0.1 H31 数学選択

$\boxed{\mathrm{A}}$ (1)(a)I_1, I_2 が互いに素とは $I_1 + I_2 = A$ であることをいう．

(b)$I_1 = I_1 A \supset I_1 I_2$ より $I_1 \cap I_2 \supset I_1 I_2$ である．$c \in I_1 \cap I_2$ を任意にとる．互いに素であるから $x + y = 1$ なる $x \in I_1, y \in I_2$ が存在する．$c = cx + cy$ であり，$c \in I_2$ より $cx \in I_1 I_2$ である．また $c \in I_1$ より $cy \in I_1 I_2$ である．よって $c \in I_1 I_2$ である．すなわち $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$ である．

(c)$I_1 \supset I_1 I_2$ より自然な全射準同型 $\pi_1 \colon A/I_1 I_2 \to A/I_1$ がある．同様に $\pi_2 \colon A/I_1 I_2 \to A/I_2$ がある．$\varphi \colon A/I_1 I_2 \to A/I_1 \times A/I_2; \varphi(a + I_1 I_2) = (\pi_1(a + I_1 I_2), \pi_2(a + I_1 I_2))$ とする．

$\varphi(a + I_1 I_2) = 0$ なら $\pi_1(a + I_1 I_2) = 0, \pi_2(a + I_1 I_2) = 0$ より $a \in I_1, I_2$ である．すなわち $a \in I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$ より φ は単射である．

$(b + I_1, c + I_2) \in A/I_1 \times A/I_2$ に対して $\varphi(cx + by) = (cx + b(1 - x) + I_1, by + c(1 - y) + I_2) = (b + I_1, c + I_2)$ であるから φ は全射である．よって φ は同型である．

(2) (a)$(X - 2)(X^2 + 2X + 4) = X^3 - 8$ であり，$X - 2 \neq 0 \in A, X^2 + 2X + 4 \neq 0 \in A$ であるから A は整域でない．

(b)$(X - 2)(X + 4) - (X^2 + 2X + 4) = -12$ であるから $(X - 2), (X^2 + 2X + 4)$ は互いに素である．よって $A \cong \mathbb{R}[X]/(X - 2) \times \mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 4)$ である．

$\psi \colon \mathbb{R}[X]/(X - 2) \times \mathbb{R}; X \mapsto 2$ は同型である．$\varphi \colon \mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 4) \to \mathbb{C}; X \mapsto -1 + i\sqrt{3}$ とする．$a + bi = a + \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}(-1 + i\sqrt{3})$ であるから $\varphi(\frac{b}{\sqrt{3}}X + a + \frac{b}{\sqrt{3}}) = a + bi$ より全射．$\varphi(f + (X^2 + 2X + 4)) = 0$ なら $f(X) = (X^2 + 2X + 4)g(X) + aX + b$ とできる．$a \neq 0$ なら $a(-1 + i\sqrt{3}) + b = 0$ であるから $i = \frac{-b+a}{a\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ となり矛盾．よって $a = b = 0$ であるから φ は同型である．

したがって $A \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ である．右辺の単位元は $(1, 1)$ であるから $a^4 = 1$ なる $a \in A$ は $\pm 1 \in \mathbb{R}, i^k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$ に対応する分の 8 個存在する．

$\boxed{\mathrm{B}}$ (1)$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{-1}$ それぞれの $\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{-1}$ であるから全て F に含まれる．したがって $F/\mathbb{Q}$ は正規拡大である．$\mathbb{Q}$ は完全体であるから $F/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である．

(2)$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ である．$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ である．よって $[F_0 : \mathbb{Q}] = 4$ である．

$[F_0(\sqrt{-1}) : F_0] = 2$ であるから $[F : \mathbb{Q}] = 8$ である．

(3)$F_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cdot \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$ であるから推進定理より $\mathrm{Gal}(F_0/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

$F_0 \cdot \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = F, F_0 \cap \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}$ であるから推進定理より $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(F_0/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

(4)$[L : \mathbb{Q}] = 4$ なら $[F : L] = 2$ である．よって位数 2 の $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の部分群の個数を求めればよい．位数 2 の部分群の個数は位数 2 の元の個数であり，単位元以外のすべての元が位数 2 であるから 7 個である．