0.1　2004 午前

$\boxed{1}$ (1) 和と定数倍で閉じているのでベクトル空間.

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ とする．すなわち $x_1+x_2+x_3=0$ である．このとき，$x_1+(-x_3)+(x_2+2x_3)=0$ であるから，$\phi(V) \subset V$ である.

(3) $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が V の基底である.

(4) $\phi(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2$ である．$\phi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -v_1+2v_2$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

$\boxed{2}$ (1)(a) $(1,0,0),(0,1,0) \in W_1, (1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0) \notin W_1$

(b) ベクトル空間.

(c) ベクトル空間.

(d) $(\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, 1) \in W_4, 2(\frac{1}{9}, -\frac{10}{9}, 1) = (\frac{2}{9}, -\frac{20}{9}, 2) \notin W_4$

(2)(a) $f_1(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2f_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である.

(c) 線形写像.

(3) 像の基底は $\{1\}$ である．核の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ である.

$\boxed{3}$ (1) $\int_C xydy = \int_0^2 xx^2 2xdx = 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{2^6}{5}$ である.

(2) $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} f(u+v, uv) + \frac{\partial}{\partial y} f(u+v, uv)v, \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} f(u+v, uv) + \frac{\partial}{\partial y} f(u+v, uv)u$ である．よって $\frac{1}{u-v}((u-1)\frac{\partial g}{\partial u} + (1-v)\frac{\partial g}{\partial v}) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ である.

(3) 極座標変換でのヤコビアンは r である．よって $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$ である.

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = e^{x\log a}$ である．したがって Taylor 展開は $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$ である．すなわち $a_n = \frac{(\log a)^n}{n!}$ であり，収束半径は e^x の収束半径が無限大であるから，この Taylor 展開の収束半径も無限大である.

(2)(1) で求めた Taylor 展開を用いると，$a^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!} \frac{1}{n^k}$ である．したがって $n(1-a^{\frac{1}{n}}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!} \frac{1}{n^{k-1}}$ である．この級数は一様収束するから，各項の極限をとることで，$\lim_{n\to\infty} n(1-a^{\frac{1}{n}}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{(\log a)^k}{k!} \frac{1}{n^{k-1}} = -\log a$ である.

(3) $1-a^{\frac{1}{n}} \geq 0$ である．$\lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = -\log a$ であるから，$\frac{1}{n} = O(1-a^{\frac{1}{n}})$ である．$\sum \frac{1}{n}$ は発散するから，$\sum 1-a^{\frac{1}{n}}$ も発散する.