Domáce úlohy č.2 — Dominik Chrobák

① Nech $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1$ a ψ^2 sú tvrdenia. Zistite, ktoré z implikácií medzi tvrdeniami $(\varphi^1 \to \psi^1) \wedge (\varphi^2 \to \psi^2)$ a $(\varphi^1 \wedge \varphi^2) \to (\psi^1 \wedge \psi^2)$ platia a ktoré nie.

Riešenie:

Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti tvrdení $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2$.

φ^1	φ^2	ψ^1	ψ^2	$\varphi^1 \to \psi^1$	$\varphi^2 \to \psi^2$	$(\varphi^1\to\psi^1)\wedge(\varphi^2\to\psi^2)$	$\varphi^1 \wedge \varphi^2$	$\psi^1 \wedge \psi^2$	$(\varphi^1\wedge\varphi^2)\to(\psi^1\wedge\psi^2)$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Keďže všetky hodnoty stĺpca tvrdenia $(\varphi^1 \to \psi^1) \wedge (\varphi^2 \to \psi^2)$ sú najviac také, ako prislúchajúce hodnoty stĺpca tvrdenia $(\varphi^1 \wedge \varphi^2) \to (\psi^1 \wedge \psi^2)$, z prvého vyplýva druhý.

Keďže však existuje aspoň jeden riadok (a to piaty, siedmy, deviaty a desiaty), v ktorom je hodnota prvého tvrdenia menšia ako hodnota druhého, z druhého nevyplýva prvý pre každú voľbu $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2$.

Ako kontrapríklad stačí zvoliť tvrdenia:

- φ^1: $1=2$
- φ^2: $1=1$
- ψ^1: $1=2$
- ψ^2: $1=2$

V takom prípade je totiž tvrdenie $(\varphi^1 \to \psi^1) \wedge (\varphi^2 \to \psi^2)$ (t.j. $((1=2) \to (1=2)) \wedge ((1=1) \to (1=2))$) nepravdivé, ale tvrdenie $(\varphi^1 \wedge \varphi^2) \to (\psi^1 \wedge \psi^2)$ (t.j. $((1=2) \wedge (1=1)) \to ((1=2) \wedge (1=2))$) pravdivé.

Dominik Chrobák

② Vymyslite vlastnú situáciu o vzťahoch chlapcov a dievčat a napíšte ju vo forme matematického tvrdenia.

Riešenie:

Nech $x \heartsuit y$ znamená, že x má rád y. Nech C je „množina" chlapcov a D „množina" dievčat.

Existuje dievča, ktoré má rado nejakého chlapca, ktorý má rád iba ju.

$(\exists d_1 \in D)(\exists c \in C)(d_1 \heartsuit c, \land (\forall d_2 \in D)(d_1 \neq d_2 \to \neg c \heartsuit d_2) \land c \heartsuit d_1)$

 Dominik Chrobák

③ Zistite, ktoré implikácie medzi nasledujúcimi tvrdeniami platia pre ľubovoľné tvrdenia φ a ψ:

- $\exists x (\varphi \wedge \psi)$ a $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi$;
- $\forall x (\varphi \wedge \psi)$ a $\forall x \varphi \wedge \forall x \psi$.

Riešenie:

$\exists x (\varphi \wedge \psi)$ a $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi$

Dokážeme, že z prvého tvrdenia vyplýva druhé, ale nie naopak:

- Výrok $\exists x (\varphi \wedge \psi)$ znamená, že existuje x pre ktoré platí φ a zároveň ψ. Ak také x existuje, tak to znamená, že preň platí φ a zároveň ψ. Pretože pre toto x platí φ a zároveň ψ, tak existuje aj x (konkrétne toto), pre ktoré platí φ a zároveň aj x (konkrétne toto), pre ktoré platí ψ. Platí teda, že $\exists x \varphi$ a zároveň $\exists x \psi$ a teda aj $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi$.
- Kontrapríklad:
  Nech ψ je tvrdenie: $x = 1$ a φ: $x = 2$. Potom tvrdenie $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi$ je pravdivé, ale tvrdenie $\exists x (\varphi \wedge \psi)$ je nepravdivé. Z toho vyplýva, že (časť výroku b) neimplikuje (časť výroku a).

$\forall x (\varphi \wedge \psi)$ a $\forall x \varphi \wedge \forall x \psi$

Dokážeme platnosť oboch implikácií:

- Výrok $\forall x (\varphi \wedge \psi)$ znamená, že pre každé x platí φ a zároveň ψ. Pretože pre všetky x platí φ a zároveň pre všetky x platí aj ψ tak z toho vyplýva, že platí aj tvrdenie $\forall x \varphi \wedge \forall \psi$.
- Výrok $\forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ znamená, že pre každé x platí φ a zároveň pre každé x platí ψ. Pretože pre každé x platí φ a zároveň ψ platí aj tvrdenie $\forall x (\varphi \wedge \psi)$.