0.1　2007 午前

$\boxed{1}$ (1)A を簡約化すると，$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} A = 2$ である．

(2)$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$ $(\lambda-1)(\lambda+1)(2-\lambda) - ((2-\lambda) + 2(\lambda-2)) = (\lambda-1)(\lambda+1)(2-\lambda) - (\lambda-2) = (2-\lambda)\lambda^2$ である．よって固有方程式は $\lambda^2(2-\lambda) = 0$ である．

(3) 固有値 $\lambda = 0$ の固有空間は A の rank が 2 であることから 1 次元である．したがって重複度と一致しないため，対角化不可能.

$\boxed{2}$ (1)$\phi_r(kA+B) = (kA+B) + r({}^t(kA+B)) = (kA+B) + rk{}^tA + r{}^tB = \phi_r(kA) + \phi_r(B)$ である．よって線形変換.

(2)E_{ij} を (i,j) 成分が 1 でそれ以外が 0 の行列とする．このとき，$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ は V の基底である．

$\phi_r(E_{ij}) = E_{ij} + rE_{ji}$ であるから ϕ_r の表現行列は $X = \begin{pmatrix} 1+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+r \end{pmatrix}$ である．

X を簡約化すると，$X \to \begin{pmatrix} 1+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1-r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+r \end{pmatrix}$ である．

よって $r \neq \pm 1$ のとき $\operatorname{rank} X = 4$ より $\dim\ker\phi_r = 0$ である．$r = 1$ のとき, $\operatorname{rank} X = 3$ より $\dim\ker\phi_y = 1$ である．$r = -1$ のとき，$\operatorname{rank} X = 1$ より $\dim\ker\phi_r = 3$ である．

(3)$\dim V - \dim\ker\phi_r = \dim\operatorname{Im}\phi_r$ である．よって $r \neq \pm 1$ のとき $\dim\ker\operatorname{Im}_r = 4$ である．$r = 1$ のとき，$\dim\operatorname{Im}\phi_r = 3$ である．$r = -1$ のとき，$\dim\operatorname{Im}\phi_r = 1$ である．

$\boxed{3}$ (1)$x = \frac{s+t}{2}, y = \frac{s-t}{2}$ より $R' = \left\{(s,t) \;\middle|\; a \leq s \leq b, \frac{s+t}{2} \geq 0, \frac{s-t}{2} \geq 0\right\}$ にうつる．またヤコビ行列の行列式は $-\frac{1}{2}$ である．

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxxy &= \iint_{R'} \frac{\frac{s^2+t^2}{2}}{s^3} \frac{1}{2} dsdt = \frac{1}{4}\int_a^b \int_{-s}^s \frac{s^2+t^2}{s^3} dtds = \frac{1}{4}\int_a^b \frac{1}{s^3}\left(\left[s^2t + \frac{1}{3}t^3\right]_{-s}^s\right) ds \\ &= \frac{1}{4}\int_a^b \frac{8}{3} ds = \frac{2}{3}(b-a)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{2}\end{aligned}$$

である．よって $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 4\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}$ である．すなわち $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} g = 0$ が成り立つ．

よって $\frac{\partial}{\partial t} g$ は s についての定数関数である．したがって $\frac{\partial}{\partial t} g(s,t) = g_2(t)$ なる関数 g_2 が存在する．t について積分すれば $g(s,t) = f_1(s) + f_2(t)$ とできる．ここで f_2 は g_2 の不定積分の一つであり，f_1 は積分定数である．よって $f(x,y) = f_1(x+y) + f_2(x-y)$ と表せる．

$\boxed{4}$ (1)$u(x)$ は $v(x)$ が正値関数のため，狭義単調増加な連続関数であり極限が無限大に発散するから u は全単射である．$u(x) = t$ で変数変換できて，$dt = u'(x)dx = v(x)dx$ である．したがって $\int_1^R u(x)^\alpha v(x)dx = \int_{u(1)}^{u(R)} t^\alpha dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_{u(1)}^{u(R)} & (\alpha \neq -1) \\ \left[\log t\right]_{u(1)}^{u(R)} & (\alpha = -1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(u(R)^{\alpha+1} - u(1)^{\alpha+1}) & (\alpha \neq -1) \\ \log u(R) - \log u(1) & (\alpha = -1) \end{cases}$ である．よって $\alpha + 1 < 0$ のときのみ，$u(R) \to \infty$ で収束する．それ以外では発散する．すなわち $\alpha < -1$ のときのみ $R \to \infty$ で収束し，それ以外では発散する．