0.1　H18 数学選択

$\boxed{1}$ (1)F/K が 2 次拡大であれば $\alpha \in F \setminus K$ の最小多項式の根は $a+b\sqrt{\beta}$ の形で表せる．この $\sqrt{\beta}$ を添加した体は F となる．

2 次の中間体の一つを $M = K(\sqrt{\beta})$　$(\beta \in K)$ とする．L/M は 2 次拡大であるから，$L = M(\sqrt{\gamma})$　$(a, b \in K, \gamma = a + b\sqrt{\beta})$ と表せる．

$b \neq 0$ のとき．$(\gamma^2 - a)^2 = b^2\beta$ より $x^4 - 2ax^2 + (a^2 - b^2\beta) = 0$ の根は $\pm\sqrt{a \pm b\sqrt{\beta}}$ である．この多項式が可約なら $K(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}})/K$ は 2 次拡大である．$(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}})^2 = a + b\sqrt{\beta}$ より $K(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}) = K(\sqrt{\beta}) = M$ となる．これは矛盾．よって多項式は既約である．

$b = 0$ のとき $\delta = \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ とすると $(\delta - \sqrt{\beta})^2 = \gamma = a^2$ より $\delta^2 + \beta - a^2 = 2\sqrt{\beta}\delta$．よって $\delta^4 + 2(\beta - a^2)\delta^2 + (\beta - a^2)^2 = 4\beta\delta^2$ より $x^4 - 2(a^2+\beta)x^2 + (\beta - a^2)^2 = 0$ の根は $\pm\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}$ である．標数が 2 でないから $K(\sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma})/K$ は Galois 拡大である．Galois 群は $\{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \tau\circ\sigma\}$　$(\sigma(\sqrt{\beta}) = \sqrt{\beta}, \sigma(\sqrt{\gamma}) = \sqrt{\gamma}, \tau(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}, \tau(\sqrt{\gamma}) = \sqrt{\gamma})$ である．

このとき任意の $f \in \mathrm{Gal}(K(\sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma})/K)$ に対して $f(\delta) \neq \delta$ であるから，$K(\delta)/K$ は 4 次拡大である．すなわち $x^4 - 2(a^2+\beta)x^2 + (\beta - a^2)^2$ は既約である．

(2)$b \neq 0$ のとき，$a^2 - b^2\beta = c^2$　$(c \in K)$ である．$\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}\sqrt{a-b\sqrt{\beta}} = \sqrt{a^2 - b^2\beta} = c \in K$ より $K(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}) \ni \sqrt{a-b\sqrt{\beta}}$ である．よって L/K は Galois 拡大である．

$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ について $\sigma(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}) = \sqrt{a-b\sqrt{\beta}}$ とする．このとき $\sigma^2(\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}) = \sigma(\sqrt{a-b\sqrt{\beta}}) = \sigma(c/\sqrt{a+b\sqrt{\beta}}) = c/\sqrt{a-b\sqrt{\beta}} = \sqrt{a+b\sqrt{\beta}}$ より $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．すなわち $\mathrm{Gal}(L/K)$ は位数 2 の元を二つもつ．

$\mathrm{Gal}(L/K)$ は位数 4 の群であるから，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれかである．位数 2 の元を二つもつ群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから，$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

よって中間体の数は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分群の数であるから 5 である．非自明な中間体は 3 個ある．