0.1 H20 数学選択

$\boxed{\text{A}}$ (1)$F(\beta)/F$ が 2 次拡大であり，β が F 上分離的であるから β の最小多項式は $(x-\beta)(x-\gamma)\quad(\beta \neq \gamma \in F(\beta))$ である．$(x-\beta)(x-\gamma) = x^2 - (\beta+\gamma)x + \beta\gamma$ であり $\beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = -\gamma = \gamma \quad (\because \mathrm{ch}F = 2)$ より $\beta + \gamma \neq 0$ である．

$\beta^2 + a\beta + b = 0$ より $(\frac{\beta}{a})^2 + (\frac{\beta}{a}) + \frac{b}{a^2} = 0$ である．したがって $x^2 + x + \frac{b}{a^2}$ が α を根にもつ二次方程式．

(2)K/F が 2 次拡大であるから $K = F(\beta)$ なる β が存在する．非自明な自己同型 σ によって $\sigma(\beta) \neq \beta$ となるから β は F 上分離的．したがって (1) から $x^2 + x + \frac{b}{a^2}$ の根 $\alpha \in F$ が存在する．$(\frac{\beta}{a}+1)^2 + (\frac{\beta}{a}+1) + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a^2}(\beta^2 + a\beta + 1 + 2a\beta + a^2 + a^2) = 0$ より $\alpha + 1$ は α の F 上の共役である．

よって $\sigma(\alpha) = \alpha + 1$.

$\boxed{\text{B}}$ (1)$x^4 - (t^2 + \frac{1}{t^2})x^2 + 1$ について $t, \frac{1}{t}$ は根である．したがて $t, \frac{1}{t}$ は共に S 上整である．S 上整な元全体は環をなすから $S[t, \frac{1}{t}] = R$ は S 上整である．

(2)R の商体は $L = \mathbb{C}(t)$，S の商体は $K = \mathbb{C}(t^2 + \frac{1}{t^2})$ である．t の K 上の最小多項式は $x^4 - (t^2 + \frac{1}{t^2})x^2 + 1$ の因数である．よって根は $\pm t, \pm\frac{1}{t}$ のいずれかに限る．全て $\mathbb{C}(t)$ の元であるから L/K は正規拡大．$\mathbb{C}$ は完全体であるから L/K は Galois 拡大である．

(3)$\sigma(t) = -t, \tau(t) = \frac{1}{t}$ が共に L の K 上の自己同型となるから $[L:K] = 4$ であり，また σ, τ の位数が 2 であるから $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である．

σ で固定される体は $\mathbb{C}(t^2)$，τ で固定される体は $\mathbb{C}(t + \frac{1}{t})$，$\sigma \circ \tau$ で固定される体は $\mathbb{C}(t - \frac{1}{t})$ である．これに自明な中間体 L, K を加えた 5 つ全ての中間体.

(4)R は $\mathbb{C}[t]$ の $\left\{t^i \mid i = 0, 1, 2, \cdots\right\}$ による局所化である．UFD の局所化は UFD であるから R は UFD.

L に対して R が S 上整であり，L は R の商体である．R は UFD であるから R は正規環．すなわち L の元で R 上整な元は R の元である．R 上整な元は S 上整であるから $T_L = R$ である．

K は S の商体であり，S は PID であるから正規環．よって $T_K = S$ である．

$\mathbb{C}(t^2)$ は $S \subset \mathbb{C}[t^2, \frac{1}{t^2}]$ の商体である．$\mathbb{C}[t^2, \frac{1}{t^2}]$ は UFD であるから同様にして $T_{\mathbb{C}(t^2)} = \mathbb{C}[t^2, \frac{1}{t^2}]$ である．

$\mathbb{C}(t + \frac{1}{t})$ は $S \subset \mathbb{C}[t + \frac{1}{t}]$ の商体である．上と同様に $T_{\mathbb{C}(t+\frac{1}{t})} = \mathbb{C}[t + \frac{1}{t}]$ である．

$\mathbb{C}(t - \frac{1}{t})$ は $S \subset \mathbb{C}[t - \frac{1}{t}]$ の商体である．上と同様に $T_{\mathbb{C}(t-\frac{1}{t})} = \mathbb{C}[t - \frac{1}{t}]$ である．