0.1　2004 午後

$\boxed{1}$ (1) 次元定理より $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$ である．$\ker f = \mathrm{Im}\, f$ より $\dim\ker f = \dim \mathrm{Im}\, f$ であるから，$\dim V = 2\dim\ker f$ である．いま $V \neq 0$ より $\dim V \geq 1$ である．したがって $\dim\ker f \geq 1$ であるから，$\ker f \neq 0$ である．よって $\ker f \neq 0$ である．また $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V - \dim\ker f < \dim V$ である．よって $\mathrm{Im}\, f \neq V$ である．

(2)$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n + d_1w_1 + \cdots + d_nw_n = 0$ とする．f で送ると，$v_i \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$ より，$d_1f(w_1) + \cdots + d_nf(w_n) = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n = 0$ である．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底であるから，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ である．したがって，$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ である．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底であるから，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である．よって $\{v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n\}$ は一次独立である．

(3)$\dim \mathrm{Im}\, f = n$ である．よって $\dim V = 2\dim \mathrm{Im}\, f = 2n$ である．よって $2n$ 個の一次独立なベクトルからなる $\{v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n\}$ は V の基底である．

(4) 表現行列は $\begin{pmatrix} O & E_n \\ O & O \end{pmatrix}$ である．ただし E_n は n 次単位行列であり，O は n 次零行列である．

$\boxed{2}$ (1)$t > 0$ より $f'(x) = 3x^2 + t^4 > 0$ であるから，f は狭義単調増加である．f は 3 次関数であるから解を必ずもち，狭義単調増加であるから解はただ一つである．

$f(0) = -t^3 < 0, f(t) = t^5 > 0$ であるから $0 < \alpha(t) < t$ である．$f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^3} > 0$ であるから，$0 < \alpha(t) < \frac{1}{t}$ である．

(2)$F(x,t) = x^3 + t^4x - t^3$ とする．$F(x,t)$ は C^∞ 級である．任意の $t > 0$ に対して $F(\alpha(t), t) = 0$ であり，$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t), t) = 3\alpha(t)^2 + t^4 > 0$ であるから，陰関数定理より，$\alpha(t)$ は C^∞ 級である．したがって $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ は存在して，$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t), t)\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(t), t) = (3\alpha(t)^2 + t^4)\frac{d\alpha(t)}{dt} + (4t^3\alpha(t) - 3t^2)$ より $\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{-4t^3\alpha(t) + 3t^2}{3\alpha(t)^2 + t^4}$ である．

(3)$\frac{d\alpha(t)}{dt} = 0$ とすると, $-4t^3\alpha(t) + 3t^2 = 0$ であるから $\alpha(t) = \frac{3}{4t}$ である．すなわち $f(\frac{3}{4t}) = (\frac{3}{4t})^3 + t^4(\frac{3}{4t}) - t^3 = 0$ である．これを解くと $t^6 = \frac{27}{16}$ より $t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ である．$t_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ とすると，$t < t_0$ のとき $\frac{d\alpha(t)}{dt} > 0$ で $t > t_0$ のとき $\frac{d\alpha(t)}{dt} < 0$ であるから $\alpha(t)$ は $t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ で最大値をもち，$\alpha(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}) = \frac{3}{4t_0} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ である．

$\boxed{3}$ (1)

$$\int_{\ell_2} \frac{z}{1+z^3}dz = \int_0^R \frac{e^{\frac{i2\pi}{3}}t}{1+(e^{\frac{i2\pi}{3}}t)^3}e^{\frac{i2\pi}{3}}dt = e^{\frac{i4\pi}{3}}\int_0^R \frac{t}{1+t^3}dt = e^{\frac{i4\pi}{3}}\int_{\ell_1}\frac{z}{1+z^3}dz$$

(2)

$$\left|\int_{C_R}\frac{z}{1+z^3}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Re^{i\theta}}{1+(Re^{i\theta})^3}Rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R^2}{R^3-1}d\theta = \frac{2\pi}{3}\frac{R^2}{R^3-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

(3)$\ell_1 + C_R - \ell_2$ で定まる積分曲線を C とする．$f(z) = \frac{z}{1+z^3}$ は $z = e^{\frac{i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{5i\pi}{3}}$ を $\mathbb{C}$ 上で孤立特異点としてもち, それ以外の点では正則である．したがって C を含むある有界領域 D で $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ を除いて D 上で f は正則である．$\mathrm{Res}\Big(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\Big) = e^{\frac{i\pi}{3}}\frac{1}{3(e^{\frac{i\pi}{3}})^2} = \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}$ であるから, 留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\Big) = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}$ である．

また $\int_C f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz - \int_{\ell_2} f(z)dz = (1 - e^{\frac{i4\pi}{3}})\int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz$ である．$R \to \infty$ として $\frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}} = (1 - e^{\frac{i4\pi}{3}})\int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}dt$ より，$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}dt = \frac{2\pi}{9}$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．(b) よりある N が存在して，$n \geq N$ のとき $a_n \in B_\varepsilon(x)$ である．$\{a_n\}$ は A の点列であるから $a_N \in A$ である．したがって，$a_N \in B_\varepsilon(x) \cap A$ である．すなわち，$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ である．

(2) 任意の n に対して $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$ であるから，$a_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ と定める．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > \frac{1}{N}$ となる N が存在して，$n \geq N$ のとき $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \subset B_\varepsilon(x) \cap A$ である．よって (b) が成り立つ．

(3) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の N に対して，ある $n \geq N$ が存在して，$a_n \notin B_\varepsilon(x)$ である．