Domáce úlohy č. 3

Dominik Chrelák

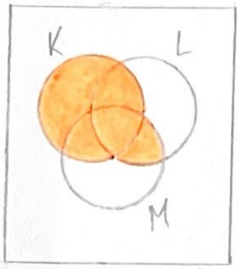
① Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí

$$K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap M.$$

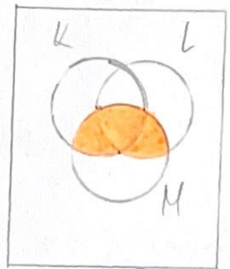
Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

Riešenie:

Najprv načrtneme obrázky:



$K \cup (L \cap M)$



$(K \cup L) \cap M$

Obrázky naznačujú, že inklúzia $K \cup (L \cap M) \supseteq (K \cup L) \cap M$ bude platiť pre ľubovoľné K, L a M, ale inklúzia $K \cup (L \cap M) \subseteq (K \cup L) \cap M$ zrejme nie.

Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{\supseteq}$ Pre ľubovoľné x platí:

$x \in ((K \cup L) \cap M)$,

akk $((x \in (K \cup L)) \wedge (x \in M))$

(definícia prieniku),

akk $(((x \in K) \vee (x \in L)) \wedge (x \in M))$

(definícia zjednotenia),

ztv. $((x \in K) \vee ((x \in L) \wedge (x \in M)))$

(lebo výrok $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi$ implikuje výrok $\varphi \vee (\psi \wedge \xi)$ (dôkaz je nižšie))

akk $((x \in K) \vee (x \in (L \cap M)))$

(definícia prieniku)

akk $(x \in (K \cup (L \cap M)))$

(definícia zjednotenia).

Ostáva ešte dokázať, že výrok $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi$ implikuje výrok $\varphi \vee (\psi \wedge \xi)$.

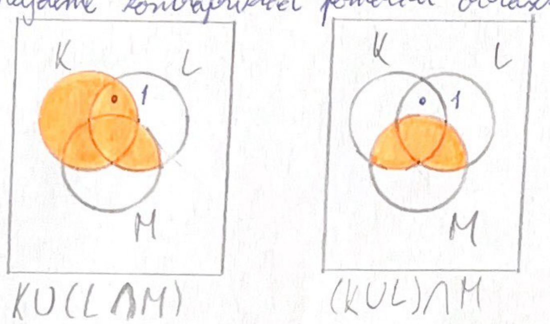
Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti výrokov φ, ψ a ξ:

φ	ψ	ε	$\varphi \vee \psi$	$(\varphi \vee \psi) \wedge \varepsilon$	$\psi \wedge \varepsilon$	$\varphi \vee (\psi \wedge \varepsilon)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Hodnota v stĺpci prislúchajúcom výroku $(\varphi \vee \psi) \wedge \varepsilon$ v žiadnom riadku nepresahuje hodnotu v stĺpci prislúchajúcom výroku $\varphi \wedge (\psi \vee \varepsilon)$, z prvého teda vyplýva druhý pre každú voľbu φ, ψ a ε.

Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in ((K \cup L) \cap M)$, vyplýva tvrdenie $x \in (K \cup (L \cap M))$, teda každý prvok množiny $(K \cup L) \cap M$ je prvkom množiny $K \cup (L \cap M)$, čiže platí $K \cup (L \cap M) \supseteq (K \cup L) \cap M$

$\boxed{I}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázku:



$K \cup (L \cap M)$ $(K \cup L) \cap M$

Zvoľme teda $K = L = \{1\}$ a $M = \emptyset$. Potom platí:

- $K \cup (L \cap M) = \{1\} \cup (\{1\} \cap \emptyset) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$
- $(K \cup L) \cap M = (\{1\} \cup \cancel{\emptyset} \{1\}) \cap \emptyset = \{1\} \cap \emptyset = \emptyset$

Inklúzia $K \cup (L \cap M) \subseteq (K \cup L) \cap M$ teda neplatí pre každú trojicu množín K, L a M.

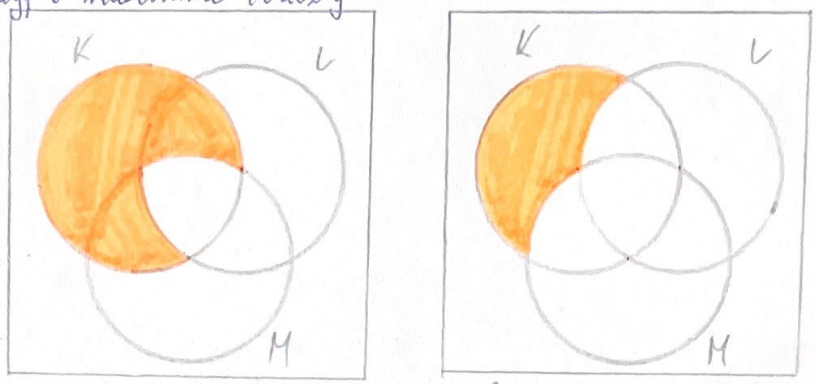
② Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí:

$$K \setminus (L \cap M) = (K \setminus L) \cap (K \setminus M).$$

Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

Riešenie:

Najprv načrtneme obrázky:



$K \setminus (L \cap M)$ $(K \setminus L) \cap (K \setminus M)$

Obrázky naznačujú, že inklúzia $K \setminus (L \cap M) \supseteq (K \setminus L) \cap (K \setminus M)$ bude platiť pre ľubovoľné K, L a M, ale inklúzia $K \setminus (L \cap M) \subseteq (K \setminus L) \cap (K \setminus M)$ zrejme nie.

Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{2}$ Pre ľubovoľné x platí:

$x \in ((K \setminus L) \cap (K \setminus M))$,

akk $((x \in (K \setminus L)) \wedge (x \in (K \setminus M)))$

(definícia prieniku),

akk $(((x \in K) \wedge \neg(x \in L)) \wedge ((x \in K) \wedge \neg(x \in M)))$

(definícia rozdielu),

ztv $((x \in K) \wedge \neg(x \in L \wedge x \in M))$,

(lebo výrok $((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\xi))$ implikuje výrok $(\varphi \wedge \neg(\psi \wedge \xi))$ (dôkaz je nižšie))

akk $((x \in K) \wedge \neg(x \in (L \cap M)))$

(definícia prieniku),

akk $x \in (K \setminus (L \cap M))$

(definícia rozdielu).

Ostáva dokázať, že výrok $((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\xi))$ implikuje výrok $(\varphi \wedge \neg(\psi \wedge \xi))$.

Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti výrokov φ, ψ a ξ:

Dominik Chrobák

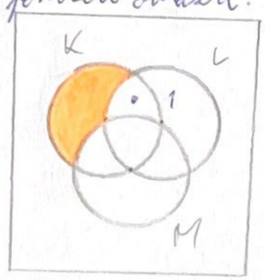
φ	ψ	ξ	$\neg\psi$	$\neg\xi$	$\varphi\wedge\neg\psi$	$\varphi\wedge\neg\xi$	$(\varphi\wedge\neg\psi)\wedge(\varphi\wedge\neg\xi)$	$(\psi\wedge\xi)$	$\neg(\psi\wedge\xi)$	$\varphi\wedge\neg(\psi\wedge\xi)$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Hodnota v stĺpci prislúchajúcom výroku $((\varphi\wedge\neg\psi)\wedge(\varphi\wedge\neg\xi))$ v žiadnom riadku nepresahuje hodnotu v stĺpci prislúchajúcom výroku $(\varphi\wedge\neg(\psi\wedge\xi))$, z prvého teda vyplýva druhý pre každú voľbu φ, ψ a ξ.

Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in ((K\setminus L)\cap(K\setminus M))$ vyplýva tvrdenie $x \in (K\setminus(L\cap M))$, teda každý prvok množiny $((K\setminus L)\cap(K\setminus M))$ je prvkom množiny $(K\setminus(L\cap M))$, čiže platí $(K\setminus(L\cap M) \supseteq ((K\setminus L)\cap(K\setminus M))$

$\boxed{2}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázka:

$K\setminus(L\cap M)$



$(K\setminus L)\cap(K\setminus M)$

Zvolíme teda $K = L = \{1\}$ a $M = \emptyset$. Potom platí:

- $K\setminus(L\cap M) = \{1\}\setminus(\{1\}\cap\emptyset) = \{1\}\setminus\emptyset = \{1\}$
- $(K\setminus L)\cap(K\setminus M) = (\{1\}\setminus\{1\})\cap(\{1\}\setminus\emptyset) = \emptyset\cap\{1\} = \emptyset$

Inklúzia $(K\setminus(L\cap M)) \subseteq ((K\setminus L)\cap(K\setminus M))$ teda neplatí pre každú trojicu množín K, L a M.

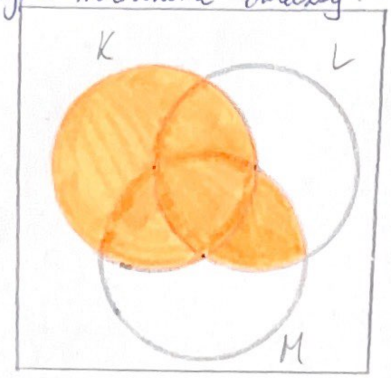
③ Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí

$$K \cup (L \cap M) = (K \cap L) \cup M$$

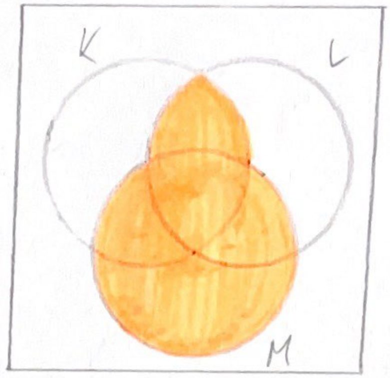
Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

Riešenie:

Najprv načrtneme obrázky:



$K \cup (L \cap M)$

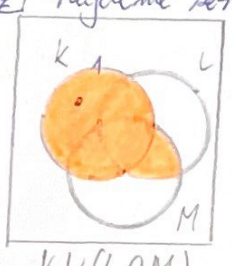


$(K \cap L) \cup M$

Obrázky naznačujú, že inklúzia $(K \cup (L \cap M)) \supseteq ((K \cap L) \cup M)$ zrejme platiť pre ľubovoľné K, L a M nebude. Tiež naznačujú, že ani inklúzia $(K \cup (L \cap M)) \subseteq ((K \cap L) \cup M)$ nebude platiť pre ľubovoľné K, L a M.

Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{Z}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázka:



$K \cup (L \cap M)$

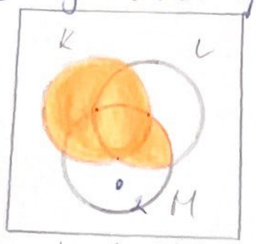
$(K \cap L) \cup M$

Zvoľme teda $K = \{1\}$ a $L = M = \emptyset$. Potom platí:

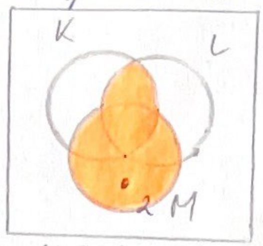
- $K \cup (L \cap M) = \{1\} \cap (\emptyset \cap \emptyset) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$
- $(K \cap L) \cup M = (\{1\} \cap \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

Inklúzia $(K \cup (L \cap M)) \supseteq ((K \cap L) \cup M)$ teda neplatí pre každú trojicu množín K, L a M.

$\boxed{4}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázka:



$K \cup (L \cap M)$



$(K \cap L) \cup M$

Zvolme teda $M = \{2\}$ a $K = L = \emptyset$. Potom platí:

- $K \cup (L \cap M) = \emptyset \cup (\emptyset \cap \{2\} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- $(K \cap L) \cup M = (\emptyset \cap \emptyset) \cup \{2\} = \emptyset \cup \{2\} = \{2\}$

Inklúzia $(K \cup (L \cap M)) \subseteq ((K \cap L) \cup M)$ teda neplatí pre každú trojicu množín K, L a M.