0.1 2005 午前

$\boxed{1}$ (1)$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ として，V, W は A, B の解空間である．簡約化すると $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

よって $\operatorname{rank} A = 2, \operatorname{rank} B = 3$ より $\dim V = 3, \dim W = 2$ である．

(2)$\dim(V \cap W)$ は $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ の解空間である．$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 4$ より $\dim V \cap W = 1$ である．

(3)$\varphi \colon V \to (V+W)/W; v \mapsto [v]$ で定める．明らかに全射準同型である．$\ker \varphi = V \cap W$ であるから次元定理より $\dim V - \dim(V \cap W) = \dim(V+W) - \dim W$ である．よって $\dim(V+W) = 3 - 1 + 2 = 4$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

$$
\begin{aligned}
g_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ -b^2+a & a+2b-\lambda & 1 \\ ab & -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda+b & 1 & 0 \\ b^2+a+ab-b\lambda & a+2b-\lambda & 1 \\ 0 & -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (a+b-\lambda) \begin{vmatrix} a+2b-\lambda & 1 \\ -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} - (b^2+a+ab-b\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (a+b-\lambda)((a+b-\lambda)(a+2b-\lambda) + a - (b^2+a+ab-b\lambda)) = (a+b-\lambda)^3
\end{aligned}
$$

である．$\lambda = a+b$ とすると，$\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ -b^2+a & b & 1 \\ ab & -a & 0 \end{pmatrix}$ の解空間の次元は 3 でない．よって対角化不可能．

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2-3t & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = -2-(2-3t)2t = 2(3t+1)(t-1)$ である．よって $t \neq \frac{-1}{3}, 1$ なら基底で

ある．$t=\frac{-1}{3},1$ なら基底でない．

$\boxed{3}$ (1)$\frac{1}{a_n},\frac{1}{b_n}>0$ だから相加相乗平均より $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a_nb_n}}$．したがって $\sqrt{a_nb_n}\geq\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}=b_{n+1}$ である．よって $b_{n+1}\leq\sqrt{a_nb_n}\leq\frac{a_n+b_n}{2}=a_{n+1}$ である．任意の n で成り立つから示された．

(2)$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leq\frac{2a_n}{2}=a_n$ より広義単調減少．$b_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}\geq\frac{2}{\frac{2}{b_n}}=b_n$ より広義単調増加．

(3)$0<a_n$ より $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界単調数列であるから収束する．$b_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}\leq a_n\leq a$ より $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界単調数列であるから収束する．$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限値を α，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限値を β とする．

$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ の極限をとることで $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}$ となるから $\alpha=\beta$ である．

(4)$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n=\cdots=ab$ である．よって $\alpha^2=ab$ より $\alpha=\sqrt{ab}$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{\partial f}{\partial y}c,\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}b+\frac{\partial f}{\partial y}d$ である．よって $\frac{1}{ad-bc}\left(d\frac{\partial g}{\partial u}-c\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial f}{\partial x},\frac{1}{ad-bc}\left(-b\frac{\partial g}{\partial u}+a\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}$ である．

(2)(1) で $d=-a$ とする．$\frac{\partial g}{\partial v}=0$ である．すなわち g は v 以外を定数とみたときに定数関数となるから g は v に依らずに定まる．よって $g(u,v)=G(u)$ とできる．$u=\frac{1}{-a^2-bc}dx-by=\frac{1}{a^2+bc}(ax+by)$ であるから，$f(x,y)=G(\frac{1}{a^2+bc}(ax+by))$ となる．

(3)$x\in(0,1)$ で $2^\beta>(1+x)^\beta>1$ である．よって $\frac{1}{x^\alpha 2^\beta}<\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}<\frac{1}{x^\alpha}$ が成り立つ．$\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}[\log x]_\varepsilon^1 & (\alpha=1)\\ [\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}]_\varepsilon^1 & (\alpha\neq 1)\end{cases}=\begin{cases}-\log\varepsilon & (\alpha=1)\\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) & (\alpha\neq 1)\end{cases}$ は $1>\alpha$ で収束して，$\alpha\geq 1$ で発散する．よって $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx$ は $1>\alpha$ で収束し，$\alpha\geq 1$ で発散する．

$x\in(1,\infty)$ で $x^\alpha<(1+x)^\alpha$ であるから，$\frac{1}{(1+x)^\alpha}<\frac{1}{x^\alpha}$ である．よって $\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}<\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}<\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ である．$\int_1^M\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}dx=\begin{cases}[\log x]_1^M & (\alpha+\beta=1)\\ [\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}x^{1-(\alpha+\beta)}]_1^M & (\alpha+\beta\neq 1)\end{cases}=\begin{cases}\log M & (\alpha+\beta=1)\\ \frac{1}{1-(\alpha+\beta)}(M^{1-(\alpha+\beta)}-1) & (\alpha+\beta\neq 1)\end{cases}$ は $\alpha+\beta<1$ で収束して．$\alpha+\beta\geq 1$ で発散する．よって $\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx$ は $1>\alpha+\beta$ で収束し，$\alpha+\beta\geq 1$ で発散する．以上より $\{(\alpha,\beta)\mid\ \alpha<1,\alpha+\beta<1\}$ で収束する．

(4)

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}dx=\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+x)^\beta}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-\beta}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+x)^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{1-\alpha}I(\alpha-1,\beta+1)$$