



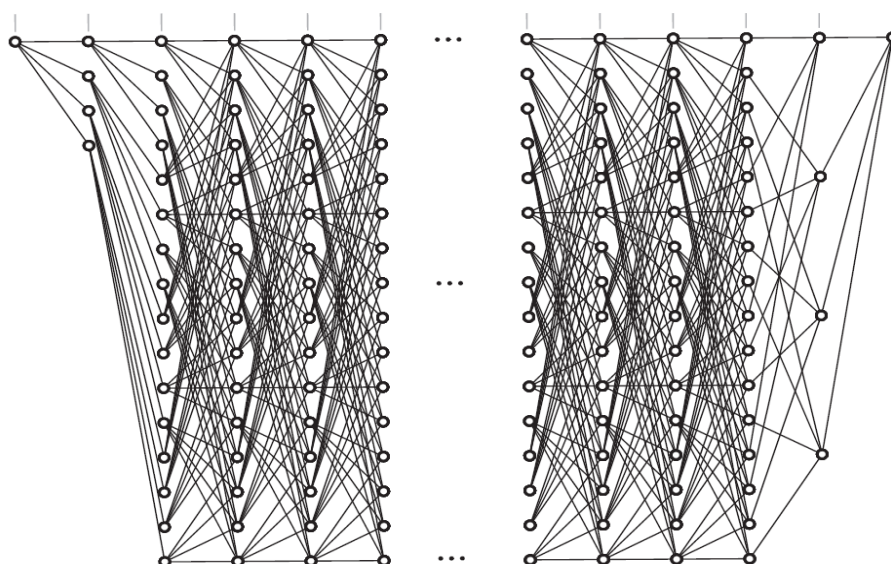
Département Sciences du Numérique

Parcours Télécommunications & Réseaux

Egalisation

Algorithmes temporels et fréquentiels

Auteur : C. Poulliat



Version 1.0 du
5 novembre 2023

Table des matières

1	Modèles des signaux en réception	5
1.1	Représentation bande base des signaux sur canal sélectif en fréquence .	5
1.1.1	Modélisation sur canal Gaussien - Rappel	5
1.1.2	Modèle sur canal à bande limitée sélectif en fréquence	6
1.1.3	Exemple : Canaux à trajets multiples	7
1.2	Filtrage adapté et blanchiment	7
1.3	Filtrage adapté partiel	8
1.3.1	Modèle discret équivalent bande de base au temps symbole . . .	8
2	Egalisation linéaire temporelle	9
2.1	Principes	9
2.2	Egalisation linéaire avec critère ZF	11
2.2.1	Principe	11
2.2.2	Egalisation ZF - structure sans contrainte	11
2.2.3	Egalisation ZF - structure contrainte	12
2.2.4	Résumé	15
2.2.5	Analyse en présence de bruit	15
2.2.6	Résumé	18
2.3	Egalisation par filtrage de Wiener	19
2.3.1	Principe d'orthogonalité	19
2.3.2	Egaliseur sans contrainte	22
2.3.3	Egaliseur RIF de Wiener	26
3	Egalisation non linéaire	31
3.1	Maximum de Vraisemblance	32
3.1.1	Modèle discret équivalent bande de base	32
3.1.2	Modèle à états finis	32
3.1.3	Décodage d'une Séquence par Maximum de Vraisemblance (MLSE)	34
3.2	Egaliseur à retour de décision	37
3.2.1	Structure et principe	37
3.2.2	Optimisation de la structure DFE	37
3.2.3	Avantages et inconvénients	38
4	Egalisation fréquentielle linéaire en bloc	39
4.1	OFDM, un exemple de forme d'onde circulaire	39
4.1.1	Modélisation récepteur - domaine temporel	39
4.1.2	Modélisation récepteur - domaine fréquentiel	40
4.1.3	Aspects récepteurs	40
4.2	Communications mono-porteuses par bloc :	41

4.2.1	Principe	41
4.2.2	Modèles en réception - FDE	42
4.2.3	SC-FDMA : extension pour l'accès multiple	42
4.3	Analyse de performances	46
4.3.1	Modèle du signal en réception	47
4.3.2	Variance du bruit en sortie de récepteur	48
4.3.3	Puissance du terme utile	49
4.3.4	Puissance terme d'interférence entre symboles résiduelle	49
4.3.5	Rapport signal à bruit en sortie de DFT	50
Appendices		51
A Signaux et systèmes à temps discrets		53
A.1	Signaux à temps discrets	53
A.1.1	Séquences et Espace(s) des séquences	53
A.1.2	Séquences particulières	55
A.2	Systèmes à temps discret	56
A.2.1	Filtres Linéaires Invariants par Décalage	56
A.2.2	Equations aux différences : systèmes RII et RIF	58
A.2.3	Filtres non invariants par décalage	59
B Analyse et représentations des signaux et systèmes discrets		61
B.1	Transformée de Fourier des signaux à temps discrets/des séquences. . .	61
B.1.1	Fonctions propres d'un système	61
B.1.2	Transformée de Fourier des signaux à temps discrets	61
B.2	Transformée en \mathcal{Z}	62
B.2.1	Définitions	62
B.2.2	relation avec la transformée de Fourier d'une séquence.	62
B.2.3	Région/Domaine de Convergence (region of convergence, ROC)	62
B.2.4	Propriétés	63
C Caractérisation au second ordre		65
C.1	Caractérisation d'un processus aléatoire au premier et second ordre. . .	65
C.2	Qu'est ce que la stationnarité ?	66
C.3	Propriétés des fonctions d'autocorrélation.	68
C.3.1	Interprétation comme produit scalaire	68
C.4	Densité spectrale de puissance d'un processus	68
D Filtrage linéaire de processus aléatoires		69
D.1	Filtre linéaire invariant par décalage	69
D.2	Caractérisation des signaux aléatoires filtrés	69
D.2.1	Caractérisation au premier ordre	69
D.2.2	Caractérisation au second ordre	70

Chapitre 1

Modèles des signaux en réception pour les canaux sélectifs en fréquence

1.1 Représentation bande base des signaux sur canal sélectif en fréquence

1.1.1 Modélisation sur canal Gaussien - Rappel

Signal modulé sur porteuse

On considère une modulation de phase et d'amplitude d'ordre M . Le signal émis en bande de base est alors donné par

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_e(t - kT_s),$$

où

- $\{s_k = i_k + jq_k\}$, $s_k \in \mathbb{C}$ est la séquence de symboles émis appartenant à une constellation notée \mathcal{S} . On note $|\mathcal{S}| = M = 2^m$.
- T_s est la période symbole,
- $h_e(t)$ est le filtre de mise en forme à l'émission.

Le signal émis en bande transposée (ie. le *signal modulé*) est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \sqrt{2} \Re[s(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \Re[s(t)]\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) - \Im[s(t)]\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t) \\ &= I(t)\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où

- f_0 est la fréquence porteuse,
- $I(t) = \sum_k i_k h_e(t - kT)$ est le signal dît en phase (*voie I*),
- $Q(t) = \sum_k q_k h_e(t - kT)$ est le signal dît en quadrature (*voie Q*),

$s(t)$ est généralement nommé *enveloppe complexe* du signal $\tilde{s}(t)$. Le facteur $\sqrt{2}$ est là pour assurer que les deux signaux ont la même énergie/puissance (cas déterministe/cas aléatoire). De même, l'équation (1.1) représente la décomposition dite de Rayleigh-Rice du signal passe bande $\tilde{s}(t)$.

Au récepteur, la récupération d'une voie se réalise comme suit. Pour la voie en phase, on aura en utilisant les formules trigonométriques classiques

$$\tilde{s}(t)\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) = I(t) + I(t) \cos(4\pi f_0 t) - Q(t) \sin(4\pi f_0 t)$$

On aura une expression similaire sur la voie en quadrature si on considère $-\tilde{s}(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$. En supposant que le signal est à bande étroite, après filtrage passe-bas idéal, on retrouve bien le signal

$$y(t) = I(t) + jQ(t)$$

Sur un canal Gaussien, le bruit $\tilde{b}(t)$ Gaussien bande étroite de densité bilatérale de bruit $N_0/2$ peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}\tilde{b}(t) &= \sqrt{2}\Re[b(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \Re[b(t)]\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \Im[b(t)]\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) \\ &= b_i(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - b_q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

Les composantes $b_i(t)$ et $b_q(t)$ ont pour densité spectrale de puissance $N_0/2$ pour tout f sur $[-B/2, B/2]$ soit

$$\mathring{\gamma}_{b_i}(f) = \mathring{\gamma}_{b_q}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & , \forall |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas Gaussien, on peut donc écrire le signal reçu en bande transposée comme étant

$$\tilde{r}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{b}(t)$$

avec

$$\tilde{r}(t) = \sqrt{2}\Re[r(t)e^{j2\pi f_0 t}]$$

et

$$r(t) = r_i(t) + jr_q(t).$$

$$\begin{aligned}r(t) &= s(t) + b(t) \\ &= \sum_k s_k h_e(t - kT_s) + b(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

où $b(t)$ est un bruit blanc complexe d'autocorrélation $\gamma_b[\tau] = \mathbb{E}(b(t)b^*(t_\tau)) = N_0 \delta(\tau)$

1.1.2 Modèle sur canal à bande limitée sélectif en fréquence

Dans le cadre d'un canal à bande limitée de réponse impulsionnelle $\tilde{h}_c(t) = 2\Re[h_c(t)e^{j2\pi f_0 t}]$ ¹, le signal obtenu après filtrage par $\tilde{h}_c(t)$ s'écrit

$$\tilde{r}(t) = \tilde{h}_c * \tilde{s} + \tilde{b}$$

Après calcul, on peut montrer que le signal équivalent bande de bande après démodulation peut s'écrire

$$\begin{aligned}r(t) &= h_c * s(t) + b(t) \\ &= \sum_k s_k h_c * h_e(t - kT_s) + b(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

1. La définition retenue pour le canal est ici légèrement différente. Le coefficient est ici différent de $\sqrt{2}$ permet de prendre en compte un facteur multiplicatif à prendre en compte dans le signal bande base équivalent introduit par le filtrage passe bande. Cette notation est adoptée pour éviter une lourdeur de notation. Il faudra faire attention quand on reviendra au canal réel en bande transposée

1.1.3 Exemple : Canaux à trajets multiples

Au niveau du récepteur, quand le signal émis est soumis à différentes réflexions sur l'environnement, on obtient le signal reçu suivant

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}(t) &= \alpha_0 \tilde{s}(t) + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \tilde{s}(t - \tau_l) + \tilde{b}(t) \\
 &= \alpha_0 \sqrt{2} \Re[s(t) e^{+i2\pi f_0 t}] + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \sqrt{2} \Re[s(t - \tau_l) e^{+i2\pi f_0 (t - \tau_l)}] + \tilde{b}(t) \\
 &= \sqrt{2} \Re \left[\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k e^{-i2\pi f_0 \tau_k} s(t - \tau_k) e^{+i2\pi f_0 t} \right] + \sqrt{2} \Re[b(t) e^{+i2\pi f_0 t}] \\
 &= \sqrt{2} \Re[r(t) e^{+i2\pi f_0 t}]
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Après calcul, on en déduit l'enveloppe complexe associée

$$\begin{aligned}
 r(t) &= h_c * s(t) + b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_c * h_e(t - kT) + b(t)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$h_c(t)$ agit donc comme un filtre et est alors défini comme la réponse impulsionnelle du canal de propagation *équivalent* en bande de base donnée finalement par

$$h_c(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} \delta(t - \tau_l) \tag{1.6}$$

La réponse fréquentielle du "filtre de canal" est alors donnée par

$$H_c(f) = \mathcal{F}(h_c(t)) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} e^{-j2\pi \tau_l f} \tag{1.7}$$

1.2 Fitrage adapté et blanchiment

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h_r * r(t) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_r * h_c * h_e(t - kT) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h(t - kT) + b_r(t)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

avec $h(t) = h_r * h_c * h_e(t)$: enveloppe complexe du canal global *équivalent* en bande de base

— Récepteur optimal : *Whitened Matched Filter* [Forney]

1. $h_r(t)$ est le filtre adapté à $g(t) = h_c * h_e(t)$,
 2. échantillonnage au rythme symbole T_s , IES toujours présente et nécessité d'un filtre blanchissant,
 3. détection au sens ML ou critère de détection sous-optimaux.
- pas très réaliste dans un contexte canal $h_c(t)$ variable rapidement en temps.

1.3 Filtrage adapté partiel

Le modèle précédent est parfois difficile à mettre en oeuvre car il nécessite de mettre en oeuvre un filtrage adapté à la fois au canal et au filtre d'émission (bande de base). On préfère pour des raisons de complexité réaliser un filtrage adapté *partiel* où le récepteur est seulement adapté au signal émis. On a alors le signal reçu suivant en bande de base

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h_r * r(t) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_r * h_c * h_e(t - kT) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h(t - kT) + b_r(t)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

On retrouve la mise en forme classique d'un signal à l'aide d'une forme d'onde $h(t) = h_r * h_c * h_e(t)$ qui est l'enveloppe complexe du canal global *équivalent* en bande de base.

1.3.1 Modèle discret équivalent bande de base au temps symbole

$$\begin{aligned}
 y[n] &\triangleq y(nT) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h((n - k)T) + b_r(nT) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n]
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec $h[n] = h_r * h_c * h_e(nT)$: réponse impulsionnelle discrète du canal équivalent en bande de base.

$b_r(t)$ est Gaussien car filtré de $b(t)$, $b[n]$ non corrélés et Gaussiens donc indépendants

Chapitre 2

Egalisation linéaire temporelle

2.1 Principes

Comme vu dans le chapitre précédent, la transmission sur canal sélectif en fréquence mène à l'introduction d'interférences entre symboles sur le signal reçu. On a obtenu alors le signal suivant

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]x[n-k] + b[n]$$

où $h[n]$ est la réponse impulsionnelle du canal discret équivalent bande de base et $b(n)$ est un bruit blanc additif au niveau du récepteur. Au récepteur, on souhaite "combattre" cette IES en traitant numériquement les échantillons reçus. On cherche ainsi une estimée $\hat{s}[n]$ de $s[n-d]$, une version 'une version éventuellement retardée de $s[n]$ d'un délai d . Notons que d introduit un délai de traitement pour le système complet.

Le principe général de l'égalisation dite linéaire est donnée par la figure suivante :

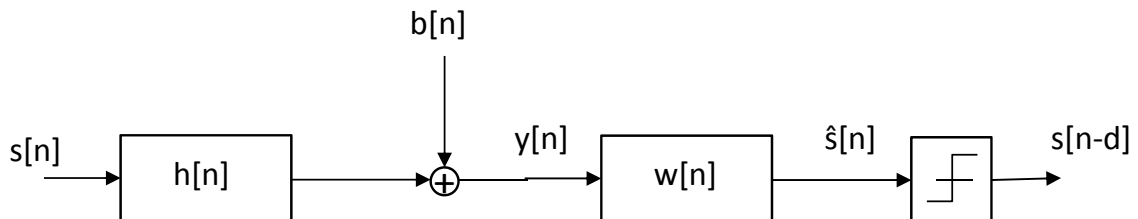


FIGURE 2.1 – Chaîne pour égalisation linéaire

Au niveau du récepteur, $w[n]$ est un filtre dit *filtre égaliseur* que l'on cherche à déterminer/optimiser. Comme filtre numérique, il peut avoir différentes structures possibles, ie. à réponse impulsionnelle finie ou infinie (finite impulse response/*FIR*, infinie

impulse response/*IIR*). Du fait que le récepteur est un filtre, on parle d'égalisation linéaire. Une fois la structure imposée, il existe différents critères d'optimisation pour déterminer le filtre $w[n]$. Les deux principaux sont :

- ① le critère *Zero-forcing - ZF* pour lequel les interférences entre symboles sont "forcées à zéro" par filtrage
- ② le critère *MMSE* (minimum mean square error) pour lequel on cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne après filtrage par $w[n]$ entre le signal estimé et le signal réel.

2.2 Egalisation linéaire avec critère ZF

2.2.1 Principe

Le but de cette technique est d'imposer l'IES nulle en absence de bruit. Le principe est assez simple. Supposons la réponse impulsionnelle $h[n]$ connue, ou de manière équivalente sa transformée en \mathcal{Z} définie comme $\bar{h}(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_k h[k]z^{-k}$. Alors en utilisant $\bar{w}(z) = 1/\bar{h}(z)$, un calcul immédiat dans le domaine transformé montre que

$$\begin{aligned}\hat{x} &= w[n] * y[n] \\ &= s[n] + w[n] * b[n]\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dans ce cas le signal estimé est bien le signal $s[n]$ sans IES. On obtient donc un système sans interférence avec un bruit additif. C'est ce bruit qui limitera beaucoup les performances du système dans le cadre de canaux très sélectifs (existence de "zéros" du canal $h[n]$).

2.2.2 Egalisation ZF - structure sans contrainte

On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de contrainte sur la structure de l'égaliseur (réponse impulsionnelle éventuellement infinie). Le signal reçu est alors donné par

$$y[n] = h[n] * s[n] + b[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]s[n-k] + b[n]$$

Après filtrage par $w[n]$, on obtient

$$\hat{s}[n] = w[n] * h[n] * s[n] + w * b[n]$$

Dans le domaine transformé en \mathcal{Z} , on aura donc

$$\bar{\hat{s}}(z) = \bar{w}(z)\bar{h}(z)\bar{s}(z) + \bar{w}(z)\bar{b}(z)$$

La fonction de transfert associée au système complet est donnée par

$$T(z) = \mathcal{Z}\{w[n] * h[n]\} = \bar{w}(z)\bar{h}(z)$$

et correspond au transfert quand le signal est non bruité. Par définition, un égaliseur sera dit *zero-forcing* si on a

$$T(z) = z^{-d},$$

soit de manière équivalente dans le domaine fréquentiel

$$\overset{\circ}{T}(\nu) = T(z = e^{+i2\pi\nu}) = e^{-i2\pi\nu d},$$

et dans le domaine dans le domaine temporel

$$w[n] * h[n] = \delta(n - d), \forall n \in \mathbb{Z}$$

On cherche donc $\bar{w}(z)$ tel que le transfert global soit un délai pur, ie. pas de distorsion en gain ($|\overset{\circ}{T}(\nu)| = 1$) et une distorsion en phase linéaire. On remarque également que

le bruit n'influe pas sur le critère qui ne dépend que de $T(z)$. Si $\bar{w}(z)$ vérifie la relation précédente, on obtient alors

$$\hat{s}[n] = s[n - d] + w[n] * b[n].$$

Le critère ZF nous impose

$$\bar{w}(z)\bar{h}(z) = z^{-d}.$$

On en déduit donc

$$\bar{w}(z) = \frac{z^{-d}}{\bar{h}(z)}.$$

Dans le domaine de Fourier, on obtient

$$\overset{\circ}{w}(\nu) = \frac{e^{-i2\pi\nu d}}{\overset{\circ}{h}(\nu)}.$$

En pratique, $\bar{h}(z)$ sera associé à un filtre de type FIR. Dans ce cadre, son inverse est un filtre de type IIR. Il se pose alors la question de la stabilité du filtre. En effet, les "zéros du canal" (ie. z tel $\bar{h}(z)=0$) deviennent les pôles de $\bar{w}(z)$. Il faut donc faire attention à la mise en oeuvre du filtre inverse. Si tous les zéros sont contenus dans le cercle unité, alors $\bar{w}(z)$ est un filtre IIR stable causal. Si les pôles sont à l'intérieur et à l'extérieur du cercles unités, on se retrouve avec un filtre IIR non causal, ce qui pose des problèmes d'implémentation pratique.

2.2.3 Egalisation ZF - structure contrainte

ZF partiel par inversion directe

Pour pallier à ce problème, on peut considérer une approche sous-optimale avec une structure imposée de type FIR. En s'inspirant des propriétés du filtre inverse, on considérera un filtre RIF anti-causal $\{w[n], n \in [-N, \dots, +N]\}$, ce qui impose en pratique un délai $d = N$ pour le traitement et la décision. Ici, N est considéré comme fixe, mais en pratique, c'est un paramètre à optimiser également. Le critère ZF s'écrit

$$w[n] * h[n] = \sum_{k=-N}^N w_k h_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \dots, \pm N \end{cases}$$

On remarque alors, que pour le cas de la taille finie, on s'efforce de forcer à zéro qu'un nombre fini de termes du transfert global $T(z)$. On peut noter que si les filtres $h[n]$ et $w[n]$ sont RIF, on ne peut avoir le critère satisfait pour $N \rightarrow +\infty$ que si les deux filtres sont des diracs purs (éventuellement décalés). Donc de manière formelle, il n'existe pas de filtre ZF FIR à proprement parlé car on ne peut avoir une élimination complète de l'IES : on cherche ici juste à en éliminer une grande partie seulement (généralement, les termes les plus contributifs en terme de puissance).

Si on écrit le système sous forme matricielle, on obtient $\{w[n]\}$ de taille $2 \times N - 1$

comme solution du système suivant

$$\begin{pmatrix} h[0] & \dots & h[-N] & \dots & h[-2N] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h[N-1] & \dots & h[-1] & \dots & h[-N-1] \\ h[N] & \dots & h[0] & \dots & h[-N] \\ h[N+1] & \dots & h[1] & \dots & h[-N+1] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h[2N] & \dots & h[N] & \dots & h[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{-N} \\ \vdots \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on note $\mathbf{w} = [w_{-N}, \dots, w_{+N}]$, $\Delta = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^\top$, on obtient le système

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \Delta.$$

Et donc on aura simplement

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^{-1}\Delta.$$

ZF partiel par méthode des moindres carrés

Si elle est simple à mettre en oeuvre, l'approche précédente est cependant fortement sous optimale dans le sens où l'on ne contrôle pas ce qui se passe en dehors du support $[-N, N]$. Pour une approche formelle plus satisfaisante, on peut également considérer la formulation suivante comme un problème d'estimation au sens des moindres carrés. En effet, si on note $\{e[n]\}$ la séquence qui mesure la différence entre un dirac "parfait" et le transfert global $t[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{T(z)\}$, et d le retard à introduire, on alors

$$e[n] = w[n] * h[n] - \delta[n - d].$$

Si on adopte la notation vectorielle $\mathbf{w} = [w[0], \dots, w[L_w]]^\top$, l'optimisation de $w[n]$ revient à chercher le filtre $w[n]$ qui va minimiser la fonction de coût $J(\mathbf{w}) = \sum_n |e[n]|^2$. Le transfert global

$$T(z) = \bar{w}(z)\bar{h}(z) = \sum_{k=0}^L t[k]z^{-k}$$

a un ordre fini L car c'est la résultante de la convolution de deux FIR. Notons $L = L_w + L_h$ et $\mathbf{t} = [t[0], \dots, t[L]]^\top$. On a alors la relation

$$\mathbf{t} = \mathbf{H}\mathbf{w}$$

où \mathbf{H} est une matrice triangulaire inférieure dont l'expression est donnée par

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ h[L_h] & & & h[0] & & \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & & h[L_h] & & \dots & h[0] \\ 0 & \dots & 0 & h[L_h] & & h[1] \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & h[L_h] \end{pmatrix}.$$

Comme $T(z)$ a un ordre fini de même $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ aura un nombre fini de termes. En notant le vecteur de taille $(L+1) \times 1$

$$\mathbf{1}_d = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overset{d}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^\top$$

, on peut alors formuler le problème d'optimisation ZF avec FIR comme la minimisation de la fonction quadratique suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^L |e[n]|^2 = \|\mathbf{t} - \mathbf{1}_d\|_2^2 = \|\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{1}_d\|_2^2$$

Le problème à résoudre est donc un problème de minimisation au sens des moindres carrés. La matrice \mathbf{H} étant de rang plein sur les colonnes, en notant \dagger l'opérateur conjoint de transposition et de conjugaison, la solution unique de ce problème est alors donnée par

$$\mathbf{w}_{\text{ZF-LS}} = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d = \mathbf{H}^\sharp \mathbf{1}_d. \quad (2.2)$$

La matrice $\mathbf{H}^\sharp = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger$ est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose, notée quelquefois également \mathbf{H}^+ . A l'optimal, la fonction de coût est donnée par la fonction de d suivante

$$\mathbf{J}_{\mathbf{w},\min}(d) = \|\mathbf{H}(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d - \mathbf{1}_d\|_2^2.$$

On notera alors $\mathbf{P} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}\mathbf{H}^\sharp$ qui est en fait la matrice de projection associée ayant les propriétés suivantes : (a) hermitianité : $\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$ et (b) Idempotence $\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. On peut alors simplifier l'expression de $\mathbf{J}_{\mathbf{w},\min}(d)$ comme suit

$$\mathbf{J}_{\mathbf{w},\min}(d) = 1 - p_{d,d},$$

où $p_{d,d}$ est le d -ième élément de la diagonal de \mathbf{P} . Pour une taille de filtre \mathbf{w} donnée, on atteint donc le minimum pour un délai d correspondant à l'élément de la diagonal de \mathbf{P} le plus grand. On peut d'ailleurs montrer que $0 \leq p_{d,d} \leq 1, \forall d$. On obtient ainsi un filtre optimisé en délai. Le filtre optimal \mathbf{w} en donc obtenu en sélectionnant la d -ième colonne de \mathbf{H}^\sharp .

2.2.4 Résumé

Résumé 1 : Résumé de l'égalisation ZF

Structure non contrainte	
En Temporel	Domaine transformé en \mathcal{Z}
$\hat{s}[n] = w_{ZF}[n] * y[n] = s[n - d] \iff$	$\bar{\hat{s}}(z) = \bar{w}_{ZF}(z)\bar{h}(z)\bar{s}(z) = \bar{s}(z)z^{-d}$
$w_{zf}[n] * h[n] = \delta[n - d] \iff$	$\bar{w}_{zf}(z) = \frac{z^{-d}}{\bar{h}(z)}$
Structure FIR : ZF partiel par inversion directe	
$\mathbf{w}_{zf} = \{w_k, k = -N \dots + N\}$	
$w_{zf}[n] * h[n] = \sum_{k=-N}^N w_k h_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \dots, \pm N \end{cases}$	
$\begin{pmatrix} h[0] & \dots & h[-N] & \dots & h[-2N] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h[N-1] & \dots & h[-1] & \dots & h[-N-1] \\ h[N] & \dots & h[0] & \dots & h[-N] \\ h[N+1] & \dots & h[1] & \dots & h[-N+1] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h[2N] & \dots & h[N] & \dots & h[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{-N} \\ \vdots \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$	
Structure FIR : ZF partiel, méthode des moindres carrés	
<p>Pour calculer $\mathbf{w}_{ZF-LS} = [w[0], \dots, w[L_w]]^\top$,</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Calculer $\mathbf{H}^\# = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger$; 2. Calculer $\mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{H}^\#$; 3. Sélectionner d tel que $p_{d,d}$ est la plus grande valeur de la diagonale ; 4. Sélectionner la d-ième colonne de $\mathbf{H}^\#$, identique au calcul $\mathbf{w}_{ZF-LS} = \mathbf{H}^\# \mathbf{1}_d$. 	

2.2.5 Analyse en présence de bruit

Egaliseur ZF sans contrainte

Dans le cadre de l'égalisation sans contrainte, ie. $w[n] * h[n] = \delta[n - d]$, on obtient en présence de bruit le modèle suivant après filtrage numérique en réception par le filtre égaliseur

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= w[n] * y[n] = w[n] * h[n] * s[n] + w[n] * b[n] \\ &= s[n - d] + b_w[n] \end{aligned} \quad (2.3)$$

On a donc un modèle équivalent avec un bruit filtré

$$b_w[n] = w[n] * b[n].$$

$b_w[n]$ est donc issu d'un processus aléatoire de bruit Gaussien *coloré* et de moyenne nulle. En utilisant les formules de filtrage d'un processus stationnaire au sens large (ordre 1 et 2), la densité spectrale de puissance associée s'écrit

$$\overset{\circ}{\gamma}_{b_w}(\nu) = |\overset{\circ}{w}(\nu)|^2 \overset{\circ}{\gamma}_b(\nu).$$

$b[n]$ étant un processus blanc Gaussien, l'autocorrélation du bruit est donnée par $\gamma_b[p] = \mathbb{E}(b[n]b^*[n-p]) = \sigma_b^2 \delta[p]$ et donc

$$\overset{\circ}{\gamma}_b(\nu) = \mathcal{F}\{\gamma_b[p]\} = \sigma_b^2.$$

On obtient au final

$$\overset{\circ}{\gamma}_{b_w}(\nu) = \sigma_b^2 |\overset{\circ}{w}(\nu)|^2 = \frac{\sigma_b^2}{|\overset{\circ}{h}(\nu)|^2},$$

où

$$\overset{\circ}{h}(\nu) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_k h[k] e^{+i2\pi\nu k}$$

Par définition,

$$\sigma_{b_w}^2 = \gamma_{b_w}(0) = \int_{[1]} \overset{\circ}{\gamma}_{b_w}(\nu) d\nu,$$

on obtient alors

$$\sigma_{b_w}^2 = \int_{[1]} \sigma_b^2 \frac{1}{|\overset{\circ}{h}(\nu)|^2} d\nu. \quad (2.4)$$

En considérant que $\sigma_b^2 = N_0$ et $\sigma_s^2 = \mathbb{E}(|s[n]|^2) = 1$, le rapport signal sur bruit (signal-to-noise ratio, *SNR*) s'exprime alors

$$\text{SNR}_{\text{IIR-ZF}} = \frac{1}{\sigma_{b_w}^2} = \frac{1}{\int_{[1]} \frac{N_0}{|\overset{\circ}{h}(\nu)|^2} d\nu}$$

Cette expression peut s'interpréter de la manière suivante. Soit

$$\text{SNR}(\nu) = \frac{\sigma_s^2 |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2}{N_0}$$

le rapport signal à bruit par unité de fréquence. On définit alors l'opérateur de moyenne harmonique $\mathcal{H}\{.\}$ par

$$\mathcal{H}\left\{\overset{\circ}{x}(\nu)\right\} = \frac{1}{\int_{[1]} \frac{1}{\overset{\circ}{x}(\nu)} d\nu}.$$

On peut alors écrire

$$\text{SNR}_{\text{IIR-ZF}} = \mathcal{H}\{\text{SNR}(\nu)\}$$

On peut également étudier différents cas limites :

1. Si $\bar{h}(z)$ est un filtre passe-tout, ie. $|\bar{h}(\nu)| = \alpha, \forall \nu \in [0, 1]$, alors

$$\text{SNR}_{\text{IIR-ZF}} = \frac{\alpha^2}{N_0}.$$

On a alors un canal de type Gaussian sans IES.

2. Ainsi si il existe ν tel que $\bar{h}(\nu) = 0$, ou si $\bar{h}(z)$ a des zéros proches du cercle unité, on peut avoir une variance très fortement augmentée ($\sigma_{b_w}^2 \rightarrow 0$), d'où une dégradation du rapport signal sur bruit ($\text{SNR}_{\text{IIR-ZF}} \rightarrow +\infty$). Dans ce dernier cas, il devient évident que l'égalisation de type ZF aura des performances très faibles, ce qui fait que ce critère est très peu considéré en pratique pour cette application.

Egalisation à structure contrainte

On peut reprendre le même type de calcul si on considère $w[n]$ de type RIF. Cependant, il devient aisé de redériver les calculs dans le domaine temporel, plutôt que fréquentiel, où l'on peut avoir une autre interprétation. Ainsi, par définition, on a

$$\sigma_{b_w}^2 = \gamma_{b_w}[0] = \sigma_b^2 \gamma_w[0],$$

où l'on a à utiliser le fait que

$$\gamma_{b_w}[p] = w[p] * \gamma_b[p] = \sigma_b^2 w[p]$$

Comme $w[n]$ est un filtre numérique de type RIF, on obtient facilement

$$\sigma_{b_w}^2 = \sigma_b^2 \sum_{k=-N}^{+N} |w_k|^2.$$

On a donc une variance augmentée d'un facteur $\sum_{k=-N}^{+N} |w_k|^2$ et donc une diminution du rapport signal sur bruit du même facteur. Le rapport signal sur bruit est lui un peu plus compliqué à évaluer car, dans notre cas, il reste de l'IES résiduelle dont l'expression dépend du filtre $w[n]$ obtenu après calcul. En effet après filtrage, le modèle du signal estimé est donné par

$$\hat{x}[n] = w[n] * h[n] * s[n] + w[n] * b[n] = s[n] + \sum_{|k|>N} (w * h)[k] s[n - k] + w[n] * b[n].$$

Le terme de bruit plus interférences à prendre en compte dans le rapport signal sur bruit plus interférence est alors donné par

$$b_i[n] = \sum_{|k|>N} (w * h)[k] s[n - k] + w[n] * b[n].$$

On définit alors la quantité

$$\text{SINR}_{\text{FIR-ZF}} = \frac{1}{\sigma_{b_i}^2}.$$

Une expression similaire peut être dérivée pour le cas d'un filtre obtenu par la méthode des moindres carrés.

2.2.6 Résumé

Résumé 2 : Amplification du bruit pour le cas ZF

Structure non contrainte	
En Temporel	Domaine fréquentiel
$\hat{s}[n] = s[n-d] + \underbrace{w_{ZF} * b[n]}_{b_f[n]}$	$\overset{\circ}{\gamma}_{b_f}(\nu) = \sigma_b^2 \left \overset{\circ}{w}_{zf}(\nu) \right ^2$ \Downarrow $\sigma_{b_f}^2 = \sigma_b^2 \int_{[1]} \frac{1}{ \overset{\circ}{h}(\nu) ^2} d\nu$
Structure contrainte FIR (sans délai)	
$b_f[n] = \sum_{k=-N}^N w_k b_{n-k}$	$\sigma_{b_f}^2 = \sigma_b^2 \sum_{k=-N}^N w_k ^2 = \sigma_b^2 E_w$

Une illustration de réalisation d'un filtre ZF est donnée par la figure suivante qui représente l'"inverse du canal". Le terme égalisation se comprend très bien dans le domaine fréquentiel où le produit des deux réponses fréquentielles permet d'obtenir une réponse fréquentielle globale constante.

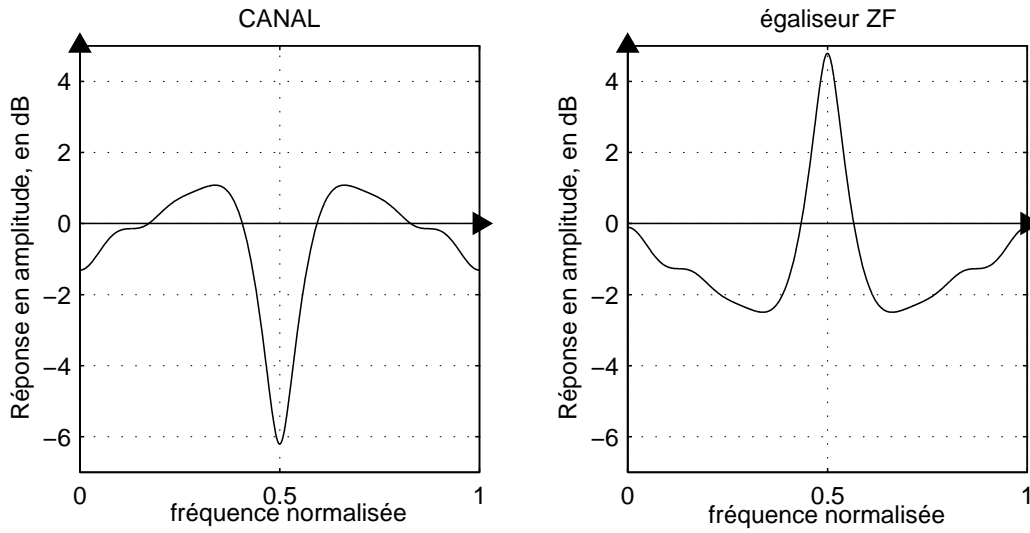


FIGURE 2.2 – Exemple de réponse fréquentielle pour un filtre ZF.

2.3 Egalisation par filtrage de Wiener

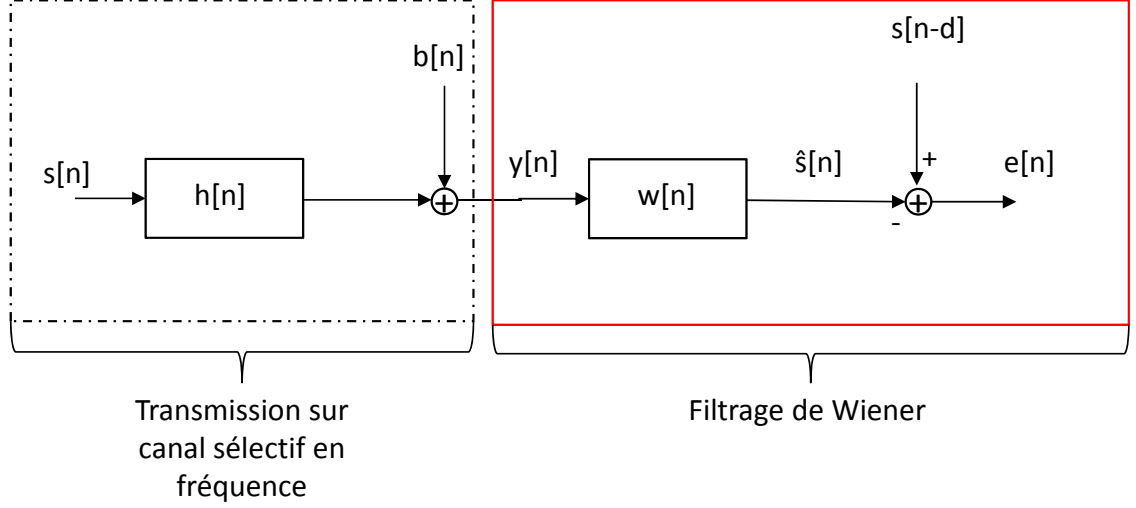


FIGURE 2.3 – Schéma de principe de l'égalisation au sens de Wiener

Une autre approche pour l'égalisation linéaire des canaux sélectifs en fréquences consiste à considérer comme critère d'optimisation la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQMM), *minimum mean square error (MMSE)*. Comparé au cas d'un critère ZF, le critère MMSE prend en compte ici le bruit additif et la réduction de l'interférence entre symboles qui sont les deux principaux termes de perturbation du signal reçu. Contrairement au cas de l'égaliseur ZF qui ne gère que l'interférence entre symboles, l'égaliseur MMSE cherche un compromis entre réduction des interférences entre symboles et amplification du bruit.

Le principe est alors le suivant (voir schéma Fig. 2.3) :

Définition 1 : *Filtrage de Wiener appliqué à l'égalisation*

Trouver le filtre optimal $w_{opt}(z)$ qui minimise la fonction de coût

$$J_w = \mathbb{E}(|e[n]|^2), \quad e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d], \quad s[n] = w * y[n]$$

2.3.1 Principe d'orthogonalité

Sans contrainte sur la structure de $w[n]$, le critère à optimiser peut s'écrire

$$J_w = \mathbb{E}(|e[n]|^2) \tag{2.5}$$

$$= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k]y[n-k] - s[n-d] \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w^*[k]y^*[n-k] - s^*[n-d] \right) \right) \tag{2.6}$$

Le filtre optimum s'obtient en recherchant les points stationnaires de la fonction J_w vue comme une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{R} et dont on peut montrer dans le cas à

dimension finie que c'est une fonction quadratique de \mathbf{w} . En appliquant les règles de différenciation dans le cas complexe, on obtient l'expression suivante

$$\frac{\partial J}{\partial w^*[p]} = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k] y[n-k] \right) y^*[n-p] \right) \quad (2.7)$$

$$= \mathbb{E}(e[n] y^*[n-p]) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

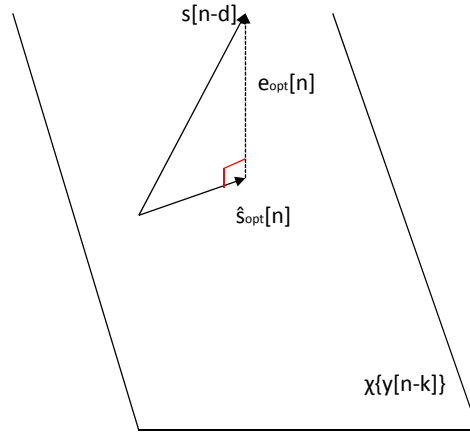
On obtient ainsi la règle dite du principe d'orthogonalité, l'erreur étant dans ce cas orthogonale aux observations si on interprète la covariance comme un produit scalaire.

Définition 2 : Principe d'orthogonalité

$$\text{CNS : } \mathbb{E}(e_{\text{opt}}[n] y[n-k]^*) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Propriétés 1 : Interprétation géométrique

$\mathbb{E}(XY^*) = \langle X, Y \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ si les variables sont centrées (espace des variables aléatoires de variance finie). L'erreur optimale est donc obtenue si elle est orthogonale à l'espace des observations (meilleure estimation obtenue). C'est donc une sorte d'équivalent du théorème de Pythagore.



Nous avons donc à résoudre

$$\mathbb{E}(e[n] y^*[n-p]) = 0, \quad \forall p \quad (2.9)$$

ce qui donne en considérant $\hat{s}[n] = \sum_k w[k] y[n-k]$ et $e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d]$,

$$\sum_k w[k] \mathbb{E}(y[n-k] y^*[n-p]) = \mathbb{E}(s[n-d] y^*[n-p]) \quad \forall p \quad (2.10)$$

On obtient alors un système linéaire, appelé *équations normales* donné par

$$w[p] * \gamma_y[p] = \gamma_{sy}[p - d], \quad \forall p \quad (2.11)$$

Dans le domaine en \mathcal{Z} , ceci à équivalent à

$$w(z) = \frac{\bar{\gamma}_{sy}(z)z^{-d}}{\bar{\gamma}_y(z)}$$

Dans le domaine de Fourier, on a également

$$\overset{\circ}{w}(\nu) = \frac{\overset{\circ}{\gamma}_{sy}(\nu)e^{-i2\pi\nu d}}{\overset{\circ}{\gamma}_y(\nu)}$$

A partir des équations précédentes, on peut donner la propriété remarquable suivante qui illustre bien le principe d'orthogonalité vu précédemment. Considérons l'autocorrélation du processus d'erreur $\{e[n]\}$ dont l'expression est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma_e[p] &= \mathbb{E}(e[n]e^*[n - p]) \\ &= \mathbb{E}(e[n](\hat{s}[n - p] - s[n - d - p])^*) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$= \gamma_{e\hat{s}}[p] - \gamma_{es}[p + d] \quad (2.13)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \gamma_{e\hat{s}}[p] &= \sum_k w^*[k] \underbrace{\mathbb{E}(e[n]y^*[n - p - k])}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci signifie bien que l'erreur est orthogonale au signal estimé/prédit \hat{s} . On en déduit que

$$\gamma_e[p] = -\gamma_{es}[p + d] = \gamma_s[p] - \gamma_{\hat{s}s}[p + d],$$

en utilisant le fait que $e[n] = \hat{s}[n] - s[n - d]$ et dont on détaillera ci-après l'expression.

On peut cependant d'ores et déjà donner la variance de l'erreur comme

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \gamma_e[0] \\ &= \gamma_s[0] - \gamma_{\hat{s}s}[d] \\ &= \sigma_s^2 - \gamma_{\hat{s}s}[d] \end{aligned}$$

Propriétés 2 : Résolution du problème de Wiener**1. Domaine temporel :**

$$w[p] * \gamma_y[p] = \gamma_{sy}[p - d], \forall p$$

2. Domaine en \mathcal{Z} :

$$w(z) = \frac{\bar{\gamma}_{sy}(z)z^{-d}}{\bar{\gamma}_y(z)}$$

3. Domaine fréquentiel :

$$\overset{\circ}{w}(\nu) = \frac{\overset{\circ}{\gamma}_{sy}(\nu)}{\overset{\circ}{\gamma}_y(\nu)} e^{-i2\pi\nu d}$$

2.3.2 Egaliseur sans contrainte

Dans le cadre de l'égaliseur sans contrainte, le filtre est un filtre IIR sans contrainte (infini "à gauche" et "à droite"). Il suffit maintenant de calculer les termes intervenant dans les équations normales générales de la formulation du problème d'estimation de Wiener en explicitant le modèle d'observation lié à la problématique d'égalisation. Dans notre cas, nous avons comme modèle d'observation

$$y[n] = \sum_k h[k]s[n - k] + b[n].$$

Expressions du filtre sans contrainte

Par application directe des formules de filtrage d'un processus aléatoire (centré) stationnaire au sens large (stationnaire à l'ordre 1 et 2), les processus de bruit et du signal étant mutuellement stationnaires et indépendants (décorrélés suffit), il vient

$$\gamma_y[p] = h[p] * h^*[-p] * \gamma_s[p] + \gamma_b[p] = \gamma_h[p] * \gamma_s[p] + \gamma_b[p]$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_h[p] &= h[p] * \check{h}(p) \\ \check{h}(p) &= h^*[-p]. \end{aligned}$$

Ici, $\check{h}(p)$ s'interprète comme le filtre numérique adapté à $h[n]$ et $\gamma_h[p] = \sum_k h[k]h^*[k-p]$ est ce que l'on appelle l'autocorrelation déterministe associée à la séquence $\{h[n]\}$. On en déduit facilement que dans le domaine en \mathcal{Z} , on obtient

$$\gamma_y(z) = \bar{h}(z)\bar{h}^*(z^{-1})\gamma_s(z) + \gamma_b(z).$$

Par souci de notation simplifiée, on adopte la définition $\bar{h}^*(z) \triangleq \sum_k h^*[k]z^{-k}$.¹

En remarquant que $\gamma_s(z) = \sigma_s^2$ et $\gamma_b(z) = \sigma_b^2$, on obtient au final

$$\gamma_y(z) = \sigma_s^2 \bar{h}(z)\bar{h}^*(z^{-1})\gamma_s(z) + \sigma_b^2.$$

1. En théorie, si on souhaite exprimer $\gamma_y(z)$ en fonction de la conjuguée de la transformée en \mathcal{Z} de $\{h[n]\}$, on aurait formellement $\gamma_y(z) = \bar{h}(z)\bar{h}^*(1/z^*)\gamma_s(z) + \gamma_b(z)$.

De même, en remarquant que par symétrie hermitienne $\gamma_{sy}[k] = \gamma_{ys}^*[-k]$ et $\gamma_{ys}[k] = h[k] * \gamma_s[k] = \sigma_s^2 h[k]$,

$$\gamma_{sy}(z) = \gamma_{ys}^*(z^{-1}) = \sigma_s^2 \bar{h}^*(z^{-1})$$

Au final, nous obtenons

$$\bar{w}_\infty(z) = \frac{\sigma_s^2 z^{-d} \bar{h}^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1}) + \sigma_b^2} \quad (2.14)$$

A fort rapport signal sur bruit (ie $\frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} \rightarrow +\infty$), on obtient alors

$$\bar{w}_\infty(z) \rightarrow \bar{w}_{ZF}(z) = \frac{z^{-d}}{\bar{h}(z)}$$

A contrario, à faible rapport signal sur bruit,

$$\bar{w}_\infty(z) \rightarrow \bar{w}_{MF}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d} \bar{h}^*(z^{-1})$$

On obtient facilement l'expression fréquentielle en posant $z = e^{j2\pi\nu}$, les résultats pouvant alors se résumer comme suit :

Propriétés 3 : Expression du filtre de Wiener non contraint

1. **Domaine en \mathcal{Z} :**

$$\bar{w}_\infty(z) = \frac{\sigma_s^2 z^{-d} \bar{h}^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1}) + \sigma_b^2}$$

$$\text{avec } \bar{h}^*(z) = \sum_n h^*(n) z^{-n}$$

2. **Domaine fréquentiel :**

$$\overset{\circ}{w}_\infty(\nu) = e^{-j2\pi\nu d} \frac{\sigma_s^2 \overset{\circ}{h}^*(\nu)}{\sigma_s^2 |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2 + \sigma_b^2}$$

3. **Equivalence à fort SNR avec le filtre ZF :**

$$\bar{w}_\infty(z) \approx w_{ZF}(z)$$

4. **Equivalence à faible SNR avec le filtre adapté :**

$$\bar{w}_\infty(z) \approx \bar{w}_{MF}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d} \bar{h}^*(z^{-1})$$

Analyse de performance

Nous allons nous intéresser par la suite à l'analyse des performances en calculant le rapport signal sur bruit résultant. Sans perte de généralité, on considérera dans le cas

sans contrainte que le délai est nul ($d = 0$), ce dernier n'influant pas les performances du filtre égaliseur sans contrainte, mais alourdissant les dérivations.

En rappelant que $\gamma_e[p] = \gamma_s[p] - \gamma_{ss}[p + d]$, il vient facilement que pour $d = 0$

$$\gamma_e[p] = \sigma_s^2 \delta[p] - (w * h * \gamma_s)[p]$$

Dans le domaine en \mathcal{Z} , on trouve

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_e(z) &= \sigma_s^2 - \bar{w}(z) \bar{h}(z) \bar{\gamma}_s(z) \\ &= \sigma_s^2 - \frac{[\sigma_s^2]^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1}) + \sigma_b^2} \\ &= \frac{\sigma_s^2 N_0}{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1}) + N_0} \end{aligned}$$

ou de manière équivalent dans le domaine de Fourier

$$\overset{\circ}{\gamma}_e(\nu) = \frac{\sigma_s^2 N_0}{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2 + N_0}$$

On obtient alors la variance d'erreur suivante

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \int_{[1]} \overset{\circ}{\gamma}_e(\nu) d\nu \\ &= \int_{[1]} \frac{\sigma_s^2 N_0}{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2 + N_0} d\nu \end{aligned}$$

On peut à partir de cette expression exprimer le rapport signal-à-bruit **en sortie de filtre égaliseur**. Notons $\bar{h}_T(z) = \bar{w}(z) \bar{h}(z)$, le transfert totale associé à la concaténation des filtres numériques du canal discret équivalent et du filtre égaliseur. Le signal en sortie d'égaliseur peut être interprété comme

$$\begin{aligned} \hat{s}[n] &= w[n] * h[n] * s[n - d] + w[n] * b[n] \\ &= h_T[n] * s[n] + w[n] * b[n] \\ &= h_T[0]s[n] + \underbrace{\sum_{k \neq 0} h_T[k]s[n - k]}_{\text{terme d'IES résiduel}} + \underbrace{w[n] * b[n]}_{\text{bruit corrélé } b'[n]} = h_T[0]s[n] + e'[n] \end{aligned}$$

où $e'[n]$ est un terme de bruit plus interférences entre symboles résiduelles. Ce terme ne contient pas la contribution du symbole d'intérêt $s[n]$ et il est indépendant de ce dernier. On voit également que l'estimateur MMSE introduit un biais égale à $h_T[0]$. On a donc avant décision un modèle du type

$$\hat{x}[n] = \alpha s[n] + e'[n].$$

où $\alpha = \mathbb{E}(\hat{x}[n]|x[n]) = h_T[0]$ est le biais du modèle. On définit alors les deux types de quantités pour le rapport signal à bruit. On définit le rapport signal sur bruit lié à une estimation biaisée sur le modèle $\hat{s}[n] = s[n] + e[n]$ comme étant

$$\text{SNR}_{\text{biased}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_e^2}.$$

D'après l'expression de σ_e^2 calculée précédemment, on obtient

$$\text{SNR}_{\text{biased}} = \mathcal{H}\{\text{SNR}(\nu) + 1\}.$$

Le rapport signal sur bruit après égalisation qui prend en compte le biais est donné quant à lui par

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \frac{\alpha^2 \sigma_s^2}{\sigma_{e'}^2} = \frac{h_T[0]^2 \sigma_s^2}{\sigma_{e'}^2}.$$

On va maintenant déterminer ces termes et analyser leur comportement. En remarquant que, par définition, $\hat{s}[n] = s[n] + e[n]$, on en déduit par identification que

$$\hat{s}[n] = h_T[0]s[n] + \underbrace{e[n] + (1 - h_T[0])s[n]}_{e'[n]}$$

Comme

$$\begin{aligned} \bar{h}_T(z) &= \frac{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 \bar{h}(z) \bar{h}^*(z^{-1}) + \sigma_b^2} \\ &= 1 - \frac{\gamma_e(z)}{\sigma_s^2}, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} h_T[0] &= 1 - \frac{1}{\sigma_s^2} \int_{[1]} \frac{\sigma_s^2 N_0}{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2 + N_0} d\nu \\ &= \int_{[1]} \frac{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2}{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2 + N_0} d\nu > 0 \\ &= \int_{[1]} \frac{\text{SNR}(\nu)}{\text{SNR}(\nu) + 1} d\nu \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$= 1 - \sigma_e^2 / \sigma_s^2 < 1 \tag{2.16}$$

On notera également que $h_T[0]$ est réel et $0 < h_T[0] < 1$. De plus, une analyse à faible rapport signal à bruit, montre que $h_T[0] \rightarrow 0$, alors que à fort rapport signal sur bruit celui-ci tend vers 1. On a donc toujours un biais $\alpha < 1$. La dernière expression nous montre que

$$\text{SNR}_{\text{biased}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Le calcul directe de $\sigma_{e'}^2$ nous donne

$$\begin{aligned} \sigma_{e'}^2 &= \mathbb{E}(|e'[n]|^2) \\ &= (1 - h_T[0])^2 \sigma_s^2 + 2 * (1 - h_T[0]) \gamma_{ed}[0] + \sigma_e^2 \\ &= (1 - h_T[0])^2 \sigma_s^2 - 2 * (1 - h_T[0]) \sigma_e^2 + \sigma_e^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \frac{h_T[0]^2}{(1 - h_T[0])^2 - 2(1 - h_T[0]) + (1 - h_T[0])} \tag{2.17}$$

$$= \frac{h_T[0]}{(1 - h_T[0])} \tag{2.18}$$

$$= \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \tag{2.19}$$

On en déduit le lien

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \text{SNR}_{\text{biased}} - 1 = \mathcal{H}\{\text{SNR}(\nu) + 1\} - 1.$$

Propriétés 4 : Performance filtre de Wiener non contraint

1. **Biais sur l'estimateur MMSE :**

$$\alpha = \int_{[1]} \frac{\text{SNR}(\nu)}{\text{SNR}(\nu) + 1} d\nu$$

$$\text{SNR}(\nu) = \frac{\sigma_s^2 |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2}{N_0}$$

2. **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé :**

$$\text{SNR}_{\text{biased}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

3. **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé :**

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

4. **Equivalence entre ces deux quantités :**

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \text{SNR}_{\text{biased}} - 1 = \mathcal{H}\{\text{SNR}(\nu) + 1\} - 1.$$

5. **Relation d'ordre avec l'égaliseur ZF :**

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} > \text{SNR}_{\text{ZF}}$$

2.3.3 Egaliseur RIF de Wiener

Dans le cas où $w[n]$ est un filtre de taille N , le problème s'écrit alors

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_{n-k} \text{ et } \mathbb{E}(e_{\text{opt}}[n] y[n-p]^*) = 0, \forall p \in [0, N-1]$$

Par rapport à la section précédente, on a donc un nombre N d'équations qui permettent de déterminer $w[n]$. En développant les expressions dans le domaine temporel comme précédemment, on obtient alors le jeu d'équations normales

$$w * \gamma_y[p] = \gamma_{sy}[p-d], \forall p \in [0, \dots, N-1]$$

Ainsi, en prenant une écriture vectorielle, l'expression précédente peut alors s'écrire

$$[\gamma_y[p] \gamma_y[p-1] \dots \gamma_y[p-N+1]] \mathbf{w} = \gamma_{sy}[p-d], \forall p \in [0, \dots, N-1]$$

avec

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[N-1] \end{pmatrix}$$

En regroupant les N équations pour $p \in [0, \dots, N-1]$, il vient alors

$$\begin{pmatrix} \gamma_Y[0] & \gamma_Y[-1] & \cdots & \gamma_Y[-N+1] \\ \gamma_Y[1] & \gamma_Y[0] & \cdots & \gamma_Y[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_Y[N-1] & \gamma_Y[N-2] & \cdots & \gamma_Y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{sy}[-d] \\ \gamma_{sy}[1-d] \\ \vdots \\ \gamma_{sy}[N-1-d] \end{pmatrix}$$

En posant

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \gamma_Y[0] & \gamma_Y[-1] & \cdots & \gamma_Y[-N+1] \\ \gamma_Y[1] & \gamma_Y[0] & \cdots & \gamma_Y[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_Y[N-1] & \gamma_Y[N-2] & \cdots & \gamma_Y[0] \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{sy} = \begin{pmatrix} \gamma_{sy}[-d] \\ \gamma_{sy}[1-d] \\ \vdots \\ \gamma_{sy}[N-1-d] \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$\mathbf{R}_y \mathbf{w} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0 \dots N-1}] = \Gamma_{sy}$$

L'expression détaillée en fonction des paramètres du modèle nous permet alors de calculer *analytiquement* le filtre \mathbf{w} . En adoptant les notations suivantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n &= [y[n] \dots y[n-N+1]]^\top, \\ \mathbf{B}_n &= [b[n] \dots b[n-N+1]]^\top, \\ \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} h[0] & \dots & h[L-1] & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h[0] & \dots & h[L-1] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h[0] & \dots & h[L-1] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_n &= [s[n] \dots s[n-N-L+2]]^\top, \end{aligned}$$

on obtient l'expression matricielle suivante pour le signal reçu :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H} \mathbf{S}_n + \mathbf{B}_n.$$

En remarquant que $\mathbf{R}_y = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_n^* \mathbf{Y}_n^\top)$ et $\Gamma_{sy} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0 \dots N-1}] = \mathbb{E}(s[n-d] \mathbf{Y}_n^*)$, il vient alors

$$\mathbf{R}_y = \sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N$$

et

$$\Gamma_{sy} = \sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d$$

où

$$\mathbf{1}_d = [0 \dots 0 \underbrace{1}_{\text{position d}} 0 \dots 0]^\top.$$

On en déduit aisément l'expression analytique du filtre

$$\mathbf{w} = \sigma_s^2 (\sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d.$$

A partir de

$$e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d] = \mathbf{w}^\top \mathbf{Y} - s[n-d],$$

l'erreur quadratique moyenne se développe alors comme suit

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= \mathbb{E}(|e[n]|^2) \\ &= \sigma_s^2 + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} - 2\Re(\mathbf{w}^\dagger \Gamma_{sy}) \end{aligned}$$

A l'optimal, on a $\mathbf{R}_y \mathbf{w} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0\dots N-1}] = \Gamma_{sy}$ et donc

$$\begin{aligned} \sigma_{e,\text{opt}}^2 &= \sigma_s^2 - \mathbf{I}_{sy}^\dagger \mathbf{w} = \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \Gamma_{sy} \\ &= \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} = \sigma_s^2 (1 - \underbrace{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\dagger \mathbf{w}}_{IES} - \underbrace{\text{snr}^{-1} \|w\|^2}_{\text{bruit}}) \end{aligned}$$

En utilisant les différentes expressions de w et Γ_{sy} , il vient

$$\sigma_{e,\text{opt}}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \mathbf{1}_d^T \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d \quad (2.20)$$

En notant

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^*,$$

il vient

$$\begin{aligned} \sigma_{e,\text{opt}}^2 &= \sigma_x^2 (1 - \mathbf{1}_d^T \mathbf{P} \mathbf{1}_d) \\ &= \sigma_x^2 (1 - \mathbf{p}_{d,d}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

On peut alors montrer que

$$\hat{x}[n] = w[n] * y[n] \quad (2.22)$$

$$= \mathbf{w}^\top \mathbf{Y}_n \quad (2.23)$$

$$= \mathbf{Y}_n^\top \mathbf{w} \quad (2.24)$$

$$= \mathbf{S}_n^\top \mathbf{H}^\top (\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d + \mathbf{B}_n^\top \mathbf{w} \quad (2.25)$$

$$= \alpha s[n-d] + s_{\text{IES}}[n] + b_f[n] \quad (2.26)$$

avec

$$\alpha = \mathbf{p}_{d,d}$$

et

$$s_{\text{IES}}[n] = \sum_{k=0: k \neq d}^{N-1} \mathbf{p}_{k,d} s[n-k]$$

Comme dans le cas non contraint, on peut alors donner le rapport signal sur bruit biaisé comme étant

$$\text{SNR}_{\text{FIR,baised}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

De même, on aura comme rapport signal sur bruit non biaisé

$$\text{SNR}_{\text{FIR,unbiased}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \text{SNR}_{\text{FIR,baised}} - 1.$$

On en déduit que les relations à taille finie sont identiques à celles du cas non contraint.

Propriétés 5 : Filtre de Wiener RIF

1. **Expression :**

$$\mathbf{w} = \sigma_s^2 (\sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d$$

où

$$\mathbf{1}_d = [0 \cdots 0 \quad \underbrace{1}_{\text{position d}} \quad 0 \cdots 0]^\top$$

2. **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé :** En notant,

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^*,$$

et

$$\alpha = \mathbf{p}_{d,d},$$

il vient

$$\text{SNR}_{\text{FIR,baised}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

3. **Rapport signal sur bruit, estimateur non biaisé :**

$$\text{SNR}_{\text{FIR,unbiased}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \text{SNR}_{\text{FIR,baised}} - 1.$$

4. **Equivalence à fort SNR avec le filtre ZF :** En utilisant associés au cas Wiener RIF, il vient

$$\mathbf{w}_\infty \approx \mathbf{w}_{\text{ZF-LS}} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d.$$

5. **Equivalence à faible SNR avec le filtre adapté :**

$$\bar{w}_\infty(z) \approx \bar{w}_{\text{MF}}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d} \bar{h}^*(z^{-1})$$

Chapitre 3

Egalisation non linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons des structures d'égalisation non linéaires permettant de pallier aux faibles performances des égaliseurs linéaires en présence de canaux très sélectifs. L'amélioration des performances se fera évidemment au prix d'un accroissement de la complexité.

3.1 Maximum de Vraisemblance

On va maintenant dériver le détecteur optimal au sens du maximum de vraisemblance.

3.1.1 Modèle discret équivalent bande de base

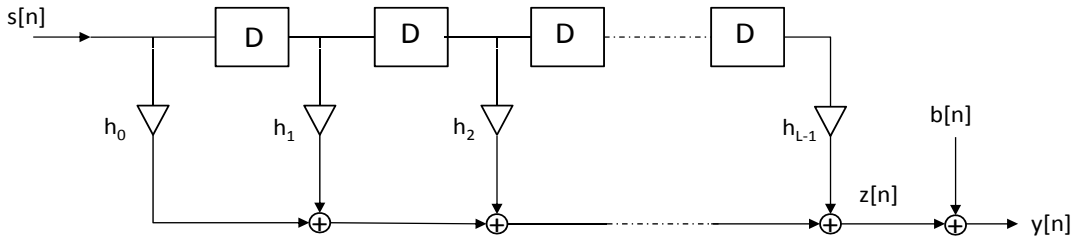


FIGURE 3.1 – Modèle de filtrage

Le modèle équivalent bande de base que l'on considérera est le suivant :

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n] \\
 &= \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k] s[n-k] + b[n]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 &= h_0 s[n] + \underbrace{\sum_{k=1}^{L_h-1} h[k] s[n-k]}_{\text{IES}} + b[n]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Modèle à états finis

Le modèle discret équivalent est donné par

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n] \\
 &= \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k] s[n-k] + b[n]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 &= h_0 s[n] + \underbrace{\sum_{k=1}^{L_h-1} h[k] s[n-k]}_{\text{IES}} + b[n]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On peut alors représenter le signal suivant le schéma donné figure 3.1. On voit alors que le canal est bien représenté par une ligne à retards (registre) et peut donc se voir comme un code convolutif défini sur \mathbb{C} de mémoire $L - 1$ de rendement $R_c = 1$. C'est cette analogie qui sera exploitée pour bien comprendre le modèle à état sous-jacent.

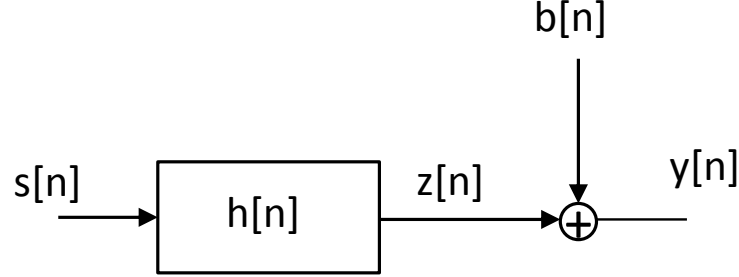


FIGURE 3.2 – Modèle de filtrage

Le modèle à état peut se mettre en exergue en remarquant que l'on peut mettre l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y[n] &= z[n] + b[n] \\ &= \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} s_n \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} + b[n] \end{aligned}$$

σ_n représente l'état "interne" (la mémoire du canal) de dimension $M^{(L-1)}$. On peut alors donner une représentation du canal par sa machine à états finis associée. Comme pour un code convolutif, de cette machine à état, on peut déduire une représentation en treillis en incluant la dimension temporelle. Pour décrire complètement le treillis associé au canal, on doit dériver la représentation fonctionnelle suivante :

- Equation d'évolution : passage d'un état à σ_{n-1} à σ_n .

$$\sigma_n = F_1(\sigma_{n-1}, s_n)$$

- Equation d'observation : génération des sorties observables $z_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}$.

$$z_n = F_2(\sigma_{n-1}, s_n) = F_3(\sigma_{n-1}, \sigma_n)$$

Ainsi, pour une représentation en treillis chaque état (représenté par un noeud) du treillis est une réalisation possible de $\sigma_n \in \Sigma$. Les transitions (associées aux branches) entre ses états sont régies par l'équation d'évolution et les labels associés à ces branches (ie. les symboles émis et symboles reçus) sont donnés par l'équation d'observation. L'ensemble du treillis est périodique dont une période est complètement déterminée par les transitions occurant sur une section de treillis. On donne ci-après un exemple de treillis pour un canal de mémoire 2 ($L = 3$) et une modulation BPSK. Dans ce cadre σ_n représente un vecteur de taille 2^2 .

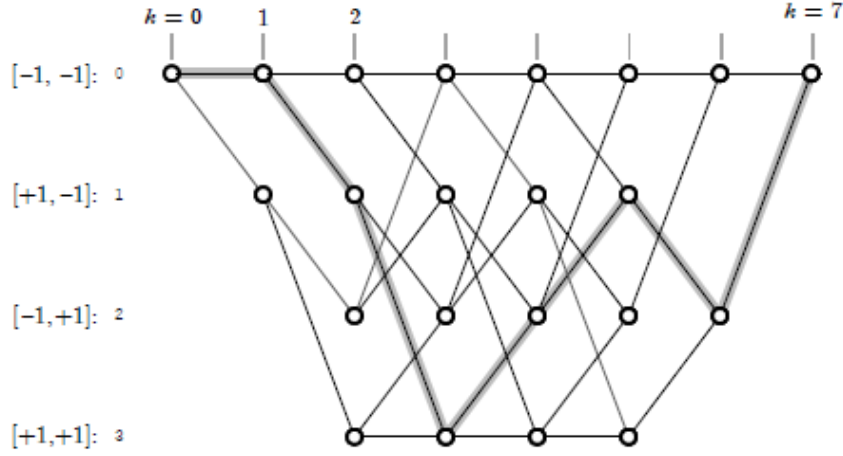


FIGURE 3.3 – Exemple de treillis.

3.1.3 Décodage d'une Séquence par Maximum de Vraisemblance (MLSE)

Définition 3 : *Décodage d'une Séquence par Maximum de Vraisemblance*

La détection par maximum de vraisemblance consiste à rechercher la séquence de symbole émis vérifiant :

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}') \quad (3.5)$$

où

- $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \dots s_N]$,
- $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]$,
- $y[n] \sim \mathcal{N}(\sum_k h_k s_{n-k}, N_0)$

Dans le contexte d'une transmission sur un canal sélectif en fréquence avec un bruit additif Gaussien en réception, le critère se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \arg \max_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}') \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}'} \prod_n p(y_n|\mathbf{s}') \\ &= \arg \min_{\{\mathbf{s}_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}|^2 \end{aligned}$$

Ainsi la séquence optimale au sens du maximum de vraisemblance est celle qui minimise la distance euclidienne entre la séquence émise et la séquence reçue. Une ap-

proche "brute force" par énumération de toutes les séquences possibles nous donne une complexité de l'ordre de $M^N = 2^{\log_2(M)N}$, ie exponentielle en l'ordre de la modulation et de la longueur de la séquence. L'utilisation de la structure markovienne du canal va nous permettre de réaliser un décodage MLSE avec une complexité raisonnable. Ainsi l'exploitation de la structure markovienne du canal permet d'avoir une énumération efficace des séquences candidates à la maximisation du critère MLSE. Elle se base en partie sur les propriétés suivantes :

Propriétés 6 : Propriétés

- Chaque chemin sur le treillis représente une séquence de symboles émis possibles :

séquence MLSE \Leftrightarrow chemin le plus probable, ie
de plus petite distance euclidienne
cumulée sur le treillis

- Correspondance espace des états et des séquences :

$\{s[n]|n = 1 \cdots N\} \iff \{\sigma[n]|n = 0 \cdots N\}$
Espace des séquences Espaces des Etats

En utilisant l'équivalence précédente, on peut alors par un simple jeu de réécriture instancier le problème d'optimisation initial dans le domaine des *d'états*.

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \arg \min_{\{s_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}|^2 \\ &\Downarrow \\ \hat{s} &= \arg \min_{\{\sigma_n\}} \sum_n |y_n - z_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)|^2 \end{aligned}$$

On peut alors dériver l'algorithme de Viterbi qui réalise un calcul efficace de la séquence MLSE à l'aide du treillis. La dérivation se fait par récurrence en analysant une métrique cumulée représentant la distance euclidienne entre la séquence reçue et celle équivalente à la séquence $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n\}$. En effet, pour une séquence d'états se terminant à la section de treillis n et dans l'état $\sigma_n(s)$, on peut écrire une métrique cumulée notée $\Lambda_n(\sigma_n)$

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\sigma_n) &= \min_{\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n\}} \sum_{k=0}^n |y_k - z_k(\sigma_{k-1}, \sigma_k)|^2 \\ &= \min_{\{\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n\}} \left\{ \min_{\{\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}\}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |y_k - z_k|^2 \right\} + |y_n - z_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)|^2 \right\} \\ &= \min_{\underbrace{\{\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n\}}_{\text{transitions possibles}}} \{ \Lambda_{n-1}(\sigma_{n-1}) + \lambda_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n) \} \end{aligned}$$

De cette récursion, on peut alors dériver l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : *Algorithme de Viterbi*

- Pour chaque section n ($n = 1 \cdots N$), pour chaque état $\sigma_n = s$ ($s = 0 \cdots |\mathcal{S}|$) :

1. calculer Λ_n tel que

$$\Lambda_n(\sigma_n) = \min_{\{\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n\}} \{\Lambda_{n-1}(\sigma_{n-1}) + \lambda_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)\}$$

2. stocker l'état précédent σ_{n-1} : pour chaque état σ_n , on peut donc associer une séquence *survivante* $\{\sigma_0, \cdots, \sigma_n\}$ de distance euclidienne cumulée associée $\Lambda_n(\sigma_n)$

- A la fin du treillis, il ne reste plus que $|\mathcal{S}|$ chemins possibles, après avoir sélectionner le plus probable, par parcours arrière des états du treillis, on obtient

$$\hat{\mathbf{s}} = \left\{ \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}, \sigma_N \mid \underset{\sigma_N}{\operatorname{argmin}} \{ \Lambda_N(\sigma_N) \} \right\}$$

3.2 Egaliseur à retour de décision

3.2.1 Structure et principe

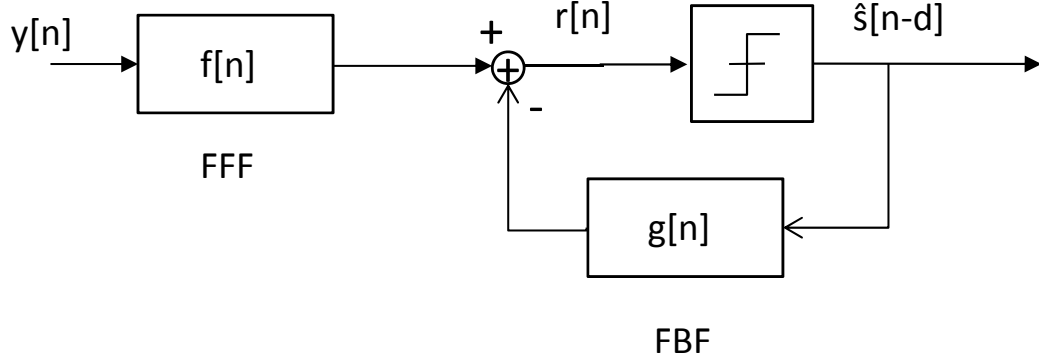


FIGURE 3.4 – Schéma de principe du DFE

Une famille d'égaliseurs très répandue est celle des égaliseurs non linéaires à retour de décisions (nommés en anglais égaliseur DFE pour *Decision Feedback Equalizers*) dont le schéma de principe est donné figure 3.4. Ces égaliseurs entrent dans la catégorie des égaliseurs de type *data aided*, puisque les décisions sur les symboles passés à la réception vont être mises à profit pour améliorer les performances de détection. Pour cette structure, le problème de design se résume à déterminer les filtres $f[n]$ et $g[n]$. L'aspect non linéaire de ce type de récepteurs est dû à la présence de l'organe de décision dure dans la structure même de l'égaliseur.

3.2.2 Optimisation de la structure DFE

Différentes structures ont été proposées dans la littérature pour les approches de type DFE. Nous présentons ici une approche assez classique afin d'illustrer les problématiques d'optimisation liées à ces structures. Pour cela, nous allons comme souvent (pour ne pas dire toujours) modéliser le signal à la réception en passant par une écriture matricielle des signaux. En suivant les notations de la figure 3.4, on obtient le modèle suivant :

$$r[n] = \mathbf{F}^\top \mathbf{Y}_n - \mathbf{G}^\top \hat{\mathbf{S}}_{n-d-1} = \mathbf{w}^\top \tilde{\mathbf{Y}}_n$$

où $\mathbf{F} = [f_0, \dots, f_{N-1}]^\top$, $\mathbf{G} = [g_1, \dots, g_{M-1}]^\top$, $\mathbf{Y}_n = [y[n], \dots, y[n - N + 1]]^\top$, $\hat{\mathbf{S}}_{n-d-1} = [\hat{s}[n - d - 1], \dots, \hat{s}[n - d - M + 1]]^\top$ et enfin $\tilde{\mathbf{Y}}_n = [\mathbf{Y}_n^\top, -\hat{\mathbf{S}}_{n-d-1}^\top]^\top$.

Dans ce modèle $r[n]$ ne dépend évidemment que des symboles passés $\hat{s}(n - d - k)$. Le vecteur $\tilde{\mathbf{Y}}_n$ est quant à lui interprété comme un vecteur de symboles reçus augmenté des décisions qui viennent d'être prises sur une fenêtre de taille M .

On cherche maintenant à déterminer les filtres RIF $f_{opt}[n]$ et $g_{opt}[n]$ qui minimisent le critère MMSE. Cela revient donc à trouver les filtres optimaux $f_{opt}[n]$ et $g_{opt}[n]$ qui minimisent la fonction de coût

$$J(\mathbf{w}) = \mathbb{E}(|e[n]|^2), \quad e[n] = s[n - d] - r[n].$$

Le problème d'optimisation initial revient donc au problème classique de Wiener consistant à optimiser le filtre \mathbf{w} avec comme vecteur d'observations étendu $\tilde{\mathbf{Y}}_n$. La solution est donc donnée par

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}} \mathbf{w} = \Gamma_{s\tilde{\mathbf{y}}}$$

avec

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{Y}}_n^* \tilde{\mathbf{Y}}_n^\top), \Gamma_{s\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbb{E}(s[n-d] \tilde{\mathbf{Y}}_n^*).$$

Par rapport au cas linéaire, la difficulté vient du fait que $\tilde{\mathbf{Y}}_n$ dépend de $\hat{\mathbf{S}}_{n-d-1}$ dont on connaît difficilement les propriétés statistiques du fait de la non linéarité. Il est donc difficile d'avoir accès aux quantités $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ et $\mathbb{E}(s[n-d] \tilde{\mathbf{Y}}_n^*)$. Pour contourner cette difficulté, on fait alors comme hypothèse de travail que les symboles décidés sont *toujours* corrects, ce qui est bien évidemment faux en pratique. Grâce à cette hypothèse, on a alors

$$\hat{\mathbf{S}}_{n-d-1} = \mathbf{S}_{n-d-1}$$

Dans ce cas, les quantités $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ et $\mathbb{E}(s[n-d] \tilde{\mathbf{Y}}_n^*)$ peuvent être calculer explicitement et on peut donc obtenir un système analytique matriciel à résoudre pour déterminer $f_{\text{opt}}[n]$ et $g_{\text{opt}}[n]$. Ces expressions sont données par

$$\mathbf{f}_{\text{opt}} = \left(\left(\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^\dagger \right) + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_N \right)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d$$

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{f}_{\text{opt}}$$

où

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \mathbf{G}$$

et \mathbf{G} est une matrice dont la première partie est nulle avec $d+1$ ligne et la dernière partie est une matrice identité de taille $M-1$ donnée par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Avantages et inconvénients

- **Avantages** : Bon compromis complexité performances, bien meilleur que les égaliseurs linéaires, mais plus complexe ;
- **Inconvénients** : phénomènes de propagation d'erreurs, erreurs arrivent donc en *burst*

Chapitre 4

Egalisation fréquentielle lineaire en bloc

Dans ce chapitre nous exposons le principe de l'égalisation implémentée dans le domaine fréquentielle. Le principe est fondé sur le fait que l'égalisation temporelle à une complexité qui croît fortement avec le nombre de trajets et la dispersion temporelle. Cela implique que l'on doit considérer des filtres numériques de plus en plus grands.

Notations

On adoptera dans la suite les notations suivantes :

- Transformée de Fourier Discrète, TFD :

$$X[k] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- Transformée de Fourier Discrète Inverse, TFD inverse :

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+i \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- Convolution circulaire :

$$\begin{aligned} TD : \textit{Domaine temporel} \quad y[n] &\triangleq h[n] \circledast x[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n - m \rangle_N], \quad \forall n = 0 : N-1 \end{aligned}$$

$$FD : \textit{Domaine frquentiel} \quad Y[k] = H[k] X[k], \quad \forall k = 0 : N-1$$

4.1 OFDM, un exemple de forme d'onde circulaire

4.1.1 Modélisation récepteur - domaine temporel

Soit un bloc de N symboles modulés noté $X[k] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{C}, \forall k = 0 \dots N-1$. Après passage par le bloc de TFD inverse, on obtient un bloc de symboles

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]), \forall n = 0 \cdots N - 1.$$

Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \cdots \tilde{x}[N + N_{cp} - 1]] = [x[N - N_{cp}] \cdots x[N - 1] | x[0] \cdots x[N - 1]].$$

Après transmission sur le canal sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle $h[n]$, on a

$$y[n] = h[n] * \tilde{x}[n] + b[n].$$

Après retrait du CP, on retrouve bien la convolution circulaire des données avec le canal donnée par

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] + b[n].$$

On supposera $b[n]$ comme un processus Gaussien complexe circulaire de variance σ_b^2

4.1.2 Modélisation récepteur - domaine fréquentiel

La transformée de Fourier discrète transformant tout produit de convolution circulaire en produit terme à terme des TFD, on a $\forall k = 0 \cdots N - 1$

$$Y[k] = TFD(y[n]) = H[k]X[k] + B[k]$$

où $H[k] = TFD(h[n])$ et $B[k] = TFD(b[n])$. Par propriétés de la transformée de Fourier, le bruit est toujours blanc Gaussien, mais $B[k]$ sont des échantillons de bruit complexes toujours centrés et variance $\sigma_B^2 = N\sigma_b^2$ ($\sigma_b^2/2$ par dimension). On voit donc que l'on a "transformé" un canal sélectif en fréquence en canal sélectif en temps/à évanouissements temporels. On a donc translaté le problème de détection du domaine fréquentiel au domaine temporel.

4.1.3 Aspects récepteurs

Pour les systèmes, il est souvent présenté une "égalisation" des canaux avant décision. On "filtre" les données par un filtre "one-tap" (mono coefficient) $W[k]$ chaque sous canaux (ie ; $\forall k = 1 \cdots N - 1$). On obtient alors un symbole estimé donné par

$$\hat{X}[k] = W[k]Y[k] = W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k] = \alpha_k X[k] + B[k]$$

Deux types de critère peuvent alors s'appliquer comme dans le cas temporelle, le critère ZF et MMSE. Les égaliseurs résultants sont alors données par

1. Critère Zero-forcing :

$$W[k] = \frac{1}{H[k]}$$

2. Critère MMSE :

$$W[k] = \frac{\sigma_X^2 H^*[k]}{\sigma_X^2 |H[k]|^2 + \sigma_B^2}$$

Cependant, si on réfléchit bien au modèle discret équivalent obtenu après DFT/FFT au récepteur, le modèle étant un modèle à évanouissements scalaires, cette étape n'est pas "nécessaire" si on considère un système OFDM codé. On peut appliquer les règles de détection classique de détection pour un canal sans mémoire scalaire. La première stratégie de détection qui mène à une décision dure des symboles est donnée par le critère de détection par maximum de vraisemblance. En utilisant le modèle discret équivalent il vient directement

$$\hat{X}[k] = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} P(Y[k]|X[k], H[k]),$$

où, dans le cas Gaussien, on a

$$P(Y[k]|X[k], H[k]) \propto \exp\left(-\frac{\|Y[k] - H[k]X[k]\|^2}{\sigma_B^2}\right)$$

Si on souhaite avoir une information souple au niveau du bit, nous verrons en 3A que l'on peut également appliquer une détection MAP bit pour un schéma codé à bits entrelacés. Si on note les vecteurs binaires $X_b[n] = [X_1[n] \cdots X_m[n]]$ les étiquettes qui servent à "mapper" les bits d'information sur les symboles $X[n] \in \mathcal{X}$, alors on peut définir une quantité appelée LLR, pour log likelihood ratio, qui représente une information de type MAP associée au bit à la position i de l'étiquette $X_b[n]$. Pour des symboles équidistribués, cette quantité est donnée par

$$L(x_i[n]) = \log \left(\frac{P(x_i[n]=0|Y[n])}{P(x_i[n]=1|Y[n])} \right) = \log \left(\frac{\sum_{X[n] \in \mathcal{X}_0^i} P(Y[n]|X[n], H[n])}{\sum_{X[n] \in \mathcal{X}_1^i} P(Y[n]|X[n], H[n])} \right)$$

où \mathcal{X}_0^i (resp. \mathcal{X}_1^i) représente le sous ensemble des symboles de \mathcal{X} ayant une étiquette/un label avec $x_i = 0$ (resp. $x_i = 1$).

4.2 Communications mono-porteuses par bloc :

4.2.1 Principe

On considère le schéma donné par la Figure XXX. Pour ce schéma, on considère une transmission par bloc comme pour un système de type multi-porteuses. A l'émetteur, on considère la transmission d'une trame de N symboles notée $\mathbf{x} = [x_p(0), \dots, x(N-1)]$ où $x(n)$, $n \in \{1 \cdots N\}$, représente le n -ième symbole modulé envoyé sur la trame courante émise tel que $x(n) \in \mathcal{X}$, où $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}$ est un ensemble de symboles d'une constellation M -aire. Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur, on retrouve le vecteur de symboles à émettre

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \cdots \tilde{x}[N + N_{cp} - 1]] = [x[N - N_{cp}] \cdots x[N - 1]|x[0] \cdots x[N - 1]].$$

Après transmission sur le canal sélectif en fréquence $h[n]$, on a

$$y[n] = h[n] * \tilde{x}[n] + b[n]$$

Après retrait du CP, on a alors

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] + b[n].$$

4.2.2 Modèles en réception - FDE

Au récepteur, après TFD, l'étape d'égalisation dans le domaine fréquentiel (FDE, *frequency domain equalization*) consiste à appliquer un filtre $W[k]$, $k = 0 \dots N - 1$ sur chaque sous-bande. On obtient alors le modèle fréquentiel suivant

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \forall k = 0 : N - 1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k]Y[k] \\ &= W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k], \forall k = 0 : M - 1 \end{aligned}$$

Comme pour le cas temporel, différentes stratégies sont possibles pour le filtre $W[k]$, $k = 0 \dots N - 1$:

1. Cas MMSE

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \quad (4.1)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

2. Cas ZF

$$W[k] = \frac{H[k]^*}{|H[k]|^2} \quad (4.4)$$

Ce modèle se transpose en temporel comme suit

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \forall n = 0 : M - 1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \otimes x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \otimes b[n]}_{\text{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_t[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $\tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$.

Si on prend le modèle du signal après égalisation, on aura

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n] + x_i[n] + \hat{b}[n] \quad (4.6)$$

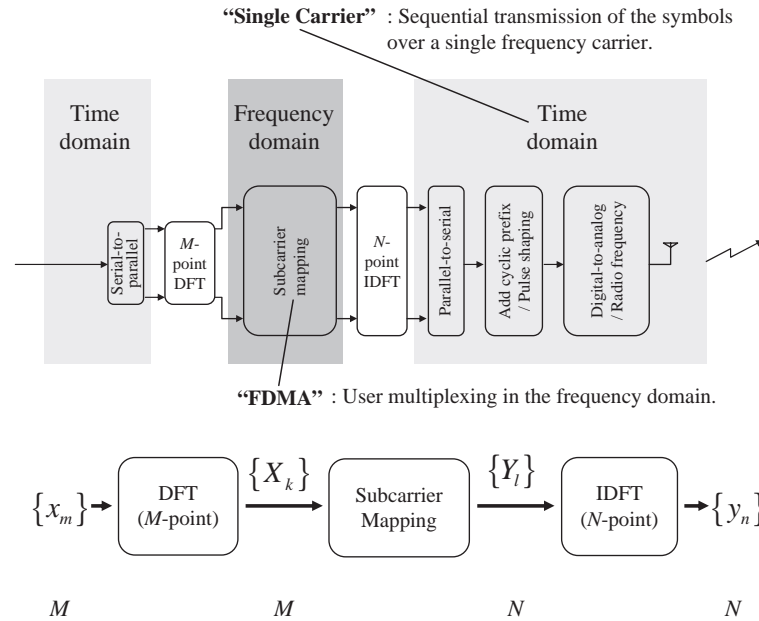
$$= \alpha x[n] + b'[n] \quad (4.7)$$

On pourra donc faire une détection en faisant une approximation Gaussienne sur $b'[n]$ et ainsi appliquer les mêmes détecteurs que le cas OFDM. Reste à déterminer le fameux facteur α , qui est un facteur de biais comme dans le cas des filtres temporels.

4.2.3 SC-FDMA : extension pour l'accès multiple

Principe

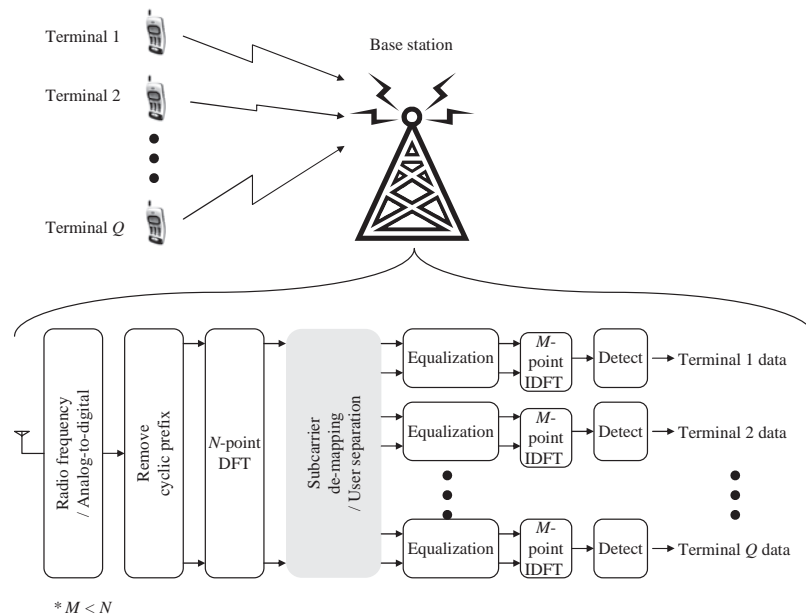
Ce schéma d'égalisation fréquentiel peut être étendu pour le cas de communications mono-utilisateurs. Le Principe générale est donné par les figure suivante.



* M, N : number of data symbols

structure à l'émetteur

Les données de l'utilisateur sont "précodées" par une DFT d'ordre M . Puis les M données utiles fréquentielles de l'utilisateur sont réparties sur les N entrées d'une IDFT d'ordre N avec $M \leq N$. Pour chaque utilisateur, le mapping fréquentielle doit assurer que chaque sortie de DFT de chaque utilisateur est mappé de manière unique une entrée de la N -IDFT et l'on doit également assuré qu'il n'y a aucune collision en tre les utilisateurs (une entrée de la IDFT n'est assignée qu'à un seul utilisateur), assurant par la même un accès fréquentiel orthogonale. Après ajout d'un préfixe cyclique, les données d'un bloc comprenant les données utiles plus les informations redondantes liées au CP sont transmises sur le canal. Au récepteur, on aura l'architecture suivante :



Les données reçues pour un bloc de taille N qui comporte les données de différents utilisateurs sont d'abord translatées dans le domaine fréquentiel par une DFT d'ordre N , puis on réalise une égalisation "par porteuse" en appliquant un filtre "égaliseur" par voie de sortie de DFT. Les sorties sont alors démultiplexées pour récupérer les données afférant à chaque utilisateur appliquant l'opération de démultiplexage inverse à l'opération de multiplexage réalisée à l'émission. Par chaque utilisateur, on peut alors récupérer les données estimées par application d'une IDFT d'ordre M . On peut alors détecter les données en considérant le modèle de réception précédemment décrit et dont les paramètres analytiques seront dérivés dans la section suivante.

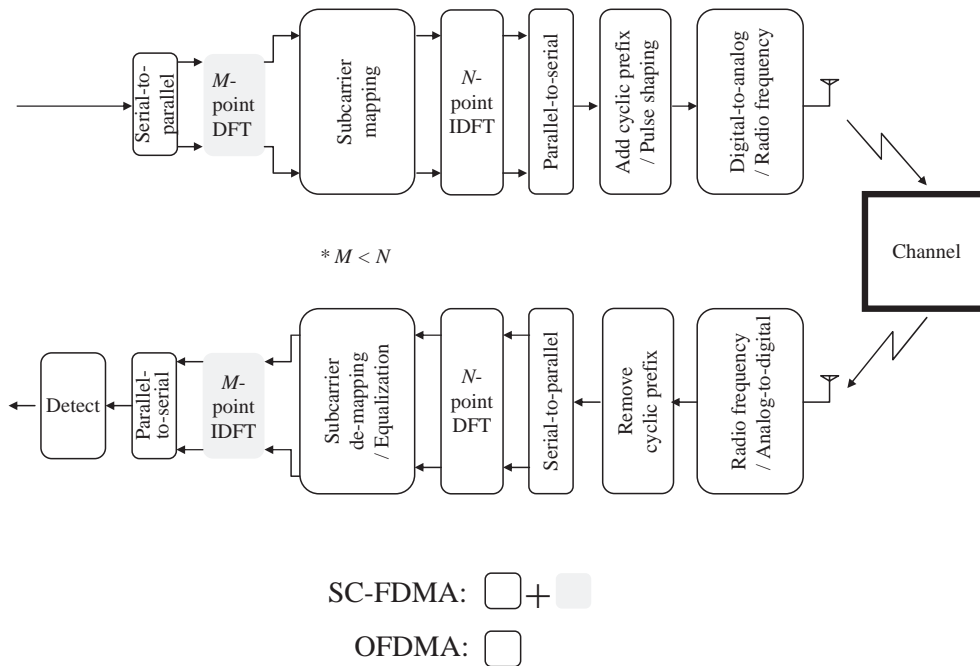
Si on prend le modèle du signal après égalisation, on aura

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n] + x_i[n] + \hat{b}[n] \quad (4.8)$$

$$= \alpha x[n] + b'[n] \quad (4.9)$$

SC-FDMA vs OFDM

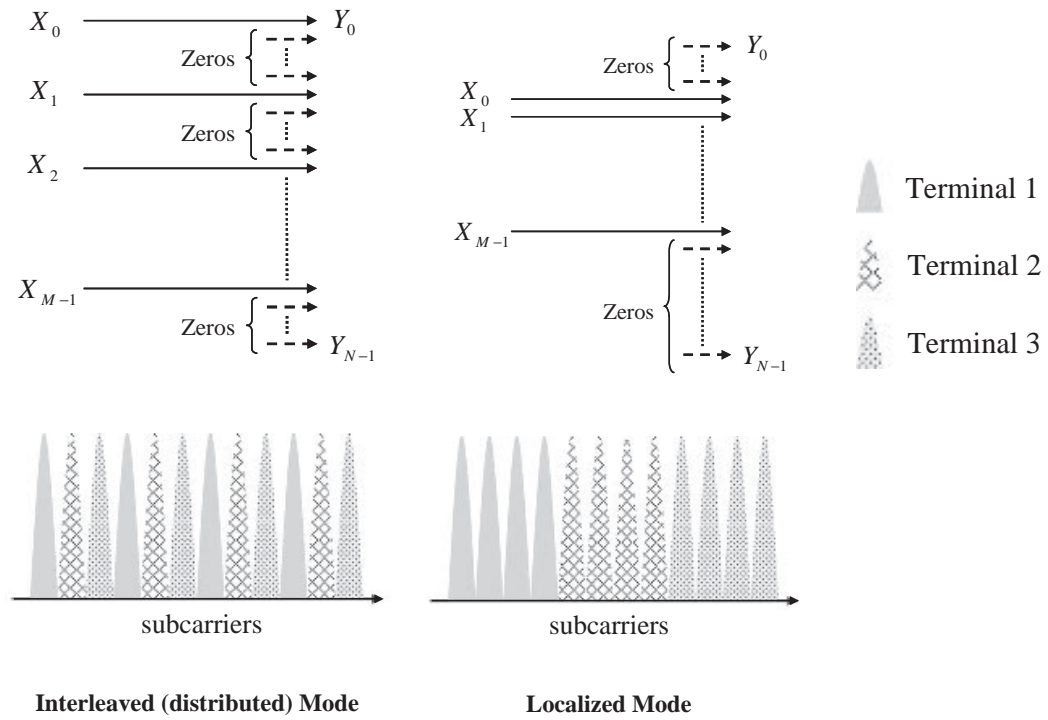
D'un point de vue structurel, la différence avec l'OFDM est donnée de la manière suivante



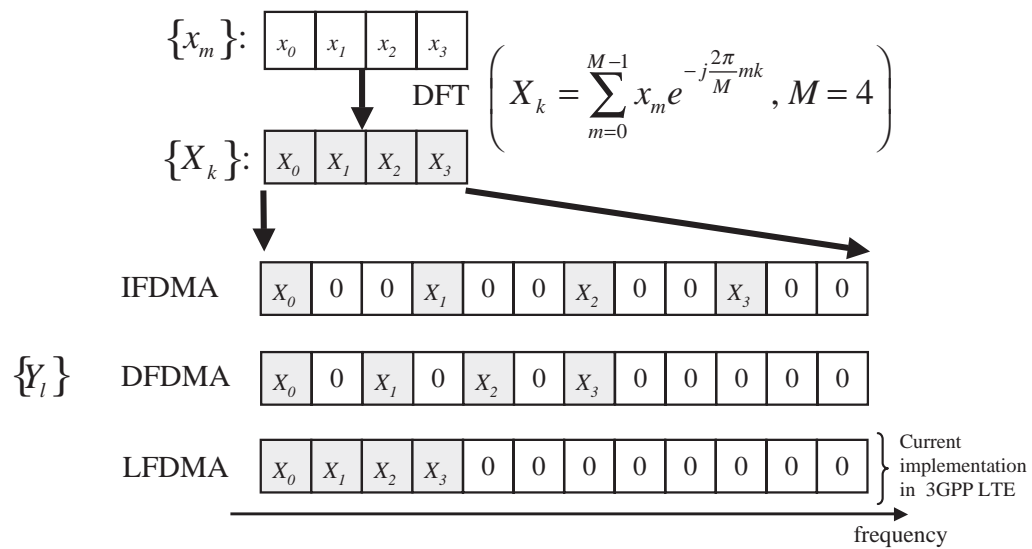
Cette forme d'accès est souvent dénommée "DFT-spreaded OFDM" ou "Precoded OFDM", dans le sens où elle peut être vue comme une forme d'onde OFDM dont les porteuses associées à un utilisateur d'intérêt sont précodées par une DFT. Ce précodage a pour effet de donner au signal montant SC-FDMA les caractéristiques d'une forme d'onde de type mono-porteuse, et donc d'hériter en particulier de ses propriétés de fluctuations d'enveloppes faibles, a contrario de l'OFDM.

Allocation de sous-porteuses

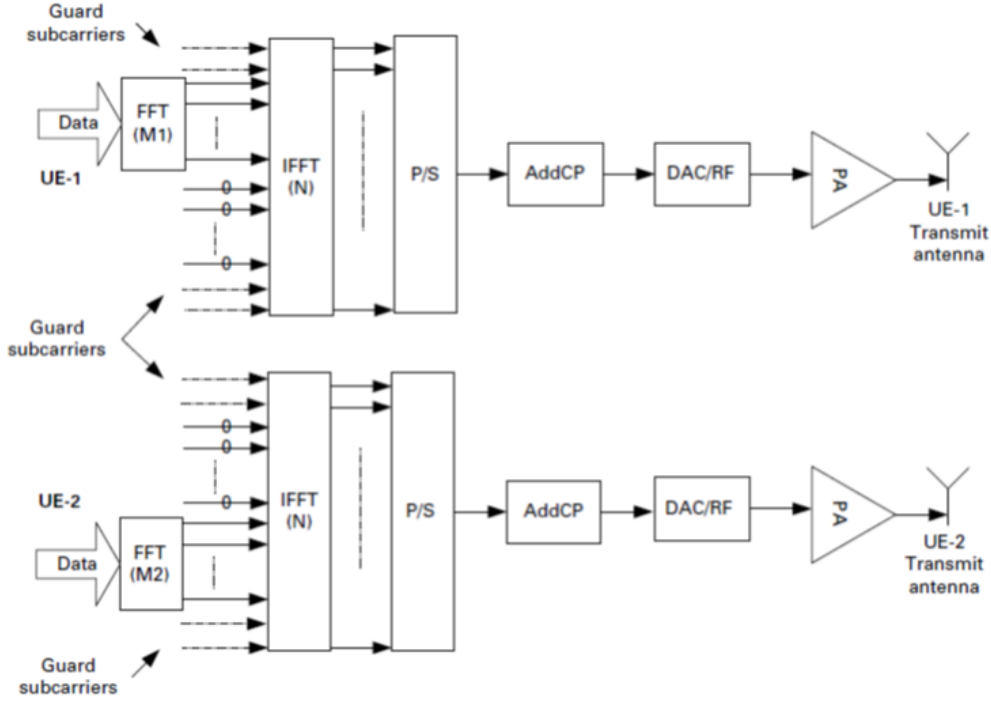
Plusieurs stratégies sont possibles pour allouer la puissance d'un utilisateur sur la bande allouée dans le domaine fréquentielle : on peut considérer soit un mode entrelacé (ou distribué) ou un mode localisé (allocation par bloc de sous-porteuses).



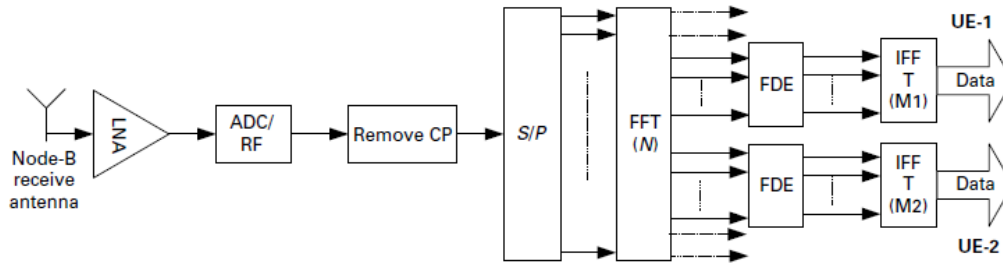
La figure ci-après permet de visualiser les principales stratégies : IFDMA (Interleaved FDMA), DFDMA (Distributed FDMA) et enfin LFDMA (Localized FDMA). Seul le dernier mode a été retenu pour le système LTE (4G) pour des raisons de simplicité de signalisation et de sensibilité à la synchronisation fréquentielle en liaison montante.



Le schéma LFDMA dans le cas de deux utilisateurs peut être explicité comme suit, où l'on remarque l'allocation par bloc des porteuses aux utilisateurs.

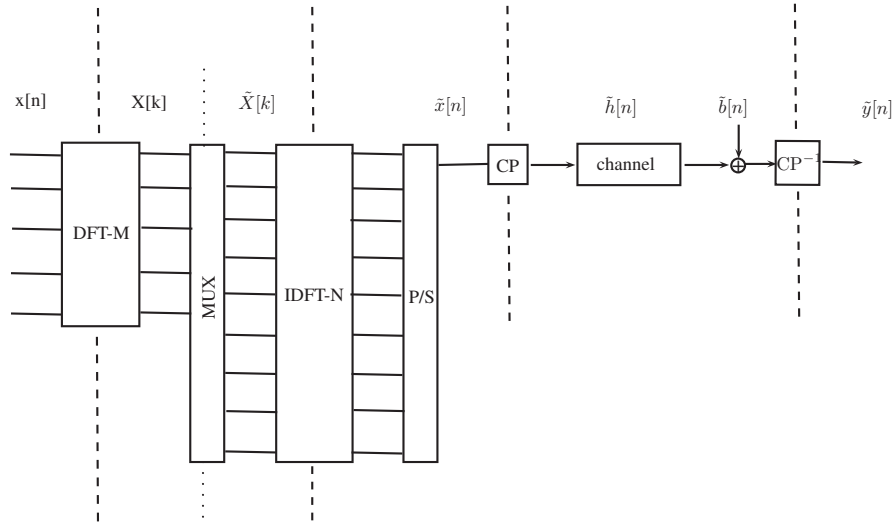


Le récepteur associé peut être visualisé comme suit.

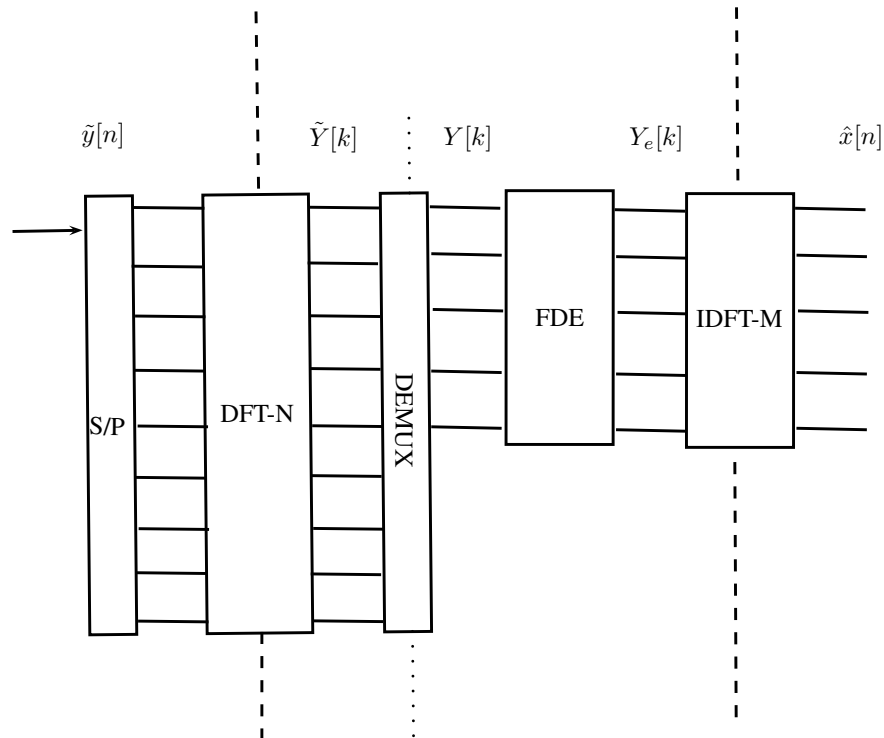


4.3 Analyse de performances

Nous allons maintenant dériver une analyse du rapport signal à bruit en réception et le modèle échantillonné afin d'identifier le biais résultant. Comme le SC-FDE peut être vu comme un système SC-FDMA avec $M = N$, on traitera le cas générale du SC-FDMA. De même la modélisation est indépendante du mapping fréquentiel obtenu, seul le gain sur les porteuses est important, on considérera donc le cas d'un utilisateur dont les porteuses d'intérêt sont M premières porteuses. Pour l'émetteur, on adoptera les conventions et notations selon la figure ci-après.



Pour le récepteur, on adoptera les conventions et notations selon la figure ci-après.



4.3.1 Modèle du signal en réception

En appliquant les différentes définitions dans les domaines temporel et fréquentiel, on peut donner les modèles suivant pour les signaux dans le domaine temporel et fréquentiel :

— **Domaine fréquentiel** :

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \forall k = 0 : N - 1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k]Y[k] \\ &= W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k], \forall k = 0 : M - 1 \end{aligned}$$

— **Domaine temporel** :

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \forall n = 1 : M - 1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \otimes x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \otimes b[n]}_{\text{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_t[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{avec } \tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$$

4.3.2 Variance du bruit en sortie de récepteur

En supposant, les échantillons de bruit indépendant en entrée de DFT, on peut calculer la variance de bruit après filtrage dans les domaines fréquentiel et temporel en utilisant que la DFT est une transformation orthogonale (mais non unitaire) et que par filtrage le bruit reste Gaussien et centré. On peut donc expliciter le terme de bruit et la variance comme suit

— **Domaine temporel** :

$$\hat{b}[n] = TFD^{-1}(W[k]B[k]), \forall n = 0 : M - 1 \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]B[k]e^{-i\frac{2\pi}{M}nk} \quad (4.12)$$

— **Variance du bruit, cas générale** :

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{b}}^2 &\triangleq \mathbb{E}(|\hat{b}[n]|^2) \\ &= \frac{\sigma_B^2}{M} \times \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |W[k]|^2 \\ &= \sigma_{\tilde{b}_M}^2 \sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{b}_M[n] = TFD^{-1}(B[k]) \text{ et } w[n] = TFD^{-1}(W[k])$$

On remarque dès lors que tout est fonction du filtre mis en oeuvre pour l'égalisation fréquentielle

Dans le cas d'un filtre MMSE fréquentiel, on a

$$W_{mmse}[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \quad (4.13)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (4.14)$$

$$\gamma_k = |H[k]|^2 \gamma \quad (4.15)$$

et donc

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma^2 |H[k]|^2}{(\gamma |H[k]|^2 + 1)^2} \quad (4.16)$$

Dans le cas d'un filtre ZF, on

$$W_{ZF}[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2} \quad (4.17)$$

et donc

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{\gamma |H[k]|^2} \quad (4.18)$$

4.3.3 Puissance du terme utile

Le signal en sortie de IDFT est donné par

$$\hat{x}_u[n] = \tilde{w}[0]x[n] = x[n] \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \quad (4.19)$$

On en déduit alors par calcul direct la variance

$$\sigma_{x_u}^2 = \sigma_x^2 \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \right|^2 \quad (4.20)$$

4.3.4 Puissance terme d'interférence entre symboles résiduelle

On peut monrer que la variance de $\hat{x}_i[n]$ est donnée par

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{x_t}^2 - \sigma_{x_u}^2 \quad (4.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{x_t}^2 &= \sigma_x^2 \sum_{m=0}^{M-1} |\tilde{w}[\langle n - m \rangle_M]|^2 \\ &= \sigma_x^2 \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{W}[k]|^2 \\ &= \sigma_x^2 \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |W[k]H[k]|^2 \end{aligned}$$

4.3.5 Rapport signal à bruit en sortie de DFT

On peut alors en déduire le rapport signal à bruit en sortie de DFT dont l'expression générale est donnée par

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\sigma_{x_u}^2}{\sigma_{x_t}^2 - \sigma_{x_u}^2 + \sigma_{\hat{b}}^2} \\ &= \frac{|\alpha|^2}{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} (|H[k]|^2 + \gamma^{-1}) |W[k]|^2 - |\alpha|^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k] H[k]$$

En fonction du filtre considéré on peut alors donner les expressions de SBR suivants :

— Cas MMSE :

$$SNR = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (4.23)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma_k}{\gamma_k + 1}$$

— Cas ZF :

$$SNR = \frac{1}{\beta} \quad (4.24)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{\gamma_k}$$

où pour rappel

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (4.25)$$

$$\gamma_k = |H[k]|^2 \gamma \quad (4.26)$$

Si on prend le modèle du signal après égalisation, on aura bien une xpression du type

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n] + x_i[n] + \hat{b}[n] \quad (4.27)$$

$$= \alpha x[n] + b'[n] \quad (4.28)$$

où

$$\alpha = \tilde{w}[0] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k] H[k]$$

α est donc un terme de biais tel que $\alpha = 1$ pour le cas ZF. On retrouve donc que le récepteur ZF est non biaisé dans le cas fréquentiel et $0 < \alpha < 1$ dans le cas MMSE. C'est ce biais qu'il faudra prendre en compte dans la détection et on assimilera souvent $b'[n]$ à un bruit gaussien additif. Pour le cas SC-FDE, il suffira de considérer le cas $M = N$. Ces résultats se généralisent au cas d'une forme d'onde filtrée avec un filtre défini dans le domaine fréquentiel (spectral shaping) (hors programme).

Appendices

Annexe A

Signaux et systèmes à temps discrets

La théorie de l'échantillonnage montre qu'il est possible de définir la transformée de Fourier d'une séquence de nombres/d'échantillons, et que celle-ci est identique à la transformée de Fourier d'un signal échantillonné parfait. Ce chapitre présente les systèmes de traitement des séquences, et les outils nécessaires à leur modélisation.

A.1 Signaux à temps discrets

A.1.1 Séquences et Espace(s) des séquences

A partir des échantillons d'un signal analogique $x_a(t)$, on obtient un signal à temps discret représenté par des séquences de nombres qui sont notées $\{x[n]\}$, ou de manière vectorielle par \mathbf{x} , où $x[n]$ étant l'élément d'index temporelle n ($n \in \mathbb{Z}$ entier relatif). Par souci de simplicité des notations, on omettra les parenthèses lorsque le contexte le permet. Généralement, on a à manipuler deux grandes catégories de séquences :

1. *Les séquences discrètes à support temporel infini* : ce sont des séquences dont le support temporel n est défini sur \mathbb{Z} (dîtes infinies "à gauche" et "à droite", en référence à l'échantillon de référence pour $n = 0$), sur \mathbb{Z}_+ (encore noté \mathbb{N}) (signal causal infini à droite), ou sur \mathbb{Z}_- (signal infini à gauche). Ces séquences appartiennent à l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et sont notées

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cdots & x[-1] & x[0] & x[1] & \cdots \end{bmatrix}^T.$$

2. *Les séquences discrètes à support temporel fini* : Ces séquences sont à support fini et sont représentées de manière générale par un vecteur de taille fini $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ donné par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[-P] & \cdots & x[0] & \cdots & x[M] \end{bmatrix}^T,$$

avec $N = P + M + 1$. Sans perte de généralité, si on doit travailler essentiellement avec des outils de l'algèbre linéaire classique, on préférera souvent se ramener à une notations vectorielle classique de type

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \cdots & x[N-1] \end{bmatrix}^T,$$

où \mathbf{x} est assimilé à un vecteur de \mathbb{C}^N . L'indexation retenue ne correspond donc plus nécessairement à l'indexation temporelle des échantillons.

Séquences à support infini

Pour les séquences à support infini, les séquences de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définissent un espace vectoriel des séquences complexes infinies définies sur \mathbb{Z} formellement décrit comme

$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cdots & x[-1] & x[0] & x[1] & \cdots \end{bmatrix}^{\top} \mid x[n] \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

et pour lequel l'addition de vecteurs et la multiplication par un scalaire sont réalisés par composantes. C'est un espace de dimension infinie.

Parmi les sous-espaces d'intérêt, nous avons **l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des séquences de carrés sommables**. Du point de vue du signal, cela s'identifie à **l'espace des signaux discrets à énergie finie**. On construit ce sous-espace vectoriel normé en dotant $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de la norme euclidienne ℓ^2 définie par

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

et induite par le produit scalaire usuel défini comme

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_n^*.$$

Dans la notation précédente, on suppose que la dernière somme sur les indices à valeurs dans \mathbb{Z} est par essence finie, ce qui est vérifié si on suppose $\|x\|_2$ et $\|y\|_2$ finies. Cet espace est un espace de Hilbert et donc hérite de toutes les propriétés géométriques associées connues à ce type d'espaces.

On peut également retenir **l'espace vectoriel normé $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des séquences d'échantillons à amplitude bornée**, qui définit une contrainte plus faible sur les séquences de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Pour cet espace, les séquences sont telles que $|x[n]| < A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et $A \in \mathbb{R}_+$ fini. La norme associée est alors la norme infinie donnée par

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

Enfin, **l'espace vectoriel normé $\ell^1(\mathbb{Z})$ des séquences absolument sommables** est l'espace des séquences dont la norme-1 ℓ^1 est finie, définissant un ensemble plus contraint que $\ell^2(\mathbb{Z})$. La norme associée est donnée par

$$\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

Les deux derniers sous-ensembles sont des cas particuliers des espaces vectoriels normés (complets) $\ell^p(\mathbb{Z})$, définit pour $p \in [1, +\infty]$, et pour lequel la norme- p ℓ^p est finie. ℓ^p est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

On peut alors montrer que si $p < q$, alors $\ell^p(\mathbb{Z}) \subset \ell^q(\mathbb{Z})$. Ceci implique que l'ensemble $\ell^1(\mathbb{Z})$ est l'ensemble de séquences le plus réduit/restreint. En particulier, pour ce qui nous concerne le plus, on s'intéresse surtout au fait que $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$. Cela induit en effet que si une séquence à une norme ℓ^1 finie alors elle aura une norme ℓ^2 finie., les signaux absolument sommables sont donc de carrés sommables. L'inverse est faux.

Séquences à support temporel fini

Pour les séquences à support fini, les séquences de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définissent un sous-espace vectoriel de dimension finie des séquences complexes finies définies sur \mathbb{Z} se décrivant formellement comme

$$\mathbb{C}^N = \left\{ x = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N-1] \end{bmatrix}^\top \mid x[n] \in \mathbb{C}, n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \right\}$$

Comme dans le cas in,fini, on peut alors associé le produit scalaire défini comme

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \mathbf{y}^\dagger \mathbf{x},$$

où † , noté également H , est l'opérateur conjoint de transposition et conjugaison. La norme-2 induite

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

permet de doter \mathbb{C}^N de sa structure usuelle d'espace vectoriel normé, et comme nous sommes en dimension finie, ce dernier est un espace de Hilbert.

Comme dans le cas infini, on peut également doter \mathbb{C}^N d'autres normes, généralement des normes- p définies pour $p \in [1, +\infty]$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on obtient

$$\|x\|_\infty = \max(|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|)$$

et pour $p = 1$,

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|.$$

A.1.2 Séquences particulières

Impulsion Delta de Kronecker

La séquence dite de Kronecker est donnée par définition par

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

En notation vectoriel, on notera

$$\delta = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}^\top$$

L'ensemble $\{\delta[n-k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui correspond aux versions décalées de k échantillons dans le temps de la séquence $\delta[n]$ forme la base orthonormale usuelle associée à $\ell^2(\mathbb{Z})$. On notera $\delta_{\mathbf{k}}$ la version vectorielle de $\delta[n-k]$.

En particulier, on aura les propriétés suivantes :

- Produit (terme à terme) d'une séquence par l'impulsion de Kronecker :

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \delta[n]$$

- Produit scalaire d'une séquence par l'impulsion de Kronecker :

$$\langle x, \delta_{n_0} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta[k - n_0] = x[n_0]$$

Séquence Impulsion Unité

La séquence d'impulsion Unité dite Heaviside est donnée par définition par

$$U[n] = \begin{cases} 1, & \text{for } n \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

On a la relation suivante par rapport à la séquence Delta

$$U[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k].$$

On voit qu'il existe une relation d'intégration entre ces deux séquences.

Cette séquence a ses éléments bornés par 1 et donc appartient à $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ et donc n'appartient ni à $\ell^1(\mathbb{Z})$, ni à $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Séquences sinusoïdales

Ce sont les séquences de type $x[n] = e^{i2\pi\nu n}$, ou $x[n] = \sin(2\pi\nu n)$, et $x[n] = \cos(2\pi\nu n)$.

Par périodicité $x[n] = e^{i2\pi\nu n}$ et $x'[n] = e^{i2\pi(\nu+N)n}$ sont identiques pour N est entier. Ceci peut être interprété comme une conséquence du repliement de spectre lors de l'échantillonnage à la fréquence $F_e = 1/T_e$. Ainsi, deux signaux continus définis par $x_a(t) = e^{i2\pi f t}$ et $x'_a(t) = e^{i2\pi(f+N F_e)t}$ sont indiscernables après échantillonnage à la fréquence F_e . En effet, le signal continu $x_a(t) = e^{i2\pi f t}$ échantillonné à la fréquence F_e donne la séquence $x[n] = e^{i2\pi \frac{f}{F_e} n} = e^{i2\pi\nu n}$ avec $\nu = \frac{f}{F_e}$. La fréquence du signal échantillonné ν est donc égale à la fréquence f du signal à temps continu, normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage F_e . On parlera de fréquence normalisée. De plus, $x[n] = e^{i2\pi\nu n}$ étant 1-périodique, on peut obtenir l'ensemble des séquences associées à $x[n]$ en faisant varier le paramètre ν sur un intervalle de longueur 1. On notera également que la périodicité n'est conservée que si f/F_e est rationnel.

A.2 Systèmes à temps discret

A.2.1 Filtres Linéaires Invariants par Décalage

Définitions

Un filtre est un opérateur $\mathcal{H}[\cdot]$ qui associe à une séquence $x[n] \in \mathcal{S}$ une séquence $y[n] = \mathcal{H}[x[n]] \in \mathcal{S}'$, où \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont typiquement $\ell^2(\mathbb{Z})$ ou $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Un filtre linéaire invariant par décalage (FLID) vérifie :

- la linéarité :

$$\mathcal{H}[ax_1[n] + bx_2[n]] = a.\mathcal{H}[x_1[n]] + b.\mathcal{H}[x_2[n]]$$

- l'invariance par décalage :

$$\text{si } y[n] = \mathcal{H}[x[n]] \text{ alors } y[n-p] = \mathcal{H}[x[n-p]]$$

Réponse impulsionnelle et Produit de convolution discret

On note $h[n] = \mathcal{H}[\delta[n]]$ la réponse dite *impulsionnelle* d'un système discret. Si le système est linéaire et invariant par décalage, la connaissance de $h[n]$ suffit pour caractériser totalement le système, et permet de trouver la réponse à une entrée quelconque par une opération de convolution.

Considérons un signal d'entrée $x[n]$ quelconque. En utilisant la décomposition sur la base des impulsions Delta décalées, on peut écrire En utilisant les propriétés de linéarité et d'invariance, on trouve :

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta[n-k]$$

On peut alors écrire en appliquant les propriétés de linéarité et d'invariance par décalage

$$y[n] = \mathcal{H}[x[n]] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \mathcal{H}[\delta[n-k]] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n-k]$$

On reconnaît ici le produit de convolution discret des séquences $x[n]$ et $h[n]$, qui s'écrit :

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

Le produit de convolution discret est commutatif, ie. $y[n] = (h * x)[n] = (x * h)[n]$. On en déduit que l'ordre de mise en cascade de deux FLID est indifférent.

Critère(s) de stabilité

De manière générale, un système est stable si une entrée bornée provoque une sortie bornée (ce qui inclut les systèmes à la limite de stabilité), ce qui s'écrit

$$x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \Rightarrow y = \mathcal{H}[x] \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

Pour un système linéaire invariant par décalage, une condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors donnée par

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < +\infty$$

Causalité des FLID

Un système est causal si la sortie $y[n]$ est indépendante des échantillons d'entrée $x[n']$ pour $n' > n$. Pour un FLID, cette condition est équivalente à

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0.$$

A.2.2 Equations aux différences : systèmes RII et RIF

Les systèmes linéaires invariants par décalage sont définis par une équation aux différences à coefficients constants. La forme générale est :

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] + \sum_{r=P}^M b_r \cdot x[n-r].$$

On remarque ici que l'indice k varie de 1 à $N > 0$, i.e. que seules interviennent les valeurs passées de la sortie, ce qui permet de calculer $y[n]$ de proche en proche. L'indice r varie de P à M quelconques. Si $P < 0$, le filtre est non causal, mais reste cependant réalisable en temps différé.

Ces systèmes sont les correspondants discrets des systèmes continus définis par une équation différentielle à coefficients constants. Ils sont classés en deux catégories :

- les filtres à réponse impulsionnelle finie,
- les filtres à réponse impulsionnelle infinie.

Les filtres à réponse impulsionnelle finie

L'équation aux différences associée à des filtres à réponse impulsionnelle finie se réduit à

$$y[n] = \sum_{r=P}^M b_r \cdot x[n-r].$$

Dans ce cas, la sortie $y[n]$ ne dépend pas des valeurs passées de la sortie. La réponse impulsionnelle est triviale si on pose $x[n] = \delta[n]$, et vaut donc

$$h[n] = b_n.$$

L'équation aux différences s'identifie de manière directe au produit de convolution $h[n] * x[n]$. La longueur de la réponse impulsionnelle correspond aux nombres de termes de la somme sur l'indice r , ie. $M - P + 1$, qui est obligatoirement fini pour un filtre réalisable.

Ces filtres sont toujours stables car la condition $\sum_k |h[k]| < +\infty$ est toujours vérifiée. Ces filtres sont appelés filtres RIF (Réponse impulsionnelle finie) et en anglais FIR (Finite Impulse Response filters). Ce sont des filtres non récursifs, encore dénommés filtres MA (Moving Average, ou Moyenne mobile) car l'opération de convolution ainsi réalisée peut-être assimilée à une opération de moyennage glissant si on normalise cette moyenne.

Par exemple, $y[n] = x[n-l] + x[n] + x[n+l]$ est un filtre RIF non causal réalisant un lissage.

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie

L'équation aux différences associée aux filtres dits à réponse impulsionnelle infinie à la forme générale

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] + \sum_{r=P}^M b_r \cdot x[n-r].$$

La sortie $y[n]$ étant dépendante des valeurs passées $y[n-k]$, la réponse impulsionnelle sera infinie.

Par exemple $y[n] = a.y[n-1] + x[n]$ est un filtre à réponse impulsionnelle infinie du premier ordre. Le calcul de sa réponse impulsionnelle nécessite la connaissance d'un échantillon particulier (de même que la résolution d'une équation différentielle du premier ordre suppose la connaissance d'une condition initiale). Pour cet exemple ordre, $h[n]$ vaut $h[0].a^n$ pour $n > 0$ et vaut $(h[0] - 1)a^n$ pour $n < 0$. L'équation aux différences a une infinité de solutions : toutes ces solutions diffèrent de $K.a^n$, puisque $K.a$ est solution de $y[n] - a.y[n-1] = 0$. Parmi toutes ces solutions, une seule correspond à un système causal (lorsque $h[0] = 1$).

La réponse impulsionnelle étant infinie, ces filtres peuvent être instables. Ces filtres sont appelés filtres RII (Réponse impulsionnelle infinie), soit en anglais IIR (Infinite Impulse Response filters). Ce sont par nature des filtres récurrents.

Lorsque l'équation aux différences se limite à

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n-k] + x[n],$$

ils sont appelés filtres AR (Auto-Regressive). Sous la forme la plus générale, ils sont également appelés filtres ARMA (Auto-Regressive Moving-Average).

A.2.3 Filtres non invariants par décalage

Les formes les plus courantes des filtres non invariants par décalage sont :

- le compresseur,
- l'échantillonneur,
- le suréchantillonneur.

La condition d'invariance par décalage n'étant pas vérifiée, ces filtres ne sont pas régis par une équation de convolution, et donc la connaissance de leur réponse impulsionnelle ne permet pas de déduire leurs propriétés.

Le compresseur

Il est défini par

$$y[n] = x[M.n].$$

Il est non invariant par décalage, car décaler l'entrée de M échantillons décale la sortie de 1 seulement, et décaler l'entrée de $P \neq k.M$ change complètement les échantillons en sortie. Il est évidemment stable (car à une entrée bornée correspond une sortie bornée). Il est non causal (de manière évidente, on vérifie par exemple que $y[1]$ dépend de $x[M]$). Sa réponse impulsionnelle est $h[n] = \delta[n]$.

D'un point de vue pratique, cet opérateur correspond à une opération de sous-échantillonnage : si $x[n]$ est obtenu par échantillonnage d'un signal $x_a(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_e , $y[n]$ correspond à l'échantillonnage de $x_a(t)$ à la fréquence F_e/M .

L'échantillonneur

Il est défini par

$$y[k.M] = x[k.M],$$

et $y[n] = 0$ si n est non multiple de M .

Il est non invariant par décalage : décaler l'entrée de M revient bien à décaler la sortie de M , mais décaler l'entrée de $P \neq kM$ change complètement les échantillons en

sortie. Il est évidemment stable (une entrée bornée donne une sortie bornée) et causal. Sa réponse impulsionnelle est $h[n] = \delta[n]$.

Le suréchantillonneur

Il est défini par

$$y[k.M] = x[k],$$

et $y[n] = 0$ si n est non multiple de M .

Il est non invariant par décalage : décaler l'entrée de 1 échantillon, décale la sortie de M échantillons. Il est évidemment stable (une entrée bornée donne une sortie bornée). Il est non causal (par exemple, $y[-M]$ dépend de $x[-1]$). Sa réponse impulsionnelle est donnée par $h[n] = \delta[n]$.

Ce filtre permet d'élever la fréquence d'échantillonnage d'un signal en intercalant $(M - 1)$ échantillons nuls entre chaque échantillon.

Annexe B

Analyse et représentations des signaux et systèmes discrets

B.1 Transformée de Fourier des signaux à temps discrets/des séquences.

B.1.1 Fonctions propres d'un système

On considère à l'entrée d'un FLID de réponse impulsionnelle $h[n]$, la séquence $x[n] = e^{j2\pi\nu n}$. La sortie est alors

$$y[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p]e^{j2\pi\nu(n-p)} = e^{j2\pi\nu n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p]e^{-j2\pi\nu p}.$$

La sortie $y[n]$ est donc égale à l'entrée $x[n]$ multipliée par un terme complexe qui est ce que l'on appelle la réponse en fréquence du système. On notera

$$y[n] = \overset{\circ}{h}(\nu)x[n] = \lambda_\nu x[n]$$

avec

$$\overset{\circ}{h}(\nu) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p] \cdot e^{-j2\pi\nu p}.$$

Les séquences $e^{j2\pi\nu n}$ sont donc les fonctions propres des systèmes linéaires à temps discret. La réponse en fréquence s'identifie à celle trouvée de la transformée de Fourier d'une séquence comme définie ci-après.

B.1.2 Transformée de Fourier des signaux à temps discrets

La transformée de Fourier d'une séquence $x[n]$ est définie (sous réserve de convergence) par :

$$\overset{\circ}{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi\nu n}$$

C'est une fonction **continue** de ν et 1-périodique.

La transformée inverse est donnée par

$$x[n] = \int_{[1]}^{\circ} \dot{x}(\nu) e^{+i2\pi\nu n} d\nu.$$

On note souvent le passage de l'un à l'autre des domaines par la paire

$$x[n] \overset{\circ}{x} \rightleftharpoons (\nu)$$

B.2 Transformée en \mathcal{Z} .

B.2.1 Définitions

$$\bar{x}(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

La transformée en \mathcal{Z} joue, pour les séquences, un rôle analogue à celui de la transformation de Laplace pour les fonctions.

B.2.2 relation avec la transformée de Fourier d'une séquence.

En posant, $z = e^{j2\pi\nu}$, il vient

$$\bar{x}(z = e^{j2\pi\nu}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j2\pi\nu n} = \overset{\circ}{x}(\nu).$$

Ainsi, dans le plan complexe, sur le cercle de rayon 1, la transformée en \mathcal{Z} est égale à la transformée de Fourier.

B.2.3 Région/Domaine de Convergence (region of convergence, ROC)

La transformation en \mathcal{Z} ne converge pas partout dans le plan \mathcal{Z} (sur le plan complexe). Pour étudier le domaine de convergence de la série associée à la transformée, on cherche à caractériser sur quelle région la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ est absolument convergente. Cette série est à diviser en deux sous-partie telle que $\bar{x}(z) = \bar{x}_a(z) + \bar{x}_c(z)$ où

$$\bar{x}_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] z^{-n},$$

est une série infinie à gauche et

$$\bar{x}_c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n},$$

est une série infinie à droite.

B.2.4 Propriétés

La transformée en \mathcal{Z} a des propriétés similaires à celle de la transformée de Fourier pour les signaux à temps discret. La seule différence est que l'on doit prendre garde au domaine de convergence quand on réalise certaines opérations sur les signaux. Comme précédemment évoqué, déterminer une transformée en \mathcal{Z} d'un signal $x[n]$, c'est déterminer l'expression $\bar{x}(z)$ et définir sa ROC. Dans la suite, on considère les opérations sur des signaux $x[n]$ et $y[n]$ défini comme suit :

$$\overline{x[n]} = \bar{x}(z) \quad ROC = R_x$$

et

$$\overline{y[n]} = \bar{y}(z) \quad ROC = R_y$$

1. Linéarité

$$\mathcal{Z} \{ax[n] + by[n]\} = a\bar{x}(z) + b\bar{y}(z), \quad ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$$

2. Décalage en temps

$$\mathcal{Z} \{x[n - n_0]\} = z^{-n_0}\bar{x}(z), \quad ROC = R_x$$

La ROC est en générale la même que celle à l'initial sauf possible addition/suppression des points à l'origine ou à l'infini.

3. Convolution

$$\mathcal{Z} \{x[n] * y[n]\} = \bar{x}(z)\bar{y}(z), \quad ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$$

La ROC associée au produit de convolution peut être plus large que l'intersection de R_x et R_y , ceci étant lié à la possible annulation de pôles ou zéros lors de la convolution.

4. Différence temporelle

$$\mathcal{Z} \{x[n] - x[n - 1]\} = (1 - z^{-1})\bar{x}(z), \quad ROC = R_x$$

5. Accumulateur

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=-\infty}^n x[k] \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}\bar{x}(z), \quad ROC \supseteq [R_x \cap (|z| > 1)]$$

6. Renversement temporel/folding

$$\mathcal{Z} \{x[-n]\} = \bar{x}(1/z)$$

7. Changement d'échelle dans le domaine en \mathbf{Z}

$$\mathcal{Z} \{a^n x[n]\} = \bar{x}\left(\frac{z}{a}\right), \quad ROC = |a|R_x$$

8. Conjugaison

$$\mathcal{Z} \{x^*[n]\} = \bar{x}^*(z^*), \quad ROC = R_x$$

9. Différenciation

$$\mathcal{Z} \{nx[n]\} = -z \frac{d}{dz}\bar{x}(z), \quad ROC = R_x$$

Annexe C

Caractérisation au second ordre

Pour caractériser un processus sur N instants d'observation, il faudrait connaître la loi du vecteur $(X_{n_1}, \dots, X_{n_N})$. Sauf dans des cas très particuliers, bruit blanc fort de loi donnée ou processus gaussiens, on n'a pas accès à cette information. On se contente alors de caractériser le processus par ces différents *moments*, $\mathbb{E}(X_{n_1})$, $\mathbb{E}(X_{n_1}X_{n_2}^*)$, $\mathbb{E}(X_{n_1}X_{n_2}^*X_{n_3})$,... Cependant en pratique, les deux premiers moments suffisent pour une grande partie des applications, et nous allons rappeler les principaux résultats ci-après

C.1 Caractérisation d'un processus aléatoire au premier et second ordre.

Définition 4 : Moyenne

$m(n) = \mathbb{E}(X(n, \omega))$ est la *moyenne* (stochastique), encore appelée *espérance mathématique*. La moyenne étant prise sur les réalisations ω , elle dépend à priori de l'instant d'observation n . Un processus X est dit *centré* si $m(n) = \mathbb{E}(X(n, \omega)) = 0$ pour tout instant n .

Définition 5 : Covariance/Autocorrélation

la *fonction de covariance* est définie par,

$$\begin{aligned}\Gamma_X(n_1, n_2) &= \text{cov}(X_{n_1}, X_{n_2}) \\ &= \mathbb{E}(X(n_1, \omega)X(n_2, \omega)^*) - \mathbb{E}(X(n_1, \omega))\mathbb{E}(X(n_2, \omega))^* \\ &= \mathbb{E}((X(n_1, \omega) - m(n_1))(X(n_2, \omega) - m(n_2))^*) \\ &= \mathbb{E}(X_c(n_1, \omega)X_c(n_2, \omega)^*)\end{aligned}\tag{C.1}$$

la *fonction d'autocorrélation* est définie par,

$$R_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}(X(n_1, \omega)X(n_2, \omega)^*)\tag{C.2}$$

$X_c(n, \omega)$ est déduit du processus $X(n, \omega)$ par centrage. Le processus centré est de moyenne nulle pour tout n et par suite *stationnaire au premier ordre*. La fonction de

covariance mesure la ressemblance entre les valeurs du processus centré en 2 instants différents n_1 et n_2 . Elle est donc maximale quand $n_1 = n_2$, et tend à décroître quand $n_1 - n_2$ devient grand.

Définition 6 : *Intercovariance/intercorrélation*

la fonction d'intercovariance est donnée par

$$\begin{aligned}\Gamma_{X,Y}(n_1, n_2) &= \text{cov}(X_{n_1}, Y_{n_2}) \\ &= \mathbb{E}(X(n_1, \omega)Y(n_2, \omega)^*) - \mathbb{E}(X(n_1, \omega))\mathbb{E}(Y(n_2, \omega))^* \\ &= \mathbb{E}((X(n_1, \omega) - m_X(n_1))(Y(n_2, \omega) - m_Y(n_2))^*) \\ &= \mathbb{E}(X_c(n_1, \omega)Y_c(n_2, \omega)^*)\end{aligned}\tag{C.3}$$

la fonction d'intercorrélation est donnée par

$$R_{X,Y}(n_1, n_2) = \mathbb{E}(X(n_1, \omega)Y(n_2, \omega))\tag{C.4}$$

La fonction d'intercovariance mesure la ressemblance entre les valeurs des deux processus centrés en 2 instants différents n_1 et n_2 .

C.2 Qu'est ce que la stationnarité ?

La stationnarité d'un processus aléatoire $X(n, \omega)$ traduit une invariance dans le temps des propriétés statistiques du processus.

Définition 7 : *Stationnarité forte*

$\forall k, (X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_N})$ a même loi de probabilité que $(X_{n_1+k}, X_{n_2+k}, \dots, X_{n_N+k})$.

Définition 8 : *Stationnarité du premier ordre*

$$\mathbb{E}(X(n, \omega)) = m_X(n) = m_X = \text{constante}$$

On dit que le processus $X(n, \omega)$ est *centré* si sa moyenne est nulle pour tout n . Un processus centré est donc stationnaire au premier ordre. On notera X_c le processus centré déduit du processus X par :

$$X_c(n, \omega) = X(n, \omega) - m_X(n)$$

Le processus X_c est stationnaire au premier ordre.

Définition 9 : *Stationnarité du Second ordre*

$$R_X(n_1, n_2) = R_X(n_1 + k, n_2 + k) \quad \forall \quad k \in F\tag{C.5}$$

L'expression donnée à l'équation C.5 permet une interprétation aisée : le processus est stationnaire à l'ordre 2 si sa fonction d'autocorrélation ne dépend pas des instants de calcul mais seulement du décalage entre ces instants (pour le vérifier prendre $k = -n_1$). Pour cette raison, il est plus pratique de manipuler une expression de la covariance faisant apparaître ce décalage, noté p . On l'écrira :

$$R_X(n, n - p)$$

X sera stationnaire à l'ordre deux si $R_X(n, n - p)$ dépend de p uniquement (et pas de n). La même chose peut être appliquée à l'autocovariance.

Définition 10 : *Stationnarité au second ordre : fonction d'autocorrélation*

Si X est stationnaire au second ordre, alors $R_X(n, n - p)$ ne dépend que de la seule variable p . On note

$$\gamma_X[p] = R_X(n, n - p)$$

la *fonction d'autocorrélation du processus X* .

On remarque que la stationnarité forte entraîne la stationnarité au premier et au deuxième ordre, mais que la réciproque est généralement fausse (sauf dans le cas Gaussien)

Définition 11 : *Stationnarité mutuelle*

X et Y sont dits *mutuellement stationnaires* si leur intercorrélation $R_{X,Y}(n, n - p) = \mathbb{E}(X(n, \omega)Y^*(n - p, \omega))$ ne dépend que de p . On note alors leur *fonction d'intercorrélation*

$$\gamma_{X,Y}[p] = R_{X,Y}(n, n - p)$$

Propriétés 7 : *Somme de processus*

Si X et Y sont stationnaires et mutuellement stationnaires, $X + Y$ l'est aussi et vérifie :

$$\gamma_{X+Y}[p] = \gamma_X[p] + \gamma_{X,Y}[p] + \gamma_{Y,X}[p] + \gamma_Y[p]$$

Alors, $\gamma_{X+Y}[p] = \gamma_X[p] + \gamma_Y[p]$ si et seulement si $\gamma_{X,Y}[p] = 0$, c'est-à-dire quand X et Y sont orthogonaux.

La même chose peut être dérivée pour les fonctions de covariance avec la somme directe des autocovariances si les processus sont décorrélés.

C.3 Propriétés des fonctions d'autocorrélation.

C.3.1 Interprétation comme produit scalaire

Une fonction de corrélation d'un processus aléatoire *centré* peut s'interpréter comme un produit scalaire :

$$\gamma_X[p] = \mathbb{E}(X_n X_{n-p}^*) = \langle X_n, X_{n-p} \rangle$$

et il en résulte toutes les propriétés déjà vues pour les fonctions de corrélation de signaux déterministes. $\gamma_X[p]$ est une fonction à symétrie hermitienne,

$$\gamma_X[p] = \gamma_X[-p]^*$$

de type positif (on a $\sum_{i,j} a_i a_j \gamma_X[n_j, n_i] \geq 0$).

D'après la propriété de symétrie hermitienne, il suffit d'obtenir les valeurs calculées de $\gamma_X[p]$ pour $p \geq 0$ pour connaître entièrement la fonction d'autocorrélation.

C.4 Densité spectrale de puissance d'un processus

Définition 12 : Densité spectrale de puissance

La *densité spectrale de puissance* (dsp) d'un processus stationnaire au second ordre est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$\overset{\circ}{\gamma}_X(\nu) = \mathcal{F}\{\gamma_X[p]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X[p] e^{-j2\pi\nu p} \quad (\text{C.6})$$

Définition 13 : Densité en \mathcal{Z}

La *densité en \mathcal{Z}* d'un processus stationnaire est la transformée en \mathcal{Z} (lorsqu'elle est bien définie) de sa fonction d'autocorrélation, soit :

$$\bar{\gamma}_X(z) = \mathcal{Z}\{\gamma_X[p]\} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_X[p] z^{-p} \quad (\text{C.7})$$

La transformée de Fourier est la transformée en \mathcal{Z} prise sur le cercle unité en $z = e^{j2\pi\nu}$. Pour assurer l'existence de la TF, il faut que le cercle unité appartienne au domaine de convergence de la TZ. Si $|\gamma_X[p]| \leq r^p$, avec $0 \leq r < 1$, alors $\bar{\gamma}_X(z)$ est bien définie pour $r \leq |z| \leq \frac{1}{r}$.

Annexe D

Filtrage linéaire de processus aléatoires

D.1 Filtre linéaire invariant par décalage

On considère un filtre numérique de réponse impulsionnelle $\{h(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Soit $X(n, \omega)$ un processus aléatoire, supposé stationnaire au premier et second ordre. On nomme $Y(n, \omega)$ le processus résultant du filtrage de $X(n, \omega)$ par $\{h(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Le filtrage linéaire invariant par décalage résultant est alors défini par les relations :

$$X(n, \omega) \rightarrow \boxed{h} \rightarrow Y(n, \omega)$$

La relation entrée/sortie s'exprime alors comme l'équation de convolution suivante :

$$Y(n, \omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k) X(n - k, \omega)$$

D.2 Caractérisation des signaux aléatoires filtrés

D.2.1 Caractérisation au premier ordre

On suppose le processus d'entrée $X(n, \omega)$ stationnaire au premier ordre de moyenne et de moyenne $m_X = \mathbb{E}(X(n, \omega))$. On a alors

$$\begin{aligned} m_Y(n) &= \mathbb{E}(Y(n, \omega)) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k) \mathbb{E}(X(n - k, \omega)) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k) m_X = m_X \overset{\circ}{h}(0) \end{aligned}$$

avec $\overset{\circ}{h}(\nu) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h(m) e^{+i2\pi\nu m}$ la transformée de Fourier de la séquence $h(n)$.

Propriétés 8 : Caractérisation au premier ordre

Si $X(n, \omega)$ est stationnaire au premier ordre, $Y(n, \omega)$ est stationnaire au premier ordre et sa moyenne vaut :

$$m_Y = m_X \overset{\circ}{h}(0)$$

D.2.2 Caractérisation au second ordre

On suppose $X(n, \omega)$ centré. Par application du résultat précédent, Y est centré. Si X est stationnaire au deuxième ordre d'autocorrélation $\gamma_X[p]$, alors l'autocorrélation de Y s'écrit :

$$\begin{aligned} R_Y(n, n-p) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k)X(n-k) \sum_{m \in \mathbf{Z}} h^*(m)X^*(n-p-m)\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{m \in \mathbf{Z}} h(k)h^*(m)\mathbb{E}(X(n-k)X^*(n-p-m)) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{m \in \mathbf{Z}} h(k)h^*(m)\gamma_X[p+m-k] \end{aligned}$$

L'expression précédente étant indépendante de n , Y est stationnaire au second ordre. On obtient au final

$$\begin{aligned} R_Y(n, n-p) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} h(k)h^*(k-l)\gamma_X[p-l] \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \gamma_X[p-l] \sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k)h^*(k-l) \\ &= \gamma_Y[p] \end{aligned}$$

En utilisant l'autocorrélation déterministe de la réponse impulsionnelle $h(k)$, définie comme

$$\gamma_h[l] = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h(k)h^*(k-l),$$

on obtient finalement :

$$\gamma_Y[p] = \{\gamma_X * \gamma_h\}(p) \text{ }^1.$$

En prenant la transformée de Fourier de la séquence $\gamma_Y[p]$, on obtient

$$\overset{\circ}{\gamma}_Y(\nu) = |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2 \overset{\circ}{\gamma}_X(\nu)$$

En appliquant maintenant la transformée en Z , on obtient

$$\bar{\gamma}_Y(z) = \bar{h}(z)\bar{h}^*\left(\frac{1}{z}\right)\bar{\gamma}_X(z)$$

où

$$\bar{\gamma}_h(z) = \bar{h}(z)\bar{h}^*\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec $\bar{h}^*(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h^*(k)z^{-k}$ ²

1. On peut aussi remarquer que $\gamma_h[l] = h(p) * \check{h}(p)$ où $\check{h}(p) = h^*(-p)$ est le filtre numérique adapté à $h(n)$.

2. Cette notation un peu abusive est adoptée par souci de simplification des notations. Il n'existe pas de relation *simple* entre transformées en Z d'une séquence et son conjugué. La relation exacte est donnée par

$$\bar{h}^*(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h^*(k)z^{-k} = h^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Propriétés 9 : *Caractérisation au second ordre*

Si X est stationnaire au second ordre, Y est stationnaire au second ordre.

1. Autocorrélation :

$$\gamma_Y[p] = \{\gamma_X * \gamma_h\}(p)$$

2. Densité spectrale de puissance :

$$\overset{\circ}{\gamma}_Y(\nu) = |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2 \overset{\circ}{\gamma}_X(\nu)$$

3. Densité en Z :

$$\bar{\gamma}_Y(z) = \bar{h}(z) \bar{h}^* \left(\frac{1}{z} \right) \bar{\gamma}_X(z)$$

Bibliographie

1. B. P. Lathi and Zhi Ding, Modern Digital and Analog Communication Systems, Oxford University Press, 2009.
2. John Barry, Edward Lee, David Merserschnitt, Digital Communications, Kluwer Academic Publisher, Third edition.
3. Andreas F. Molisch, Wireless Communications, 2nd Edition, IEEE Press-Wiley, 2010.
4. Digital Communications, 4th edition, John G. Proakis, Mc Graw -Hill.
5. J. Choi, Adaptive and Iterative Signal Processing in Communications, Cambridge University Press, 2006.
6. Zhi Ding and Ye Li, Blind Equalization and Identification , Marcel Dekker, New York, 2001.
7. S Sesia et al., LTE – The UMTS Long Term Evolution, Wiley, 2011.
8. F. KHAN, *LTE for 4G Mobile Broadband Air Interface Technologies and Performance*, Cambridge University Press, 2009.
9. 3GPP R1-051335, “**Simulation Methodology of IFDMA and DFT DFT-Spread-OFDMA,**” Nov. 2005.
10. 3GPP R1-051352, “**Simulation methodology for EUTRA uplink : SC-FDMA and OFDMA,**” Nov. 2005.