0.1　2006 午前

$\boxed{1}$ (1)$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-1\\1-a-b\end{pmatrix}=(a+b-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ より $a+b-1$ は固有値で $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトル.

$A-(a+b-1)E=\begin{pmatrix}1-b & 1-b\\1-a & 1-a\end{pmatrix}$ である．$A\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(1-b)+(1-a)(1-b)\\(1-a)(1-b)+b(1-a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}$ である．よって 1 は固有値で $\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトル.

$P=\begin{pmatrix}1 & 1-b\\-1 & 1-a\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a+b-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ である．すなわち対角化可能である.

(2)$-1<a+b-1<1$ であるから，$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}(a+b-1)^n & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ である．よって $A^n=\frac{1}{2-(a+b)}P(P^{-1}AP)^nP^{-1}\to\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1 & 1-b\\-1 & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & b-1\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1-b & 1-b\\1-a & 1-a\end{pmatrix}$ である.

(3)$v_n=A^nv_1$ より $\lim v_n=(\lim A^n)v_1=\frac{1}{2-(a+b)}\begin{pmatrix}1-b & 1-b\\1-a & 1-a\end{pmatrix}v_1\neq 0$ であるから $v_1\neq k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{R})$ なら 0 に収束しない.

$\boxed{2}$ (1) $\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}$ が共に $Ax=b$ の解であるから，$v_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ とすると，$Av_1=0$ である.

したがって $Av_1=\begin{pmatrix}2-3\alpha+\beta\\4-3\beta+10-\alpha\\2\alpha-12+\beta+4\\0\end{pmatrix}=0$ である．よって $\alpha=2,\beta=4$ である.

(2)$b=A(\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix})=A\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\2 & 4 & 10 & 2\\2 & 4 & 4 & -4\\1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\26\\2\\5\end{pmatrix}$

(3)A を簡約化すると，$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & -4 & -4\\0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ である．よって $\dim\operatorname{Im}A=2$ であり，基底は $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\10\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ である.

(4)$\dim\ker A = 2$ であり，基底は $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

(5) 解を x_0 とする．$Ax_0 = c \neq 0$ より $x_0 \neq 0$ である．

$Ax = 0$ の解 x について $A(x + x_0) = c$ であるから，$Ax = 0$ の解全体を V とすれば $V + x_0$ は $Ax = c$ の解空間の部分集合である．逆に $Ax = c$ の解 y をとると，$A(y - x_0) = 0$ より $y \in V + x_0$ である．

よって $Ax = c$ の解空間は V の平行移動であり，V の基底は $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$n > 2006 \cdot 2$ とすれば $\frac{2006}{n} < \frac{1}{2}$ である．したがって $0 \leq \lim \frac{2006^n}{n!} \leq \lim (2006)^{2006\cdot 2} \frac{1}{2^{n-2006\cdot 2}} = 0$ より $\lim \frac{2006^n}{n!} = 0$ である．

(2)$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$ とできる．ここで $R_2(x) = \frac{e^c}{6}x^3 \quad (0 < c < x)$ である．よって $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{25} = 1.22$ であり，$R_2(\frac{1}{5}) < \frac{e^{\frac{1}{5}}}{6}\frac{1}{5^3} \leq \frac{1}{2\cdot 5^3} = \frac{1}{250}$ である．よって $1.22 < e^{\frac{1}{5}} \leq 1.22 + \frac{1}{250} = 1.224$ である．よって小数以下 2 桁目までは 1.22 である．

(3)$\frac{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}{(x^{11})^{\frac{1}{10}}} = (1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{10}} \to 1 \quad (x \to \infty)$ である．よって十分大きな x では $\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}} \leq \frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}$ とできる．

$\int_1^\infty \frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ の収束性は被積分関数が有界区間では有界関数であるから，$M > 1$ として $\int_M^\infty \frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ の収束性と同じ．よって上の不等式から $\int_M^\infty \frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}dx$ の収束性と同値.

$\int_M^n \frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}dx = \left[-10x^{\frac{-1}{10}}\right]_M^n \to 10M^{-\frac{1}{10}} \quad (n \to \infty)$ より収束する．

$\frac{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}{(x^9)^{\frac{1}{10}}} = (x^2+1)^{\frac{1}{10}} \to 1 \quad (x \to 0)$ である．$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{\frac{9}{10}}}dx = \left[\frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}}\right]_\varepsilon^1 \to \frac{1}{10} \quad (\varepsilon \to 0)$ よって上と同様に $\int_0^1 \frac{1}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}dx$ は収束する．

(4)$x = s, x - y = t$ と変数変換する．積分領域は $D' = \left\{(s,t) \;\middle|\; s^2 + t^2 \leq 1\right\}$ となり，ヤコビ行列は $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$ であるから，$\iint_D (x-y)^2 dxdy = \iint_{D'} t^2 dsdt$ である．$s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$ と変数変換すれば，ヤコビアンは r である．よって $\iint_{D'} t^2 dsdt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \sin^2\theta drd\theta = [\frac{1}{4}r^4]_0^1[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$ である．

$\boxed{4}$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2x)(4x^2+2y^2+1) + e^{-x^2-y^2}8x = e^{-x^2-y^2}(-8x^3-4xy^2+6x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4x^2+2y^2+1) + e^{-x^2-y^2}4y = e^{-x^2-y^2}(-8x^2y-4y^3+2y)$$

である．よって $-8x^3 - 4xy^2 + 6x = 2x(-4x^2 - 2y^2 + 3) = 0, -8x^2y - 4y^3 + 2y = 2y(-4x^2 - 2y^2 + 1) = 0$ である．$x = 0$ なら $y = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$y = 0$ なら $x = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である．$x \neq 0 \neq y$ のとき，$3 = 4x^2 + 2y^2 = 1$ となるため，臨界点は存在しない．よって $(0,0), (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ が全ての臨界点である．

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(-8x^3-4xy^2+6x) + e^{-x^2-y^2}(-24x^2-4y^2+6) = e^{-x^2-y^2}(16x^4+8x^2y^2-36x^2-4y^2+6)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(-8x^3-4xy^2+6x) + e^{-x^2-y^2}(-8xy) = e^{-x^2-y^2}(16x^3y+8xy^3-20xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2y)(-8x^2y-4y^3+2y) + e^{-x^2-y^2}(-8x^2-12y^2+2) = e^{-x^2-y^2}(16x^2y^2+8y^4-16y^2-8x^2+2)$$

である．

$(0,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ より正定値対称行列であるから，$(0,0)$ は極小点.

$(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 4e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ となるから $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ は鞍点である.

$(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} -12e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$ であるから負定値対称行列．よって $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ は極大点.

(3)$\mathbb{R}^2$ 上であるから，最小値，最大値は存在すれば極値である．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると，$f(x,y) = e^{-r^2}(r^2(1+\cos^2\theta)+1) \to 0 \quad (r \to \infty)$ である．したがって $f(0,0) = 1$ は最小値ではないため，最小値は存在しない.

また十分大きな原点中心の閉円板 D をとると，その境界と D の外側では f は 1 より小さな値をとる.．D 上での最大値は極値点か境界でとるから，D 上では $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0) = 4e^{-\frac{3}{4}}$ が最大値．D の外側でも f は 1 を超えないから，$\mathbb{R}^2$ 上で $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0) = 4e^{-\frac{3}{4}}$ は最大値.