15/09/2022

Comment les mathematiques s'ecrivent

1. Arithmetique (1er partie)

Depuis Euclide:
axiome $->$ definition $->$ proposition $->$ demonstration
Aujourd'hui:
les definition doivent pouvoir s'enoncer en langage formel .

On se place dans ($\mathbb{N}$; $+$;$\times$; $\leq$)

La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$
toute parti non vide dans $\mathbb{N}$ admet un plus petit élèment

definition : soit A une partie de $\mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$
m est un minorant ($\forall x \in A, x \geq m$)
en français : m est plus petit que tous les elements de A

exemple: $[3;4;9]$, 0 est minorant de $[3;4;9]$

demonstration : (disjonction de cas)
$\forall x$ $\in${3,4,9} $x \geq 0$

- 1er cas : $x = 3$ on a bien $x \geq 0$
- 2eme cas : $x = 4$ on a bien $x \geq 0$
- 3eme cas : $x = 9$ on a bien $x \geq 0$

conclusion: $\forall x$ $\in${3,4,9} $x \geq 0$

definition : le plus petit element (PPE)
un element $P \in \mathbb{N}$ est un PPE de A
si un $P \in A$ et si p est un minorant de A

formellement:
($P \in A$ et $\forall x \in A$ | $x \geq P$)

exemple: $B =${$n^2 + 3$|$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$}

Montrons que 7 = PPE (B)

je veux montrer que :
($7 \in B$) et ($\forall x \in B \quad x \geq 7$)

- $$\begin{aligned} 7 &= 2^2 + 3 \\ &= n^2 + 3 \quad en\ posant\ n = 2 \end{aligned}$$

$donc\ 7 \in B$

$Soit\ x \in B$

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n^2 + 3$ et $n \geq 2$

$On\ a\ donc$

$$\begin{aligned} n^2 &\geq 4 \\ n^2 + 3 &\geq 7 \\ x &\geq 7 \end{aligned}$$

$conclusion : 7\ est\ minorant\ de\ B$

$Conclusion$: PPE(B) $= 7$

definition :
un nombre n est divisible par un autre (p) plus petit
si le plus petit mesure le plus grand

$$n = p + p + ... + p$$

$n, p \in \mathbb{N}$
On dit que n est divisible par p
ou que p divise n
ou que n est un multiple de p

si ($\exists\ k \in \mathbb{N} \quad n = k \times p$)
on a alors p/n qui se lit "p divise n"

Attention : p/n est un booleen ce n'est pas le rationnel $\frac{p}{n}$

On deinit D_p l'ensemble des diviseurs de p

- $D_0 = \mathbb{N}$
- $D_1 =$\{1\}
- $D_2 =$\{$1, 2$\}
- $D_3 =$\{$1, 3$\}
- $D_4 =$\{$1, 5$\}
- $D_5 =$\{$1, 2, 4$\}
- $D_6 =$\{$1, 2, 3, 6$\}

definition :
$p \in \mathbb{N}$ est premier si ($p \neq 1$) et ($\forall d \in \mathbb{N}$ si d/n alors ($d = 1 \; ou \; d = p$))
"p admet exactement deux diviseurs 1 et lui même "

1. Proposition : L'unicité du PPE
2. Théorème
   demonstration 1: Méthode prendre deux PPE , p et p' et montrer que $p = p'$.
   Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $p, p' \in \mathbb{N}$ des PPE de A on a donc :
   (1) ($p \in A$) et (3) ($\forall x \in A \quad x \geq p$)
   (2) ($p' \in A$) et (4)($\forall x \in A \quad x \geq p'$)

D'aprés (1) et (4) $p \geq p'$
D'aprés (3) et (2) $p' \geq p$

Par antisymetrie $p = p'$

conclusion : le plus petit element de A , s'il existe , est unique .

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$
Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors il existe un unique couple (q, r) s'entiers naturel tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$

demonstration: unicité : Soient (q, r) et (q', r') tels que

1. $a = bq + r$
2. $a = bq' + r'$
3. $0 \leq r < b$
4. $0 \leq r' < b$

$$\boxed{le \; but \; est \; de \; montrer \; que \; q = q', \; r = r}$$

On calcule (1) et (2)

- $0 = b(q-q')$
  $\iff r'-r = b(q-q')$

On multiplie (3) par -1

$$\begin{aligned} -b < -r &\leq 0 \\ 0 \leq r' &< b \\ -b < r'-r &< b \end{aligned}$$

On donc en utilisant (6)
$-b < b(q-q') < b$

comme $b \in \mathbb{N}^*$ on peut simplifier

$$-1 < q-q' < 1$$

Donc $q-q'=0$ on a montré que $\boxed{q-q}$
Donc (5) on obtient $r-r'=0$ donc $\boxed{r=r'}$

$A \left\{ q \in \mathbb{N} | bq \leq a \right.$

Montrons que A admet un plus grand element (PGE)

- $A \neq 0$ car $0 \in A$
- A est majoré par a $\begin{matrix} car\ 1 \leq b \\ donc\ q \leq bq \leq a \end{matrix}$ pour $q \in A$

  Comme toute partie non vide makoré de A admet PGE
  on peut poser $q_0 = PGE(A)$
  on pose ensuite $r_0 = a - bq_0$
  on verifie que $0 \leq r_0 < b$
  car $q_0 \in A\ et\ (q_0+1) \in A$