0.1　R6 数学選択

(1)(a)$K=\mathbb{Q}, M=\mathbb{Q}(\sqrt{2}), L=\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ とする．M/K が Galois 拡大である．$x^2-(1+\sqrt{2})$ が $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ の M 上の最小多項式である．したがって L/M は Galois 拡大である．

$(\sqrt{1+\sqrt{2}}^2-1)^2=2$ であるから，$f(x)=x^4-2x^2-1$ が $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ を根にもつ K 上の多項式である．$[L:K]=[L:M][M:K]=4$ であるから f は K 上の最小多項式である．f の根は $\pm\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$ である．$\sqrt{1-\sqrt{2}}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ であるから，$\sqrt{1+\sqrt{2}}\notin L\subset\mathbb{R}$ である．よって L/K は正規拡大でないから，L/K は Galois 拡大でない．

(b)$\alpha\in L$ について，α の K 上最小多項式 p_α は分離多項式であり，その根は全て L に属す．α の M 上の最小多項式は p_α の因数であるから分離多項式である．またその根は p_α の根であるから全て L に属す．したがって L/M は Galois 拡大である．

(2)(a)$\zeta_3\notin\mathbb{Q}$ であるから x^2+x+1 が ζ_3 の最小多項式である．よって $\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である．

(b)x^3-2 は $\mathbb{Q}$ 上の $\sqrt[3]{2}$ の最小多項式であるから $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}]=3$ である．$\zeta_3\notin\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\subset\mathbb{R}$ であるから，$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]=2$ である．よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)/\mathbb{Q}]=6$ である．すなわち $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)/\mathbb{Q}(\zeta_3)]=3$ である．x^3-2 の根は $\sqrt[3]{2},\zeta_3\sqrt[3]{2},\zeta_3^2\sqrt[3]{2}$ であるから，$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)/\mathbb{Q}(\zeta_3)$ は正規拡大．したがって $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)/\mathbb{Q}(\zeta_3)$ は Galois 拡大である．

(c)$p(x)=x^n-t^n\in\mathbb{C}(t^n)[x]$ とする．$p(x)$ はモニック多項式であり，$\mathbb{C}(t^n)$ は UFD である $\mathbb{C}[t^n]$ の商体であるから $p(x)$ の既約性は $\mathbb{C}[t^n][x]$ の既約性と同値．$\mathbb{C}[t^n]$ において t^n は素元である．よってアイゼンシュタインの既約判定法から $p(x)$ は $\mathbb{C}[t^n][x]$ 上既約である．したがって $p(x)$ は $\mathbb{C}(t^n)[x]$ 上既約である．

また $p(x)$ の根は $\zeta_n^k t\quad(k=0,1,\ldots,n-1)$ であるから，$p(x)$ は $\mathbb{C}(t^n)$ 上の t の最小多項式で，その根は全て $\mathbb{C}(t)$ に属す．よって $\mathbb{C}(t^n)/\mathbb{C}(t)$ は n 次の Galois 拡大である．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$f,g,h\in M(A)$ に対して $(f\cdot g)\cdot h(a)=(f\cdot g)(a)\cdot h(a)=f(a)\cdot g(a)\cdot h(a)=f(a)\cdot(g\cdot h)(a)=f\cdot(g\cdot h)(a)$ であるから，$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$ である．すなわち $M(A)$ は積について結合法則が成り立つ．

(2)$\phi_A((f+g)(x))(a)=(f+g)(a)=f(a)+g(a)=\phi_A(f(x))(a)+\phi_A(g(x))(a), \phi_A(fg(x))(a)=(fg)(a)=f(a)g(a)=\phi_A(f(x))(a)\phi_A(g(x))(a), \phi_A(1(x))(a)=1(a)=1$ であるから，ϕ_A は加法と乗法を保つ．$M(A)$ の単位元は $1_{M(A)}(a)\equiv 1$ なる $1_{M(A)}$ であるから ϕ_A は単位元を保つ．よって ϕ_A は環準同型である．

(3)$M(\mathbb{R})$ の零元は $0_{M(A)}(a)\equiv 0$ であるから $f(x)\in\ker(\phi_\mathbb{R})$ とすれば，任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f(a)=0$ である．f は $\mathbb{R}$ 上の多項式であるから，$f=0$ である．よって $\ker(\phi_\mathbb{R})=\{0\}$ であるから，$\phi_\mathbb{R}$ は単射である．

(4)$\mathbb{F}_p$ において，$a\in\mathbb{F}_p^\times$ は $\mathbb{F}_p^\times$ の位数が $p-1$ であるから $a^{p-1}=1$ である．よって $a^p=a$ である．$a=0$ でも $0^p=0$ であるから，$\mathbb{F}_p$ の任意の元 a に対して $a^p-a=0$ である．したがって $\phi_{\mathbb{F}_p}(x^p-x)(a)=a^p-a=0$ であるから，$(x^p-x)\subset\ker(\phi_{\mathbb{F}_p})$ である．

$f(x)\in\ker(\phi_{\mathbb{F}_p})$ とすれば, 任意の $a\in\mathbb{F}_p$ に対して $f(a)=0$ である．$f(x)=(x^p-x)g(x)+h(x)\quad(\deg(h(x))<p)$ とできる．$h(x)\in\ker(\phi_{\mathbb{F}_p})$ であるから，任意の $a\in\mathbb{F}_p$ に対して $h(a)=0$ である．したがって因数定理から $x(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))\mid h(x)$ である．$x(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))$ の次数は p であるから，$h=0$ である．よって $f\in(x^p-x)$ であるから，$\ker(\phi_{\mathbb{F}_p})=(x^p-x)$ である．