Dominik Chrobák

① Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $Y \subseteq B$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami Y a $R[R^{-1}[Y]]$ platia.

Riešenie

Ukážeme, že ani jedna z inklúzií neplatí pre každé A, B, R a Y.

- Nech $A = \emptyset$, $B = \{2\}$, $R = \emptyset$, $Y = \{2\}$.
  Potom $R[R^{-1}[Y]] = R[R^{-1}[\{2\}]] = R[\emptyset] = \emptyset$, takže $Y \subseteq R[R^{-1}[\{2\}]]$.
- Nech $A = \{2\}$, $B = \{1, 3\}$, $R = \{\langle 2; 1\rangle, \langle 2; 3\rangle\}$, $Y = \{1\}$.
  Potom $R[R^{-1}[Y]] = R[R^{-1}[\{1\}] = R[\{2\}] = \{1, 3\}$, takže $Y \not\supseteq R[R^{-1}[\{1\}]]$.

② Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $X_1, X_2 \subseteq A$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami $R[X_1 \cup X_2]$ a $R[X_1] \cup R[X_2]$ platia.

Riešenie:

Ukážeme, že obe inklúzie platia:

Nech $y \in B$. Potom platí:

$y \in R[X_1 \cup X_2]$

akk $\exists x ((x \in X_1 \cup X_2) \land \langle x, y \rangle \in R)$
(definícia druhých zložiek),

akk $\exists x ((x \in X_1 \lor x \in X_2) \land \langle x, y \rangle \in R)$
(definícia zjednotenia),

akk $\exists x ((x \in X_1 \land \langle x, y \rangle \in R) \lor (x \in X_2 \land \langle x, y \rangle \in R))$
(vlastnosti distributivity konjunkcie),

akk $\exists x (x \in X_1 \land \langle x, y \rangle \in R) \lor \exists x (x \in X_2 \land \langle x, y \rangle \in R)$
(distribúcia kvantifikátora),

akk $y \in R[X_1] \lor y \in R[X_2]$
(definícia druhých zložiek),

akk $y \in R[X_1] \cup R[X_2]$
(definícia zjednotenia).

Ukázali sme, že všetky prvky množiny $R[X_1 \cup X_2]$ sú aj prvkami množiny $R[X_1] \cup R[X_2]$, a keďže sme použili iba ekvivalentné tvrdenia, bude to platiť aj opačne. Teda platí $R[X_1 \cup X_2] \subseteq R[X_1] \cup R[X_2]$ a $R[X_1] \cup R[X_2] \subseteq R[X_1 \cup X_2]$, a to bez ohľadu na voľbu A, B, R, X_1 a X_2.

③ Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Zistite, ktoré inklúzie medzi nasledujúcimi množinami platia:

a) $R^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$ a $R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$;

b) $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$ a $R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$;

Riešenia:

a) Ukážeme, že obe inklúzie platia:

Nech $x \in A$. Potom platí:

$x \in R^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$

akk $\exists y((y \in Y_1 \cup Y_2) \wedge \langle x, y \rangle \in R)$

(definícia prvých zložiek),

akk $\exists y((y \in Y_1 \vee Y_2) \wedge \langle x, y \rangle \in R)$

(definícia zjednotenia),

akk $\exists y((y \in Y_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R) \vee (y \in Y_2 \wedge \langle x, y \rangle \in R))$

(vlastnosť distributivity konjunkcie),

akk $\exists y(y \in Y_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R) \vee \exists y(y \in Y_2 \wedge \langle x, y \rangle \in R)$

(distribúcia kvantifikátora),

akk $x \in R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$

(definícia zjednotenia).

Ukázali sme, že prvky množiny $R^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$ sú aj prvkami množiny $R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$, a keďže sme použili iba ekvivalentné tvrdenia, bude to platiť aj opačne. Takže platí $R^{-1}[Y_1 \cup Y_2] \subseteq R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$ a $R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$, bez ohľadu na voľbu A, B, R, Y_1 a Y_2.

Dominik Chovtrík

b) • Ukážeme, že prvá je podmnožina druhej:

Nech $x \in A$. Potom platí:

$x \in R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$

akk $\exists y((y \in Y_1 \cap Y_2) \land \langle x, y\rangle \in R)$

(definícia prvých zložiek),

akk $\exists y((y \in Y_1 \land Y_2) \land \langle x, y\rangle \in R)$

(definícia prieniku),

akk $\exists y((y \in Y_1 \land \langle x, y\rangle \in R) \land (y \in Y_2 \land \langle x, y\rangle \in R))$

(vlastnosti konjunkcie),

ztv $\exists y(y \in Y_1 \land \langle x, y\rangle \in R) \land \exists y(y \in Y_2 \land \langle x, y\rangle \in R)$

(distribúcia kvantifikátora),

akk $x \in R^{-1}[Y_1] \land x \in R^{-1}[Y_2]$

(definícia prvých zložiek),

akk $x \in R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$

(definícia prieniku).

Ukázali sme, že všetky prvky množiny $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$ sú aj prvkami množiny $R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$, takže platí $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \subseteq R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ a to bez ohľadu na voľbu A, B, R, Y_1 a Y_2.

• Ukážeme, že druhá nemusí byť podmnožina prvej:

Nech $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$, $Y_1 = \{2\}$, $Y_2 = \{3\}$.

Potom $R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2] = R^{-1}[\{2\}] \cap R^{-1}[\{3\}] = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$, ale

$R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = R^{-1}[\{2\} \cap \{3\}] = R^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, čiže neplatí $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \supseteq$

$R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ pre každú voľbu A, B, R, Y_1 a Y_2.