

0.1 R5 数学選択

[A] (1) (a) K のイデアル I が $a \in K^\times \cap I$ をもつなら $1 \in I$ より $I = K$ である. よって K のイデアルは $(0), K$ である.

(b) $\ker \rho = F$ なら $\rho|_K = \text{id}$ に矛盾. よって $\ker \rho = (0)$ より ρ は単射である.

F, F' は体 K 上の有限次ベクトル空間とみなせる. $\rho: F \rightarrow F'$ が $\rho|_K = \text{id}$ なら ρ はベクトル空間の単射準同型写像である. よって $[F:K] = \dim_K F \leq \dim_K F' = [F':K]$ である.

(2) (a) $X^4 - 25X = X(X^3 - 25)$ である. $X^3 - 25$ の根は $\sqrt[3]{5}^2, \sqrt[3]{5}^2\omega, \sqrt[3]{5}^2\omega^2$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$) である.

よって $\sqrt[3]{5}^2\omega/\sqrt[3]{5}^2 = \omega \in F$ である. $X^3 - 25$ はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Z}[X]$ 上既約である. \mathbb{Z} は UFD でその商体は \mathbb{Q} であり, $X^3 - 25$ は原始多項式であるから $X^3 - 25$ は $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である. よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2):\mathbb{Q}] = 3$ である. $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ であり, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2) \subset \mathbb{R}$ であるから $\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)$ である. $X^2 + X + 1$ が ω の最小多項式であるから $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)(\omega):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^2)] = 2$ である. よって $[F:\mathbb{Q}] = 6$ である.

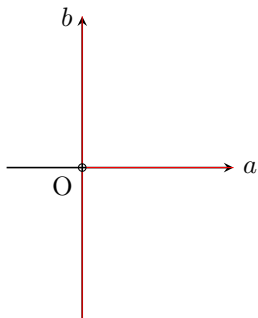
(b) $X^4 - 14X^2 - 14$ について $t = X^2$ とすれば $t^2 - 14t - 14$ であり根は $7 \pm \sqrt{7^2 + 14} = 7 \pm 3\sqrt{7}$ である. よって P の根は $\pm\sqrt{7 \pm 3\sqrt{7}}$ である. $\sqrt{7+3\sqrt{7}}\sqrt{7-3\sqrt{7}} = \sqrt{-14} \in F$ である.

$\sqrt{7+3\sqrt{7}} \in \mathbb{R}$ であるから $\sqrt{-14} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{7+3\sqrt{7}})$ である. よって $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7+3\sqrt{7}})(\sqrt{-14})$ である. P はアイゼンシュタインの既約判定法から $\mathbb{Q}[X]$ 上既約である. したがって $[\mathbb{Q}(\sqrt{7+3\sqrt{7}}):\mathbb{Q}] = 4, [\mathbb{Q}(\sqrt{7+3\sqrt{7}})(\sqrt{-14}):\mathbb{Q}(\sqrt{7+3\sqrt{7}})] = 2$ であるから $[F:\mathbb{Q}] = 8$ である.

[B] (1) p を素元とする. $p = ab$ と表せるとき, $ab \in (p)$ であり, (p) は素イデアルであるから $a \in (p)$ または $b \in (p)$ である. $a \in (p)$ として一般性を失わない. $a = pc$ とかける. よって $p = pcb$ である. すなわち $p(1 - cb) = 0$ である. p は素元であるから $p \neq 0$. よって整域であるから $1 - cb = 0$ より $bc = 1$ すなわち b は単元である. よって p は既約元.

(2) $b \neq 0$ のとき, $I_{a,b} = (x^2 + ay^2, bx) = (x^2 + ay^2, x) = (ay^2, x)$ である. $\mathbb{R}[x, y]/I_{a,b} \cong \mathbb{R}[y]/(ay^2)$ である. $ay^2 = ay \cdot y$ であるから整域となるのは $a = 0$ のときのみ.

$b = 0$ のとき, $I_{a,b} = (x^2 + ay^2)$ である. $a \leq 0$ なら $x^2 + ay^2 = (x - \sqrt{-ay})(x + \sqrt{-ay})$ であるから $\mathbb{R}[x, y]/I_{a,b}$ は整域でない. $a > 0$ のとき, $(x^2 + ay^2)$ は $\mathbb{R}[x][y]$ 上可約なら, 係数環が UFD であるからその商体上の多項式環 $\mathbb{R}(x)[y]$ 上可約である. よって $x^2 + a(\frac{f(x)}{g(x)})^2 = 0$ となる $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する. $g(x_0) \neq 0$ なる $x_0 \neq 0$ について $x_0^2 + a(\frac{f(x_0)}{g(x_0)})^2 > 0$ となり矛盾. よって既約である. したがって素イデアル.



(3) 素イデアル \mathfrak{p} が全ての $I_{a,b}$ を含むとする. $x \in I_{a,1}$ であるから $x \in \mathfrak{p}$ である. また $y^2 \in I_{1,1}$ であるから $y^2 \in \mathfrak{p}$ である. よって $(x, y^2) \subset \mathfrak{p}$ である. 逆にイデアル J について $(x, y^2) \subset J$ なら J は全ての $I_{a,b}$ を含む. (x, y^2) より大きい素イデアルは $\mathbb{R}[x, y]/(x, y^2) \cong \mathbb{R}[y]/(y^2)$ の素イデアルと対応する.

$\mathbb{R}[y]/(y^2)$ の非自明なイデアル J で $cy + d + (y^2) \in J$ とする. $c = 0$ なら $J = \mathbb{R}[y]/(y^2)$ であるから $c \neq 0$ である. よって $y + d + (y^2) \in J$ である. $(y + d)(y - d) = y^2 - d^2$ より $y + d + (y^2) \in J$ なら $d^2 + (y^2) \in J$ であるから, J が真のイデアルであるから $d = 0$ である. したがって $J = (y + (y^2))$ である.

すなわち J の逆像 $\mathfrak{p} = (x, y)$ が求める素イデアル.

