0.1 R4 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$(\alpha_5^2-5)^2=5$ である．よって $x^4-10x^2+20=P_5(x)$ は α を根にもつ．アイゼンシュタインの既約判定法から $P_5(x)$ は $\mathbb{Z}[x]$ 上既約であり，$\mathbb{Z}$ は UFD で P_5 はモニック多項式であるから P_5 は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である．

(2)P_5 の根は $\pm\sqrt{5\pm\sqrt{5}}$ である．$\sqrt{5+\sqrt{5}}\sqrt{5-\sqrt{5}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ であり，$\alpha^2-5=\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\alpha_5)$ より P_5 の根は全て $\mathbb{Q}(\alpha_5)$ に属す．よって $L_5=\mathbb{Q}(\alpha_5)$ である．

(3)$\sigma\in\mathrm{Gal}(L_5/\mathbb{Q})$ を $\sigma(\alpha_5)=\sqrt{5-\sqrt{5}}$ とする．

$\sigma(\sqrt{5})=\sigma(\alpha_5^2-5)=(\sqrt{5-\sqrt{5}})^2-5=-\sqrt{5}$ である．よって $\sigma^2(\sqrt{5+\sqrt{5}})=\sigma(\sqrt{5-\sqrt{5}})=\sigma(\frac{2\sqrt{5}}{\alpha_5})=\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}=-\alpha_5$ である．

よって σ は位数 4 の元であり，$\mathrm{Gal}(L_5/\mathbb{Q})$ は位数 4 の群であるから巡回群.

(4)P_4 の根は $\pm\sqrt{4\pm\sqrt{5}}$ である．$\sqrt{4+\sqrt{5}}\sqrt{4-\sqrt{5}}=\sqrt{11}\in L_4, \sqrt{4+\sqrt{5}}^2-4=\sqrt{5}\in L_4$ である．よって $\mathbb{Q}(\sqrt{11},\sqrt{5})\subset L_4$ である．

$\sqrt{11}=a+b\sqrt{5}\quad(a,b\in\mathbb{Q})$ とする．$11=a^2+2ab\sqrt{5}+5b^2$ より $2ab\sqrt{5}=a^2+5b^2-11\in\mathbb{Q}$ であるから $ab=0$ である．$a=0$ なら $5b^2=11$ であるが，これは両辺の 11 の指数を比べれば右辺は奇数であり，左辺は偶数である．$b=0$ なら $a^2=11$ であり，これも 11 の指数を比べれば矛盾すると分かる．

よって $\sqrt{11}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である．

$L_4/\mathbb{Q}$ が 4 次巡回拡大なら $\mathrm{Gal}(L_4/\mathbb{Q})\cong mz/4\mathbb{Z}$ である．

したがって $L_4/\mathbb{Q}$ は非自明な異なる中間体 $\mathbb{Q}(\sqrt{11}),\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ をもつが，これは $\mathrm{Gal}(L_4/\mathbb{Q})\cong mz/4\mathbb{Z}$ であることに矛盾する．よって $L_4/\mathbb{Q}$ が 4 次巡回拡大でない．

$\boxed{\text{B}}$ (1)$\mathbb{Z}[x]/(p,x^2+ax+b)\cong(\mathbb{Z}[x]/(p))/((p,x^2+ax+b)/(p))\cong\mathbb{F}_p[x]/(x^2+\bar{a}x+\bar{b})$

(2)$\mathbb{Z}[x]/(3,x^2+9x-1)\cong\mathbb{F}_3[x]/(x^2-1)$ であり，$x^2-1=(x-1)(x-2)\in\mathbb{F}_3[x]$ であるから整域でない．

(3) 環として同型なら同型写像 $\varphi\colon\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x-1)\to\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x+3)$ がある．$\varphi(3)=3$ であるから $(\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x-1))/(3)\cong(\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x+3))/(3)$ である．

$(\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x-1))/(3)\cong(\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x-1))/((3,x^2+9x+1)/(x^2+9x-1))\cong\mathbb{Z}[x]/(3,x^2+9x-1)\cong\mathbb{F}_3[x]/(x^2-1)\cong\mathbb{F}_3[x]/(x-1)\times\mathbb{F}_3[x]/(x-2)\cong\mathbb{F}_3^2$ である．よって零元でないべき零元をもたない．$(\mathbb{Z}[x]/(x^2+9x+3))/(3)\cong\mathbb{Z}[x]/(3,x^2+9x+3)\cong\mathbb{F}_3[x]/(x^2)$ は x が零元でないべき零元である．これは矛盾．よって同型でない．