x + y, x + \frac{c}{b}y)$ である．$(\frac{a}{b}x + y) - \frac{a}{b}(x + \frac{c}{b}y) = (1 - \frac{ac}{b^2})y$ より $J_f = (ax+by, (1-\frac{ac}{b^2})y)$ である.

ここで $1 - \frac{ac}{b^2} = 0$ ならば $J_f = (ax+by)$ より $\mathbb{C}[x,y]/J_f \cong \mathbb{C}[y]$ である．これは無限次元.

$1 - \frac{ac}{b^2} \neq 0$ ならば $J_f = (x,y)$ より有限次元.

以上より f が有限次元である条件は $ac \neq b^2$ である.