0.1 H21elective

$\boxed{\mathrm{A}}$ (1)$\tau^2 = \mathrm{id}$ であり $\sigma^2(a) = -a-b, \sigma^2(b) = a$ より $\sigma^3 = \mathrm{id}$ である．$\tau\circ\sigma\circ\tau(a) = \tau\circ\sigma(b) = \tau(-a-b) = -a-b = \sigma^2(a), \tau\circ\sigma\circ\tau(b) = \tau\circ\sigma(a) = \tau(b) = \sigma^2(b)$ である．

よって $\tau\circ\sigma\circ\tau = \sigma^{-1}$ となるから $G \cong D_3 \cong S_3$ である．

(2)$\tau(p) = p, \tau(q) = q, \sigma(p) = b(-a-b) + b^2 + (-a-b)^2 = ab + a^2 + b^2 = p, \sigma(q) = -b(-a-b)(b-a-b) = -ab(a+b) = q$ である．よって G 不変.

(3)$s_1 = a+b, s_2 = ab$ とする．$\tau(s_1) = s_1, \tau(s_2) = s_2$ である．τ 不変な元は対称式である．対称式は基本対称式の多項式として表せるから $\mathbb{C}[s_1, s_2]$ が H 不変な元からなる環である．

(4)$h(s_1, s_2) = (s_1^2 - s_2, -s_1 s_2)$ とすれば $h\circ g(a,b) = h\circ(a+b, ab) = (ab + a^2 + b^2, -ab(a+b)) = f(a,b)$ である．

(5)$\mathbb{C}[P, X]$ は UFD であるから $X^3 - PX - Q$ の既約性はその商体 $\mathbb{C}(P, X)$ における既約性と等しい．$\mathbb{C}(P, X)[Q]$ は体上の多項式環であるから PID である．$\varphi\colon \mathbb{C}(P,X)[Q] \to \mathbb{C}(P,X); Q \mapsto X^3 - PX$ とすればこれは環準同型である．$\mathbb{C}(P,X)[Q]/(X^3 - X - Q) \cong \mathbb{C}(P,X)$ より $(X^3 - PX - Q)$ は素イデアル．したがって $X^3 - PX - Q$ は既約である．

よって $X^3 - PX - Q$ は $\mathbb{C}[P,X][Q] = \mathbb{C}[P,Q,X]$ 上で既約.

(6)$X^3 - (ab + a^2 + b^2)X + ab(a+b) = X^3 - (S_1^2 - S_2)X + S_1 S_2 = (X + S_1)(X^2 - S_1 X + S_2) = (X + a + b)(X^2 - (a+b)X + ab)$ となるから既約でない．

$\boxed{\mathrm{B}}$ (1)$x^p - q$ はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[x]$ 上既約である．$\mathbb{Z}$ は UFD であるから $\mathbb{Q}[x]$ 上でも既約．$\zeta_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ とすると，根は $\zeta_p^i \sqrt[p]{q} \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1)$ である．

また $\zeta_p \sqrt[p]{q}/\sqrt[p]{q} = \zeta_p$ であるから $\zeta_p \in K$ である．よって $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{q})$ である．

(2)$\mathbb{Q}(\zeta_p)/Q$ は Galois 拡大であり，Galois 群は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ で与えられる．また $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})/\mathbb{Q}$ は p 次拡大である．$\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})\cdot\mathbb{Q}(\zeta_p) = K$ となるから $K/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ は p 次拡大である．よって $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である．$G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とすれば $\mathbb{Q}(\zeta_p)/Q$ は Galois 拡大であるから $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \triangleleft G$ である．また推進定理より $K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})$ は Galois 拡大で $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ である．

$\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})/\mathbb{Q}$ は非自明な中間体をもたないから $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_p) = \mathbb{Q}$ である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cap \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) = \mathrm{Gal}(K/K) = 1$, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p))\cdot\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = G$ である．よって $G \cong \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \rtimes \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$