

# Egalisation

## Modèle de canal à interférences entre symboles.

C. Poulliat

5 novembre 2023

# Plan

## 1 Communications avec interférences inter-symboles

# Plan

- 1 Communications avec interférences inter-symboles
  - Modèle de canaux multi-trajets
  - Modèle de canal discret équivalent

# Canal à interférences entre symboles

## Modélisation

### Signal émis en bande de base

On considère une modulation de type QAM d'ordre  $M$ .

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_e(t - kT), \quad s_k \in \mathbb{C}$$

- $\{s_k = I_k + jQ_k\}$  : séquence de symboles émis appartenant à une constellation M-QAM  $\mathcal{S}$  ( $|\mathcal{S}| = M = 2^m$ ),
- $T$  : période symbole,
- $h_e(t)$  : filtre de mise en forme à l'émission.

# Canal à interférences entre symboles

## Modélisation

### Signal émis en bande transposée (signal modulé)

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}[s(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\
 &= \operatorname{Re}[s(t)]\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \operatorname{Im}[s(t)]\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) \\
 &= I(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

avec

- $I(t) = \sum_k i_k h_e(t - kT)$  : signal en phase (PAM voie I),
- $Q(t) = \sum_k q_k h_e(t - kT)$  : signal en quadrature (PAM voie Q),

# Canal à interférences entre symboles

Modélisation : canal à bruit additif Gaussien

Signal reçu en bande transposée (signal modulé)

$$\begin{aligned}\tilde{r}(t) &= \tilde{s}(t) + \tilde{b}(t) \\ &= \sqrt{2}\operatorname{Re}\left[r(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]\end{aligned}\quad (2)$$

avec  $\tilde{b}(t)$  : bruit blanc thermique Gaussien

$$\begin{aligned}\tilde{b}(t) &= \sqrt{2}\operatorname{Re}[b(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \operatorname{Re}[b(t)]\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \operatorname{Im}[b(t)]\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) \\ &= b_i(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - b_q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

# Canal à interférences entre symboles

Modélisation : canal à bruit additif Gaussien

Signal reçu en bande de base (signal modulé)

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) + b(t) \\ &= \sum_k s_k h_e(t - kT_s) + b(t) \end{aligned}$$

où  $b(t)$  est un processus de bruit blanc complexe.

# Canal à interférences entre symboles

Modélisation : canal à bande limitée sélectif en fréquence

Signal reçu en bande transposée (signal modulé)

$$\tilde{r}(t) = \tilde{h}_c * \tilde{s}(t) + \tilde{b}(t)$$

où

$$\tilde{h}_c(t) = 2\text{Re} \left[ h_c(t) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

Signal reçu en bande de base (signal modulé)

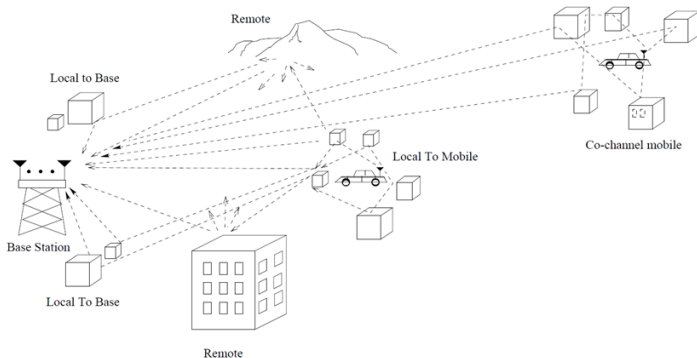
$$r(t) = h_e * s(t) + b(t) \quad (3)$$

$$= \sum_k s_k h_c * h_e(t - kT_s) + b(t) \quad (4)$$



# Canal à interférences entre symboles

Modélisation : canal à multi-trajets



# Canal à interférences entre symboles

Modélisation : canal à multi-trajets

Signal reçu en bande transposée (signal modulé)

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}(t) &= \alpha_0 \tilde{s}(t) + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \tilde{s}(t - \tau_l) + \tilde{b}(t) \\
 &= \alpha_0 \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ s(t) e^{+i2\pi f_0 t} \right] + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ s(t - \tau_l) e^{+i2\pi f_0 (t - \tau_l)} \right] + \tilde{b}(t)
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k e^{-i2\pi f_0 \tau_k} s(t - \tau_k) e^{+i2\pi f_0 t} \right] + \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ b(t) e^{+i2\pi f_0 t} \right] \tag{6}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ r(t) e^{+i2\pi f_0 t} \right] \tag{7}$$

# Canal à interférences entre symboles

## Modélisation

### Signal reçu équivalent en bande de base

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \left[ \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l \exp(-j2\pi f_0 \tau_l) h_e(t - kT - \tau_l) \right] + b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_c * h_e(t - kT) + b(t) \\
 &= h_c * s(t) + b(t)
 \end{aligned} \tag{8}$$

avec  $h_c(t)$  : canal de propagation *équivalent* en bande de base

$$\begin{aligned}
 h_c(t) &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} \delta(t - \tau_l) \\
 H_c(f) &= \mathcal{F}(h_e(t)) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} e^{-j2\pi \tau_l f}
 \end{aligned} \tag{9}$$

# Canal à interférences entre symboles

Modélisation - Filtrage adapté blanchissant

## Filtrage adapté et modèle équivalent bande de base

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h_r * r(t) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_r * h_c * h_e(t - kT) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h(t - kT) + b_r(t)
 \end{aligned} \tag{10}$$

avec  $h(t) = h_r * h_c * h_e(t)$  : enveloppe complexe du canal global  
*équivalent* en bande de base

- Récepteur optimal : *Whitened Matched Filter* [Forney]

- 1  $h_r(t)$  est le filtre adapté à  $g(t) = h_c * h_e(t)$ ,
- 2 échantillonnage au rythme symbole  $T_s$ , IES toujours présente et nécessité d'un filtre blanchissant,
- 3 détection au sens ML ou critère de détection sous-optimaux.

pas très réaliste dans un contexte canal  $h_c(t)$  variable

# Canal à interférences entre symboles

Modélisation - Filtrage adapté partiel

## Filtrage adapté et modèle équivalent bande de base

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h_r * r(t) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_r * h_c * h_e(t - kT) + h_r * b(t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h(t - kT) + b_r(t)
 \end{aligned} \tag{11}$$

avec  $h(t) = h_r * h_c * h_e(t)$  : enveloppe complexe du canal global  
*équivalent* en bande de base

- Récepteur sous-optimal : *Partial Matched Filter*

- ❶  $h_r(t)$  est le filtre adapté à  $h_e(t)$ ,
- ❷ échantillonnage au rythme symbole  $T_s$ , IES toujours présente, mais plus nécessité d'un filtre blanchissant,
- ❸ détection au sens ML ou critère de détection sous-optimaux (égalisation linéaire).

# Canal à interférences entre symboles

## Modélisation

### Modèle discret équivalent bande de base (Temps symbole)

$$\begin{aligned}
 y[n] &\triangleq y(nT) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h((n-k)T) + b_r(nT) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_{n-k} + b[n]
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

avec  $h[n] = h_r * h_c * h_e(nT)$  : réponse impulsionnelle discrète du canal équivalent en bande de base.

# Canal à interférences entre symboles

## Modélisation

### Bruit échantillonné

$b_r(t)$  est Gaussien car filtré de  $b(t)$ ,  $b[n]$  non corrélés et Gaussiens donc indépendants

$$\overset{\circ}{\Gamma}_b(f) = N_0$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{b_r}(f) = N_0 |H_e(f)|^2$$

$$\gamma_b(p) = N_0 \delta(p) \quad (13)$$

# Bibliographie

- B. P. Lathi and Zhi Ding, Modern Digital and Analog Communication Systems, Oxford University Press, 2009.
- John Barry, Edward Lee, David Merserschnitt, Digital Communications, Kluwer Academic Publisher, Third edition.
- Andreas F. Molisch, Wireless Communications, 2nd Edition, IEEE Press-Wiley, 2010.
- Digital Communications, 4th edition, John G. Proakis, Mc Graw-Hill.
- J. Choi, Adaptive and Iterative Signal Processing in Communications, Cambridge University Press, 2006.
- Zhi Ding and Ye Li, Blind Equalization and Identification , Marcel Dekker, New York, 2001.