Domáce úlohy - č.5 Dominik Chrobák

① Nájdite príklad relácie, ktorá je antisymetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna (na príslušnej množine).

Riešenie:

Nech $A=\{1\}$ a $R=\emptyset$.

Potom ľahko vidieť, že relácia R je tranzitívna a antisymetrická, keďže podmienky týchto vlastností majú formu implikácie, ktorej predpoklady nemožno splniť. Aby relácia R nebola reflexívna, stačí, že príslušná množina je jednoprvková.

Riešením je teda (napríklad) relácia $R=\emptyset$ na množine $A=\{1\}$.

② Nájdite príklad relácie, ktorá je tranzitívna a reflexívna (na príslušnej množine), ale nie je asymetrická.

Riešenie:

Ak chceme, aby naša relácia nebola antisymetrická, musia existovať dva objekty x a y také, že dvojice $\langle x,y\rangle$ a $\langle y,x\rangle$ do nej patria, ale x a y nie sú si rovné. Ak je to relácia R na množine A a ak (napríklad) $x=1$ a $y=2$, tak $\langle 1,2\rangle \in R$, $\langle 2,1\rangle \in R$, ale $1 \neq 2$, pričom $1, 2 \in A$. Relácia R má byť reflexívna, takže musí platiť $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle \in R$. Ak (napríklad) $A = \{1,2\}$, vyjadrili sme sa ku každej dvojici z $A \times A$. Zhrnutím teda

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

(i keď sme zatiaľ neuvažovali o tranzitivite).

Overíme, že R spĺňa všetky požadované podmienky:

- Keďže $A = \{1,2\}$ a $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle \in R$, relácia R je naozaj reflexívna na množine A.
- Podmienka tranzitivity $((\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\langle y,z\rangle \in R)) \rightarrow (\langle x,z\rangle \in R)$ je v prípadoch $x=y$ a $y=z$ splnená automaticky, overovať ma preto výjdu len tie prípady, keď x a z sú rôzne od y. Overíme ich teda:
  - tvrdenie $((\langle 2,1\rangle \in R) \wedge (\langle 1,2\rangle \in R)) \rightarrow (\langle 2,2\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho predpoklad aj záver.
  - tvrdenie $((\langle 2,1\rangle \in R) \wedge (\langle 1,2\rangle \in R)) \rightarrow (\langle 2,2\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho predpoklad aj záver.
- Keďže $\langle 1,2\rangle \in R$ a $\langle 2,1\rangle \in R$, ale $1 \neq 2$, relácia R nie je antisymetrická.

Dominik Chrobák

③ Nájdite príklad relácie, ktorá je symetrická a antisymetrická, ale nie je tranzitívna.

Riešenie:

Keďže R nie je tranzitívna, existujú x, y a z také, že xRy, yRz, ale neplatí xRz, teda $x \neq y$.

Keďže R je symetrická a platí xRy, tak platí aj yRx.

Keďže R je antisymetrická a platí xRy, platí, že $x = y$, čo je v rozpore s našou predchádzajúcou podmienkou o tranzitívnej relácii, kde $x \neq y$.

Neexistuje teda relácia, ktorá by splňala tieto podmienky.