0.1 H23 数学選択

$\boxed{\mathrm{B}}$ (1)$\alpha^2-2=\sqrt{2}$ より $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\alpha)$ である．よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbb{Q}(\alpha)$.

(2)$\alpha^4-4\alpha^2+2$ は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．これは $2\in\mathbb{Z}$ によってアイゼンシュタインの既約判定法によって $\mathbb{Z}[x]$ 上で既約であることからわかる．

よって $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4$ である．すなわち $\alpha\notin\mathbb{Q}$ である．

(3)(2) より $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4$.

(4)(2) より x^4-4x^2+2 である．$\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\alpha,\sqrt{2-\sqrt{2}}$ である．

(5)$\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ より $\mathbb{Q}(\alpha)\ni\sqrt{2-\sqrt{2}}$ となる全ての共役元が $\mathbb{Q}(\alpha)$ に属すから正規拡大．$\mathbb{Q}$ は完全体であるから Galois 拡大.

(6)$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})\ni\sigma$ について $\sigma(\sqrt{2+\sqrt{2}})=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ とする．$2+\sigma(\sqrt{2})=\sigma((\sqrt{2+\sqrt{2}})^2)=(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2=2-\sqrt{2}$ であるから $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ である．

よって $\sigma^2(\sqrt{2+\sqrt{2}})=\sigma(\sqrt{2-2\sqrt{2}})=\sigma(\sqrt{2})/\sigma(\sqrt{2+\sqrt{2}})=-\sqrt{2}/(\sqrt{2-\sqrt{2}})=-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である．

よって $\sigma^2\neq\mathrm{id}$ である．

$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4$ より $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である．