0.1 H30 数学選択

$\boxed{\mathrm{A}}$ (1)$\phi(f+g)=f(1,z)+g(1,z)+(z^2)=\phi(f)+\phi(g)$ である．$\phi(fg)=f(1,z)g(1,z)+(z^2)=\phi(f)\phi(g)$ である．$\phi(1)=1+(z^2)=1_B$ である．よって ϕ は環準同型である．

(2)$\phi(x-1)=\phi(y^2)=0$ である．$f\in\ker\phi$ について $f(x,y)=(x-1)g(x,y)+y^2h(y)+ya+b$ とできる．$\phi(f)=0$ より $\phi(f)=az+b=0$ すなわち $\mathbb{Q}[z]$ のもとで $az+b\in(z^2)$ である．次数を考えれば $a=b=0$ がわかる．よって $\ker\phi=(x-1,y^2)$ である．

(3)$\mathbb{Q}[z]$ は PID であるから任意のイデアルは $(p(x))$ と書ける．自然な全射準同型 $\pi\colon\mathbb{Q}[z]\to B$ によってイデアルが対応する．$\pi((p(x)))\neq 0$ であるためには $(p(x))\supset(z^2)$ が必要．したがって $p(x)=1,z$ の像のみが B の (0) でないイデアルである．すなわち $B,(z)$ が B の (0) でないイデアルで，$(0),(z),B$ が求める相異なるイデアル．

(4) 存在すると仮定するとイデアルの対応定理から $0\subsetneq\phi(J)\subsetneq(z)$ となる．(3) から $\phi(J)=(0),(z),B$ のいずれかである．このうち $\phi(I)=0\subsetneq\phi(J)\subsetneq(z)=\phi(I+(y))$ を満たすものは存在しない．これは矛盾．

$\boxed{\mathrm{B}}$ (1)$\omega=e^{2\pi i/3}$ とする．$X^6-8=(X-\sqrt{2})(X-\sqrt{2}\omega)(X-\sqrt{2}\omega^2)(X+\sqrt{2})(X+\sqrt{2}\omega)(X+\sqrt{2}\omega^2)$ である．

(2)$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ である．よって $F=\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{2})$ である．$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=2$ は明らか．$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbb{R}$ であり，$\sqrt{-3}\notin\mathbb{R}$ であるから $[\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})]=2$ である．よって $[F:\mathbb{Q}]=4$ である．

(3)$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\cdot\mathbb{Q}(\sqrt{-3})=F,\mathbb{Q}(\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{-3})=\mathbb{Q}$ であるから推進定理より $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})\times\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

(4)$F,\mathbb{Q}$ 以外の中間体は $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の真部分群に対応する．したがって 3 個あり，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\mathbb{Q}(\sqrt{-3}),\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt{-3})=\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ である．