Domáce úlohy - č. 8 Dominik Chovančák

① Zistite, aká vyzerá ekvivalencia prislúchajúca rozkladu množiny $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ na množiny $\{0,5\}$, $\{1,6\}$, $\{2,7\}$, $\{3,8\}$, $\{4,9\}$ a napíšte triedy všetkých jej prvkov.

Riešenie:

Hľadaná ekvivalencia je

$\sim = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,5\rangle, \langle 5,0\rangle, \langle 5,5\rangle\} \cup \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 6,6\rangle\} \cup \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 7,7\rangle\} \cup \{\langle 3,3\rangle, \langle 3,8\rangle, \langle 8,3\rangle, \langle 8,8\rangle\} \cup \{\langle 4,4\rangle, \langle 4,9\rangle, \langle 9,4\rangle, \langle 9,9\rangle\}$.

Jej triedy ekvivalencie sú:

$[0]_\sim = \{0,5\}$,

$[1]_\sim = \{1,6\}$,

$[2]_\sim = \{2,7\}$,

$[3]_\sim = \{3,8\}$,

$[4]_\sim = \{4,9\}$,

$[5]_\sim = \{0,5\}$,

$[6]_\sim = \{1,6\}$,

$[7]_\sim = \{2,7\}$,

$[8]_\sim = \{3,8\}$,

$[9]_\sim = \{4,9\}$.

Dominik Chovlak

② Rozhodnite, či zjednotenie usporiadaní danej množiny musí byť tiež usporiadanie tejto množiny.

Riešenie:

Nech $A = \{1, 2\}$, $R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ a $R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$.

Potom platí:

R_1 je usporiadanie na množine A.

R_2 je usporiadanie na množine A.

$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$.

Keďže $\langle 1,2\rangle$ patrí $R_1 \cup R_2$ a takisto aj $\langle 2,1\rangle$ patrí $R_1 \cup R_2$ a zároveň $1 \neq 2$, znamená, že $R_1 \cup R_2$ nie je antisymetrické.

Aby $R_1 \cup R_2$ bolo usporiadaním, musí byť reflexívne, antisymetrické a tranzitívne. $R_1 \cup R_2$ nie je antisymetrické, takže to nemôže byť usporiadanie.

Domáce úlohy - č. 8 Dominik Chobak

③ Rozhodnite, či prienik usporiadaní danej množiny musí byť tiež usporiadanie tejto množiny.

Riešenie:

Nech R_i, kde i patrí I, je systém usporiadaní na množine A. Ukážeme, že $\bigcap_{i\in I} R_i$ je tiež usporiadanie na množine A:

- $\bigcap_{i\in I} R_i$ je reflexívna na A:
  - Nech $x \in A$. Potom platí:
    pre každé i z I platí $\langle x, x\rangle \in R_i$
    (lebo R_i je reflexívna na R_i),
    $\langle x,x\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
    (definícia prieniku systému).
- $\bigcap_{i\in I} R_i$ je antisymetrická:
  - $\langle x,y\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i \land \langle y,x\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
    akk $(\forall i\in I)\langle x,y\rangle \in R_i \land (\forall i \in I) \langle y,x\rangle \in R_i$
    (definícia prieniku systému)
    akk $(\forall i\in I)(\langle x,y\rangle \in R_i \land \langle y,x\rangle \in R_i)$
    (distribúcia kvantifikátora),
    ztv $(x=y)$
    (lebo podľa predpokladu je usporiadanie R_i antisymetrické).
- $\bigcap_{i\in I} R_i$ je tranzitívna:
  - $\langle x,y\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i \land \langle y,z\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
    akk $(\forall i\in I)(\langle x,y\rangle \in R_i) \land (\forall i\in I)(\langle y,z\rangle \in R_i)$
    (definícia prieniku systému),
    akk $(\forall i\in I)(\langle x,y\rangle \in R_i \land \langle y,z\rangle \in R_i)$
    (distribúcia kvantifikátora),
    ztv $(\forall i\in I)(\langle x,z\rangle \in R_i)$
    (lebo podľa predpokladu je usporiadanie R_i tranzitívne),
    akk $\langle x,z\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
    (definícia prieniku systému).

Ukázali sme, že prienik usporiadaní danej množiny je reflexívny, antisymetrický a tranzitívny, a teda to je usporiadanie.