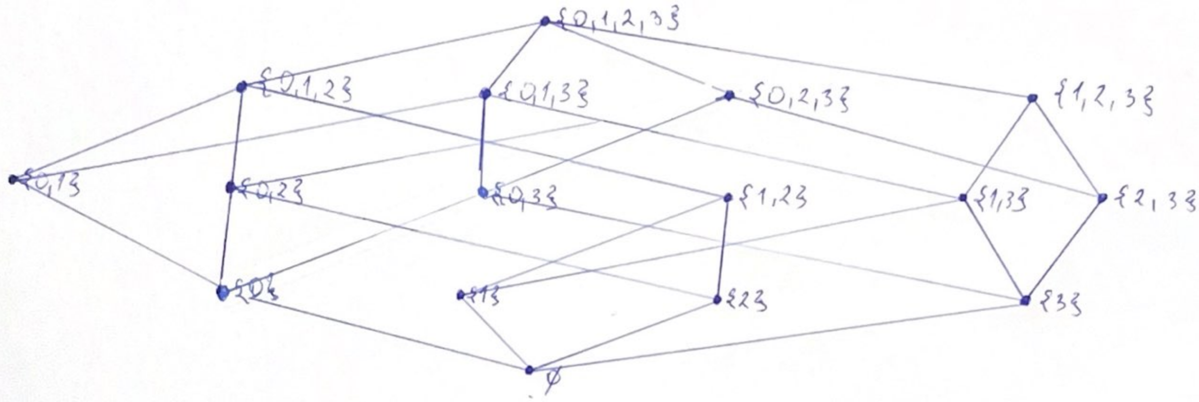
Domáce úlohy - č. 7

Dominik Chrobák

① Načrtnite Hasseho diagramu systému všetkých podmnožín množiny $\{0,1,2,3\}$ usporiadanej inklúziou.

Riešenie:

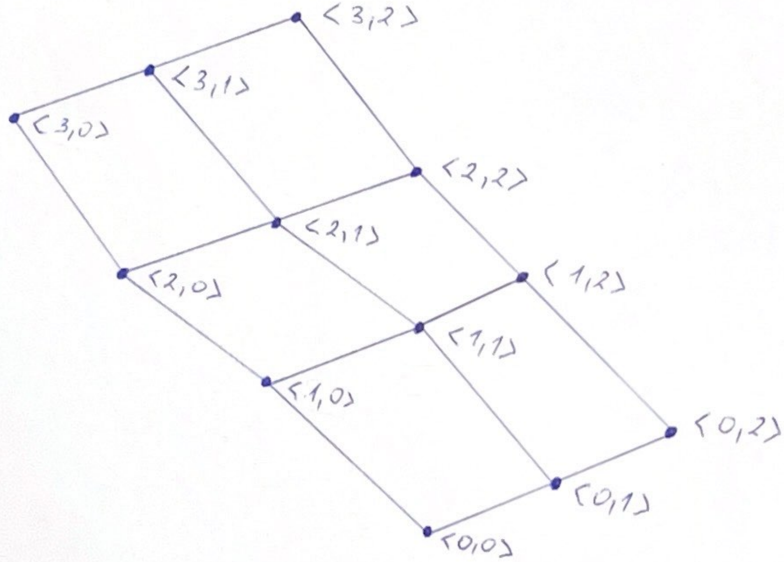


Domáce úlohy - č. 7

Dominik Chrobák

(2) Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\}$ usporiadanej relácion $\trianglelefteq$ definovanú vzťahom $\langle x_1, y_1 \rangle \trianglelefteq \langle x_2, y_2 \rangle$, ak $x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.

Riešenie:



 Dominik Chrobák

③ Dokážte, že relácia $\trianglelefteq$ na množine dvojíc reálnych čísel definovaná vzťahom $\langle x_1, y_1 \rangle \trianglelefteq \langle x_2, y_2 \rangle$, akk $x_1 \leq x_2 \land y_1 \leq y_2$ je usporiadanie. Je to usporiadanie lineárne?

Riešenie:

Overíme, že relácia $\trianglelefteq$ spĺňa všetky podmienky definície usporiadania:

- Relácia $\trianglelefteq$ je reflexívna:

  $x \leq x \land y \geq y$

  (lebo $\leq$ a $\geq$ sú (na množine reálnych čísel) reflexívnymi reláciami),

  akk $\langle x, y \rangle \trianglelefteq \langle x, y \rangle$

  (podľa definície $\trianglelefteq$).

- Relácia $\trianglelefteq$ je antisymetrická:

  $\langle x_1, y_1 \rangle \trianglelefteq \langle x_2, y_2 \rangle \land \langle y_1, y_2 \rangle \trianglelefteq \langle x_1, x_2 \rangle$,

  akk $(x_1 \leq x_2 \land y_1 \geq y_2) \land (x_2 \leq x_1 \land y_2 \geq y_1)$

  (podľa definície $\trianglelefteq$),

  akk $(x_1 \leq x_2 \land x_2 \leq x_1) \land (y_1 \geq y_2 \land y_2 \geq y_1)$

  (lebo konjunkcia je komutatívna a asociatívna),

  ztv $(x_1 = x_2) \land (y_1 = y_2)$

  (lebo $\leq$ a $\geq$ sú (na množine reálnych čísel) antisymetrické relácie),

  akk $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$

  (definícia usporiadanej dvojice).

- Relácia $\trianglelefteq$ je tranzitívna:

  $\langle x_1, y_1 \rangle \trianglelefteq \langle x_2, y_2 \rangle \land \langle x_2, y_2 \rangle \trianglelefteq \langle x_3, y_3 \rangle$,

  akk $(x_1 \leq x_2 \land y_1 \geq y_2) \land (x_2 \leq x_3 \land y_2 \geq y_3)$

  (podľa definície $\trianglelefteq$),

  akk $(x_1 \leq x_2 \land x_2 \leq x_3) \land (y_1 \geq y_2 \land y_2 \geq y_3)$

  (lebo konjunkcia je komutatívna a asociatívna),

  ztv $(x_1 \leq x_3) \land (y_1 \geq y_3)$

  (lebo $\leq$ a $\geq$ sú (na množine reálnych čísel) tranzitívne relácie),

  akk $\langle x_1, y_1 \rangle \trianglelefteq \langle x_3, y_3 \rangle$

  (podľa definície $\trianglelefteq$).

Pokračovanie na druhej strane papiera

Relácia $\trianglelefteq$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, a teda je to usporiadanie. Nie je však lineárne, pretože neplatí napr. ani $\langle 2,1 \rangle \trianglelefteq \langle 3,4 \rangle$ a ani $\langle 3,4 \rangle \trianglelefteq \langle 2,1 \rangle$.