Domáce úlohy č. 4 — Dominik Chrobák

① Ak I je neprázdna množina a pre každé i a I sú K_i a L_i množiny, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$$

platia vždy.

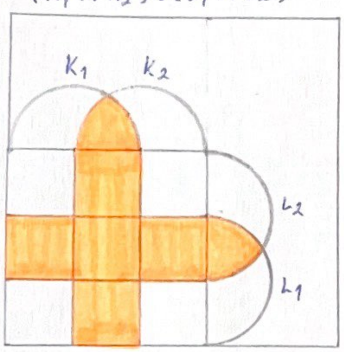
Riešenie:

Najprv rozoberme prípad $I = \{1,2\}$

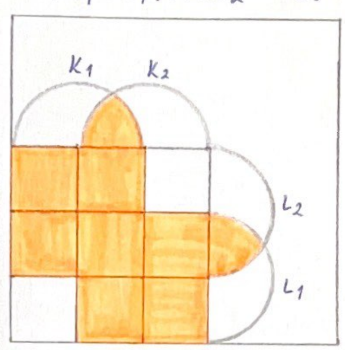
- $\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i = (K_1 \cap K_2) \cup (L_1 \cap L_2)$
- $\bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i) = (K_1 \cup L_1) \cap (K_2 \cup L_2)$

Načrtnime obrázky:

$(K_1 \cap K_2) \cup (L_1 \cap L_2)$



$(K_1 \cup L_1) \cap (K_2 \cup L_2)$



Obrázky naznačujú, že inklúzia $(\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$ asi bude platiť vždy, ale opačná nie. Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{\subseteq}$ Pre ľubovoľné x platí:

$x \in (\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i)$

akk $(x \in \bigcap_{i\in I} K_i) \vee (x \in \bigcap_{i\in I} L_i)$

(definícia zjednotenia),

akk $((\forall i \in I)(x \in K_i)) \vee ((\forall i \in I)(x \in L_i))$

(definícia prieniku systému množín),

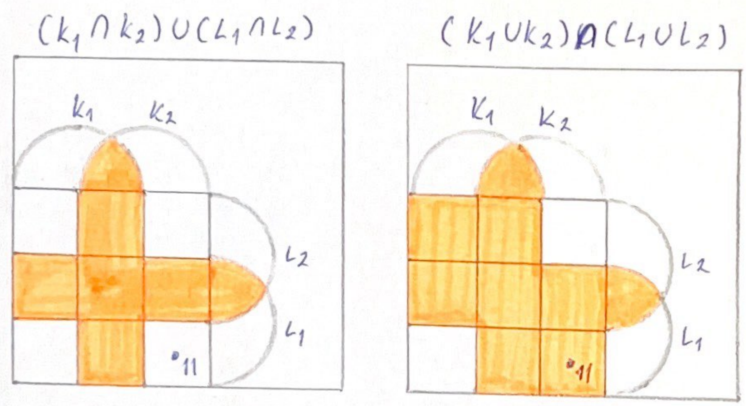
ztv $(\forall i \in I)((x \in K_i) \vee (x \in L_i))$

(Ak jeden výrok platí pre všetky i alebo druhý výraz platí taktiež pre všetky i, musí platiť jeden alebo druhý výrok pre všetky i),

akk $(\forall_i \in I)(x \in (K_i \cup L_i))$
(definícia zjednotenia),
akk $x \in \bigcap_{i \in I} (K_i \cup L_i)$
(definícia prieniku systému množín).

Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in (\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i)$ vyplýva tvrdenie $x \in \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$, teda každý prvok množiny $\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i$ je prvkom množiny $\bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$, čiže platí $(\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$

$\boxed{7}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázkov:



Zvolíme teda $I = \{1,2\}$ a $K_1 = L_2 = \emptyset$, $K_2 = L_1 = \{11\}$. Potom platí:

- $\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i$
  $= (K_1 \cap K_2) \cup (L_1 \cap L_2)$
  $= (\emptyset \cap \{11\}) \cup (\{11\} \cap \emptyset)$
  $= \emptyset \cup \emptyset$
  $= \emptyset$
- $\bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$
  $= (K_1 \cup L_1) \cap (K_2 \cup L_2)$
  $= (\emptyset \cup \{11\}) \cap (\{11\} \cup \emptyset)$
  $= \{11\} \cap \{11\}$
  $= \{11\}$

Inklúzia $(\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i) \supseteq \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$ teda neplatí vždy.

② Ak I je neprázdna množina a pre každé $i \in I$ sú K_i a L_i množiny, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i)$$

platia.

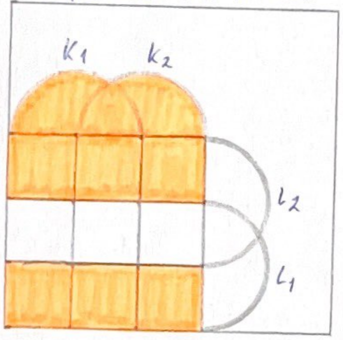
Riešenie:

Najprv soberme prípad $I = \{1,2\}$

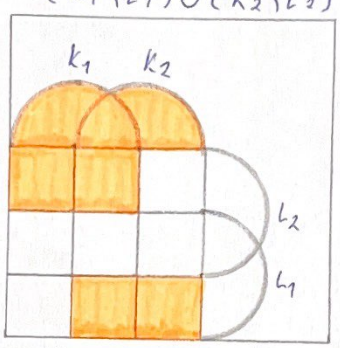
- $\bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i = (K_1 \cup K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$
- $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i) = (K_1 \setminus L_1) \cup (K_2 \setminus L_2)$

Načrtnime obrázky

$(K_1 \cup K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$



$(K_1 \setminus L_1) \cup (K_2 \setminus L_2)$



Obrázky naznačujú, že inklúzia $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$ asi bude platiť vždy, ale opačná nie. Dokážeme obe tvrdenia.

$\boxed{\subseteq}$ Pre ľubovoľné x platí:

$x \in \bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i)$

akk $(\exists i \in I)(x \in (K_i \setminus L_i))$

(definícia zjednotenia systému množín),

akk $(\exists i \in I)((x \in K_i) \wedge \neg(x \in L_i))$

(definícia rozdielu),

ztv $(\exists i \in I)(x \in K_i) \wedge (\exists i \in I) \neg(x \in L_i)$

(distribúcia kvantifikátora),

akk $x \in \bigcup_{i\in I} K_i \wedge (\exists i \in I) \neg(x \in L_i)$

(definícia zjednotenia systému množín),

akk $x \in \bigcup_{i\in I} K_i \wedge \neg(\forall i \in I)(x \in L_i)$

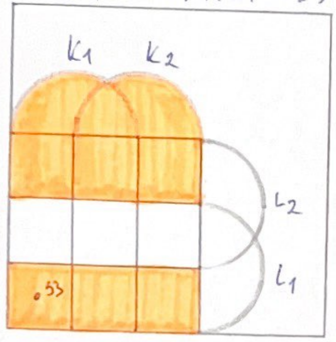
(lebo výroky $(\exists i \in I)\neg\varphi$ a $\neg(\forall i \in I)\varphi$ sú ekvivalentné),

ak $x \in \bigcup_{i\in I} K_i \wedge \neg(x \in \bigcap_{i\in I} L_i)$
(definícia prienku systému množín),
ak $x \in \bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$
(definícia rozdielu).

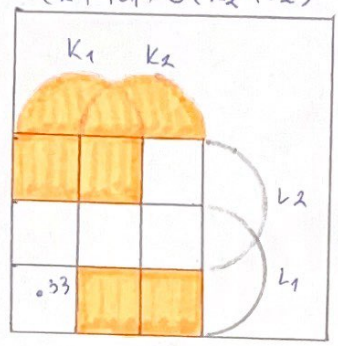
Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in \bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i)$ vyplýva tvrdenie $x \in \bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$, teda každý prvok množiny $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i)$ je aj prvkom množiny $\bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$, čiže platí $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$.

$\boxed{\supseteq}$ Nájdime kontrapríklad pomocou obrázkov:

$(K_1 \cup K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$



$(K_1 \setminus L_1) \cup (K_2 \setminus L_2)$



Zvolíme teda $I = \{1,2\}$ a $K_2 = L_2 = \emptyset$, $K_1 = L_1 = \{33\}$. Potom platí:

- $\bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i = (K_1 \cup K_2) \setminus (L_1 \cap L_2) = (\{33\} \cup \emptyset) \setminus (\{33\} \cap \emptyset) = \{33\} \setminus \emptyset = \{33\}$
- $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i) = (K_1 \setminus L_1) \cup (K_2 \setminus L_2) = (\{33\} \setminus \{33\}) \cup (\emptyset \setminus \emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

Inklúzia $\bigcup_{i\in I} (K_i \setminus L_i) \supseteq \bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$ teda neplatí vždy.

Domáce úlohy č.4 Dominik Chodáč

③ Ak I a J sú neprázdne množiny a pre každé i z I a j z J je $K_{i,j}$ množina, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} K_{i,j} \quad a \quad \bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} K_{i,j}$$

platia vždy.

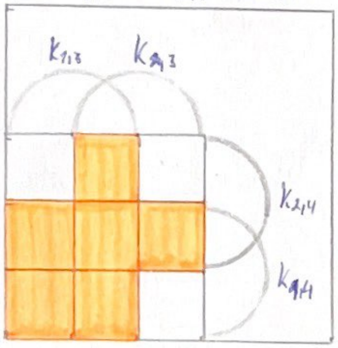
Riešenie:

Najprv rozoberme prípad $I=\{1,2\}$ a $J=\{3,4\}$:

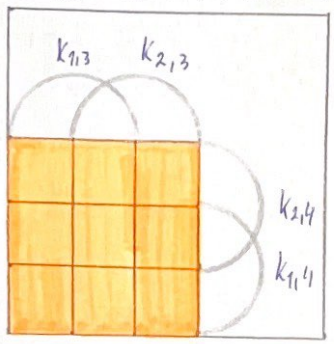
- $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} K_{i,j} = \bigcup_{i\in\{1,2\}}\bigcap_{j\in J=\{3,4\}} K_{i,j} = \bigcup_{i\in\{1,2\}}(K_{i,3}\cap K_{i,4}) = (K_{1,3}\cap K_{1,4})\cup(K_{2,3}\cap K_{2,4})$
- $\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} K_{i,j} = \bigcap_{j\in\{3,4\}}\bigcup_{i\in\{1,2\}} K_{i,j} = \bigcap_{j\in\{3,4\}}(K_{1,j}\cup K_{2,j}) = (K_{1,3}\cup K_{2,3})\cap(K_{1,4}\cup K_{2,4})$

Načrtnime obrázky

$(K_{1,3}\cap K_{1,4})\cup(K_{2,3}\cap K_{2,4})$



$(K_{1,3}\cup K_{2,3})\cap(K_{1,4}\cup K_{2,4})$



Obrázky naznačujú, že inklúzia $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} K_{i,j} \subseteq \bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} K_{i,j}$ asi bude platiť vždy, ale opačná nie. Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{\subseteq}$ Pre ľubovoľné x platí:

$x\in\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} K_{i,j}$

akk $(\exists i\in I)(x\in\bigcap_{j\in J} K_{i,j})$

(definícia zjednotenia systému množín),

akk $(\exists i\in I)(\forall j\in J)(x\in K_{i,j})$

(definícia prieniku systému množín),

ztv $(\forall j\in J)(\exists i\in I)(x\in K_{i,j})$

(ak existuje univerzálne i vyhovujúce všetkým $j\in J$, môžeme ho vziať pre každé z nich. (naopak to neplatí, univerzálne i nemusí existovať)), ak $(\forall j \in J)(x \in \bigcup_{i \in I} K_{i,j})$

(definícia zjednotenia systému množín),

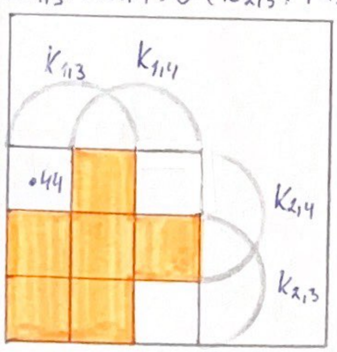
ak $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} K_{i,j}$

(definícia prieniku systému množín).

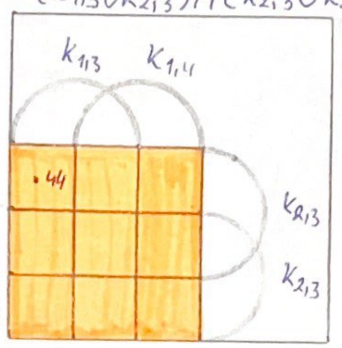
Ukázali sme, že z $x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} K_{i,j}$ vyplýva $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} K_{i,j}$, čiže inklúzia $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} K_{i,j} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} K_{i,j}$ platí vždy.

$\boxed{7}$ Nájdime kontrapríklad pomocou obrázkov:

$(K_{1,3} \cap K_{1,4}) \cup (K_{2,3} \cap K_{2,4})$



$(K_{1,3} \cup K_{2,3}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4})$



Zvolíme teda $I = \{1,2\}$ a $J = \{3,4\}$, $K_{1,3} = K_{2,4} = \{44\}$ a $K_{2,3} = K_{1,4} = \emptyset$. Potom platí:

- $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} K_{i,j}$
  $= (K_{1,3} \cap K_{1,4}) \cup (K_{2,3} \cap K_{2,4})$
  $= (\{44\} \cap \emptyset) \cup (\emptyset \cap \{44\})$
  $= \emptyset \cup \emptyset$
  $= \emptyset$
- $\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} K_{i,j}$
  $= (K_{1,3} \cup K_{1,4}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4})$
  $= (\{44\} \cup \emptyset) \cap (\emptyset \cup \{44\})$
  $= \{44\} \cap \{44\}$
  $= \{44\}$

Inklúzia $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} K_{i,j} \supseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} K_{i,j}$ teda neplatí vždy.