Αναφορά Εργασίας
Υπολογιστικά Μαθηματικά

Μέλη ομάδας:

Ηλίας Διαμάντης	ΑΜ: 2685
Αντωνίου Χριστόδουλος	ΑΜ: 2641
Τζούνας Αντώνιος	ΑΜ: 2368

Πρόβλημα 1

α') Για να βρούμε τους ζητούμενους τύπους θα χρειαστούμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων για το z και άλλο ένα για το y.

Θεωρώ: $\begin{cases} a = z \\ b = z' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a' = b = q_1(t,a,b) \\ b' = z'' = q_2(t,a,b) \end{cases}$

και: $\begin{cases} c = y \\ d = y' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c' = d = k_1(t,c,d) \\ d' = y'' = k_2(t,c,d) \end{cases}$

Λύνοντας την εξίσωση (1) της εκφώνησης ως προς z'' έχουμε:

$$z'' = (f_z - gM - C_z|z'|z')/M$$

$$z'' = (f_z - gM - C_z|b|b)/M$$

Αντίστοιχα για την εξίσωση (2) ως προς y'' έχουμε:

$$y'' = (T_z - 0.5C_y|y'|y')/I_z$$

$$y'' = (T_z - 0.5C_y|d|d)/I_z$$

Άρα έχουμε τα συστήματα:

$$\begin{cases} q_1(t,a,b) = b \\ q_2(t,a,b) = (f_z - gM - C_z|b|b)/M \end{cases}$$

και:
$$\begin{cases} k_1(t,c,d) = d \\ k_2(t,c,d) = (T_z - 0.5C_y|d|d)/I_z \end{cases}$$

Για Α.Μ. = 2685 στις αρχικές συνθήκες και εισόδους της εκφώνησης έχουμε:

$$[f_z, T_z]^T = [Mg + 2.685, 0]^T$$

$$[f_z, T_z]^T = [Mg, 0.2685]^T$$

$$z_0 = 2.685 \qquad y_0 = 0$$

$$C_z = 3 - 0.537 \quad \rightarrow \quad C_z = 2.463$$

$$C_y = 5 - 0.537 \quad \rightarrow \quad C_y = 4.463$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) της εκφώνησης έχουμε:

$$a(0) = z(0) = z_0 = 2.685$$

$$b(0) = z'(0) = 0$$

$$c(0) = y(0) = y_0 = 0$$

$$d(0) = y'(0) = 0$$

Μέθοδος του Euler:

$$a_{n+1} = a_n + h \cdot a'_n = a_n + h \cdot q_1(t_n, a_n, b_n) \quad \rightarrow \quad a_{n+1} = a_n + h \cdot b_n$$

$$b_{n+1} = b_n + h \cdot b'_n = b_n + h \cdot q_2(t_n, a_n, b_n)$$

$$\rightarrow \quad b_{n+1} = b_n + h \cdot (f_z - gM - C_z|b_n|b_n)/M$$

$$c_{n+1} = c_n + h \cdot c'_n = c_n + h \cdot k_1(t_n, a_n, b_n) \quad \rightarrow \quad c_{n+1} = c_n + h \cdot d_n$$

$$d_{n+1} = d_n + h \cdot d'_n = d_n + h \cdot k_2(t_n, a_n, b_n)$$

$$\rightarrow \quad d_{n+1} = d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z$$

Βελτιωμένη μέθοδος του Euler:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{h}{2} \cdot [q_1(t_n, a_n, b_n) + q_1(t_n + h,\ a_n + h \cdot q_1(t_n, a_n, b_n),\ b_n + h \cdot q_2(t_n, a_n, b_n))]$$

$$= a_n + \frac{h}{2} \cdot [b_n + q_1(t_n + h,\ a_n + h \cdot b_n,\ b_n + h \cdot (f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M)]$$

$$\rightarrow \quad a_{n+1} = a_n + \frac{h}{2} \cdot \left[b_n +\ b_n + h \cdot (f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M\right]$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{h}{2} \cdot [q_2(t_n, a_n, b_n) + q_2(t_n + h,\ a_n + h \cdot q_1(t_n, a_n, b_n),\ b_n + h \cdot q_2(t_n, a_n, b_n))]$$

$$= b_n + \frac{h}{2} \cdot [(f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M + q_2(t_n + h,\ a_n + h \cdot b_n,\ b_n + h \cdot$$

$$(f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M)]$$

$$\rightarrow \quad b_{n+1} = b_n + \frac{h}{2} \cdot [(f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M$$

$$+ (f_z - gM - C_z|\,b_n + h \cdot (f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M|(\,b_n + h$$
$$\cdot (f_z - gM - C_z|\,b_n|\,b_n)/M))/M]$$

$$c_{n+1} = c_n + \frac{h}{2} \cdot [k_1(t_n, c_n, d_n) + k_1(t_n + h,\ c_n + h \cdot k_1(t_n, c_n, d_n),\ d_n + h \cdot k_2(t_n, c_n, d_n))]$$

$$= c_n + \frac{h}{2} \cdot \left[d_n + k_1(t_n + h,\ c_n + h \cdot d_n,\ d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z)\right]$$

$$\rightarrow \quad c_{n+1} = c_n + \frac{h}{2} \cdot \left[d_n +\ d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z\right]$$

$$d_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} \cdot \left[k_2(t_n, c_n, d_n) + k_2\left(t_n + h,\ c_n + h \cdot k_1(t_n, c_n, d_n),\ d_n + h \cdot k_2(t_n, c_n, d_n)\right)\right]$$

$$= d_n + \frac{h}{2} \cdot \left[(T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z + k_2\left(t_n + h,\ c_n + h \cdot d_n,\ d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z\right)\right]$$

$$\rightarrow \quad d_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} \cdot [(T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z$$

$$+ (T_z - 0.5C_y\left|\ d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z\right|(\ d_n + h \cdot (T_z - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z))/I_z]$$

γ') Σύμφωνα με το σύστημα που θεωρήσαμε στο ερώτημα α' έχουμε:

$$f_z = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') = \ Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha) - K_{dz}(b)$$

$$T_z = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}(y') = K_{py}(y_{des} - c) - K_{dy}(d)$$

Έπειτα από αντικατάσταση των εισόδων με τους τύπους, έχουμε τις εξής μεθόδους:

Μέθοδος του Euler:

$$a_{n+1} = a_n + h \cdot b_n$$

$$b_{n+1} = b_n + h \cdot (Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z|b_n|b_n)/M$$

$$c_{n+1} = c_n + h \cdot d_n$$

$$d_{n+1} = d_n + h \cdot (K_{py}(y_{des} - c_n) - K_{dy}(d_n) - 0.5C_y|d_n|d_n)/I_z$$

Βελτιωμένη μέθοδος του Euler:

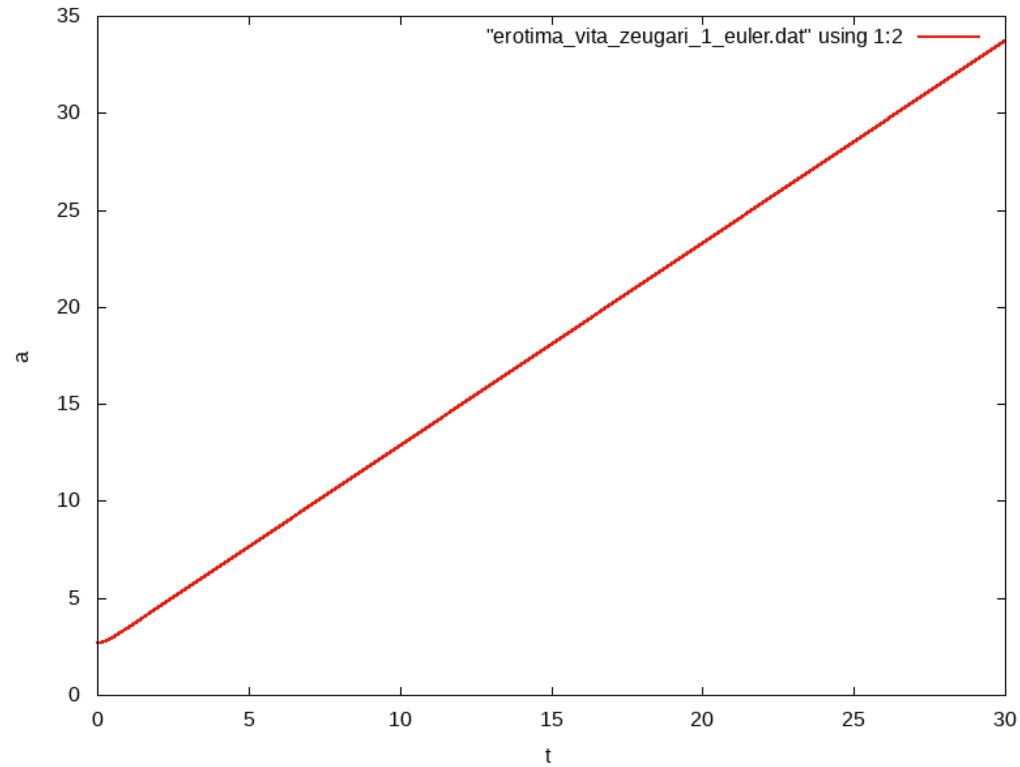
$$a_{n+1} = a_n + \frac{h}{2} \cdot \left[b_n + \ b_n + h \cdot (Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z |\, b_n |\, b_n)/M\right]$$

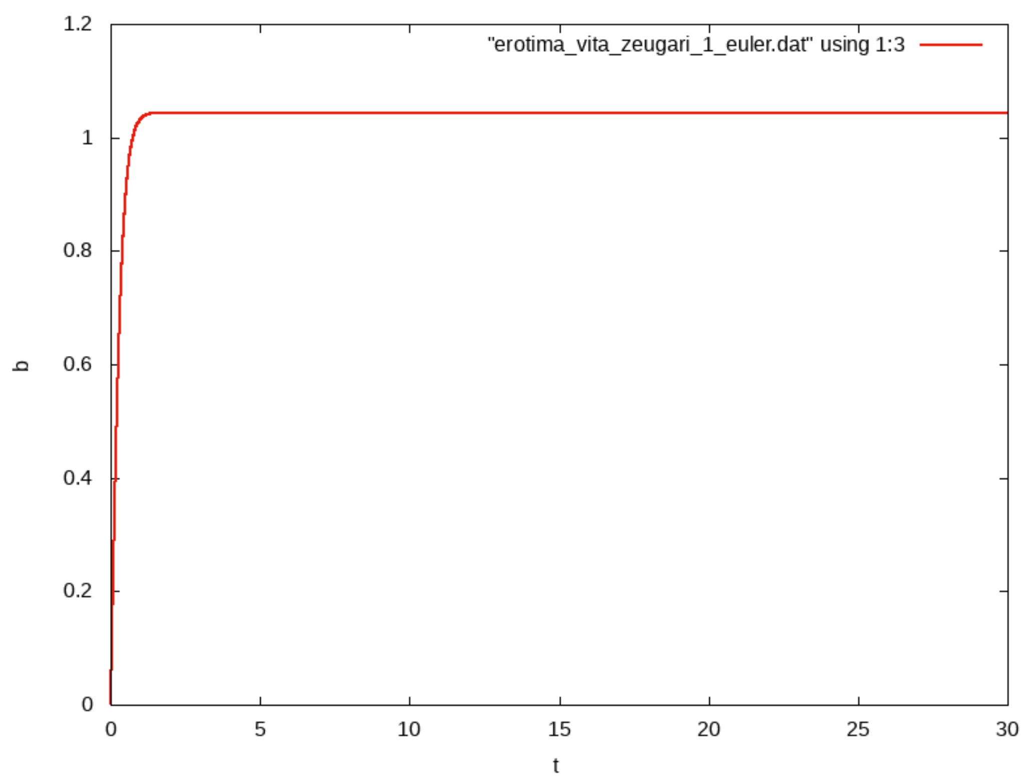
$$\begin{aligned} b_{n+1} = b_n + \frac{h}{2} \cdot [(Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z |\, b_n |\, b_n)/M \\ + (Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z \\ \left|\, b_n + h \cdot \left(Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z |\, b_n |\, b_n\right)/M\right| \\ (\, b_n + h \cdot \left(Mg + K_{pz}(z_{des} - \alpha_n) - K_{dz}(b_n) - gM - C_z |\, b_n |\, b_n\right)/M))/M] \end{aligned}$$

$$c_{n+1} = c_n + \frac{h}{2} \cdot \left[d_n + \ d_n + h \cdot (K_{py}\left(y_{des} - c_n\right) - K_{dy}(d_n) - 0.5C_y |d_n| d_n)/I_z\right]$$

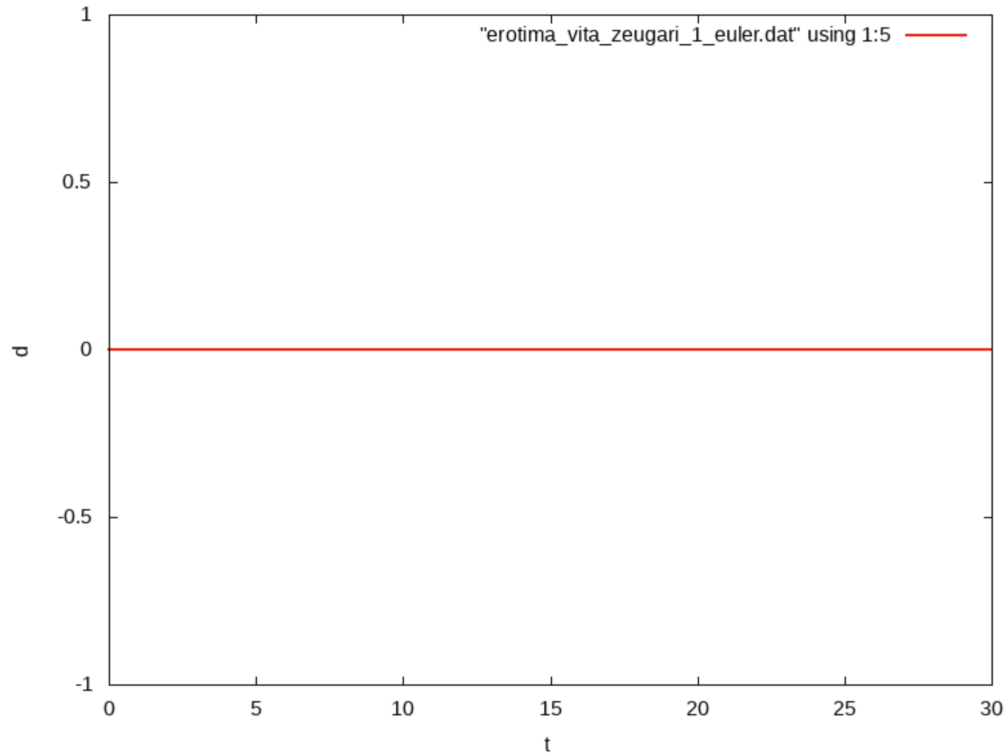
$$\begin{aligned} d_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} \cdot [(K_{py}\left(y_{des} - c_n\right) - K_{dy}(d_n) - 0.5C_y |d_n| d_n)/I_z \\ + (K_{py}\left(y_{des} - c_n\right) - K_{dy}\left(d_n\right) - 0.5C_y \\ \left|\, d_n + h \cdot \left(K_{py}\left(y_{des} - c_n\right) - K_{dy}(d_n) - 0.5C_y |d_n| d_n\right)/I_z\right| \\ (\, d_n + h \cdot (K_{py}\left(y_{des} - c_n\right) - K_{dy}(d_n) - 0.5C_y |d_n| d_n)/I_z))/I_z] \end{aligned}$$

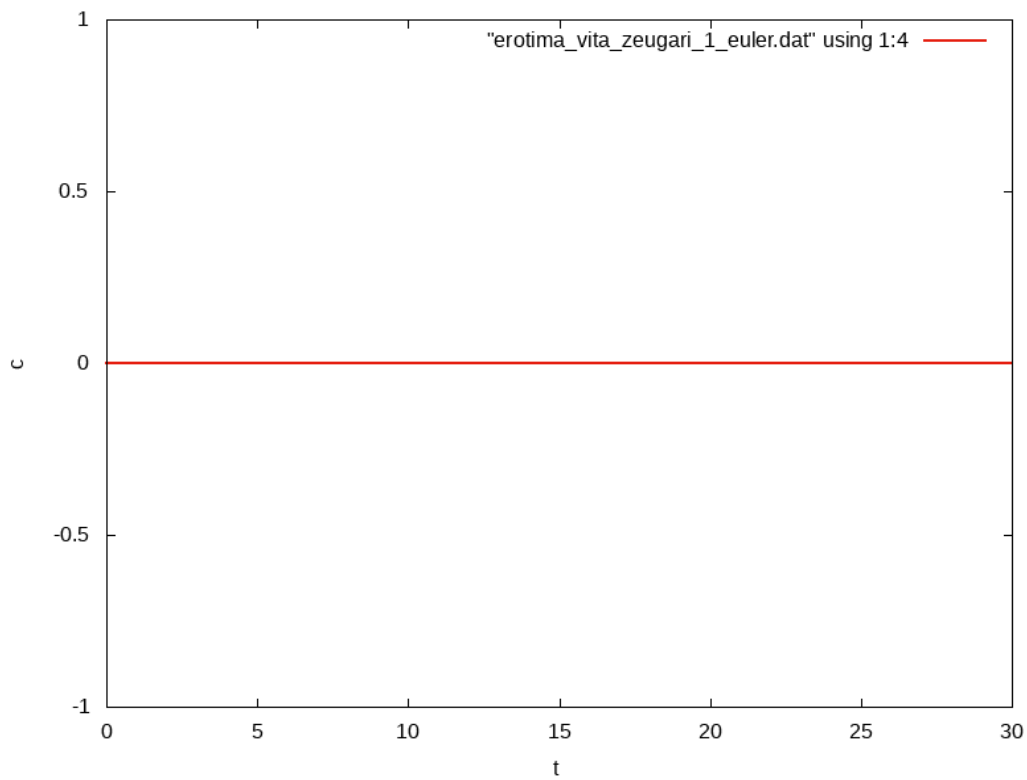
ε') Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος β' με το πρώτο ζευγάρι εισόδων για την μέθοδο του Euler:



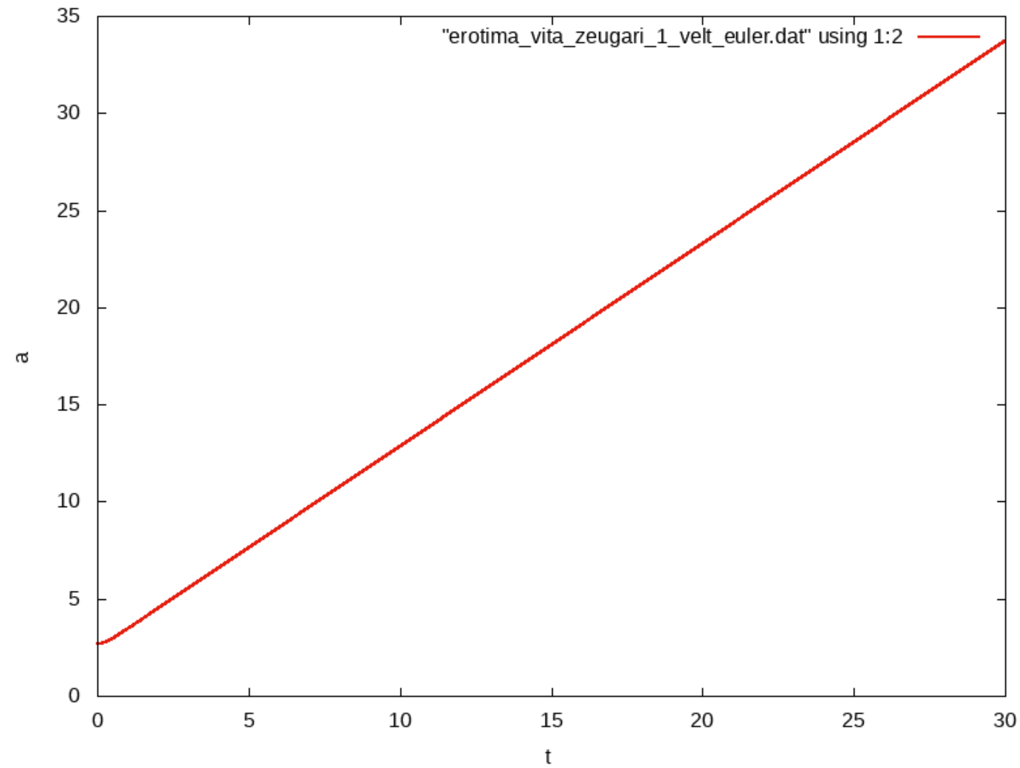


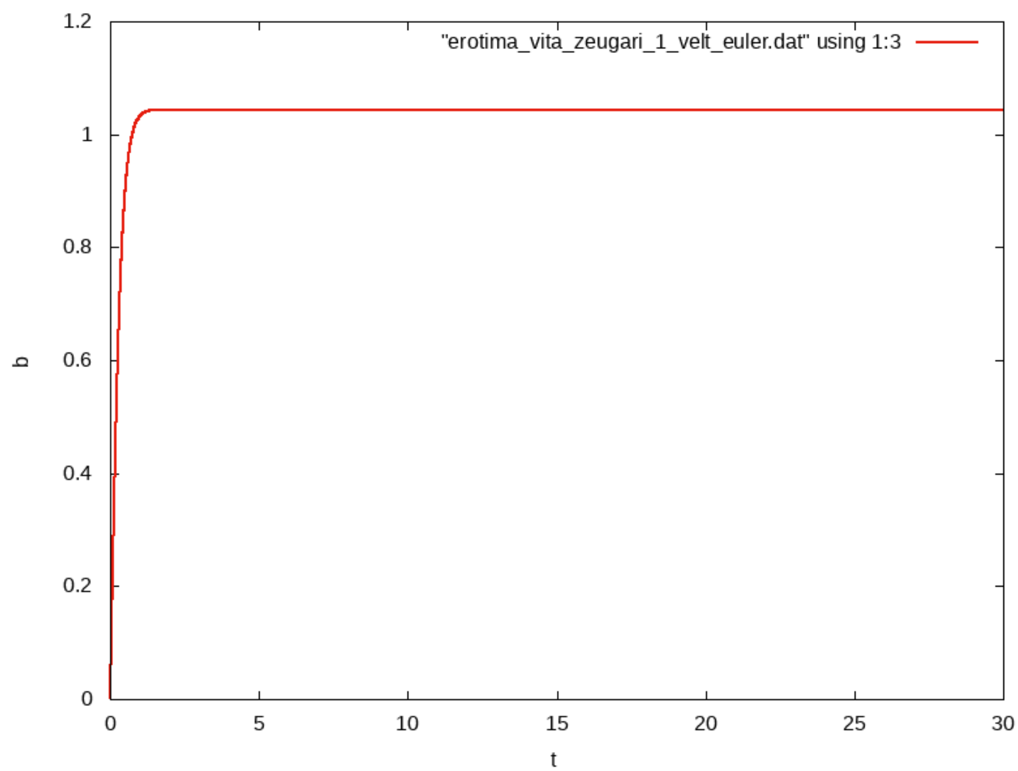
Παρατηρούμε ότι οι τιμές των λύσεων c kai d παραμένουν στο 0.



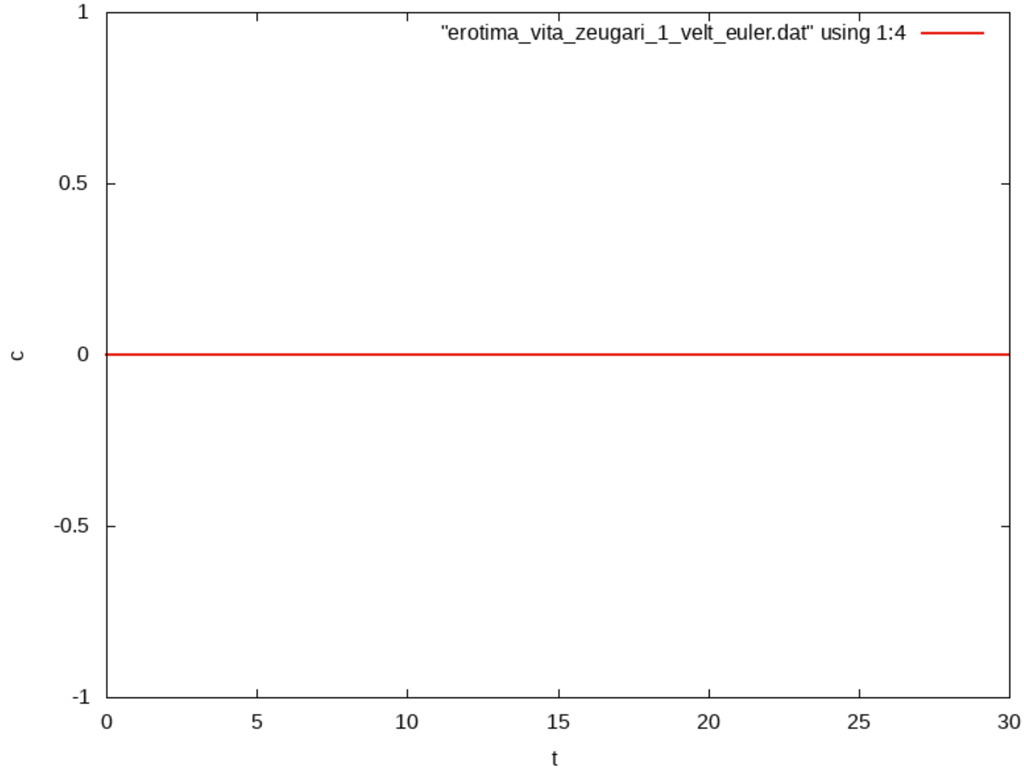


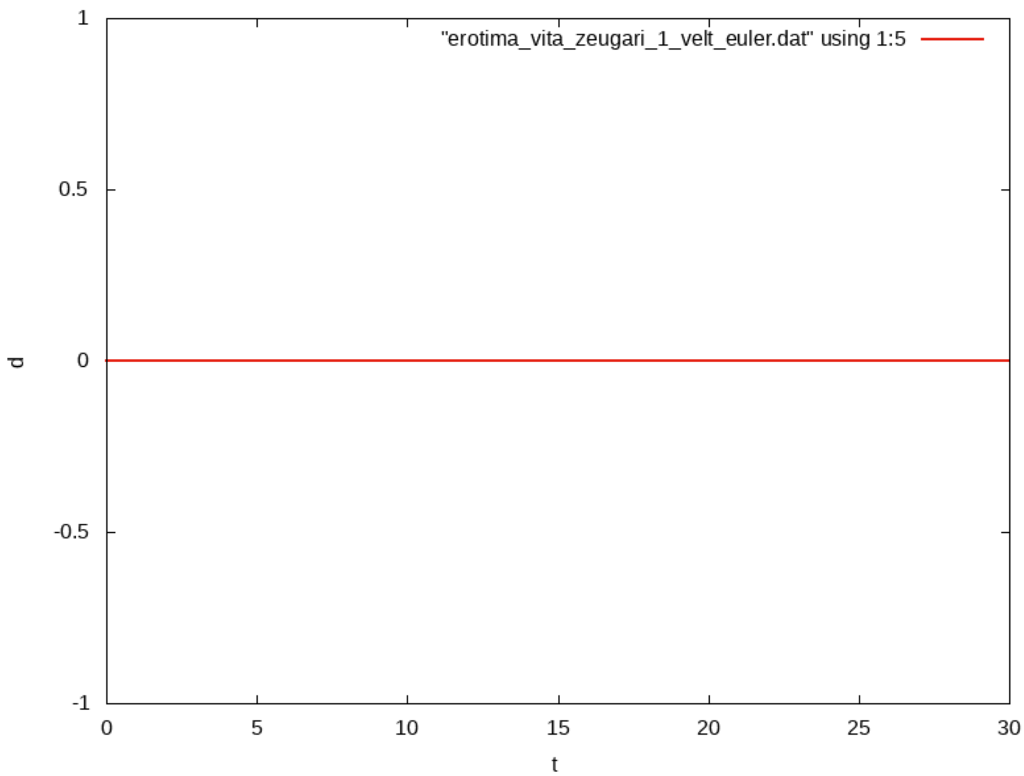
Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος β΄ με το πρώτο ζευγάρι εισόδων για την βελτιωμένη μέθοδο του Euler:



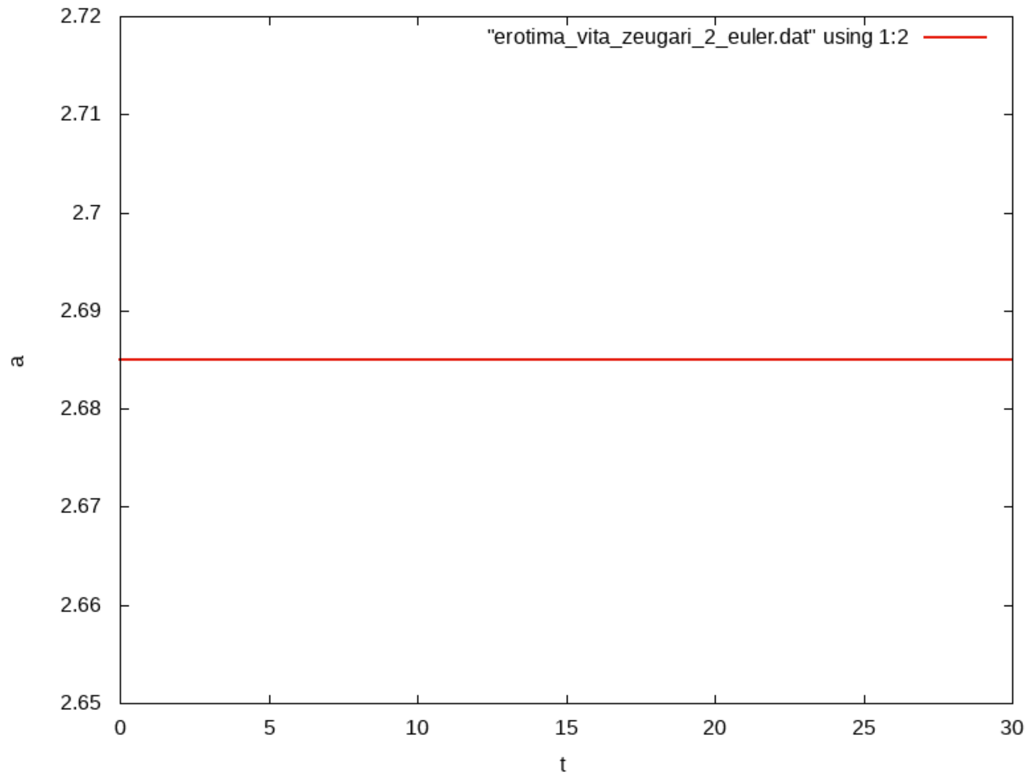


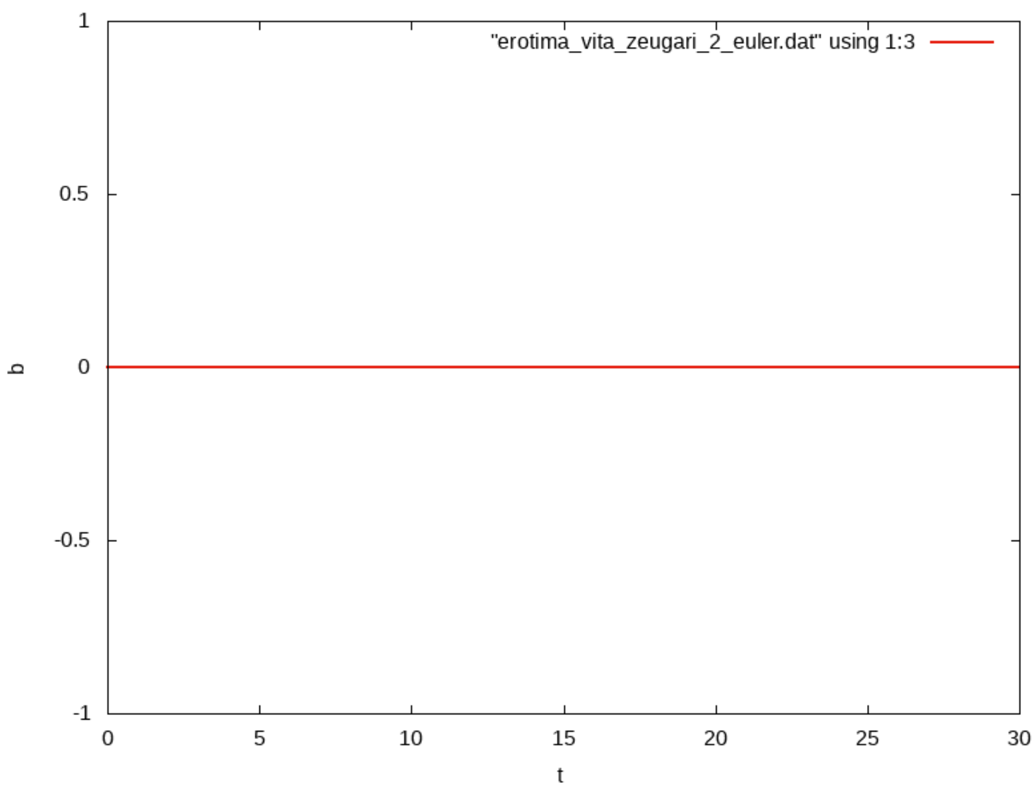
Παρατηρούμε ότι οι διαφορές στα αποτελέσματα των δύο λύσεων δεν είναι εμφανείς από τις γραφικές παραστάσεις.



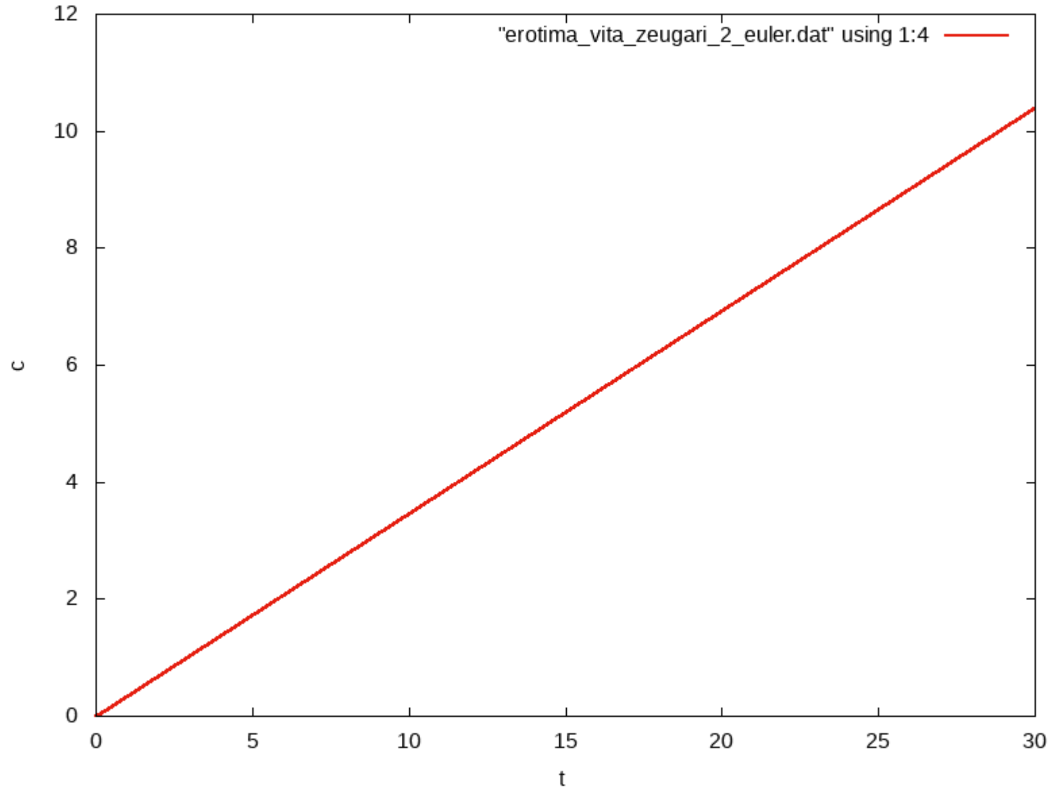


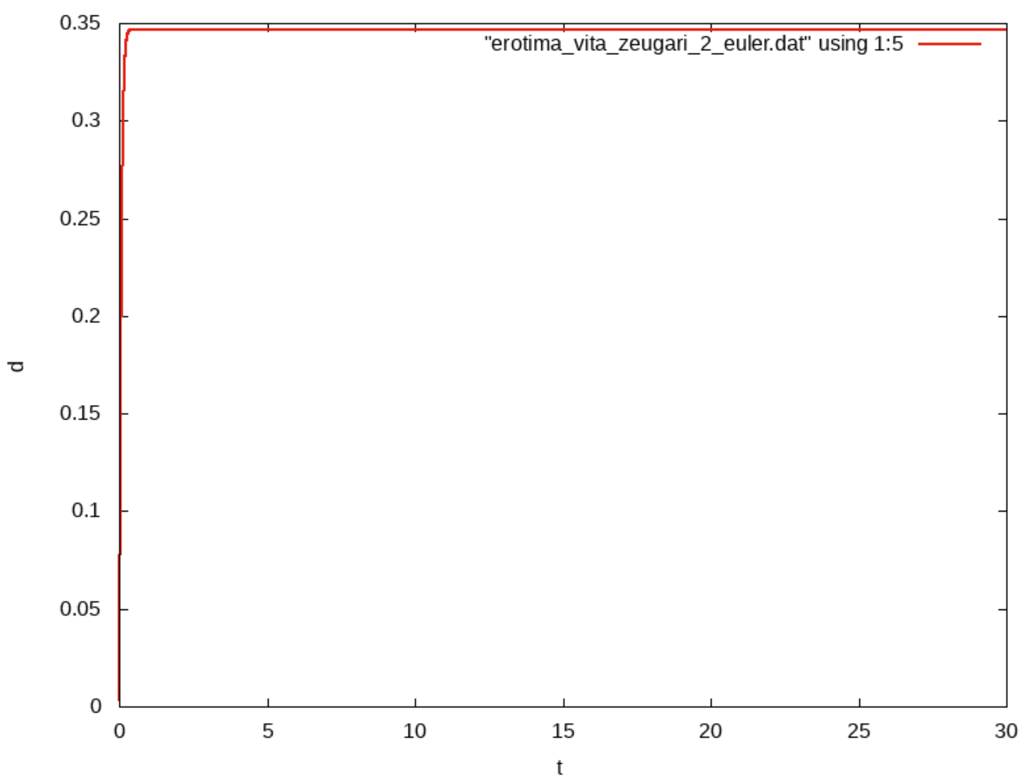
Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος β΄ με το δεύτερο ζευγάρι εισόδων για την μέθοδο του Euler:



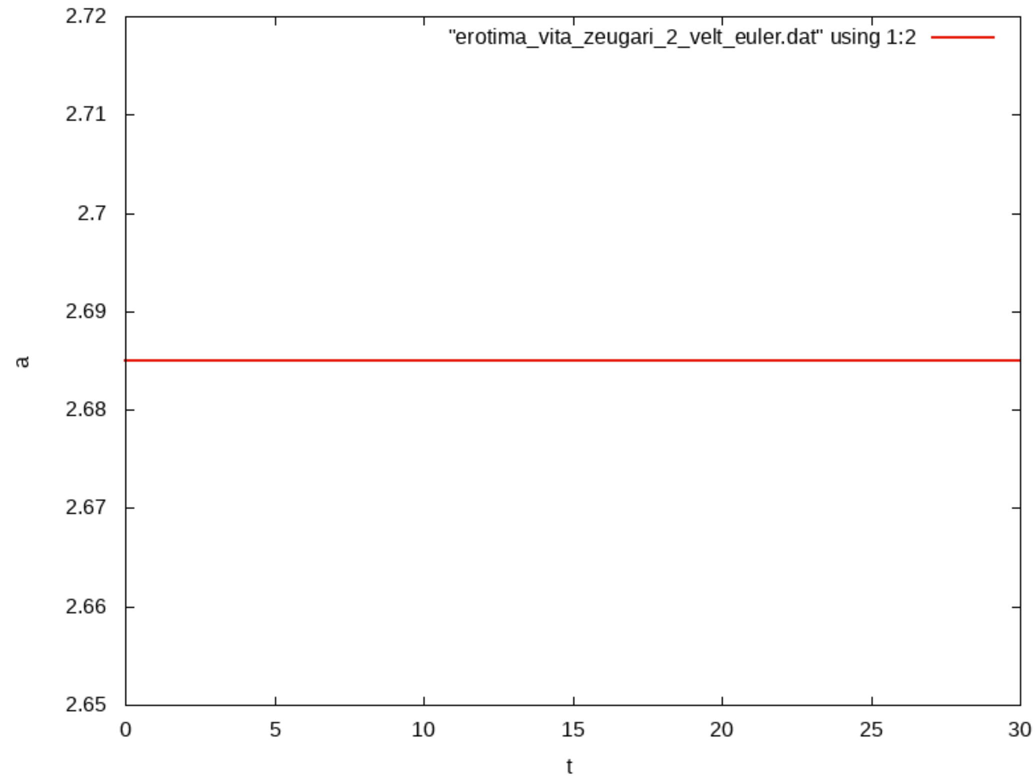


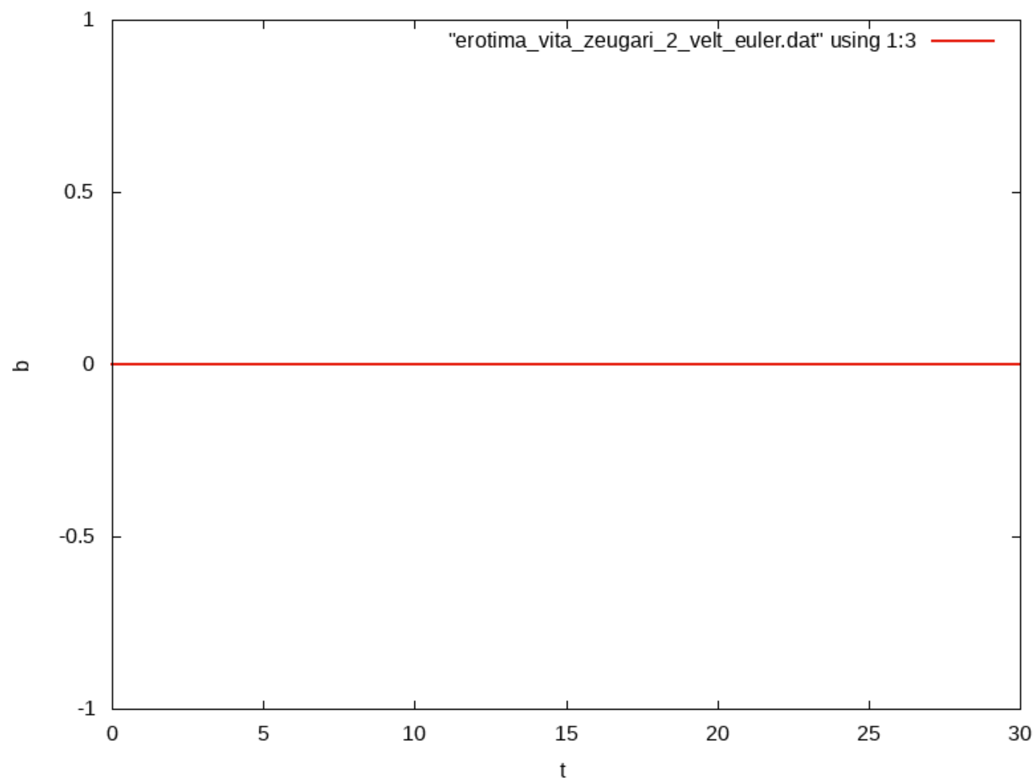
Παρατηρούμε ότι οι η τιμή του α μένει σταθερή στο 2.685 ενώ αυτή του b στο 0.

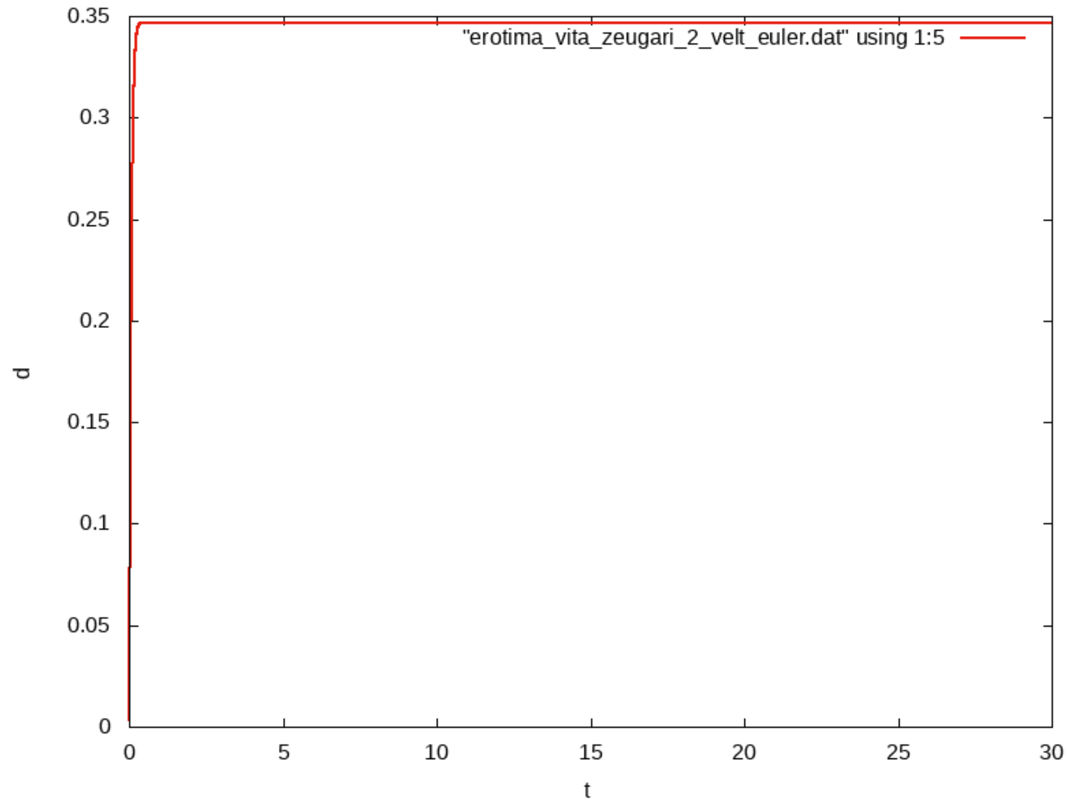


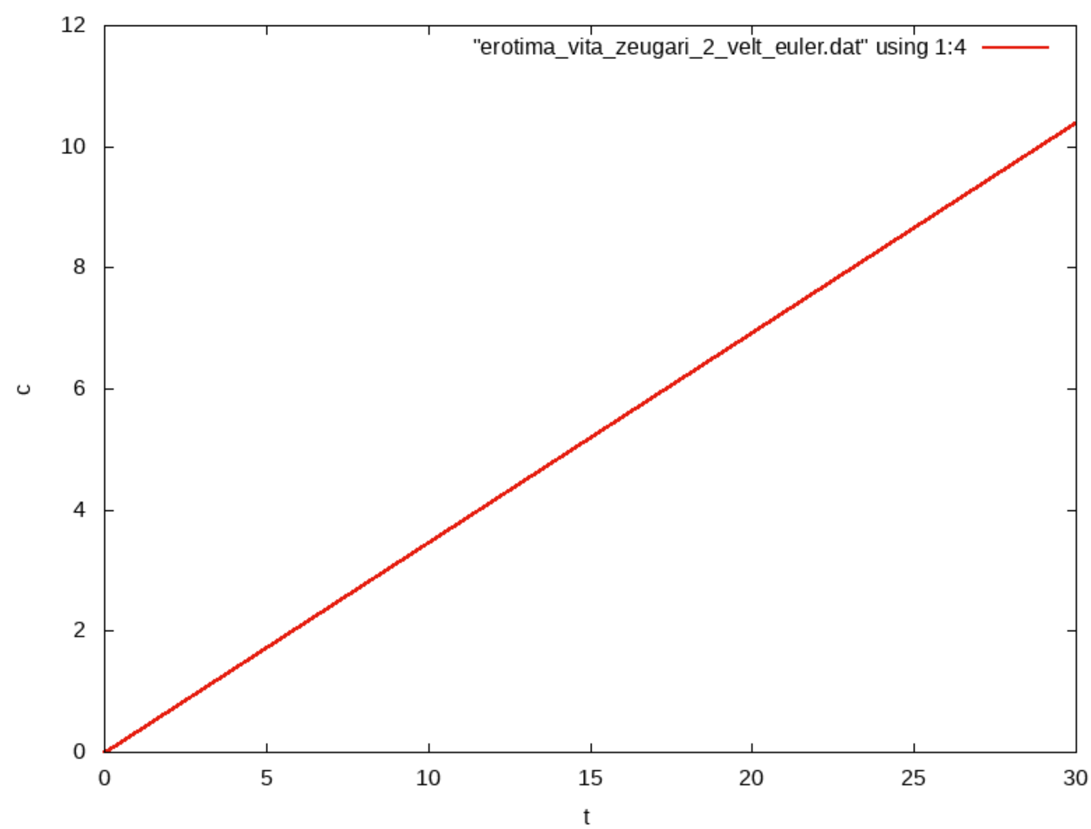


Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος β΄ με το δεύτερο ζευγάρι εισόδων για την βελτιωμένη μέθοδο του Euler:

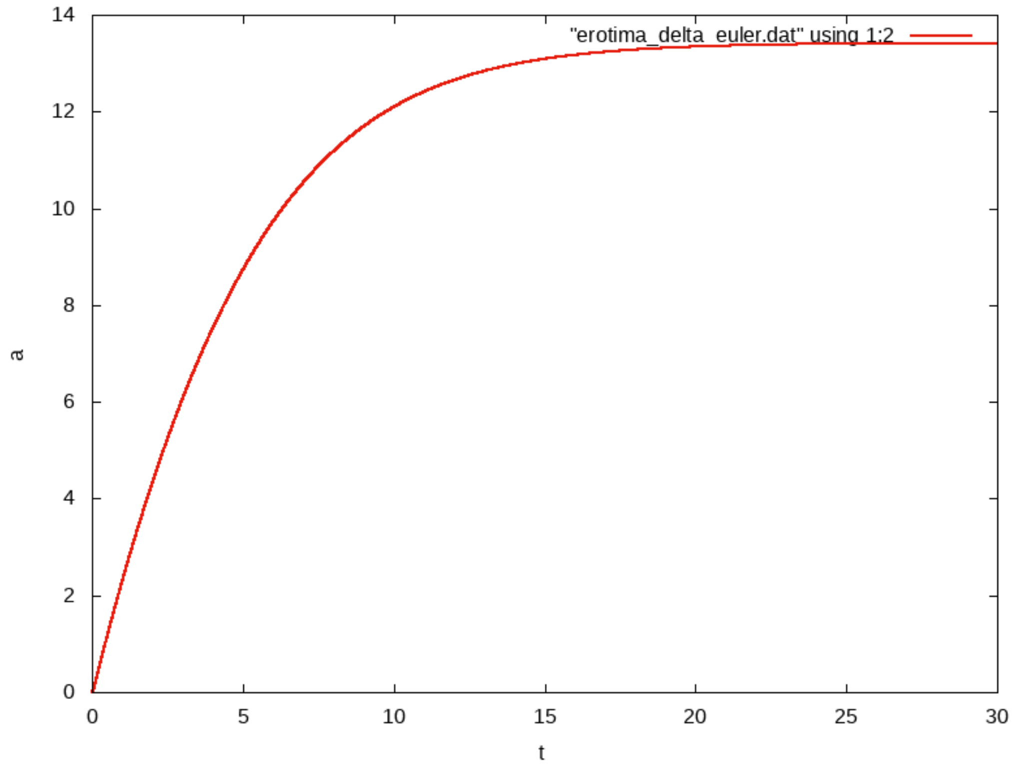


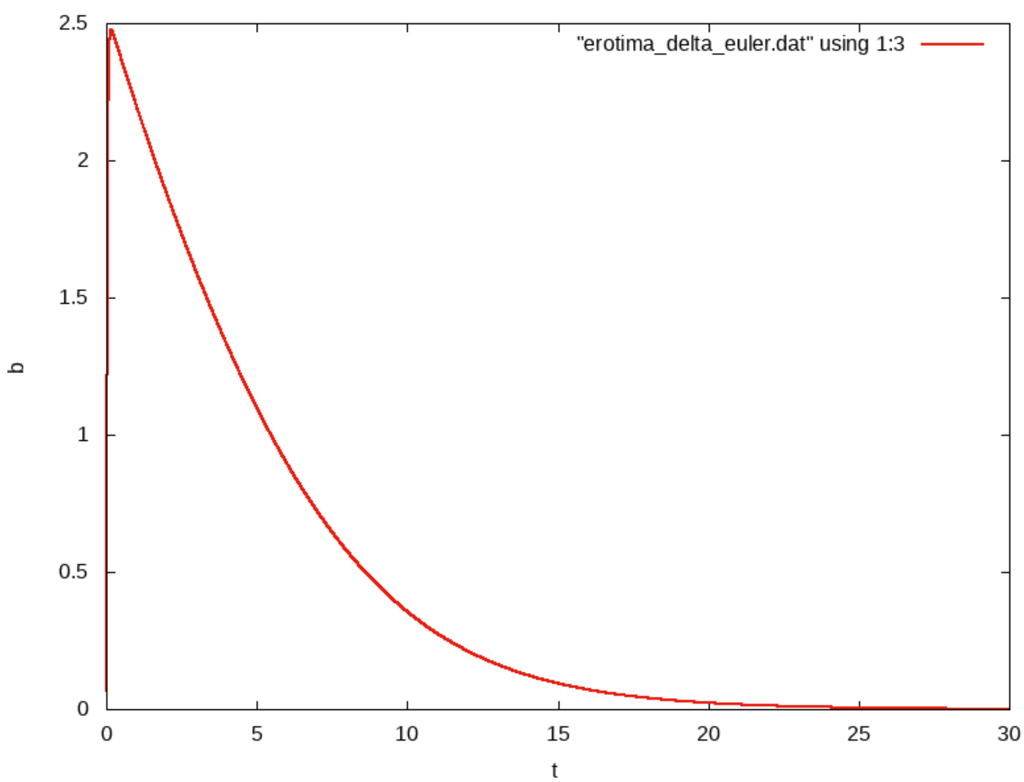



"erotima_vita_zeugari_2_velt_euler.dat" using 1:5
d
t
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0
5
10
15
20
25
30

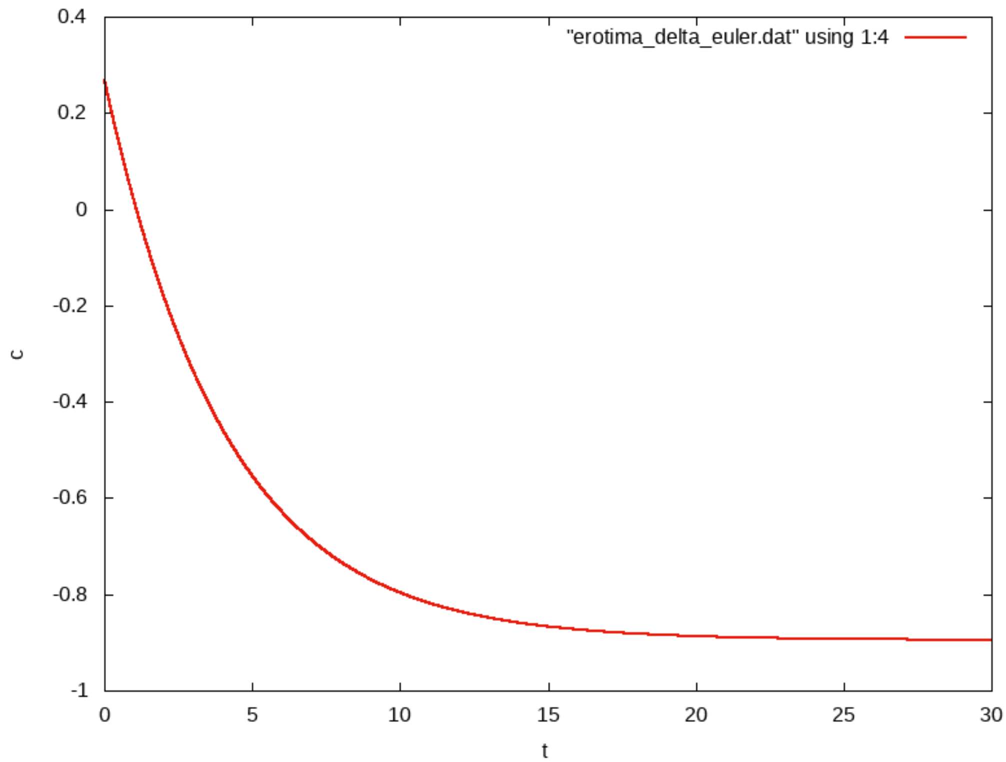

"erotima_vita_zeugari_2_velt_euler.dat" using 1:4
c
t
0
2
4
6
8
10
12
0
5
10
15
20
25
30

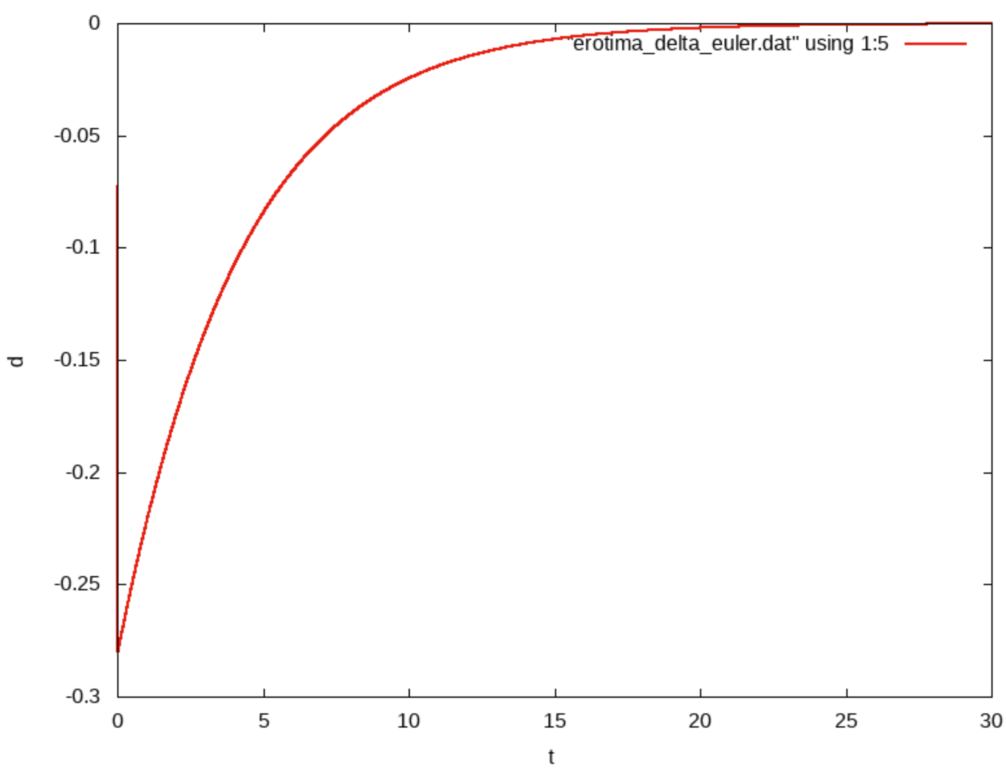
Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος δ' για την μέθοδο του Euler:



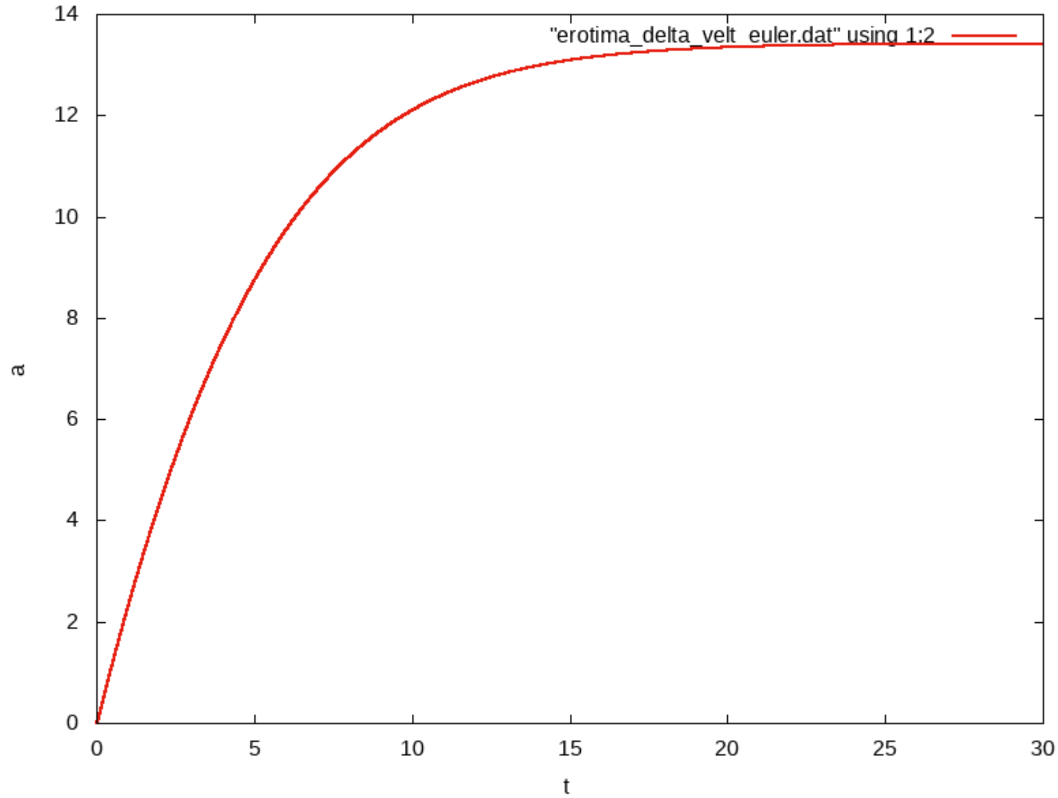


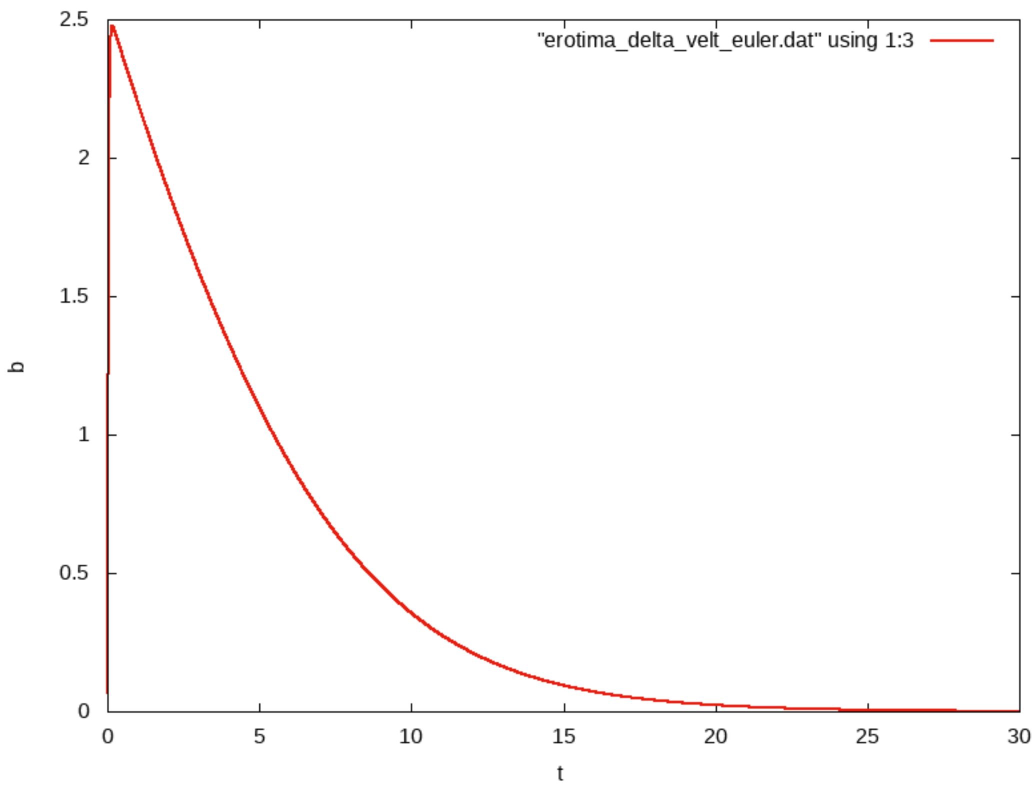
Εδώ παρατηρούμε ότι η τιμή του α συγκλίνει προς την τιμή της εισόδου z_{des} όσο η τιμή του t πλησιάζει το 30, ενώ η τιμή του c συγκλίνει προς την είσοδο y_{des}.

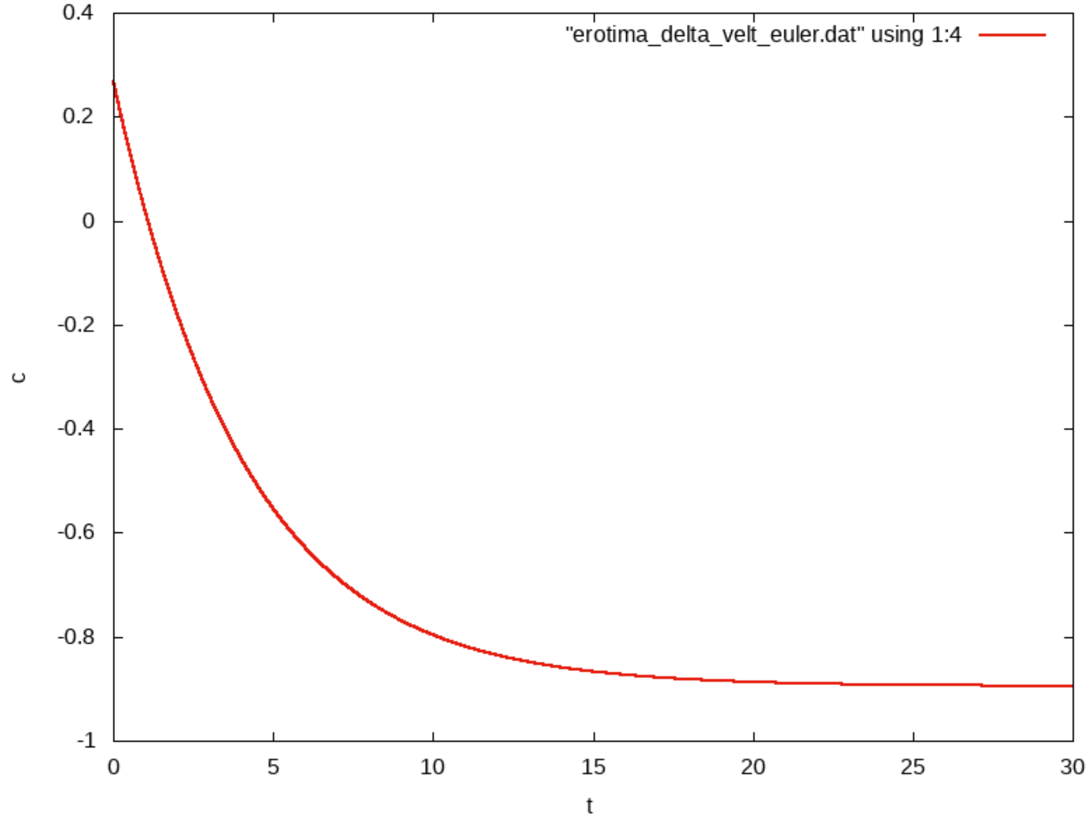


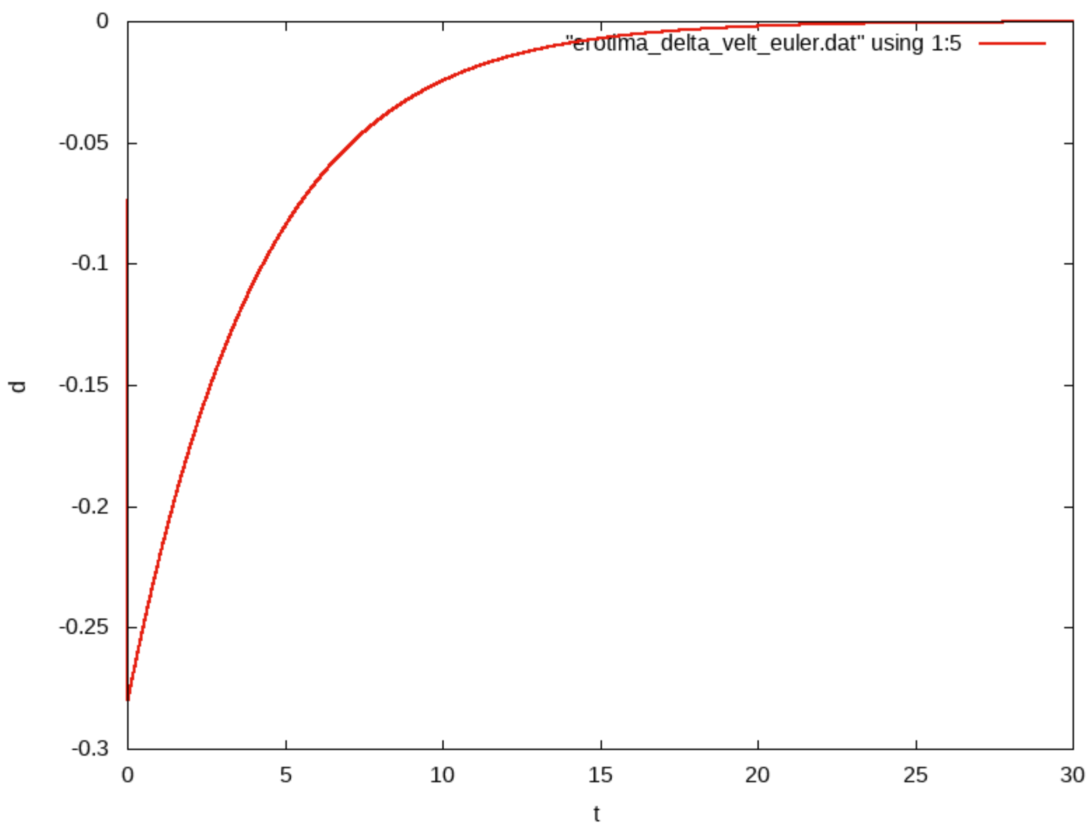


Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος δ’ για την βελτιωμένη μέθοδο του Euler:






"erotima_delta_velt_euler.dat" using 1:4
c
t
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
20
25
30


"erotima_delta_velt_euler.dat" using 1:5
d
t
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
5
10
15
20
25
30

Πρόβλημα 2

α') Αντικαθιστώντας την (6) στην (5) προκύπτει η εξίσωση:

$$Mz'' = K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz} \cdot z' - C_z \cdot z'$$

Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς θα χρειαστούμε τον μετασχηματισμό Laplace. Φέρνουμε την εξίσωση σε κατάλληλη μορφή:

$$Mz'' + (K_{dz} + C_z) \cdot z' + K_{pz} \cdot z = K_{pz} \cdot z_{des}$$

Εφαρμόζωντας τον Μ. Laplace έχουμε:

$$Ms^2 Z(s) + (K_{dz} + C_z) \cdot sZ(s) + K_{pz} \cdot Z(s) = K_{pz} \cdot z_{des} \cdot U(s)$$

$$\left(Ms^2 + (K_{dz} + C_z) \cdot s + K_{pz}\right) \cdot Z(s) = K_{pz} \cdot z_{des} \cdot U(s)$$

Και η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{K_{pz} \cdot z_{des}}{Ms^2 + (K_{dz} + C_z) \cdot s + K_{pz}} = H(s)$$

Για να βρούμε τους πόλους αρκεί να εξετάσουμε για ποιές τιμές του s η H(s) τείνει στο άπειρο, δηλαδή για ποιές τιμές ισχύει:

$$Ms^2 + (K_{dz} + C_z) \cdot s + K_{pz} = 0$$

Βρίσκοντας την διακρίνουσα έχουμε:

$$\Delta = (K_{dz} + C_z)^2 - 4\mathrm{M}K_{pz}$$

Για τα μηδενικά θα πρέπει να εξετάσουμε για ποιές τιμές του s η H(s) μηδενίζεται. Ο αριθμητής δεν έχει s άρα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου:

$$\mathrm{s} \to \infty \text{ και } \mathrm{H(s)} \to \frac{K_{pz} \cdot z_{des}}{Ms^2 + (K_{dz} + C_z) \cdot s + K_{pz}}$$

Άρα το $s \to \infty$ είναι μηδενικό.

Για να υπολογίσουμε τους πόλους αριθμητικά, πρώτα υπολογίζουμε τις τιμές τον παραμέτρων:

$$\mathrm{M} = 1.5$$

$$C_z = 4 - (2685/5000) = 3.463$$

$$K_{pz} = 5 \quad \text{και} \quad K_{dz} = 15$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την διακρίνουσα:

$$\Delta = (15 + 3.463)^2 - 4 \cdot 1.5 \cdot 5 = 310.882$$

Η διακρίνουσα είναι θετική άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες οι οποίες είναι και οι πόλοι:

$$r_1, r_2 = \frac{-18.463 \pm \sqrt{310.882}}{2 \cdot 1.5}$$

$$r_1 = -0.277 \quad \text{και} \quad r_2 = -0.277$$

γ') Για να βρούμε την αναλυτική λύση, φέρνουμε την εξίσωση (5) σε κατάλληλη μορφή:

$$Mz'' + (K_{dz} + C_z) \cdot z' + K_{pz} \cdot z = K_{pz} \cdot z_{des}$$

Υπολογίζουμε τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος 1γ που θα χρειαστούμε:

$$M = 1$$

$$K_{dz} = 15 + (2685/1000) = 17.685$$

$$K_{pz} = 5$$

$$C_z = 3+(2685/5000)=3.537$$

$$z_{des} = 2685/200 = 13.425$$

Τις αντικαθηστούμε στην εξίσωση και έχουμε:

$$z'' + 21.222z' + 5z = 67.125$$

Βλέπουμε ότι η εξίσωση είναι μη-ομογενής. Αρχικά λύνουμε την ομογενή:

$$z'' + 21.222z' + 5z = 0$$

Με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$x^2 + 21.222x + 5 = 0$$

$$\Delta = (21.222)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 430.373$$

$$x_1, x_2 = \frac{-21.222 \pm \sqrt{430.373}}{2}$$

$$x_1 = -0.234 \quad \text{και} \quad x_2 = -20.988$$

Και βρίσκουμε την ομογενή εξίσωση:

$$z_{ομογενής}(t) = c_1 \cdot e^{-0.234t} + c_2 \cdot e^{-20.988t}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την μερική λύση. Αφού το 67.125 είναι σταθερά θεωρούμε:

$$z_{μερική}(t) = c$$

Με αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$z'' + 21.222z' + 5z_{μερική} = 67.125$$

Και για $z'' = z' = 0$ έχουμε:

$$5z_{μερική} = 67.125 \;\; \rightarrow \;\; 5c = 67.125 \;\; \rightarrow \;\; c = 13.425$$

Άρα η λύση είναι:

$$z(t) = z_{ομογενής}(t) + z_{μερική}(t) \;\; \rightarrow \;\; z(t) = c_1 \cdot e^{-0.234t} + c_2 \cdot e^{-20.988t} + 13.425$$

Με παράγωγο:

$$z'(t) = -0.234 \cdot c_1 \cdot e^{-0.234t} - 20.988 \cdot c_2 \cdot e^{-20.988t}$$

Για να βρουμε τις τιμές των c_1 και c_2:

$$z(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 + c_2 + 13.425 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -c_2 - 13.425$$

$$z'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad -0.234 \cdot c_1 - 20.988 \cdot c_2 = 0$$

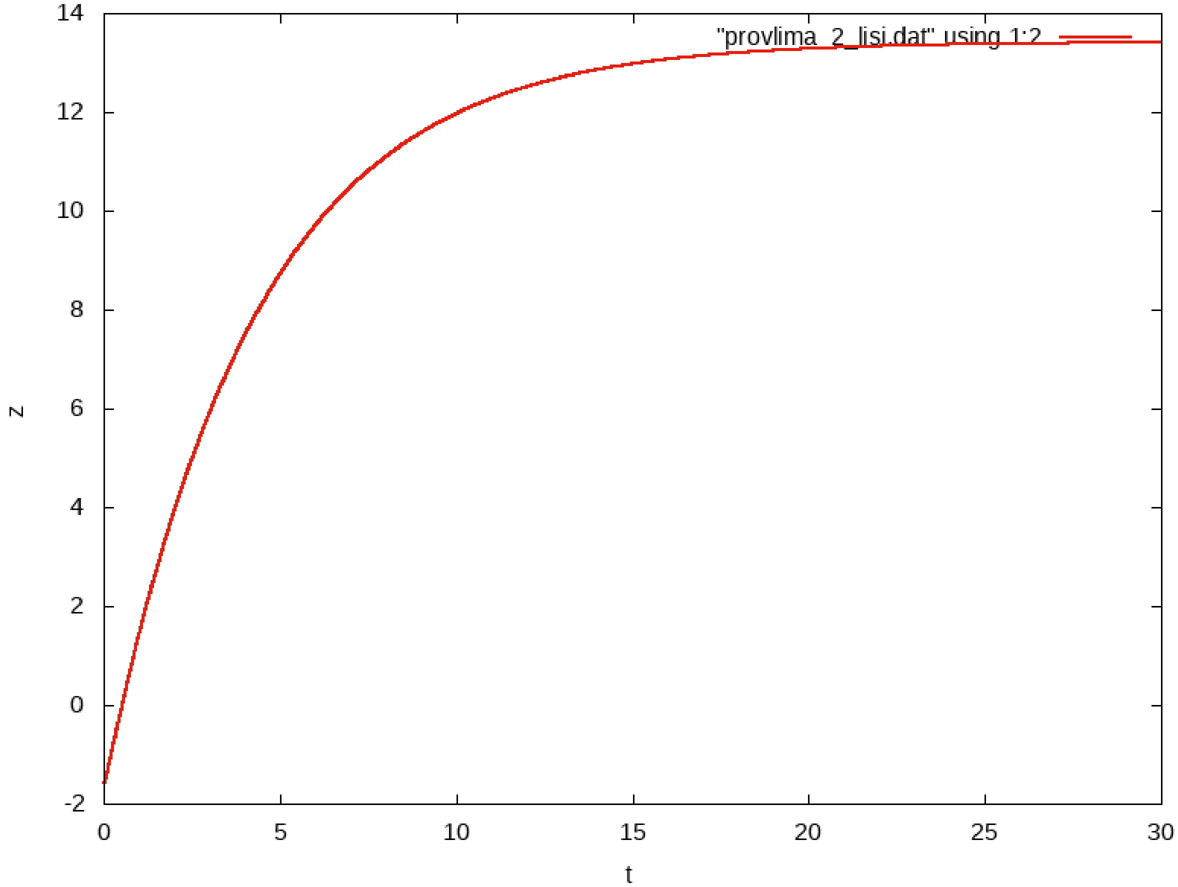
Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$c_1 = -15.169 \quad \text{και} \quad c_2 = 0.169$$

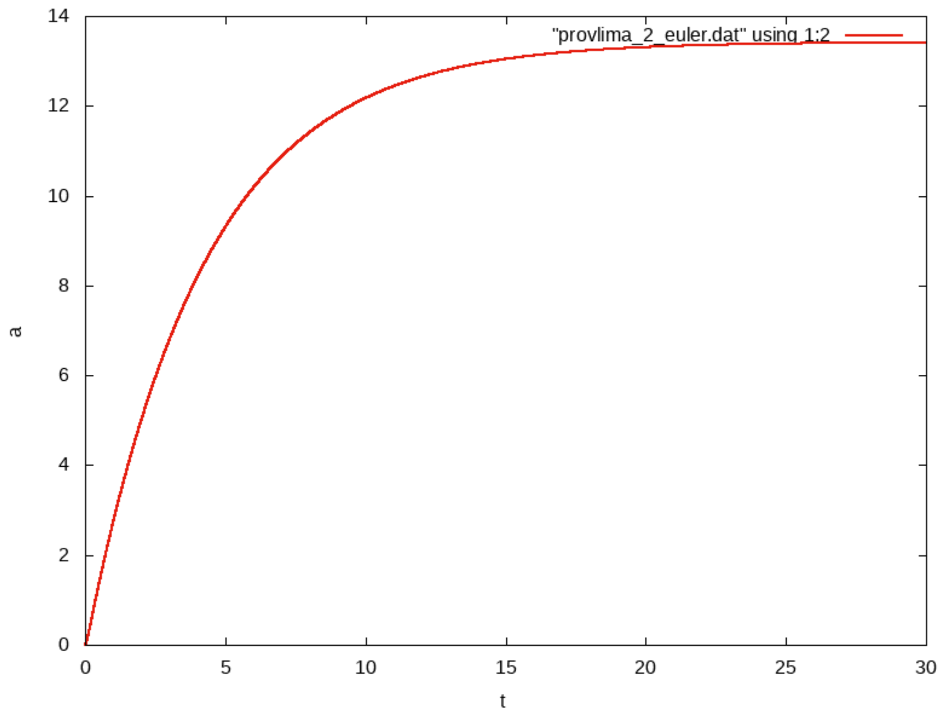
Άρα η λύση είναι:

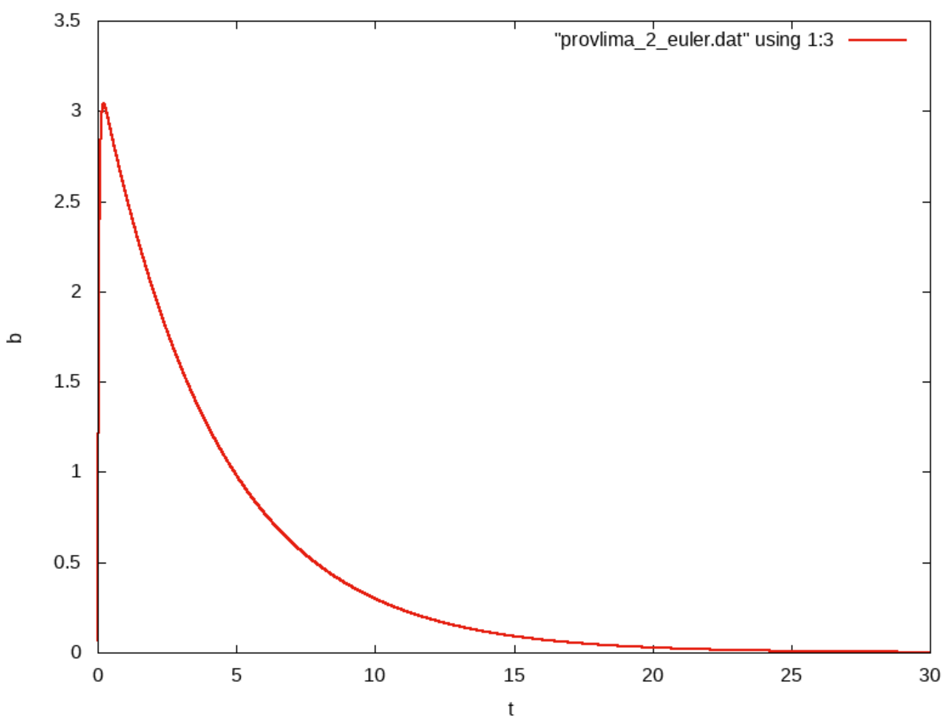
$$z(t) = -15.169 \cdot e^{-0.234t} + 0.169 \cdot e^{-20.988t} + 13.425$$

ε') Η γραφική παράσταση της λύσης:



Γραφικές παραστάσεις για την μέθοδο του Euler:





Όπως και στο αντίστοιχο ερώτημα του προβλήματος 1, παρατηρούμε ότι η τιμή του α συγκλίνει προς την τιμή της εισόδου z_{des} όσο η τιμή του t πλησιάζει το 30, Γραφικές παραστάσεις για την βελτιωμένη μέθοδο του Euler: