Bez ťažkostí sa môžeme presvedčiť, že A_1^+ a A_2^+ spĺňajú podmienky lemy 1.2.2. (Urobte to!) Zrejme $A_1^+ \neq A_2^+$. Na základe vety 1.2.4 vidíme, že okruh $Z[x]$ sa dá usporiadať dvoma rozličnými spôsobmi. Usporiadanie s pozitívnymi prvkami A_1^+ voláme *lexikografickým* a to druhé *antilexikografickým*.

Skôr ako sa budeme podrobnejšie zaoberať usporiadanými obormi integrity, zavedieme ďalší pojem.

Definícia 1.2.4. Zobrazenie $f: A \to A_1$ medzi usporiadanými okruhmi $(A; +, \cdot, <)$ a $(A_1; +, \cdot, <)$ voláme *homomorfizmom*, ak f je izotónnym okruhovým homomorfizmom, t. j. pre všetky $x, y \in A$ platia podmienky (2) a (3):

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad f(xy) = f(x)\,f(y) \tag{2}$$

$$x < y \quad \text{implikuje} \quad f(x) < f(y) \tag{3}$$

Ak f je naviac prosté zobrazenie, tak f nazývame *vnorením* A do A_1. Usporiadané okruhy A a A_1 voláme *izomorfnými*, ak existuje izomorfné zobrazenie medzi A a A_1, t. j. f je bijektívny homomorfizmus.

Veta 1.2.5. Nech $(A; +, \cdot, <)$ je usporiadaný obor integrity. Nech e je jednotkový prvok v A. Potom zobrazenie

$$\eta(n) = ne \tag{4}$$

je vnorením usporiadaného oboru integrity celých čísel Z (s obvyklým usporiadaním) do daného usporiadaného oboru integrity A.

Dôkaz: Pripomeňme si, že ak n je celé číslo, tak ne je prvok, ktorý bol definovaný (v súlade s definíciou mocniny prvku grupy s multiplikatívnym zápisom) takto:

a) pre prirodzené číslo n indukciou:

$$1e = e \qquad (n+1)e = ne + 1e$$

b) pre $n = 0$ rovnosťou $0e = 0$

c) pre záporné celé číslo n rovnosťou $ne = -(-n)e$.

Dokážte, že η je okruhový homomorfizmus, t. j. $(n+m)e = ne + me$ a $(nm)e = (ne)(me)$ pre každé $n, m \in Z$ (robili sme to už v prvom diele tejto knihy). Tvrdíme, že η je prosté zobrazenie. Teraz stačí už len ukázať, že $\operatorname{Ker} \eta = 0$ (prečo?). Predpokladajme, že by existovalo $0 \neq n \in \operatorname{Ker} \eta$. Pretože $\operatorname{Ker} \eta$ je ideálom okruhu Z, tak aj $-n \in \operatorname{Ker} \eta$. Z toho vidíme, že môžeme dokonca predpokladať $n > 0$. Lenže $n \in \operatorname{Ker} \eta$ znamená $ne = 0$, čo je v spore s charakteristikou 0 okruhu A (veta 1.2.2). Teda $\operatorname{Ker} \eta = 0$ a η je prosté zobrazenie. Ostáva ešte dokázať, že η je izotónnym zobrazením. Vezmime celé čísla $n < m$, t. j. $m - n > 0$. Ale $me - ne = (m-n)e$, lebo η je okruhový homomorfizmus. Pretože $e > 0$

Dominik Chrobák

a $m - n$ je prirodzené číslo, tak

$$0 < e < 2e < \ldots < (m-n)e = e + \ldots + e \quad ((m-n)\text{-krát})$$

Vidíme, že $me - ne > 0$, čo implikuje $ne < me$ v A a η je izotónnym zobrazením. Záverom sme dokázali, že η je vnorením. □

Dôsledok. Obor integrity celých čísel Z sa dá usporiadať len jediným spôsobom.

Dôkaz: Predpokladajme, že $\sqsubset$ je reláciou usporiadania na Z tak, že $(Z; +, \cdot, \sqsubset)$ tvorí usporiadaný obor integrity. Podľa predchádzajúcej vety máme vnorenie

$$\eta(n) = ne = n1 = n$$

$(Z; +, \cdot, <)$ do $(Z; +, \cdot, \sqsubset)$. Pretože η je identické zobrazenie, $n < m$ implikuje $n \sqsubset m$ (lema 1.1.1). Obrátene, majme $r \sqsubset s$. Zrejme $r \neq s$. Potom alebo $s < r$ alebo $r < s$ z trichotómie usporiadania $<$. Lenže $s < r$ by znamenalo $s \sqsubset r$, čo by bol spor s $r \sqsubset s$. Ostáva len $r < s$. Teda relácia $<$ sa rovná relácii $\sqsubset$. □

Na opis usporiadaných oborov integrity Z a Q budeme potrebovať ďalšie dôležité pojmy.

Definícia 1.2.5. Hovoríme, že usporiadaný okruh $(A; +, \cdot, <)$ je *archimedovsky usporiadaný*, ak ku každým dvom prvkom $0 < a < b$, $a, b \in A$ existuje také prirodzené číslo n, že $b < na$.

Definícia 1.3.6. Aspoň dvojprvková usporiadaná množina $(T; <)$ sa nazýva *husto usporiadaná*, ak $x, y \in T$ a $x < y$ implikuje existenciu $z \in T$ s vlastnosťou $x < z < y$.

Lema 1.2.3. Nech usporiadané okruhy $(A; +, \cdot, <)$ a $(A_1; +, \cdot, <)$ sú izomorfné. Ak je z nich archimedovsky usporiadaný jeden, druhý je tiež.

Dôkaz: Nech $f: A \to A_1$ je izomorfizmus usporiadaných okruhov. Predpokladajme, že A je archimedovsky usporiadaný. (Ak by bol taký A_1, úvahu urobíme pre $f^{-1}: A_1 \to A$.) Majme $0 < a < b$ v A_1. Potom existujú $0 < x < y$ v A tak, že $f(x) = a$, $f(y) = b$. Podľa predpokladu máme $n \in N$ s vlastnosťou $y < nx$. Pretože f je izomorfizmus, tak $na = nf(x) = f(nx) > f(y) = b$ a A_1 je tiež archimedovsky usporiadaný. □

Veta 1.2.6. Usporiadané obory integrity Z a Q s obvyklými usporiadaniami sú archimedovsky usporiadané. Q je husto usporiadané.

Dôkaz: Zrejme $1 \leq n < m$ implikuje $m < (m+1)n$ v okruhu Z. Teda Z je archimedovsky usporiadaný obor integrity. Predpokladajme, že racionálne čísla $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ máme napísané vo vykrátenom tvare. Nech $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ v usporiadanom obore integrity Q. Na základe príkladu 1.1.1 je to ekvivalentné s $0 < ps < qr$ v Z. Pre Z

② Pripomeňme znenie Euklidovej vety o výške:

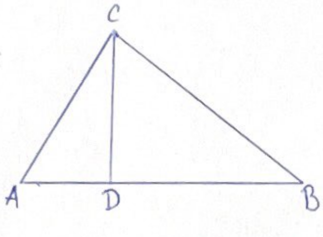
Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a nech D je päta výšky na preponu. Potom platí:

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|.$$

Napíšte dôkaz tejto vety a prepíšte ho ako sled argumentov.

Riešenie:

Dôkaz:



Keďže D je päta výšky na preponu AB, uhly ADC a CDB sú pravé, teda zhodné.
V pravouhlom trojuholníku ADC s pravým uhlom vo vrchole D platí:

$$|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle DCA| = 180^\circ$$

Uhol CAD označme $\sphericalangle CAD = \alpha$. Vieme, že $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ$, z toho teda:

$$\alpha + 90^\circ + |\sphericalangle DCA| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - \alpha$$

Pretože uhol ACB je pravý a výška na preponu AB rozdeľuje tento uhol na dva uhly môžeme pre uhly DCA a BCD napísať:

$$|\sphericalangle DCA| + |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$$

Keďže vieme, že $|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - \alpha$ môžeme napísať:

$$90^\circ - \alpha + |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$$

$$|\sphericalangle BCD| = \alpha$$

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CAD|$$

Z toho vyplýva, že uhly BCD a CAD sú zhodné. Trojuholníky CDB a ADC sú pri tomto poradí vrcholov podľa vety uu podobné. Z toho vyplýva:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

Po úprave dostaneme:

$$\Downarrow$$

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$$

Dominik Chodak

Dôkaz ako sled argumentov:

1. D je päta výšky na preponu AB
   - odvolávka na predpoklad vety
2. uhly ADC a CDB sú pravé
   - prepis pojmu päta výšky z tvrdenia 1. podľa svojej definície
3. súčet uhlov v pravouhlom trojuholníku ADC je 180°
   - odvolávka na axiómu (súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°)
4. $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle DCA| = 180°$
   - prepis tvrdenia 3.
5. uhol CAD označíme α
   - označenie uhla ďalšou nepoužitou premennou
6. $\alpha + 90° + |\sphericalangle DCA| = 180°$
   - logický dôsledok tvrdení 2. až 5.
7. $|\sphericalangle DCA| = 90° - \alpha$
   - vlastnosť reálnych čísel aplikovaná na tvrdenie 6.
8. strana AB je prepona
   - odvolávka na predpoklad vety
9. uhol ACB je pravý
   - logický dôsledok tvrdenia 8.
10. výška na preponu AB delí pravý uhol ACB na dva uhly
    - logický dôsledok tvrdení 1. a 9.
11. $|\sphericalangle DCA| + |\sphericalangle BCD| = 90°$
    - prepis tvrdenia 10.
12. $|\sphericalangle BCD| + 90° - \alpha = 90°$
    - logický dôsledok tvrdení 7. a 11.
13. $|\sphericalangle BCD| = \alpha$
    - vlastnosť reálnych čísel aplikovaná na tvrdenie 12.
14. $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCA|$
    - prepis tvrdenia 13. podľa tvrdenia 7.
15. uhly BCD a DCA sú zhodné
    - logický dôsledok tvrdenia 14.

16. uhly ADC a CDB sú zhodné
- logický dôsledok tvrdenia 2.

17. veta u u
- odvolávka na autoritu

18. trojuholníky CDB a ADC sú pri tomto poradí vrcholov podobné
- logický dôsledok tvrdení 15. až 17.

19. $$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$
- odvolávka na definíciu podobnosti trojuholníkov z tvrdenia 18.

③ Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$0^3+1^3+\dots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

Riešenie:

Pre každé n označme φ_n tvrdenie $0^3+1^3+\dots+n^3(\frac{1}{2}n(n+1))^2$

Podľa vety o matematickej indukcii stačí namiesto vety „Pre každé prirodzené číslo n platí tvrdenie φ_n." Dokázať tieto vety:

1° Platí tvrdenie φ_0.

2° Pre každé prirodzené číslo k z platnosti tvrdenia φ_k vyplýva platnosť tvrdenia φ_{k+1}.

Dokážme obe tieto tvrdenia:

1° Tvrdenie φ_0 znamená $0^3=(\frac{1}{2}0(0+1))^2$, t.j. $0=0$, čo platí.

2° Nech k je prirodzené číslo a nech platí tvrdenie φ_k, t.j. $0^3+1^3+\dots+k^3=(\frac{1}{2}k(k+1))^2$.

Dokážme, že potom platí tvrdenie φ_{k+1}, t.j.

$$0^3+1^3+\dots+k^3+(k+1)^3=(\tfrac{1}{2}(k+1)((k+1)+1))^2.$$

Postupne upravujme:

$0^3+1^3+\dots+k^3+(k+1)^3=$

$=(0^3+1^3+\dots+k^3)+(k+1)^3=$

$=(\frac{1}{2}k(k+1))^2+(k+1)^3$ (podľa indukčného predpokladu, t.j. tvrdenia φ_k) $=$

$=(k+1)^2((\frac{1}{2}k)^2+(k+1))=$

$=(k+1)^2(\frac{1}{4}k^2+k+1)=$

$=(k+1)^2(\frac{1}{2}k+1)^2=$

$=((k+1)(\frac{1}{2}k+1))^2=$

$=(\frac{1}{2}(k+1)(k+2))^2=$

$=(\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1))^2.$