0.1 H24 数学選択

$\boxed{\text{B}}$ (1)$H \subset G \subset GL(2, \mathbb{F}_p)$ は明らか．$G \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$G \ni B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $BA^{-1} = \begin{pmatrix} c/a & -cb/a + d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ より $G \leq GL(2, \mathbb{F}_p)$ である．

$a = c = 1$ のとき $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b + d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ であるから $H \leq G$ である．

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ac + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ より $H \triangleleft G$ である．

(2)L/K が Galois 拡大 $\Leftrightarrow \mathrm{Gal}(F/L) \triangleleft \mathrm{Gal}(F/K)$ である．

$S = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{F}_p^\times \right\}$ とする．

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -bc + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin S$ より $S \triangleleft G$ でない．よって S に対応する中間体 L は L/K が Galois 拡大でない．

(3)$\mathrm{Gal}(F/M) \cong H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であり $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は非自明な部分群をもたないから F/M は非自明な中間体を持たない．

(4)$\mathrm{Gal}(M/K) \cong \mathrm{Gal}(F/K)/\mathrm{Gal}(F/M) \cong G/H$ である．

$G \to \mathbb{F}_p^\times ; \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$ とすれば全射準同型であり核は H であるから $G/H \cong \mathbb{F}_p^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ である．

$a \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対して $\gcd(a, p-1) = d$ とすれば $ab + c(p-1) = d$ となる $b, c \in \mathbb{Z}$ が存在するから $\langle a \rangle = \langle d \rangle$ である．よって $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の部分群は $p-1$ の正の約数の個数ある．

すなわち M/K の中間体の個数も $p-1$ の正の約数の個数ある．

$\boxed{\text{D}}$ $\partial_0 \circ \partial_1 = 0, \partial_1 \circ \partial_2 = 0, \partial_2 \circ \partial_3 = 0$ である．$(\because \partial_1 = 0, \partial_3 = 0)$

(1)$\partial_2 = 0$ なら，${}^\forall i \in \{0,1,2,3\}, \partial_i = 0$ である．

$\mathrm{Ker}\,\partial_i = C_i, \mathrm{Im}\,\partial_i = 0$ であるから $H_i \cong C_i$ である．

(2)$\ker \partial_2 = 0, \mathrm{Im}\,\partial_2 = \langle (2,0) \rangle_{\mathbb{Z}}$ である．よって $H_2 = 0, H_1 = \mathbb{Z}^2/\langle (2,0) \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H_0 = C_0$ である．

(3)$p = q = 0$ なら (1) と同じ．

$pq \neq 0$ なら (2) と同様にして $H_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ である．