

Formes d'ondes circulaires par bloc et égalisation fréquentielle

C. Poulliat

5 novembre 2023

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 Egalisation et Analyse
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

Plan

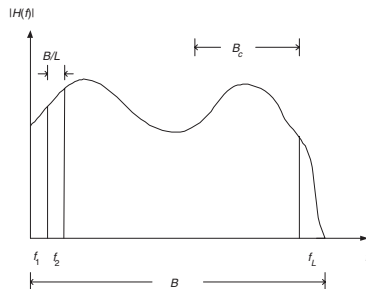
- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
- 3 Egalisation et Analyse

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Principe de base, rappels

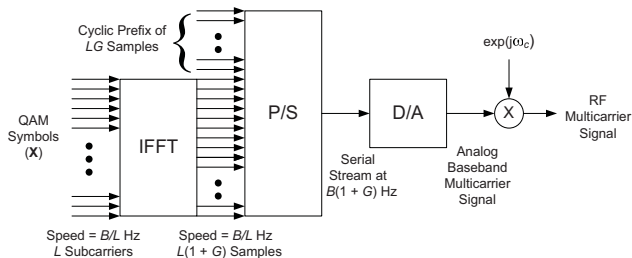
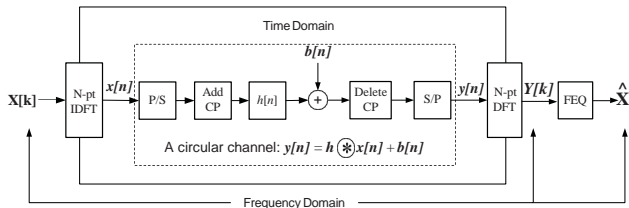
Orthogonal Frequency Division Multiplexing

- Introduit pour traiter efficacement les interférences entre symboles pour les canaux fortement dispersifs,
- Principe : transformer un canal large bande en un certains nombre de canaux bande étroite de largeur plus petite que la bande de cohérence du canal.
 \Rightarrow *flat fading* sur chaque canal



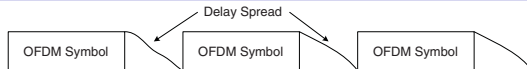
OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

structure émetteur-récepteur en mono-utilisateur

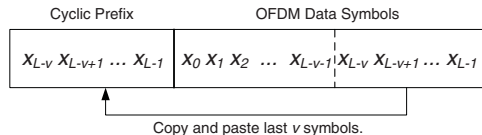


OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

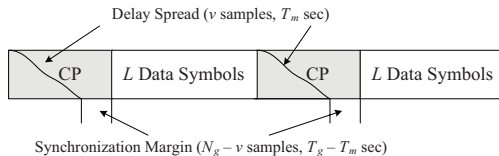
Principe du préfixe cyclique



Intervales de garde \Rightarrow pas d'IES inter-symbols OFDM



Préfixe cyclique : rendre la convolution avec le canal circulaire



Ajout Préfixe cyclique : plus IES intra symbole OFDM

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Modélisation, notations

- TFD :

$$X[k] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- TFD inverse :

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+i \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- Convolution circulaire :

$$TD : y[n] \triangleq h \circledast x[n]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n - m \rangle_N], \quad \forall n = 0 : N-1$$

$$FD : Y[k] = H[k] X[k], \quad \forall k = 0 : N-1$$

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Modélisation récepteur, domaine temporel

- Soit un bloc de N symboles modulés noté $X[k] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{C}, \forall k = 0 \dots N-1$.
- Après passage par le bloc de TFD inverse, on obtient un bloc de symboles

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]), \forall n = 0 \dots N-1.$$

- Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \dots \tilde{x}[N+N_{cp}-1]] = [x[N-N_{cp}] \dots x[N-1] | x[0] \dots x[N-1]].$$

- Après transmission sur le canal, on a

$$y[n] = h * \tilde{x}[n] + b[n]$$

- Après retrait du CP, on a

$$y[n] = h \circledast x[n] + b[n]$$

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Modélisation récepteur, domaine fréquentiel

- Par propriété de la transformée de Fourier discrète, on a $\forall k = 0 \dots N - 1$

$$Y[k] = TFD(y[n]) = H[k]X[k] + B[k]$$

où $H[k] = TFD(h[n])$ et $B[k] = TFD(b[n])$

⇒ on a donc transformé un canal sélectif en fréquence en canal sélectif en temps/à évanouissements temporels

⇒ Par propriétés de la transformée de Fourier, le bruit est toujours blanc Gaussien

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Modélisation récepteur, aspect récepteur

- Il est souvent présenté une "égalisation" des canaux avant décision. On "filtre" les données par un filtre "one-tap" $W[k]$ chaque sous canaux (ie ; $\forall k = 1 \dots N - 1$). On obtient alors un symbole estimé

$$\hat{X}[k] = W[k] Y[k] = W[k] H[k] X[k] + W[k] B[k] = \alpha_k X[k] + B[k]$$

- Deux types de critère :

① Critère Zero-forcing :

$$W[k] = \frac{1}{H[k]}$$

② Critère MMSE :

$$W[k] = \frac{H^*[k]}{|H[k]|^2 + N_0}$$

⇒ le modèle étant un modèle à évanouissements scalaires, cette étape n'est pas nécessaire si on considère un système OFDM codé.

OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Modélisation récepteur, aspect récepteur

- Détection par maximum de vraisemblance : en utilisant le modèle discret équivalent il vient directement :

$$\hat{X}[k] = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} P(Y[k]|X[k], H[k])$$

où dans le cas Gaussien on a

$$P(Y[k]|X[k], H[k]) \propto \exp\left(-\frac{\|Y[k] - H[k]X[k]\|^2}{N_0}\right)$$

- Détection MAP bit pour schéma codé à bits entrelacés : Les vecteurs binaires $X_b[n] = [X_1[n] \cdots X_m[n]]$ sont “mappés” sur des symboles $X[n] \in \mathcal{X}$.

$$L(x_i[n]) = \log \left(\frac{P(x_i[n]=0|Y[n])}{P(x_i[n]=1|Y[n])} \right) = \log \left(\frac{\sum_{X[n] \in \mathcal{X}_0^i} P(Y[n]|X[n], H[n])}{\sum_{X[n] \in \mathcal{X}_1^i} P(Y[n]|X[n], H[n])} \right)$$

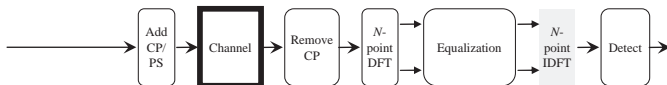
Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 **Forme d'ondes mono-porteuse circulaire**
 - **SC-FDE**
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 Egalisation et Analyse
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

SC-FDE

Egalisation Monoporteuse dans le domaine fréquentiel : SC-FDE vs OFDM

SC/FDE



OFDM

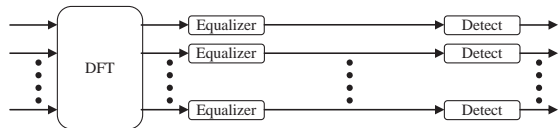


* CP: Cyclic Prefix, PS: Pulse Shaping

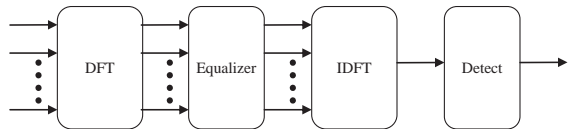
OFDM et SC-FDE

SC-FDE vs OFDM : récepteurs

OFDM

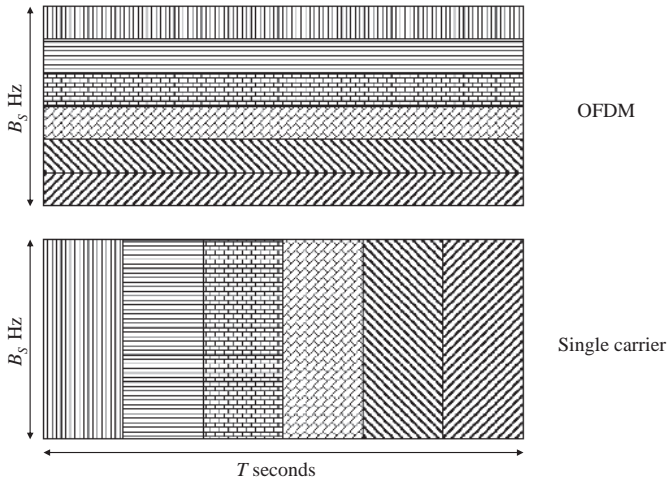


SC/FDE



OFDM et SC-FDE

SC-FDE vs OFDM : interprétation dans le plan temps-fréquence



SC-FDE

Modélisation récepteur, domaine temporel

- Soit un bloc de N symboles modulés noté $x[n] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{C}, \forall n = 0 \dots N - 1$.
- Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \dots \tilde{x}[N + N_{cp} - 1]] = [x[N - N_{cp}] \dots x[N - 1] | x[0] \dots x[N - 1]].$$

- Après transmission sur le canal, on a

$$y[n] = h * \tilde{x}[n] + b[n]$$

- Après retrait du CP, on a

$$y[n] = h \circledast x[n] + b[n]$$

SC-FDE, Modèle du signal en réception

Après TFD, on applique un filtre $W[k]$ sur chaque sous-bande

- **Domaine fréquentiel :**

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \quad \forall k = 1 : N - 1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k] Y[k] \\ &= W[k] H[k] X[k] + W[k] B[k], \quad \forall k = 1 : N - 1 \end{aligned}$$

- **Domaine temporel :**

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \quad \forall n = 1 : N - 1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \circledast x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \circledast x[n]}_{\text{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_t[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{avec } \tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$$

Egalisation

Cas MMSE

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (3)$$

(4)

Cas ZF

$$W[k] = \frac{H[k]^*}{|H[k]|^2} \quad (5)$$

Détection

Détection

Si on prend le modèle du signal après égalisation, on aura

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n] + x_i[n] + \hat{b}[n] \quad (6)$$

$$= \alpha x[n] + b'[n] \quad (7)$$

On pourra donc faire une détection en faisant une approximation Gaussienne sur $b'[n]$ et ainsi appliquer les mêmes détecteur que le cas OFDM.

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 **Forme d'ondes mono-porteuse circulaire**
 - SC-FDE
 - **SC-FDE avec mise en forme fréquentielle**
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 **Egalisation et Analyse**
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 **Forme d'ondes mono-porteuse circulaire**
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - **Spectral Shaping**
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 Egalisation et Analyse
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

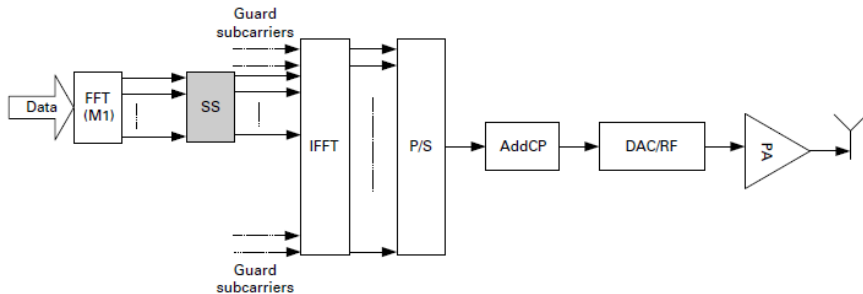
Plan

2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire

- SC-FDE
- SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
- Spectral Shaping
- SC-FDMA : extension pour l'accès multiple

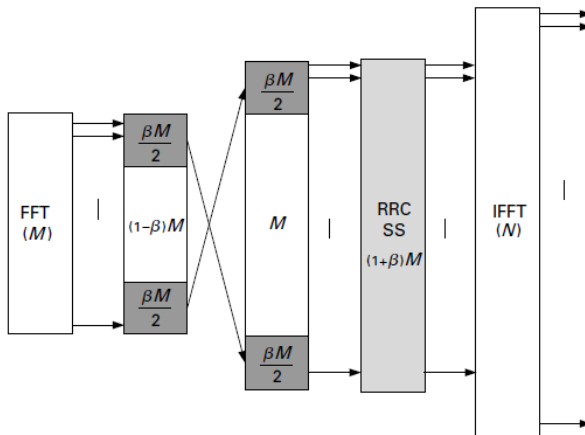
Spectral shaping

Shaping fréquentiel : cas générale



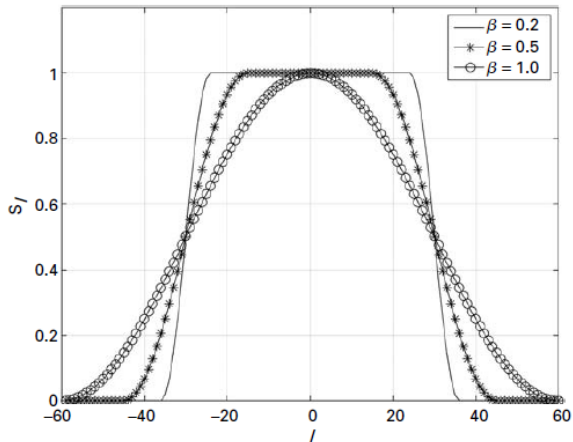
Spectral shaping

Shaping fréquentiel : cas mono-utilisateur



Spectral shaping

Shaping fréquentiel : exemples



Spectral shaping

Implémentations

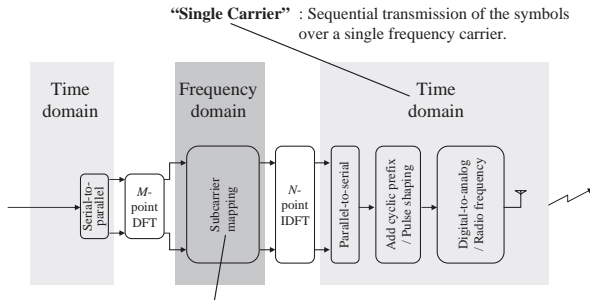
- Le cas mono-utilisateur est connu sous le nom Extended-Weighted SC-OFDM,
- Un filtrage de type filtrage rectangulaire est utilisé dans le cadre du standard DVB-NGH sous l'acronyme SC-OFDM,
- la version multi-utilisateurs est connue sous le sigle SC-FDMA et considère un filtre rectangulaire étendu.

Plan

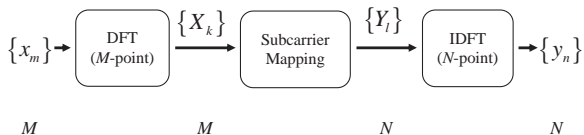
- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 **Forme d'ondes mono-porteuse circulaire**
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - **SC-FDMA : extension pour l'accès multiple**
- 3 **Egalisation et Analyse**
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

SC-FDMA

Principe générale



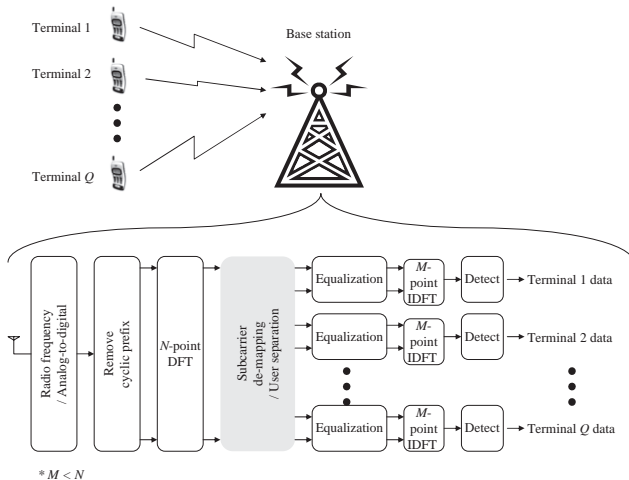
“FDMA” : User multiplexing in the frequency domain.



* M, N : number of data symbols

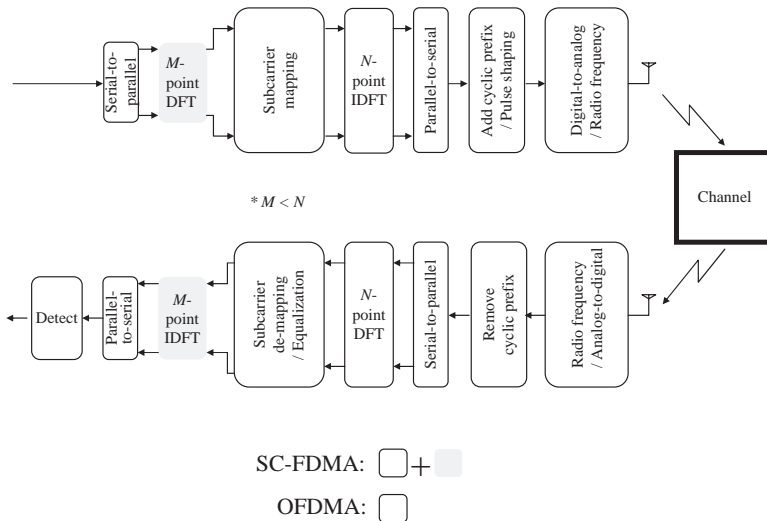
SC-FDMA

Architecture récepteur



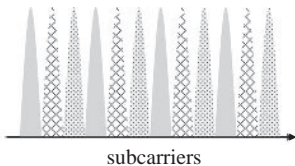
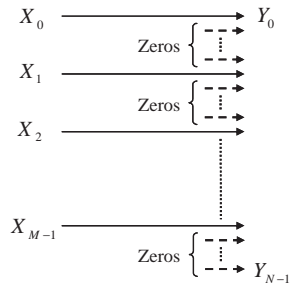
SC-FDMA

Comparaison OFDMA vs SC-FDMA : structure



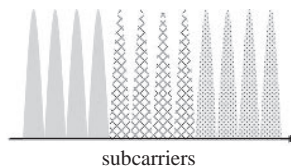
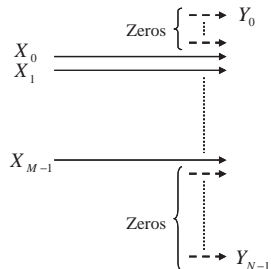
SC-FDMA

Allocation de sous-porteuses



Interleaved (distributed) Mode

C. Poulliat



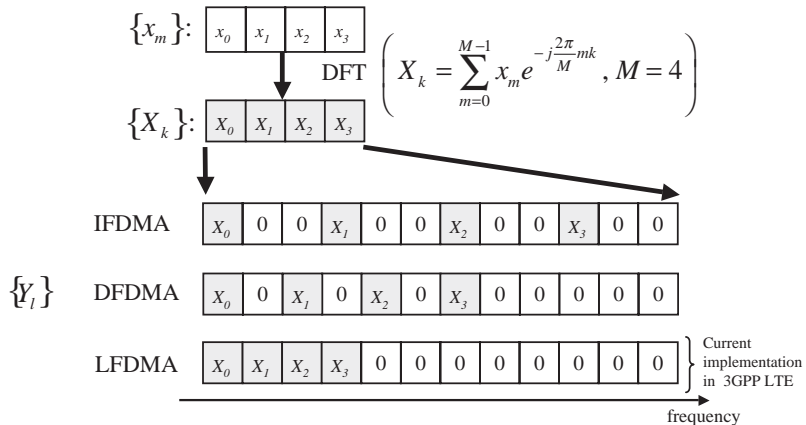
Localized Mode

Formes d'ondes circulaires



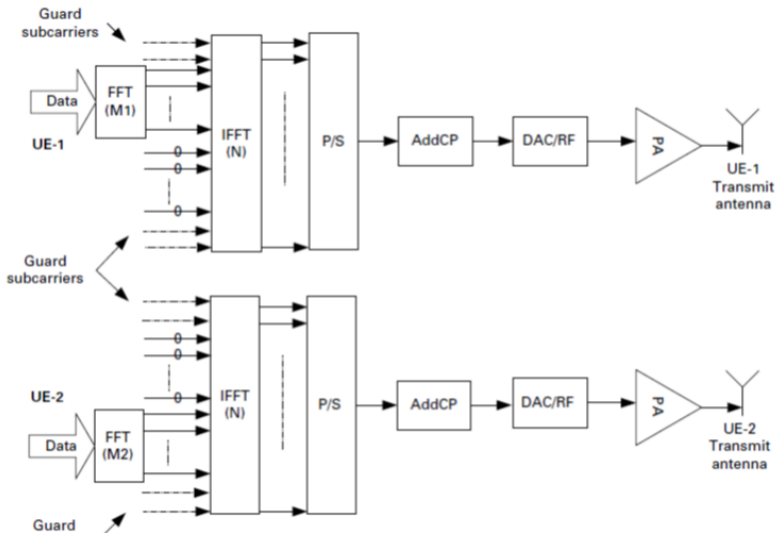
OFDMA et SC-FDMA

SC-FDMA : allocation de sous-porteuses



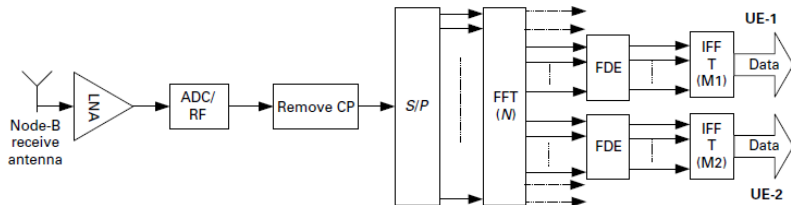
SC-FDMA

Cas multi-utilisateurs - émetteurs



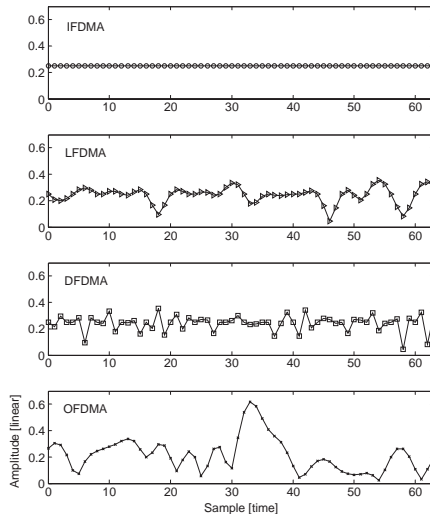
SC-FDMA

Cas multi-utilisateurs - récepteurs



SC-FDMA

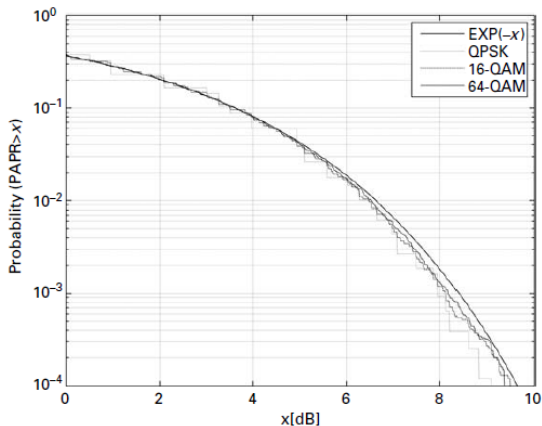
Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA



SC-FDMA

Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA

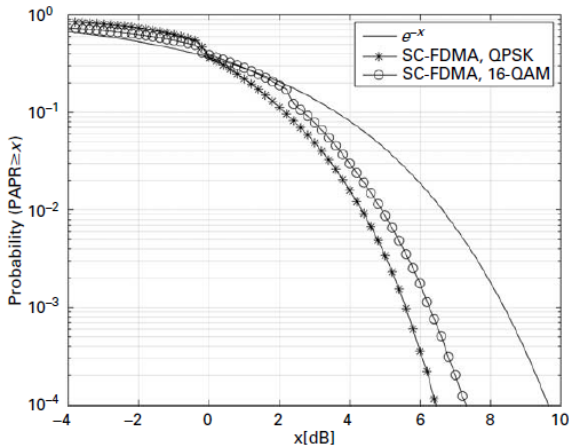
$$\text{PAPR} = \frac{|s(t)|^2}{\mathbb{E}(|s(t)|^2)}$$



PAPR pour OFDM avec 16 canaux

SC-FDMA

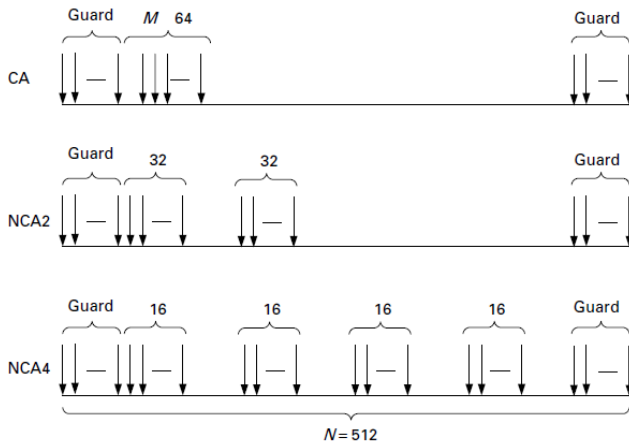
SC-FDMA vs OFDMA



PAPR pour SC-FDMA localisé $M = 64, N = 512$

SC-FDMA

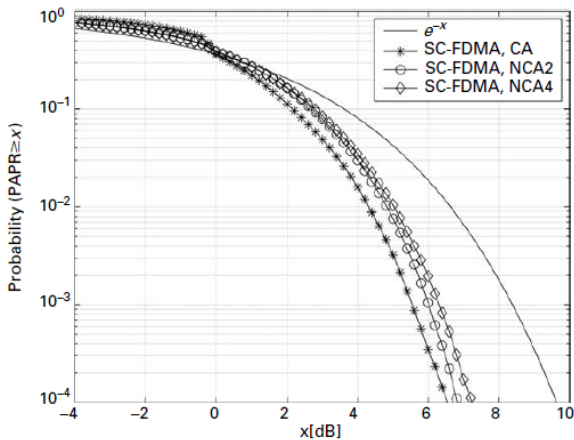
Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA



PAPR pour SC-FDMAs

SC-FDMA

Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA



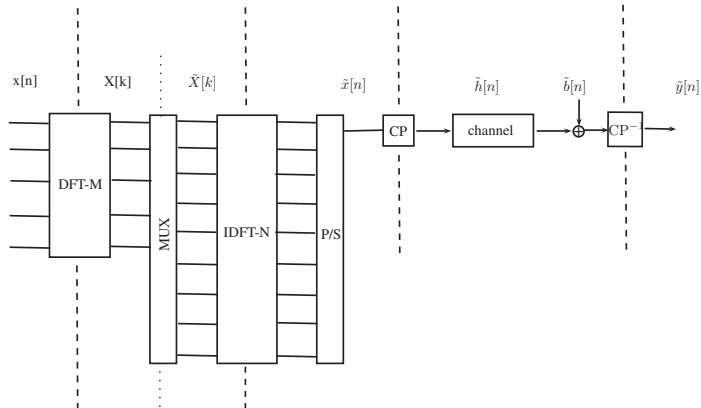
PAPR pour SC-FDMAs

Plan

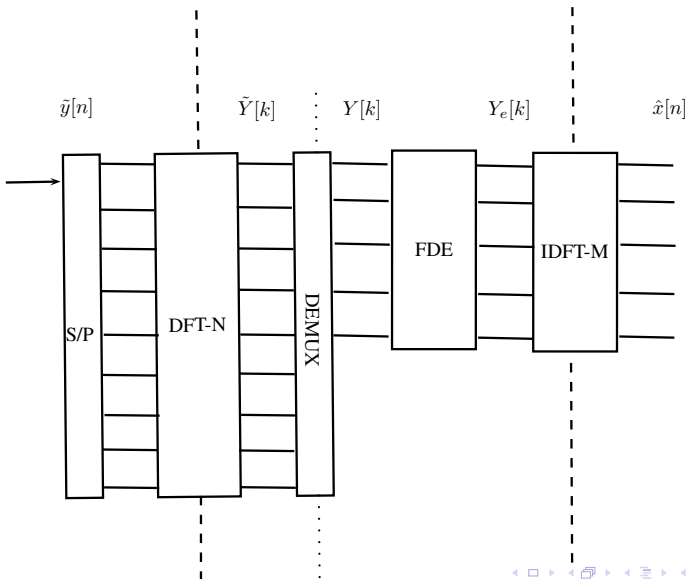
3 Egalisation et Analyse

- Modélisation SC-FDMA
- Modélisation EW-SC-FDMA
- Références

Emetteur



Récepteur



Principales notations et définitions

- TFD :

$$X[k] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- TFD inverse :

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+i \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \forall k = 1 : N-1$$

- Convolution circulaire :

$$\begin{aligned} TD : y[n] &\triangleq h \circledast x[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n - m \rangle_N], \quad \forall n = 0 : N-1 \end{aligned}$$

$$FD : Y[k] = H[k] X[k], \quad \forall k = 0 : N-1$$

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 **Egalisation et Analyse**
 - **Modélisation SC-FDMA**
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - Références

Modèle du signal en réception

- **Domaine fréquentiel :**

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \forall k = 1 : N - 1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k] Y[k] \\ &= W[k] H[k] X[k] + W[k] B[k], \forall k = 1 : M - 1 \end{aligned}$$

- **Domaine temporel :**

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \forall n = 1 : M - 1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \circledast x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \circledast x[n]}_{\text{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_i[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{avec } \tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$$

Puissance de bruit 1/3

- **Domaine temporel :**

$$\hat{b}[n] = TFD^{-1}(W[k]B[k]), \quad \forall n = 1 : M - 1 \quad (9)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]B[k]e^{-i\frac{2\pi}{M}nk} \quad (10)$$

- **Variance du bruit, cas générale :**

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{b}}^2 &\triangleq \mathbb{E}(|\hat{b}[n]|^2) \\ &= \frac{\sigma_B^2}{M} \times \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |W[k]|^2 \\ &= \sigma_{\tilde{b}_M}^2 \sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2 \end{aligned}$$

avec $\tilde{b}_M[n] = TFD^{-1}(B[k])$ et $w[n] = TFD^{-1}(W[k])$

Puissance de bruit 2/3

Cas MMSE

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (12)$$

$$\gamma_k = |H[k]|^2 \gamma \quad (13)$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma^2 |H[k]|^2}{(\gamma |H[k]|^2 + 1)^2} \quad (14)$$

Puissance de bruit 3/3

Cas ZF :

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2} \quad (15)$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{\gamma |H[k]|^2} \quad (16)$$

Puissance terme utile

- Signal utile en sortie de IDFT :

$$\hat{x}_u[n] = \tilde{w}[0]x[n] = x[n] \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \quad (17)$$

- Variance de $\hat{x}_u[n]$:

$$\sigma_{x_u}^2 = \sigma_x^2 \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \right|^2 \quad (18)$$

Puissance terme interférence entre symbole

- Variance de $\hat{x}_i[n]$:

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{x_t}^2 - \sigma_{x_u}^2 \quad (19)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{x_t}^2 &= \sigma_x^2 \sum_{m=0}^{M-1} |\tilde{w}[\langle n - m \rangle_M]|^2 \\ &= \sigma_x^2 \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{W}[k]|^2 \\ &= \sigma_x^2 \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |W[k]H[k]|^2 \end{aligned}$$

Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas général :

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\sigma_{x_u}^2}{\sigma_{x_t}^2 - \sigma_{x_u}^2 + \sigma_{\hat{b}}^2} \\ &= \frac{|\alpha|^2}{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} (|H[k]|^2 + \gamma^{-1}) |W[k]|^2 - |\alpha|^2} \end{aligned} \quad (20)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W[k] H[k]$$

Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas MMSE :

$$SNR = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (21)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma_k}{\gamma_k + 1}$$

- Cas ZF :

$$SNR = \frac{1}{\beta} \quad (22)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{\gamma_k}$$

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 **Egalisation et Analyse**
 - Modélisation SC-FDMA
 - **Modélisation EW-SC-FDMA**
 - Références

Modèle du signal en réception

Modèle domaine fréquentiel

- **Domaine fréquentiel sans combinaison :**

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W_0[k] Y[k] \\ &= W_0[k] \tilde{H}[k] X[k] + W_0[k] B[k], \quad \forall k \in I_1 \end{aligned}$$

- **Domaine fréquentiel avec combinaison :**

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W_1[k] Y_1[k] + W_2[k] Y_2[k], \quad \forall k \in I_2 \\ &= (W_1[k] \tilde{H}_1[k] + W_2[k] \tilde{H}_2[k]) X[k] + W_1[k] B_1[k] + W_2[k] B_2[k] \end{aligned}$$

avec $\tilde{H}[k]$ canal en réception + weighting

Modèle du signal en réception

Modèle équivalent

$$Y_e[k] = \begin{cases} \tilde{W}[k]X[k] + W_0[k]B[k] & , \forall k \in I_1 \\ \tilde{W}[k]X[k] + W_1[k]B_1[k] + W_2[k]B_2[k] & , \forall k \in I_2 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{W}[k] = \begin{cases} W[k]\tilde{H}[k] & , \forall k \in I_1 \\ W_1[k]\tilde{H}_1[k] + W_2[k]\tilde{H}_2[k] & , \forall k \in I_2 \end{cases}$$

Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas général :

$$SNR = \frac{|\alpha|^2}{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} (|\tilde{W}[k]|^2 + \gamma^{-1} |W[k]|^2) - |\alpha|^2} \quad (23)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{W}[k]$$

et

$$|W[k]|^2 = \begin{cases} |W_0[k]|^2 & , \forall k \in I_1 \\ |W_1[k]|^2 + |W_2[k]|^2 & , \forall k \in I_2 \end{cases}$$

⇒ valable pour tout type de combinaison

Plan

- 1 OFDM : un exemple forme d'onde circulaire
- 2 Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
 - SC-FDE
 - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
 - Spectral Shaping
 - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple
- 3 **Egalisation et Analyse**
 - Modélisation SC-FDMA
 - Modélisation EW-SC-FDMA
 - **Références**

Bibliographie

- [SESIA11] S Sesia et al., LTE – The UMTS Long Term Evolution, Wiley, 2011.
- [KHAN09] F. KHAN, *LTE for 4G Mobile Broadband Air Interface Technologies and Performance*, Cambridge University Press, 2009.
- [3GPP1] 3GPP R1-051335, “**Simulation Methodology of IFDMA and DFT DFT-Spread-OFDMA**,” Nov. 2005.
- [3GPP2] 3GPP R1-051352, “**Simulation methodology for EUTRA uplink : SC-FDMA and OFDMA**,” Nov. 2005.