0.1　2006 午後

$\boxed{1}$ (1)$D(t^ke^t)=kt^{k-1}e^t+t^ke^t$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&2&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&n-1\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ である．

(2)$y'(t)=(n-1)t^{n-2}e^t+t^{n-1}e^t, y''(t)=(n-1)(n-2)t^{n-3}e^t+(n-1)t^{n-2}e^t+(n-1)t^{n-2}e^t+t^{n-1}e^t=(n-1)(n-2)t^{n-3}e^t+2(n-1)t^{n-2}e^t+t^{n-1}e^t$ である．

$D^ky=(n-1)(n-2)\cdots(n-k)t^{n-k-1}e^t+a_{k,n-k}t^{n-k}e^t+\cdots+t^{n-1}e^t$ とかける．ただし $(a_{k,n-k},a_{k,n-k+1},\cdots,a_{k,n-1}=1\in\mathbb{R})$．すなわち $\mathcal{B}$ による表示は $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&(n-1)!\\0&\cdots&(n-1)!/1&*\\\vdots&\iddots&\iddots&\vdots\\1&*&\cdots&*\end{pmatrix}$ となる行列式は $1\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-1)!\neq0$ より $\mathcal{C}$ は V の基底である．

(3) $(D-I)^n(y(t))=(n-1)(D-I)^{n-1}(t^{n-2}e^t)=\cdots=(n-1)!(D-I)(e^t)=0$

(4)$Dy^{(k)}(t)=y^{(k+1)}(t)\quad(k=0,1,\cdots,n-2)$ であり，$Dy^{(n-1)}(t)=D^{(n)}(t)=(D-I)^{(n)}(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}D^{(k)}(-1)^{n-k}y(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}D^ky(t)$ である．よって $\mathcal{C}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&(-1)^{n-0+1}\binom{n}{0}\\1&\cdots&0&(-1)^{n-1+1}\binom{n}{1}\\\vdots&\ddots&\vdots&*\\0&\cdots&1&\binom{n}{n-1}\end{pmatrix}$ である．ただし $(k,n-1)$ 成分は $(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\varphi\in V^*$ を任意にとる．$\varphi=\varphi(e_1)\varphi_1+\cdots\varphi(e_n)\varphi_n$ と表せる．すなわち V^* を生成する．$\sum c_i\varphi_i=0$ とする．$(\sum c_i\varphi_i)(e_j)=c_j=0(e_j)=0$．これが任意の j で成り立つから $c_j=0\quad(j=1,\cdots n)$ である．よって一次独立．すなわち基底．

(2)$f,g\in W^\circ,k\in\mathbb{R}$ について，$(f+g)(w)=f(w)+g(w)=0,(kf)(w)=kf(w)=0$ より W° はベクトル空間．W の基底 $\{w_1,\cdots,w_m\}$ をとり，V の基底 $\{w_1,\cdots,w_m,w_{m+1},\cdots,w_n\}$ へと延長する．(1) の手法で $\psi_k(w_i)=\delta_{k,i}$ を定める．δ はクロネッカーのデルタ．

$\{\psi_{m+1},\cdots,\psi_n\}$ は W° の基底である．これは $f\in W^\circ$ は $f=\sum_{i=1}^n f(w_i)\psi_i=\sum_{i=m+1}^n f(w_i)\psi_i$ より分かる．よって $\dim W^\circ=n-\dim W$ である．

(3)$f\in(W_1+W_2)^\circ$ とする．任意の $w_1\in W_1,w_2\in W_2$ について $f(w_1+w_2)=0$ であるから，特に $w_1=0$ のとき $f(w_2)=0$，$w_2=0$ のとき $f(w_1)=0$ である．したがって $f\in W_1^\circ\cap W_2^\circ$ より $(W_1+W_2)^\circ\subset W_1^\circ\cap W_2^\circ$ である．

逆に $f\in W_1^\circ\cap W_2^\circ$ をとると，任意の $w_1\in W_1,w_2\in W_2$ について $f(w_1+w_2)=f(w_1)+f(w_2)=0$ であるから，$f\in(W_1+W_2)^\circ$ である．よって $(W_1+W_2)^\circ=W_1^\circ\cap W_2^\circ$ である．

$\boxed{3}$ (1)f は 1 位の極 $z=c$ を除いて $\mathbb{C}$ 上で正則である．$\mathrm{Res}(f,c)=e^{i\xi c}$ である．$\mathrm{Im}\,c>0$ のとき，f の特異点は γ_R^+ の内部にあり，$\mathrm{Im}\,c<0$ のとき，f の特異点は γ_R^- の内部にある．したがって γ_R^- が時計回りであることに注意すれば $\int_{\gamma_R^+}f(z)dz=\begin{cases}2\pi ie^{i\xi c}&(\mathrm{Im}\,c>0)\\0&(\mathrm{Im}\,c<0)\end{cases}$, $\int_{\gamma_R^-}f(z)dz=\begin{cases}0&(\mathrm{Im}\,c>0)\\-2\pi ie^{i\xi c}&(\mathrm{Im}\,c<0)\end{cases}$ である．

(2)$\xi > 0$ のとき，γ_{R^+} 上の積分を考える．$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta$ であるから，

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\exp\left(i\xi Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}-c} Rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{-\xi R\sin\theta}}{Re^{i\theta}-c}R\right| d\theta \leq \frac{R}{R-|c|}\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta = \frac{2R}{R-|c|}\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \left[\frac{\pi}{-\xi R2}e^{-\xi R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R\xi}(1-e^{-R\xi})$$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \leq \frac{2R}{R-|c|}\frac{\pi}{2R\xi}(e^{-R\xi}-1) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)dz - \int_{C_R^+} f(z)dz = \int_{\gamma_R^+} f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i e^{i\xi c} & (\operatorname{Im} c > 0, \xi > 0) \\ 0 & (\operatorname{Im} c < 0, \xi > 0) \end{cases}$ である．

$\xi < 0$ のときは，γ_R^- 上の積分を考える．

$$\left|\int_{C_R^-} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{-\pi} \frac{\exp\left(i\xi Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}-c} Rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{-\pi} \left|\frac{e^{-\xi R\sin\theta}}{Re^{i\theta}-c}R\right| d\theta \leq \frac{R}{R-|c|}\int_0^{-\pi} e^{-\xi R\sin\theta}d\theta = \frac{2R}{R-|c|}\int_0^{\pi/2} e^{\xi R\sin\theta}d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\xi R\sin\theta}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\xi R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \left[\frac{\pi}{\xi R2}e^{\xi R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R\xi}(e^{R\xi}-1)$$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \leq \frac{2R}{R-|c|}\frac{\pi}{2R\xi}(e^{R\xi}-1) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^-} f(z)dz + \int_{C_R^-} f(z)dz = \int_{\gamma_R^-} f(z)dz = \begin{cases} 0 & (\operatorname{Im} c > 0, \xi < 0) \\ -2\pi i e^{i\xi c} & (\operatorname{Im} c < 0, \xi < 0) \end{cases}$ である．

$\boxed{4}$ (1)U が開集合であるとは，任意の点 $x \in U$ についてある $\varepsilon > 0$ が存在して，$B_\varepsilon(x) \subset U$ となることである．

(2)($\Rightarrow$) $x \in f^{-1}(U)$ について $f(x) \in U$ よりある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ である．このときある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(x)) \subset U$ である．よって $B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}(U)$ より $f^{-1}(U)$ は開集合である．

($\Leftarrow$) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ について，$B_\varepsilon(f(x))$ は開集合であるから，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ は開集合．したがってある $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ が成り立つ．よって $f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))) \subset B_\varepsilon(f(x))$ である．

(3)$f(A) \subset U \cup V, U \cap V \cap A = \emptyset$ なる開集合 U, V を任意にとる．$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap A \subset f^{-1}(U \cap V \cap f(A)) = \emptyset$ である．したがって $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$ または $f^{-1}(V) \cap A = \emptyset$ が成り立つ．$f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$ のとき．$y \in f(A) \cap U$ とすると，ある $x \in A$ について $f(x) = y$ である．この x について $f(x) \in U$ より $x \in f^{-1}(U)$ であるが，これは $f^{-1}(U) \cap A$ に矛盾．よって $f(A) \cap U = \emptyset$ である．$f^{-1}(V) \cap A = \emptyset$ のときも同様．よって $f(A)$ は連結．