Egalisation linéaire temporelle

C. Poulliat

5 novembre 2023

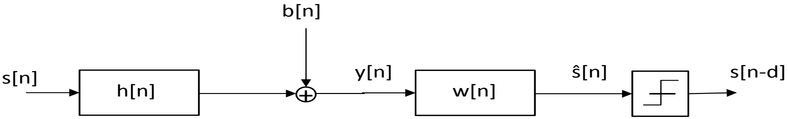
Plan

1. Egalisation linéaire : principe
2. Critère Zero-Forcing (ZF)
3. Egaliseur de Wiener, critère MMSE

Plan

Egalisation linéaire

Principes



- $w[n]$ est un filtre dît égaliseur,
- différentes structures possibles : FIR ou IIR,
- différents critères d'optimisation pour la décision : ZF ou MMSE (Wiener).

Plan

2 Critère Zero-Forcing (ZF)

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure non contrainte		
En Temporel		Domaine transformé en Z
$\hat{s}[n] = w_{ZF} * y(n) = s[n-d]$	$\Longleftrightarrow$	$\hat{s}(z) = w_{ZF}(z)h(z)s(z) = s(z)z^{-d}$
$w_{zf} * h[n] = \delta[n-d]$	$\Longleftrightarrow$	$w_{zf}(z) = \frac{z^{-d}}{h(z)}$

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure FIR ZF partiel par inversion directe : $\mathbf{w}_{zf} = \{w_k, k = -N \ldots + N\}$

$$w_{zf} * h[n] = \sum_{k=-N}^{N} w_k h_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \ldots, \pm N \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} h[0] & \ldots & \ldots & h[-N] & \ldots & \ldots & h[-2N] \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ h[N-1] & \ldots & & h[-1] & & \ldots & h[-N-1] \\ h[N] & \ldots & & h[0] & & \ldots & h[-N] \\ h[N+1] & \ldots & & h[1] & & \ldots & h[-N+1] \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ h[2N] & \ldots & & h[N] & & \ldots & h[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{-N} \\ \vdots \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Hw} = \Delta$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^{-1}\Delta$$

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure FIR ZF par méthode des moindres carrés :

$$e[n] = w[n] * h[n] - \delta[n-d]$$

$$T(z) = w(z)h(z) = \sum_{k=0}^{L} t[k]z^{-k}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{Hw},\ \mathbf{w} = [w[0], \cdots, w[L_w]]^\top$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ h[L_h] & & & h[0] & & \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & & h[L_h] & & \dots & h[0] \\ 0 & \dots & 0 & h[L_h] & & h[1] \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & h[L_h] \end{pmatrix}$$

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

Structure FIR : ZF partiel, méthode des moindres carrés

Pour calculer $\mathbf{w}_{\mathrm{ZF-LS}} = [w[0], \cdots, w[L_w]]^\top$,

1. Calculer $\mathbf{H}^\sharp = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger$;
2. Calculer $\mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{H}^\sharp$;
3. Sélectionner d tel que $p_{d,d}$ est la plus grande valeur de la diagonale ;
4. Sélectionner la d-ième colonne de $\mathbf{H}^\sharp$, identique au calcul $\mathbf{w}_{\mathrm{ZF-LS}} = \mathbf{H}^\sharp \mathbf{1}_d$.

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure FIR ZF par méthode des moindres carrés :

$$\mathrm{J}(\mathrm{w}) = \sum_{n=0}^{L} |e[n]|^2 = \|\mathrm{t} - 1_d\|_2^2 = \|\mathrm{Hw} - 1_d\|_2^2$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & d & & & \\ \mathbf{1}_d = & (0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0)^\top \end{array}$$

$$\mathbf{w}_{ZF-LS} = \left(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d$$

$$J_{\mathbf{w},\min}(d) = \left\| \mathbf{H} \left(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d - \mathbf{1}_d \right\|_2^2 = 1 - p_{d,d}$$

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) - Analyse en présence de bruit

structure non contrainte

En Temporel	Domaine fréquentiel
$\hat{s}[n] = s[n-d] + \underbrace{w_{ZF} * b[n]}_{b_f[n]}$	$\mathring{\gamma}_{b_f}(\nu) = \sigma_b^2 \left\lvert \mathring{w}_{zf}(\nu) \right\rvert^2$ $\Downarrow$ $\sigma_{b_f}^2 = \sigma_b^2 \int_{[1]} \frac{1}{\lvert \mathring{h}(\nu) \rvert^2} \mathrm{d}\nu$

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{IR-ZF}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{b_w}^2} = \frac{\sigma_s^2}{\int_{[1]} \frac{N_0}{\lvert h(\nu) \rvert^2} \mathrm{d}\nu}$$

structure contrainte FIR (sans délai)

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= w[n] * h[n] * s[n] + w[n] * b[n] \\ &= s[n] + \sum_{\lvert k \rvert > N} (w * h)[k] s[n-k] + w[n] * b[n] = s[n] + b_i[n] \end{aligned}$$

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{FIR-ZF}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{b_i}^2}$$

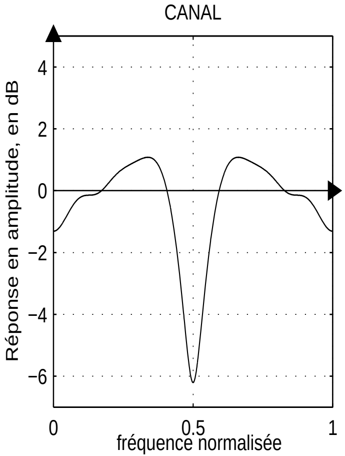
Egalisation linéaire

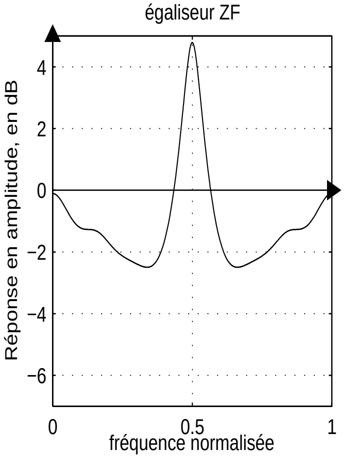
Critère zéro-forcing (ZF) - Analyse en présence de bruit

- Amplification du bruit : si $\exists \nu_0 \in [0,1]$, tel que $\overset{\circ}{h}(\nu_0) = 0$, le gain du filtre ZF peut devenir infini et donc la puissance de bruit filtré est peut être très grande,
- faible complexité mais forte amplification du bruit

Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) - Illustration



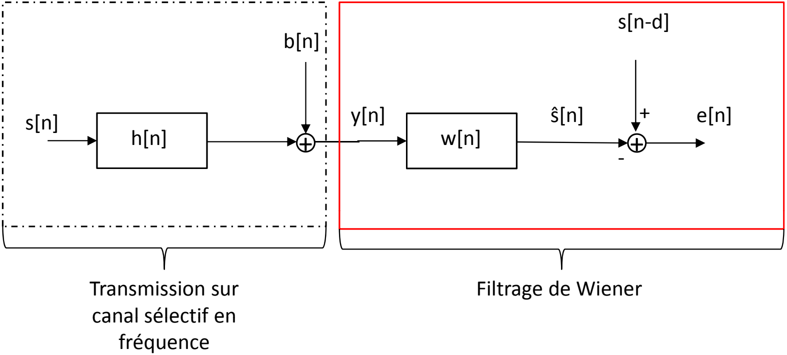


Plan

3. Egaliseur de Wiener, critère MMSE

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener pour l’égalisation



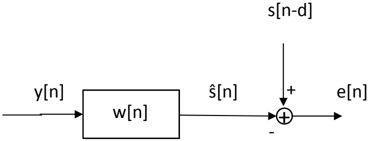
Filtrage de Wiener appliquée à l’égalisation

Trouver le filtre optimal $w_{opt}(z)$ qui minimiser la fonction de coût

$$J_{\mathbf{w}} = \mathbb{E}\left(|e[n]|^2\right), \ e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d], \ s[n] = w * y[n]$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation



Filtrage de Wiener : cadre générale

Trouver le filtre optimal $w_{opt}(z)$ qui minimiser la fonction de coût

$$J(\mathbf{w}) = \mathbb{E}\left(|e[n]|^2\right), \; e[n] = s[n-d] - \hat{s}[n]$$

Egalisation linéaire

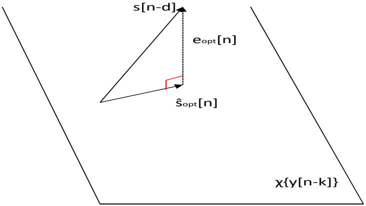
Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Principe d'othogonalité

$$\text{CNS} : \; \mathbb{E}(e_{opt}[n]y[n-k]^*) = 0, \; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Interprétation géométrique

- Opérateur $\mathbb{E}(XY*) =< X, Y >$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ si variables centrées,
- l'erreur optimale est donc obtenue si elle est orthogonale à l'espace des observations (meilleure estimation obtenue)



Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Wiener non contraint

- Expression du filtre de Wiener non contraint :
  $h^*(z) = \sum_n h^*(n) z^{-n}$

$$\text{Domaine en z : } w_\infty(z) = \frac{\sigma_s^2 z^{-d} h^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 h(z) h^*(z^{-1}) + \sigma_b^2}$$

$$\text{Domaine fréquentiel : } \mathring{w}_\infty(\nu) = e^{-j2\pi\nu d} \frac{\sigma_s^2 \mathring{h}^*(\nu)}{\sigma_s^2 |\mathring{h}(\nu)|^2 + \sigma_b^2}$$

- Equivalence à fort SNR avec le filtre ZF :

$$w_\infty(z) \approx w_{zf}(z)$$

- Equivalence à faible SNR avec le filtre MF :

$$w_\infty(z) \rightarrow w_{MF}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d} h^*\left(z^{-1}\right)$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Wiener non contraint, analyse de performance

1. **Biais sur l'estimateur MMSE :** $\hat{x}[n] = \alpha s[n] + e'[n]$

$$\alpha = \int_{[1]} \frac{\mathrm{SNR}(\nu)}{\mathrm{SNR}(\nu)+1} \mathrm{d}\nu, \quad \mathrm{SNR}(\nu) = \frac{\sigma_s^2 |\mathring{h}(\nu)|^2}{N_0}$$

2. **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé :**

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{biased}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_e^2} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

3. **Rapport signal sur bruit, estimateur non biaisé :**

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{unbiased}} = \frac{\alpha^2 \sigma_s^2}{\sigma_{e'}^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

4. **Equivalence entre ces deux quantités :**

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{unbiased}} = \mathrm{SNR}_{\mathrm{biased}} - 1.$$

5. **Relation d'ordre avec l'égaliseur ZF :**

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{unbiased}} > \mathrm{SNR}_{\mathrm{ZF}}$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Wiener RIF de taille *N*

$$s\hat{[n]} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_{n-k} \text{ et } \mathbb{E}(e_{opt}[n]y[n-p]^*) = 0, \ \forall p \in [0, N-1]$$

- Expression générale :

$$R_y\mathbf{w} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0\cdots N-1}] = \mathbf{\Gamma}_{sy}$$

- Expression détaillée : $e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d] = \mathbf{w}^\top \mathbf{Y}_n - s[n-d]$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H}S_n + \mathbf{B}_n$$

$$\mathbf{w} = \sigma_s^2(\sigma_s^2\mathbf{H}^*\mathbf{H}^\top + \sigma_b^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{1}_d$$

$$\mathbf{1}_d = [0\cdots 0 \quad \underbrace{1}_{\text{position d}} \quad 0\cdots 0]^\top$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Modèle matriciel détaillé 1/2

$$\mathbf{Y}_n = [y[n] \; \ldots y[n-N+1]]^\top$$

$$\mathbf{B}_n = [b[n] \; \ldots b[n-N+1]]^\top$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & \ldots & h[L-1] & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & h[0] & \ldots & h[L-1] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & h[0] & \ldots & h[L-1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_n = [s[n] \; \ldots s[n-N-L+2]]^\top$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Modèle matriciel détaillé 2/2

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \gamma_Y(0) & \gamma_Y(-1) & \cdots & \gamma_Y(-N+1) \\ \gamma_Y(1) & \gamma_Y(0) & \cdots & \gamma_Y(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_Y(N-1) & \gamma_Y(N-2) & \cdots & \gamma_Y(0) \end{pmatrix} = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_n^* \mathbf{Y}_n^\top)$$

$$\mathbf{\Gamma}_{sy} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0\cdots N-1}] = \mathbb{E}(s[n-d]\mathbf{Y}_n^*)$$

Erreur quadratique moyenne minimum et décomposition du critère

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= \sigma_s^2 + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} - 2Re(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{\Gamma}_{sy}) \\ & \Downarrow \\ \sigma_{e,\mathrm{opt}}^2 &= \sigma_s^2 - \mathbf{\Gamma}_{sy}^\dagger \mathbf{w} = \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{\Gamma}_{sy} \\ &= \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} = \sigma_s^2 (1 - \underbrace{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top \mathbf{w}}_{IES} - \underbrace{\mathrm{snr}^- 1 \|w\|^2}_{bruit}) \end{aligned}$$

Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Optimisation du délai *d*

$$\sigma^2_{e,\mathrm{opt}} = \sigma^2_x - \sigma^2_x \mathbf{1}_d^T \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma^2_b}{\sigma^2_x} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d \qquad (1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma^2_b}{\sigma^2_x} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^*$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_{e,\mathrm{opt}} &= \sigma^2_x (1 - \mathbf{1}_d^T \mathbf{P} \mathbf{1}_d) \\ &= \sigma^2_x (1 - \mathbf{p}_{d,d}) \qquad (2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ d optimal pour $\mathbf{p}_{d,d}$ max. avec $0 < \mathbf{p}_{d,d} < 1$

Egalisation linéaire

Filtre de Wiener RIF

résumé - 1

1. **Expression :**

$$\mathbf{w} = \sigma_s^2(\sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d$$

où

$$\mathbf{1}_d = [0 \cdots 0 \quad \underbrace{1}_{\text{position d}} \quad 0 \cdots 0]^\top$$

2. **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé :**

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\top \left[\mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{H}^*, \ \alpha = \mathbf{p}_{d,d}$$

il vient

$$\text{SNR}_{\text{FIR,biased}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Egalisation linéaire

Filtre de Wiener RIF

résumé - 2

1. **Rapport signal sur bruit, estimateur non biaisé :**

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{FIR,unbiased}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \mathrm{SNR}_{\mathrm{FIR,biased}} - 1.$$

2. **Equivalence à fort SNR avec le filtre ZF :** En utilisant associés au cas Wiener RIF, il vient

$$\mathbf{w}_\infty \approx \mathbf{w}_{\mathrm{ZF-LS}} = (\mathbf{H}^*\mathbf{H}^\top)^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{1}_d.$$

3. **Equivalence à faible SNR avec le filtre adapté :**

$$\overline{w}_\infty(z) \approx \overline{w}_{\mathrm{MF}}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d}\overline{h}^*(z^{-1})$$

Bibliographie

- B. P. Lathi and Zhi Ding, Modern Digital and Analog Communication Systems, Oxford University Press, 2009.
- John Barry, Edward Lee, David Mersserschnitt, Digital Communications, Kluwer Academic Publisher, Third edition.
- Andreas F. Molisch, Wireless Communications, 2nd Edition, IEEE Press-Wiley, 2010.
- Digital Communications, 4th edition, John G. Proakis, Mc Graw -Hill.
- J. Choi, Adaptive and Iterative Signal Processing in Communications, Cambridge University Press, 2006.
- Zhi Ding and Ye Li, Blind Equalization and Identification , Marcel Dekker, New York, 2001.