0.1 H28 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$\varphi(t^2-ut+v)=x^2-(x+y)x+xy=0$ である．よって $\ker\varphi\supset(t^2-ut+v)$ である．$f\in\ker\varphi$ とすると，$f(u,v,t)=(t^2-ut+v)g(u,v,t)+h_1(u,v)t+h_2(u,v)$ である．よって $h_1(x+y,xy)x+h_2(x+y,xy)=0$ である．$h_1(x+y,xy)x$ は対称式の項をもたず，$h_2(x+y,xy)$ は対称式の項のみからなるので，$h_1=0,h_2=0$ である．

(2)$\varphi(I_{(a,b)})$ が素イデアル．$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}[x,y]/\varphi(I_{(a,b)})$ が整域．ここで $\mathbb{R}[x,y]\cong\mathbb{R}[u,v,t]/\ker\varphi$ であるから，$\mathbb{R}[x,y]/\varphi(I_{(a,b)})\cong(\mathbb{R}[u,v,t]/\ker\varphi)/((\ker\varphi,I_{(a,b)})/\ker\varphi)\cong\mathbb{R}[u,v,t]/(\ker\varphi,I_{(a,b)})$ である．

$(\ker\varphi,I_{(a,b)})=(t^2-ut+v,u-a,v-b)=(t^2-at+b,u-a,v-b)$ であるから，$\mathbb{R}[u,v,t]/(\ker\varphi,I_{(a,b)})\cong\mathbb{R}[t]/(t^2-at+b)$ である．これが整域となるのは t^2-at+b が既約であるときである．すなわち $a^2-4b<0$ のときである．

以上より，$\varphi(I_{(a,b)})$ が素イデアルであるのは，$a^2-4b<0$ のときである．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$F=\mathbb{Q}(\alpha)(\beta)$ とかける．β の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上の最小多項式は $P(X)/(X-\alpha)$ の因数であるから 3 次以下である．よって $[F:\mathbb{Q}(\alpha)]\leq 3$ である．

(2)$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4$ より $[F:\mathbb{Q}]=[F:\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4[F:\mathbb{Q}(\alpha)]$ であるから (1) より $[F:\mathbb{Q}]=4,8,12$ のいずれかである．

(3)$F/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であるから Galois 群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ か $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の何れかである．どちらも真部分群を含むから，$F/\mathbb{Q}$ は非自明な中間体をもつ．

(4)$P(X)=X^4-4X^2+1$ とする．$P(X+1)=X^4+4X^3+2X^2-4X-2$ は既約であるから $P(X)$ は既約多項式である．$P(X)$ の根は $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ である．$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$ より $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ とすれば $F/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大で $[F:\mathbb{Q}]=4$ である．

$\sigma(\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ とすると，$\sigma^2(\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sigma(\sqrt{2-\sqrt{3}})=\sigma(1/\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ であるから，$\sigma^2=\mathrm{id}$ である．

また $\tau(\sqrt{2+\sqrt{3}})=-\sqrt{2+\sqrt{3}}$ についても $\tau^2=\mathrm{id}$ であるから，$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ は位数 2 の元を 2 つ以上もつ．よって $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ より巡回群でない．

(5)β の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上の最小多項式の次数は 2 である．したがって γ,δ のいずれか一方のみが $\mathbb{Q}(\alpha)$ に属す．$\gamma\in\mathbb{Q}(\alpha)$ として一般性を失わない．よって $\sigma(\alpha)=\gamma$ とすれば σ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ の恒等写像でない同型射である．

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の恒等写像でない同型射について，$\sigma(\alpha)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上共役であるから存在すれば $\sigma(\alpha)=\gamma$ のみである．よって一意性も示された．