Domáce úlohy – č. 9

Dominik Chrobák

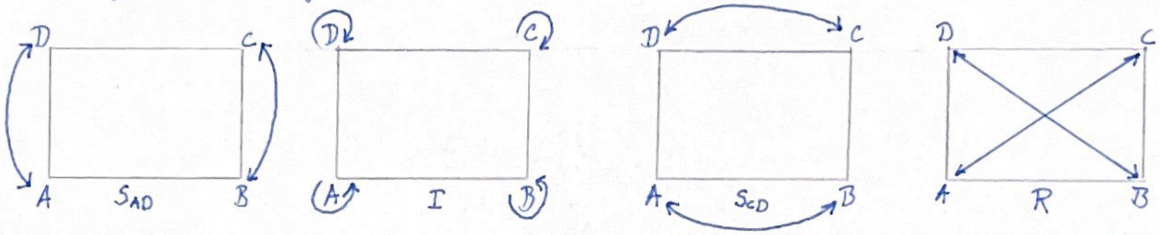
① a) Nájdite všetky zhodné zobrazenia, v ktorých je daný obdĺžnik, ktorý nie je štvorcom, samodružný.

b) Zistite všetky možné zloženia týchto zobrazení.

Riešenie:

Označme si vrcholy obdĺžnika (ktorý nie je štvorec) A, B, C, D proti smeru pohybu hodinových ručičiek. V každom zhodnom zobrazení sa každý vrchol opäť zobrazí na niektorý z vrcholov. Takýmto určením všetkých 4 vrcholov je toto zhodné zobrazenie jednoznačne dané. Stačí teda uvažovať zobrazenia množiny $\{A, B, C, D\}$ na seba. Keďže ide o zhodné zobrazenia, musia to byť bijekcie. Keďže obdĺžnik ABCD nie je štvorec, vzdialenosti medzi bodmi nie sú rovnaké, teda nebude vyhovovať ľubovoľná bijekcia.

a) Takýchto bijekcií je 4:



X	I(x)	R(x)	$S_{CD}(x)$	$S_{AD}(x)$
A	A	C	B	D
B	B	D	A	C
C	C	A	D	B
D	D	B	C	A

I – identita na príslušnej rovine obdĺžnika

R – otočenie okolo stredu obdĺžnika o $180°$

S_{CD} – osová súmernosť podľa strany CD

S_{AD} – osová súmernosť podľa strany AD

b) Zloženie bijekcií z $\{A, B, C, D\}$ do $\{A, B, C, D\}$ je bijekcia z $\{A, B, C, D\}$ do $\{A, B, C, D\}$. Zložením ľubovoľných dvoch bijekcií z množiny $\{I, R, S_{CD}, S_{AD}\}$ bude preto opäť niektorý prvok z tejto množiny.

Dominik Chrobák

Napr. zložené zobrazenie $S_{AD} \circ S_{CD}$:

$(S_{AD} \circ S_{CD})\ (A) = C$

$(S_{AD} \circ S_{CD})\ (B) = D$

$(S_{AD} \circ S_{CD})\ (C) = A$

$(S_{AD} \circ S_{CD})\ (D) = B$

Analogicky môžeme zistiť ostatné zobrazenia a vyplniť tabuľku, kde v každom políčku je výsledok zloženia zobrazenia z riadku so zobrazením zo stĺpca.

$\circ$	I	R	S_{CD}	S_{AD}
I	I	R	S_{CD}	S_{AD}
R	R	I	S_{AD}	S_{CD}
S_{CD}	S_{CD}	S_{AD}	I	R
S_{AD}	S_{AD}	S_{CD}	R	I

② Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami

a) $f[\bigcup_{i\in I} X_i]$ a $\bigcup_{i\in I} f[X_i]$;

b) $f[\bigcap_{i\in I} X_i]$ a $\bigcap_{i\in I} f[X_i]$

musia platiť pre každú funkciu f a každý systém $\{X_i : i\in I\}$ podmnožín množiny $\mathrm{dom}(f)$

Riešenie:

a) Ukážeme, že obe inklúzie medzi $f[\bigcup_{i\in I} X_i]$ a $\bigcup_{i\in I} f[X_i]$ platia:

$y \in f[\bigcup_{i\in I} X_i]$
(predpoklad),

akk $\exists x\,(x \in \bigcup_{i\in I} X_i \land f(x)=y)$
(definícia $f[x]$),

akk $\exists x\,((\exists i\in I)\,(x\in X_i \land f(x)=y)$
(definícia zjednotenia systému množín),

akk $\exists x\,((\exists i\in I)\,(x\in X_i \land f(x)=y))$
(keďže tvrdenie $f(x)=y$ neobsahuje premennú i, kvantifikátor je irelevantný; môžeme na $f(x)=y$ aplikovať kvantifikátor),

akk $\exists i\in I\,(\exists x\,(x\in X_i \land f(x)=y))$
(výmena susedných existenčných kvantifikátorov),

akk $\exists i\in I\,(y\in f[X_i])$
(definícia $f[x]$),

akk $y \in \bigcup_{i\in I} f[X_i]$
(definícia zjednotenia systému množín).

Keďže sme všade použili iba ekvivalentné tvrdenia, dokázali sme, že obe inklúzie medzi $f[\bigcup_{i\in I} X_i]$ a $\bigcup_{i\in I} f[X_i]$ budú platiť.

Dominik Chodák

b) Ukážeme, že $F[\bigcap_{i\in I} X_i]$ je podmnožinou $\bigcap_{i\in I} F[X_i]$, ale nie naopak:

$\boxed{\subseteq}$ $y \in F[\bigcap_{i\in I} X_i]$

(predpoklad),

akk $\exists x\,(x \in \bigcap_{i\in I} X_i \wedge F(x) = y)$

(definícia $F[X]$),

akk $\exists x\,((\forall i \in I)\, x \in X_i \wedge F(x) = y)$

(definícia prieniku systému množín),

akk $\exists x\,((\forall i \in I)(x \in X_i \wedge F(x) = y))$

(lebo tvrdenie $F(x) = y$ neobsahuje premennú i, kvantifikátor je irelevantný, môžeme na $F(x) = y$ aplikovať kvantifikátor),

ztv $(\forall i \in I)(\exists x\,(x \in X_i \wedge F(x) = y))$

(lebo ak existuje univerzálne x, ktoré vyhovuje všetkým $i \in I$, potom všetkým $i \in I$ vyhovuje nejaké x (konkrétne toto univerzálne)),

akk $(\forall i \in I)(y \in F[X_i])$

(definícia $F[X_i]$),

akk $y \in \bigcap_{i\in I} F[X_i]$

(definícia prieniku systému množín).

$\boxed{\not\supseteq}$ Nech $F = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$, $I = \{1,2\}$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$.

Potom platí:

- $F[\bigcap_{i\in I} X_i] = F[\{1\} \cap \{2\}] = \emptyset$
- $\bigcap_{i\in I} F[X_i] = F[\{1\}] \cap [\{2\}] = \{3\}$

Ukázali sme, že inklúzia $F[\bigcap_{i\in I} X_i] \supseteq \bigcap_{i\in I} F[X_i]$ neplatí.

 Dominik Chrobák

③ Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami

a) $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} Y_i]$ a $\bigcup_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$;

b) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} Y_i]$ a $\bigcap_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$

musia platiť pre každú funkciu f z nejakej množiny do množiny B a každý systém $\{Y_i : i\in I\}$ podmnožín množiny B.

Riešenie:

a) Ukážeme, že injekcia $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} Y_i] \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$ platí vždy aj naopak

$\boxed{\supseteq}$ $x \in f^{-1}[\bigcup_{i\in I} Y_i]$

(predpoklad),

akk $f(x) \in \bigcup_{i\in I} Y_i$

(definícia $f^{-1}[Y]$),

akk $(\exists i\in I)(f(x)\in Y_i)$

(definícia zjednotenia množín),

akk $(\exists i\in I)\ x\in f^{-1}[Y_i]$

(lebo $f(x) \in Y \iff x\in f^{-1}[Y]$ definícia $f^{-1}[Y]$),

akk $x\in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$

(definícia zjednotenia systému množín).

Dokázali sme, že inklúzia platí oboma smermi.

b) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} Y_i]$ a $\bigcap_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$

$\boxed{\subseteq}$ a $\boxed{\supseteq}$ dokážeme, že platia obe inklúzie

$x\in f^{-1}[\bigcap_{i\in I} Y_i]$

(predpoklad),

akk $f(x) \in \bigcap_{i\in I} Y_i$

(podľa definície $f^{-1}[Y]$),

akk $(\exists i\in I)\ f(x)\in Y_i$

(definícia prieniku systému množín),

akk $(\exists i\in I)\ f^{-1}[Y_i]$

(podľa definície $f^{-1}[Y]$),

akk $x\in \bigcap_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$

(definícia prieniku systému množín),

Dokázali sme, že platia obe inklúzie.