0.1 H13 数学選択

$\boxed{\mathrm{N}}$ (1)$t^4-zt^2+1=(t-x)(t+x)(t-\frac{1}{x})(t+\frac{1}{x})$ であるから $K(x)/K(z)$ は正規拡大．ch$K\neq 2$ より $x\neq\frac{1}{x}$ より t^4-zt^2+1 は分離多項式．よって x が $K(z)$ 上分離的であるから $K(z)/K(x)$ が Galois 拡大.

(2)t^2-ty+1 は $K(y)$ 上の x の最小多項式であり，根は $x,\frac{1}{x}$ である．よって $K(y)/K(x)$ は Galois 拡大であるから $\mathrm{Aut}(K(y)/K(x))=\mathrm{Gal}(K(y)/K(x))$ である．よって位数は 2 である．

ch$K\neq 2$ なら $K(x)/K(z)$ は Galois 拡大であった．$K(y)$ が非自明な中間体となるから $[K(x):K(z)]=4$ である．よって $\mathrm{Aut}(K(x)/K(z))$ の位数は 4 である．

ch$K=2$ なら $K(x)/K(z)$ は正規拡大であるが分離拡大でない．したがって $\sigma(x)=\frac{1}{x}$ と id の 2 個が $\mathrm{Aut}(K(x)/K(z))$ の元である．位数は 2.

$\boxed{\mathrm{O}}$ (1)$m_{(a,b)}\subsetneq J$ なるイデアル J が存在すると仮定する．$f(x,y)\in J\setminus m_{(a,b)}$ となる $f(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ をとる．$f(x,y)=g(x,y)(x-a)+h(y)(y-b)+r$ となる $g(x,y)\in\mathbb{C}[x,y],h(y)\in\mathbb{C}[y],r\in\mathbb{C}$ が存在する．このとき $r\in J$ より $J=\mathbb{C}[x,y]$ である．よって $m_{(a,b)}$ は極大イデアルである．

(2)$\phi(x^3-y^2)=0$ より $\ker\phi\supset(x^3-y^2)$ である．$f(x,y)\in\ker\psi$ に対して $f(x,y)=g(x,y)(x^3-y^2)+h_1(x)y+h_2(x)$ となる $g(x,y)\in\mathbb{C}[x,y],h_1(x),h_2(x)\in\mathbb{C}[x]$ が存在する．

$0=f(t^3,t^2)=h_1(t^2)t^3+h_2(t^2)$ であるから $-h_1(t^2)t^3=h_2(t^2)$ である．右辺の t の次数は偶数であるから，$h_1=0$ である．よって $h_2=0$ より $f(x,y)\in(x^3-y^2)$ である．すなわち $\ker\psi=(x^3-y^2)$ である．

(3)$\psi(m_{(a,b)})=(t^3-a,t^2-b)$ である．

$b=0$ のとき．$(t^3-a,t^2-b)=(t^3-a,t^2)=(a,t^2)=\begin{cases}(t^2) & a=0\\ (1) & a\neq 0\end{cases}$ である．

$b\neq 0$ のとき．$(t^3-a,t^2-b)=(-a-bt,t^2-b)=(\frac{a}{b}+t,t^2-b)=(\frac{a}{b}+t,\frac{a^2}{b^2}-b)=\begin{cases}(\frac{a}{b}+t) & a^2=b^3\\ (1) & a^2\neq b^3\end{cases}$ である．