Domáce úlohy - č.1 - oprava - č.1

len 1 krát

Dominik Chrolák

Bez ťažkostí sa môžeme presvedčiť, že A_1^+ a A_2^+ spĺňajú podmienky lemy 1.2.2. (Urobte to!) Zrejme $A_1^+ \neq A_2^+$. Na základe vety 1.2.4 vidíme, že okruh $Z[x]$ sa dá usporiadať dvoma rozličnými spôsobmi. Usporiadanie s pozitívnymi prvkami A_1^+ voláme *lexikografickým* a to druhé *antilexikografickým*.

Skôr ako sa budeme podrobnejšie zaoberať usporiadanými obormi integrity, zavedieme ďalší pojem.

Definícia 1.2.4. Zobrazenie $f: A_1 \to A_2$ medzi usporiadanými okruhmi $(A_1; +, \cdot, <)$ a $(A_2; +, \cdot, <)$ voláme *homomorfizmom*, ak f je *izotónnym okruhovým homomorfizmom*, t. j. pre všetky $x, y \in A_1$ platia podmienky (2) a (3):

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y) \tag{2}$$

$$x < y \quad \text{implikuje} \quad f(x) < f(y) \tag{3}$$

Ak f je naviac prosté zobrazenie, tak f nazývame *vnorením* A_1 do A_2. Usporiadané okruhy A_1 a A_2 voláme *izomorfnými*, ak existuje izomorfné zobrazenie medzi A_1 a A_2, t. j. f je *bijektívny homomorfizmus*.

Veta 1.2.5. Nech $(A; +, \cdot, <)$ je usporiadaný obor integrity. Nech e je jednotkový prvok v A. Potom zobrazenie

Len 1 krát v kontexte

$$\eta: n \mapsto ne \tag{4}$$

je vnorením usporiadaného oboru integrity celých čísel Z (s obvyklým usporiadaním) do daného usporiadaného oboru integrity A.

Dôkaz: Pripomeňme si, že ak n je celé číslo, tak ne je prvok, ktorý bol definovaný (v súlade s definíciou mocniny prvku grupy s multiplikatívnym zápisom) takto:

a) pre prirodzené číslo n indukciou:

$$1e = e, \quad (n+1)e = ne + 1e,$$

b) pre $n = 0$ rovnosťou $0e = 0$,

c) pre záporné celé číslo n rovnosťou $ne = -(-n)e$.

Dokážte, že η je okruhový homomorfizmus, t. j. $(n+m)e = ne + me$ a $(nm)e = (ne)(me)$ pre každé $n, m \in Z$ (robili sme to už v prvom diele tejto knihy). Tvrdíme, že η je prosté zobrazenie. Teraz stačí už len ukázať, že $\operatorname{Ker} \eta = (0)$ (prečo?). Predpokladajme, že by existovalo $0 \neq n \in \operatorname{Ker} \eta$. Pretože $\operatorname{Ker} \eta$ je ideálom okruhu Z, tak aj $-n \in \operatorname{Ker} \eta$. Z toho vidíme, že môžeme dokonca predpokladať $n > 0$. Lenže $n \in \operatorname{Ker} \eta$ znamená $ne = 0$, čo je v spore s charakteristikou 0 okruhu A (veta 1.2.2). Teda $\operatorname{Ker} \eta = (0)$ a η je prosté zobrazenie. Ostáva ešte dokázať, že η je izotónnym zobrazením. Vezmime celé čísla $n < m$, t. j. $m - n > 0$. Ale $me - ne = (m-n)e$, lebo η je okruhový homomorfizmus. Pretože $e > 0$

a $m - n$ je prirodzené číslo, tak

$$0 < e < e + e = 2e < \ldots < (m-n)e = e + \ldots + e \; ((m-n)\text{-krát})$$

Vidíme, že $me - ne > 0$, čo implikuje $ne < me$ v A a η je izotónnym zobrazením. Záverom sme dokázali, že η je vnorením. $\square$

Dôsledok. Obor integrity celých čísel Z sa dá usporiadať len jediným spôsobom.

Dôkaz: Predpokladajme, že $\sqsubset$ je reláciou usporiadania na Z tak, že $(Z; +, \cdot, \sqsubset)$ tvorí usporiadaný obor integrity. Podľa predchádzajúcej vety máme vnorenie

$$\eta: n \mapsto ne = n1 = n$$

len 1 krát v kontexte

$(Z; +, \cdot, <)$ do $(Z; +, \cdot, \sqsubset)$. Pretože η je identické zobrazenie, $n < m$ implikuje $n \sqsubset m$ (lema 1.1.1). Obrátene, majme $r \sqsubset s$. Zrejme $r \neq s$. Potom alebo $s < r$, alebo $r < s$ z trichotómie usporiadania $<$. Lenže $s < r$ by znamenalo $s \sqsubset r$, čo by bol spor s $r \sqsubset s$. Ostáva len $r < s$. Teda relácia $\sqsubset$ sa rovná relácii $<$. $\square$

Na opis usporiadaných oborov integrity Z a Q budeme potrebovať ďalšie dôležité pojmy.

Definícia 1.2.5. Hovoríme, že usporiadaný okruh $(A; +, \cdot, <)$ je *archimedovsky usporiadaný*, ak ku každým dvom prvkom $0 < a < b$, $a, b \in A$ existuje také prirodzené číslo n, že $b < na$.

Definícia 1.3.6. Aspoň dvojprvková usporiadaná množina $(T; <)$ sa nazýva *husto usporiadaná*, ak $x, y \in T$ a $x < y$ implikuje existenciu $z \in T$ s vlastnosťou $x < z < y$.

Lema 1.2.3. Nech usporiadané okruhy $(A_1; +, \cdot, <)$ a $(A_2; +, \cdot, <)$ sú izomorfné. Ak je z nich archimedovsky usporiadaný jeden, druhý je tiež.

Dôkaz: Nech $f: A_1 \to A_2$ je izomorfizmus usporiadaných okruhov. Predpokladajme, že A_1 je archimedovsky usporiadaný. (Ak by bol taký A_2, úvahu urobíme pre $f^{-1}: A_2 \to A_1$.) Majme $0 < a < b$ v A_2. Potom existujú $0 < x < y$ v A_1 tak, že $f(x) = a$, $f(y) = b$. Podľa predpokladu máme $n \in N$ s vlastnosťou $y < nx$. Pretože f je izomorfizmus, tak $na = nf(x) = f(nx) > f(y) = b$ a A_2 je tiež archimedovsky usporiadaný. $\square$

Veta 1.2.6. Usporiadané obory integrity Z a Q s obvyklými usporiadaniami sú archimedovsky usporiadané. Q je husto usporiadané.

Dôkaz: Zrejme $1 \leq n < m$ implikuje $m < (m+1)n$ v okruhu Z. Teda Z je archimedovsky usporiadaný obor integrity. Predpokladajme, že racionálne čísla $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ máme napísané vo vykrátenom tvare. Nech $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ v usporiadanom obore integrity Q. Na základe príkladu 1.1.1 je to ekvivalentné s $0 < ps < qr$ v Z. Pre Z