0.1 H27 数学選択

$\boxed{1}$ (1) 略.

(2)$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}$ より $a^2-5b^2=\pm1$ なら逆元を持つ．$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1$ である．$a_n+b_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n$ とする．$\sigma(a+b\sqrt{5})=a-b\sqrt{5}$ は A 上の同型射像であるから $(2-\sqrt{5})^n=\sigma((2+\sqrt{5})^n)=a_n-b_n\sqrt{5}$ である．よって $a_n^2-5b_n^2=(a_n+b_n\sqrt{5})(a_n-b_n\sqrt{5})=(2+\sqrt{5})^n(2-\sqrt{5})^2=(-1)^n$ より $A^\times$ は無限群.

(3)

加法	0	1	$\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$
0	0	1	$\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$
1	1	0	$1+\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$	0	1
$1+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	1	0

乗法	$[0]$	$[1]$	$[\sqrt{5}]$	$[1+\sqrt{5}]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[\sqrt{5}]$	$[1+\sqrt{5}]$
$[\sqrt{5}]$	$[0]$	$[\sqrt{5}]$	$[1]$	$[1+\sqrt{5}]$
$[1+\sqrt{5}]$	$[0]$	$[1+\sqrt{5}]$	$[1+\sqrt{5}]$	$[0]$

$(1+\sqrt{5})^2=0$ より整域でない．(4)$a+b\sqrt{5}\in A/J$ が逆元を持つ $\Leftrightarrow a^2-5b^2\in(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ である．

a	$a^2 \pmod 7$	$5a^2 \pmod 7$
0	0	0
1	1	5
2	4	6
3	2	3
4	2	3
5	4	6
6	1	5

表より $a^2-5b^2=0$ となる (a,b) は $(a,b)=(0,0)$ のみ．よって $(A/J)^\times=(A/J)\setminus\{0\}$ より A/J は体であり，$|A/J|=49$ である．

$\boxed{\mathrm{B}}$ (1)$(x^2-2)^2=3$ とすればこれは α を根にもつ．整理すると x^4-4x^2+1 である．$f(x)=x^4-4x^2+1$ とする．$f(x)$ 既約であることと $f(x+1)$ が既約であることは同値である．$f(x+1)=(x+1)^4-4(x+1)^2+1=x^4+4x^3+2x^2-4x-2$ となりこれはアイゼンシュタインの既約判定法から既約である．すなわち $f(x)$ が α の最小多項式である．

(2)α の $\mathbb{Q}$ 上の共役は $f(x)=0$ をといて $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ である．$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$ より $\mathbb{Q}(\alpha)\ni\sqrt{2-\sqrt{3}}$ より正規拡大．$\mathbb{Q}$ は完全体であるから $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大.

(3)$\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ について $\sigma(\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ とする．$\sigma^2(\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sigma(\sqrt{2-\sqrt{3}})=\sigma(1/\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ より $\sigma^2=\mathrm{id}$ である．$\tau(\sqrt{2+\sqrt{3}})=-\sqrt{2+\sqrt{3}}$ も $\tau^2=\mathrm{id}$ である．

位数 2 の元が 2 つ以上存在する位数 4 の群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ のみである．

(4)$\mathbb{Q}(\alpha)$ に含まれる $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ の真部分群に対応する．$\langle\sigma\rangle$ の固定体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$ である．$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=6$ より $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ である．よって $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ が $\langle\sigma\rangle$ の固定体.

$\langle\tau\rangle$ の固定体は $\mathbb{Q}(\alpha^2)=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ である．

$\langle\sigma\circ\tau\rangle$ の固定体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$ である．$(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=2$ より $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$ である．よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ が $\langle\sigma\circ\tau\rangle$ の固定体.