0.1　2002 基礎

$\boxed{1}$ A を行基本変形すると，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．(1) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ で基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

(2)$\dim \ker(T) = 2$ で基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$\boxed{2}$ A の固有方程式を $g_a(t)$ とすれば $g_a(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 3 & 2-t & 0 \\ a & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ a & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)((1-t)^2 - a) = (2-t)(t^2 - 2t - a + 1)$ である．

(1)$a = 4$ より $g_4(t) = (2-t)(t^2-2t-3) = (2-t)(t-3)(t+1)$ である．よって固有値は $2, 3, -1$ であり，それぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる．よって $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP$ は対角行列.

(2) 固有値が全て異なれば対角化可能である．したがって $g_a(t)$ が重解を持つことが必要. $(2-t)(t^2 - 2t - a + 1) = 0$ の解は $t = 2, 1 \pm \sqrt{1 - (1-a)} = 2, 1 \pm \sqrt{a}$ である．

よって重解をもつのは $a = 0, 1$ のときである．$a = 0$ のとき，固有値 1 の固有空間は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対角化不可能.

$a = 1$ のとき，固有値 2 の固有空間は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$ の解空間であるから次元は 1 である．よって対角化不可能.

$\boxed{3}$ (1)$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f^{(2)}(x) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \cdots f^{(n)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ であるから，$f^{(n)}(0) = \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n} \quad (n \geq 1)$ である．

よって $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!} x^n$ がテイラー展開.

(2)$g'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2x}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}})$ である．

よって $g'(x) = -\frac{1}{2x}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n n!} x^n) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2(-2)^n n!} x^{n-1}$ である．項別積分すれば $g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n2(-2)^n n!} x^n$ である．

$2^n n! = (2n)!!$ であるから，$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} x^n$ がわかる．

収束半径は $|(-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} / (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2(n+1)(2n+2)!!}| = \frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+3)} \to 1 \quad (n \to \infty)$ より 1 である．

$\boxed{4}$ (1)$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると，ヤコビアンは r である．よって

$$\int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^\lambda} r dr d\theta = 2\pi \int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda} dr = \begin{cases} 2\pi[\frac{1}{2-\lambda} r^{2-\lambda}]_\varepsilon^1 & (\lambda \neq 2) \\ 2\pi[\log r]_\varepsilon^1 & (\lambda = 2) \end{cases} = \begin{cases} 2\pi \frac{1}{2-\lambda}(1 - \varepsilon^{2-\lambda}) & (\lambda \neq 2) \\ -2\pi \log \varepsilon & (\lambda = 2) \end{cases}$$

である．したがって $2-\lambda>0$ なら収束し，値は $\frac{2\pi}{2-\lambda}$ である．

(2) $\lambda\neq 2$ のとき，

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r^\lambda} r dr d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}\log r dr = 2\pi[\frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log r]_\varepsilon^1 - 2\pi\int_\varepsilon^1 \frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda}\frac{1}{r}dr = -2\pi\frac{\varepsilon^{2-\lambda}}{2-\lambda}\log\varepsilon - \frac{2\pi}{2-\lambda}\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr$$
$$= -2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(\varepsilon^{2-\lambda}\log\varepsilon^{2-\lambda} + (1-\varepsilon^{2-\lambda})) = -2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}(1+(\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}))$$

である．

$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}$ は $\lambda-2<0$ で分母分子共に $\varepsilon\to 0$ で無限大に発散する．よって $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{2-\lambda}(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}}{(\lambda-2)\varepsilon^{\lambda-3}}=0$ であるからロピタルの定理より，$\frac{\log\varepsilon^{\lambda-2}-1}{\varepsilon^{\lambda-2}}\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$ である．

$\lambda-2\geq 0$ なら無限大に発散する．

$\lambda=2$ のとき，

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r^2} r dr d\theta = 2\pi\int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r}dr = \left[\frac{1}{2}(\log r)^2\right]_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2}(\log\varepsilon)^2 \to -\infty \quad (\varepsilon\to 0)$$

より発散する．したがって $\lambda<2$ で $-2\pi\frac{1}{(2-\lambda)^2}$ に収束する．