0.1 H26 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\varphi\colon \mathbb{C}[x,y]\to\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]$ を $\varphi(x)=z,\varphi(y)=\frac{1}{z}$ として定める．φ は全射準同型である．$\ker\varphi\supset(xy-1)$ は明らか．$f(x,y)\in\ker\varphi$ とする．$f(x,y)=(xy-1)g(x,y)+p(y)\quad(g\in\mathbb{C}[x,y],p\in\mathbb{C}[y])$ とできる．$\varphi(f(x,y))=\varphi(p(y))=p(\frac{1}{z})=0$ である．よって $p=0$ であるから $f(x,y)\in(xy-1)$ である．したがって $\ker\varphi=(xy-1)$ である．

すなわち $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)\cong\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]$ である．

$\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]$ の商体は $\mathbb{C}(z)$ であるから $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$ の商体は $\mathbb{C}(z)$ と同型である．

(2)$\mathbb{C}[z]^\times=\mathbb{C}^\times$ である．

また $\mathbb{C}[z,\frac{1}{z}]^\times=\left\{cz^k \;\middle|\; c\in\mathbb{C}^\times,k\in\mathbb{Z}\right\}\cong\mathbb{C}^\times\times\mathbb{Z}$ である．

すなわち乗法群が異なるから $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1),\mathbb{C}[z]$ は同型でない．

(3)$\varphi\colon \mathbb{C}[x,y]\to\mathbb{C};\varphi(x)=a,\varphi(y)=b$ とする．φ は全射準同型である．$\ker\varphi\supset((x-a),(y-b))$ は明らか．$f(x,y)\in\ker\varphi$ とする．$f(x,y)=(x-a)g_1(x,y)+(y-b)g_2(y)+r\quad(g_1,g_2\in\mathbb{C}[x,y],r\in\mathbb{C})$ とできる．$\varphi(f(x,y))=r=0$ である．よって $f(x,y)\in((x-a),(y-b))$ である．したがって $\ker\varphi=((x-a),(y-b))$ である．

すなわち $\mathbb{C}[x,y]/((x-a),(y-b))\cong\mathbb{C}$ であるから $((x-a),(y-b))$ は極大イデアルである．

(4)$xy-1\in((x-a),(y-b))$ なら $xy-1=(x-a)g_1(x,y)+(y-b)g_2(x,y)$ とできる．$x=a,y=b$ として $ab=1$ である．

逆に $ab=1$ なら $xy-ab=(x-a)y+(y-b)a$ とできるから $xy-1\in((x-a),(y-b))$ である．すなわち $ab=1$ が必要十分条件.

$\boxed{\text{B}}$ (1)$\mathbb{Z}$ は UFD でありその商体は $\mathbb{Q}$ であるから $\mathbb{Z}[x]$ 上既約な多項式は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．

x^4-2 はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[x]$ 上既約である．よって $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．

(2)x^4-2 が $\sqrt[4]{2}$ の最小多項式であるから $[L:\mathbb{Q}]=4$ である．

(3)$x^4-2=0$ をといて $x=\sqrt[4]{2},i\sqrt[4]{2},-\sqrt[4]{2},-i\sqrt[4]{2}$ が $\sqrt[4]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役である．

(4)$L\subset\mathbb{R}$ より $i\notin L$ であるから $L/\mathbb{Q}$ は正規拡大でない．よって Galois 拡大でない．

(5)L の $\mathbb{Q}$ 上自己同型 σ は $\sqrt[4]{2}$ をその共役に移す．よって $\sigma(\sqrt[4]{2})=-\sqrt[4]{2}$ または id の何れかである．すなわち $G\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

(6)$i\sqrt[4]{2}/\sqrt[4]{2}=i$ であるから $i\in F$ である．よって $F=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$ である．

$\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ は二次拡大であるから $[F:\mathbb{Q}]=8$ である．