0.1　2008 午前

$\boxed{1}$ (1) A を簡約化すると，$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

よって U の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ である．

W の基底は $\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

(2)$b = x_1 w_1 + x_2 w_2$ とする．$\langle a - b, w_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2)$ である．$\langle a - b, w_i \rangle = \langle a, w_i \rangle - x_1 \langle w_1, w_i \rangle - x_2 \langle w_2, w_i \rangle$ であるから，$\langle a, w_1 \rangle - x_1 \langle w_1, w_1 \rangle - x_2 \langle w_2, w_1 \rangle = -3 - 2x_1 + x_2 = 0, \langle a, w_2 \rangle - x_1 \langle w_1, w_2 \rangle - x_2 \langle w_2, w_2 \rangle = 4 + x_1 - 3x_2 = 0$ を解いて $x_1 = -1, x_2 = 1$ である．よって $b = -w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = a - b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

(3)$\|a - w\|^2 = \langle b + c - w, b + c - w \rangle = \langle b - w, b - w \rangle + 2\langle c, b - w \rangle + \langle c, c \rangle = \|b - w\|^2 + \|c\|^2$ である．したがって $w = b$ のときが最小で最小値は $\|c\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\frac{d}{dt}\|x(t)\| = \frac{1}{2} \frac{2x_1 x_1' + 2x_2 x_2' + 2x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\langle x(t), x'(t) \rangle}{\|x(t)\|}$ である．

$\langle x(t), x'(t) \rangle = \langle x(t), Ax(t) \rangle = \langle {}^t Ax(t), x(t) \rangle = -\langle Ax(t), x(t) \rangle = -\langle x(t), Ax(t) \rangle$ より $2\langle x(t), Ax(t) \rangle = 0$ である．よって $\langle x(t), x'(t) \rangle = \langle x(t), Ax(t) \rangle = 0$．すなわち $\frac{d}{dt}\|x(t)\| = 0$ であるから $\|x(t)\|$ は t に依らず一定．

(2)$\det A = \det {}^t A = \det(-A) = (-1)^3 \det A$ より $\det A = 0$ である．よって 0 を固有値として持つ．

(3)$\frac{d}{dt}\langle x(t), v \rangle = \langle Ax(t), v \rangle = \langle x(t), {}^t Av \rangle = \langle x(t), -Av \rangle = -\langle x(t), 0 \rangle = 0$ である．

よって $\langle x(t), v \rangle$ は t に依らず一定．

(4) 任意の t で $\langle x(t) - x(0), v \rangle = 0$ であるから，任意の t が $x(t) - x(0)$ は v と直交するため，$x(t) - x(0)$ は原点を通るある平面上にある．よって $x(t)$ はその平面を $x(0)$ 平行移動させた平面上の点であり，加えて半径 $\|x(t)\|$ の球上の点であるから $x(t)$ は半径 $\|x(t)\|$ の球と平面の共通部分上にある．すなわちある定円周上にある．

$\boxed{3}$ (1)$(a_{n+1} + 1)^2 \geq 0$ であるから $(a_n - 1)^2 \leq 2$ である．したがって $1 - \sqrt{2} \leq a_n \leq 1 + \sqrt{2}$ である．

(2)$(a_{n+1} + 1)^2 + (a_n - 1)^2 \leq 2$ より $a_{n+1}^2 + a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n \leq 0$ である．よって $0 \leq a_{n+1}^2 + a_n^2 \leq 2(a_n - a_{n-1})$ より $a_{n-1} \leq a_n$ である．よって $a_1, a_2, \cdots$ は単調減少数列であるから $\lim_{n \to \infty} a_n$ は存在する．$a_{-1}, a_{-2}, \cdots$ は単調増加数列であるから $\lim_{n \to -\infty} a_n$ は存在する．

(3)$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ とすると，$(\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 \leq 2$ より $2\alpha^2 \leq 0$ であるから $\alpha = 0$ である．また $\lim_{n \to -\infty} a_n = \beta$ とすると，$(\beta + 1)^2 + (\beta - 1)^2 \leq 2$ より $2\beta^2 \leq 0$ であるから $\beta = 0$ である．

$\{a_n\}$ の単調性から ${}^\forall n \in \mathbb{Z}, a_n = 0$ である．

$\boxed{4}$ (1)e^{2x+3y} の原点におけるテイラー展開は $e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + \frac{4}{2}x^2 + \frac{6}{2}xy + \frac{9}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$ である．よって $g(x, y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 3xy + \frac{9}{2}y^2$ である．

(2)(⇒)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial t}y,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial t}x$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=xy\frac{\partial g}{\partial t}-xy\frac{\partial g}{\partial t}=0$$

(⇐) $h(s,t)=h(x,xy)=f(x,y)=f(s,\frac{t}{s})$ で h を定める．$\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{-t}{s^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x-\frac{\partial f}{\partial y}y\right)=0$ より $f(x,y)=h(s,t)=h(t)=h(xy)$ と表せる．

(3)$\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}/r^{2b}=\frac{1}{1+r^{2a}}\to 1\quad(r\to 0)$ である．したがって十分小さい r_0 に対して任意の $r\leq r_0$ で $\frac{1}{2}r^{2b}<\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}<\frac{3}{2}r^{2b}$ である．

よって $\int_0^{r_0}\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ の収束性は $\int_0^{r_0}r^{2b}dr$ の収束性と等しい．$\int_\varepsilon^{r_0}r^{2b}dr=\left[\frac{1}{2b+1}r^{2b+1}\right]_\varepsilon^{r_0}=\frac{1}{2b+1}(r_0^{2b+1}-\varepsilon^{2b+1})$ は $\varepsilon\to 0$ で収束する．

$\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}/r^{2b-2a}=\frac{1}{1+r^{-2a}}\to 1\quad(r\to\infty)$ である．したがって十分大きい R_0 に対して任意の $r\geq R_0$ で $\frac{1}{2}r^{2b-2a}<\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}<\frac{3}{2}r^{2b-2a}$ である．

よって $\int_{R_0}^\infty\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ の収束性は $\int_{R_0}^\infty r^{2b-2a}dr$ の収束性と等しい．$\int_{R_0}^M r^{2b-2a}dr=\begin{cases}\frac{1}{2b-2a+1}\left[r^{2b-2a+1}\right]_{R_0}^M & (2b-2a\neq -1)\\ [\log r]_{R_0}^M & (2b-2a=-1)\end{cases}$ は $2b-2a+1<0$ のときのみ $M\to\infty$ で収束する．

以上より $\int_0^\infty\frac{r^{2b}}{1+r^{2a}}dr$ が収束する条件は $2b-2b+1<0$ である．

(4)$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ と極座標変換すればヤコビアンは r である．$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき，ある定数 $0<C$ をもちいて $\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta\geq C$ である．

$$\int\int_D\frac{x^{2b}+y^{2b}}{1+x^{2a}+y^{2a}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\frac{r^{2b+1}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)\int_0^\infty\frac{r^{2b+1}}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}drd$$

内側の積分を考える．$\frac{r^{2b+1}}{1+r^{2a}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}/r^{2b+1-2a}\to\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta>C>0\quad(r\to\infty)$ である．(3) から $2b+1-2a+1<0$ すなわち $b-a+1<0$ で収束する．このとき θ に関する積分も有界関数の有界領域上の積分であるから収束する．したがって $b-a+1<0$ で $\int\int_D\frac{x^{2b}+y^{2b}}{1+x^{2a}+y^{2a}}dxdy$ は収束する．