



**Département Sciences du Numérique**

**1SN**

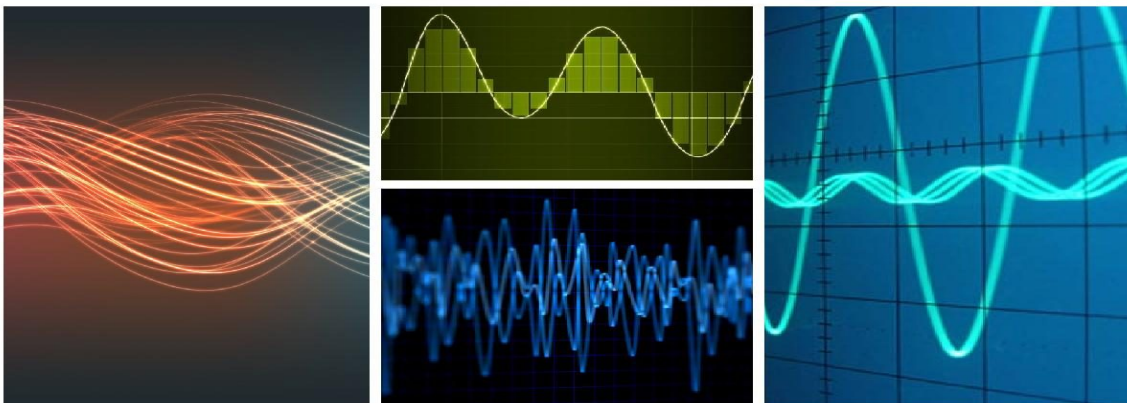
---

## Traitement du Signal

### Partie II : Signaux et systèmes à temps discret

---

*Auteur : Nathalie Thomas*



Version 2.0, Septembre 2022

*Release 2022*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.1</b>	<b>Numérisation du signal : échantillonnage</b>	<b>8</b>
1.1.1	Principe, impact	8
1.1.2	Restitution par filtrage	9
1.1.3	Remarques	10
<b>1.2</b>	<b>Numérisation du signal : Quantification</b>	<b>10</b>
1.2.1	Quantification uniforme : principe, impact	10
1.2.2	Quantification non uniforme	12
<b>1.3</b>	<b>Numérisation du signal : exemples sur une image</b>	<b>13</b>
<b>1.4</b>	<b>Outils de traitement du signal à numériser</b>	<b>14</b>
<b>1.5</b>	<b>Notion de temps de traitement et de traitement temps réel</b>	<b>14</b>
<b>1.6</b>	<b>Exercices</b>	<b>15</b>
1.6.1	Exercice 1 : Cosinus mal échantillonné	15
1.6.2	Exercice 2 : Effet de l'échantillonnage	15
1.6.3	Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal passe-bande	15
1.6.4	Exercice 4 : Echantillonneur moyennneur	16
1.6.5	Exercice 5 : Echantillonneur bloqueur	16
1.6.6	Exercice 6 : Signal à spectre non borné - Recherche de la $F_e$	16
1.6.7	Exercice 7 : Quantification d'un sinusoïde	17
<b>2</b>	<b>Transformée de Fourier Discrète (TFD)</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>De la TF à la TFD</b>	<b>19</b>
2.1.1	Introduction	19
2.1.2	Echantillonnage	20

2.1.3	Limitation de la durée du signal à $N$ points	20
2.1.4	Calcul de $N$ points du spectre	24
2.1.5	Expressions de la TFD et de la TFD inverse	26
<b>2.2</b>	<b>Propriétés de la TFD</b>	<b>26</b>
2.2.1	Linearité	26
2.2.2	Translation $\Rightarrow$ rotation de phase	26
2.2.3	Symétrie Hermitienne	27
2.2.4	Convolution circulaire	27
2.2.5	Egalité de Parseval	29
2.2.6	Algorithme de calcul rapide	29
<b>2.3</b>	<b>Algorithme de calcul rapide (FFT) de Cooley Tuckey</b>	<b>30</b>
2.3.1	Principe	30
2.3.2	Exemple pour $N = 2^3 = 8$	31
<b>2.4</b>	<b>Exercices</b>	<b>32</b>
2.4.1	Exercice 1 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de la limitation de la durée du signal	32
2.4.2	Exercice 2 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de l'échantillonnage du signal	33
2.4.3	Exercice 3 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : échantillonnage et limitation de la durée du signal	33
2.4.4	Exercice 4 : Etude de la TFD d'un signal à spectre discontinu : calcul d'un nombre fini de points du spectre	33
<b>3</b>	<b>Fonctions d'inter et d'auto correlation</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Calcul dans le domaine temporel</b>	<b>35</b>
3.1.1	Signaux déterministes	35
3.1.2	Signaux aléatoires	35
<b>3.2</b>	<b>Calcul dans le domaine fréquentiel</b>	<b>38</b>
<b>3.3</b>	<b>Quelques propriétés</b>	<b>39</b>
3.3.1	Symétrie Hermitienne	39
3.3.2	Bornes	39
<b>4</b>	<b>Densité Spectrale de Puissance (DSP)</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Estimateurs "de base" : corrélogramme, périodogramme</b>	<b>41</b>
4.1.1	Définitions	41
4.1.2	Problèmes posés par ces estimateurs "de base"	42
<b>4.2</b>	<b>Périodogramme avec fenêtrage</b>	<b>42</b>
<b>4.3</b>	<b>Périodogramme cumulé (ou de Bartlett)</b>	<b>43</b>
<b>4.4</b>	<b>Périodogramme de Welch</b>	<b>43</b>
<b>4.5</b>	<b>Exemple sur une ligne d'image SAR</b>	<b>43</b>

<b>5</b>	<b>La transformée en z</b>	<b>45</b>
<b>5.1</b>	<b>Définition</b>	<b>45</b>
<b>5.2</b>	<b>Convergence</b>	<b>45</b>
<b>5.3</b>	<b>Propriétés</b>	<b>46</b>
5.3.1	Linéarité	46
5.3.2	Décalage temporel	46
5.3.3	Changement d'échelle	46
5.3.4	Dérivabilité	46
5.3.5	Produit de convolution	46
<b>5.4</b>	<b>Transformée en z inverse</b>	<b>47</b>
5.4.1	Définition	47
5.4.2	Preuve	47
<b>5.5</b>	<b>Tables de transformées en z</b>	<b>48</b>
<b>5.6</b>	<b>Exercices</b>	<b>49</b>
5.6.1	Exercice 1 : Convergence	49
5.6.2	Exercice 2 : Fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps	49
<b>6</b>	<b>Filtrage numérique</b>	<b>51</b>
<b>6.1</b>	<b>Un outil d'étude : la transformée en z</b>	<b>51</b>
<b>6.2</b>	<b>Définitions</b>	<b>51</b>
6.2.1	Linéarité	51
6.2.2	Invariance temporelle	51
6.2.3	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert	52
6.2.4	Filtres numériques rationnels	52
6.2.5	Réponse en fréquence et temps de propagation de groupe (TPG)	53
<b>6.3</b>	<b>Réalisabilité d'un filtre numérique</b>	<b>53</b>
<b>6.4</b>	<b>Classification des filtres numériques rationnels : RIF, RII</b>	<b>54</b>
6.4.1	Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)	54
6.4.2	Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)	55
<b>6.5</b>	<b>Stabilité des filtres numériques rationnels récurrents (RII)</b>	<b>55</b>
6.5.1	Condition de stabilité	55
6.5.2	Remarques	56
<b>6.6</b>	<b>Synthèse des filtres numériques rationnels</b>	<b>57</b>
6.6.1	Introduction	57
6.6.2	Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie	59
6.6.3	Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie	63

---

<b>6.7</b>	<b>Implantation des filtres numériques rationnels</b>	<b>67</b>
6.7.1	Structure directe . . . . .	67
6.7.2	Structure canonique . . . . .	68
6.7.3	Structures décomposées . . . . .	68
6.7.4	Structure non récursive . . . . .	70
<b>6.8</b>	<b>Exercices</b>	<b>70</b>
6.8.1	Exercice 1 . . . . .	70
6.8.2	Exercice 2 . . . . .	70
6.8.3	Exercice 3 : synthèse d'un filtre passe-bas de type RIF . . . . .	71
6.8.4	Exercice 4 : étude de la cellule du second ordre . . . . .	71
6.8.5	Exercice 5 : synthèse RII guidée . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Références . . . . .</b>	<b>75</b>

empty

# 1. Introduction

## Traitement numérique du signal

**Le traitement numérique du signal désigne l'ensemble des opérations effectuées sur un signal numérique à traiter, défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs, pour fournir un autre signal numérique, également défini à des instants discrets par un autre nombre fini de valeurs, représentant le signal traité.**

Travailler avec des signaux et des traitements numériques présente un certain nombre d'avantages. Les principaux étant :

- Une plus grande robustesse vis à vis du bruit (dans le cadre des transmissions).
- Une meilleure stabilité et reproductibilité des équipements. Il est, en effet, possible, en numérique, de construire des systèmes identiques, comme il est possible d'anticiper les dérives temporelles liées aux conditions extérieures (température, pression...). Les marges à prendre en compte au moment de la conception des équipements sont donc réduites.
- La possibilité de définir des fonctions nouvelles, notamment des fonctions évoluant dans le temps tel que, par exemple, le filtrage adaptatif, mais également des fonctions de compression, de codage correcteur d'erreurs...

Le nombre fini de valeurs représentant le signal numérique à traiter peut être issu d'un processus numérique (on dit aussi discret) ou provenir d'un signal analogique (représentant une grandeur physique qui évolue dans le temps) qui a été numérisé (on dit aussi discrétisé).

## Numérisation d'un signal

**Pour numériser un signal analogique (défini à tout instant par des valeurs réelles) deux opérations sont nécessaires : une opération d'échantillonnage (discrétisation dans le domaine temporel) et une opération de quantification (discrétisation dans le domaine des amplitudes).**

Nous allons considérer, dans la suite, des signaux déterministes et regarder plus en détail les opérations d'échantillonnage et de quantification. Les résultats obtenus restent valables pour des signaux aléatoires. Seul le formalisme utilisé pour les démonstrations changerait en faisant appel aux équations normales.

## 1.1 Numérisation du signal : échantillonnage

Un signal échantillonné est un signal défini à des instants discrets.

### 1.1.1 Principe, impact

Nous considérons ici un échantillonnage idéal périodique et un signal à échantillonner,  $x(t)$ , déterministe. Si nous notons  $T_e$  la **période d'échantillonnage**, le signal  $x(t)$  échantillonné de manière périodique à  $T_e$  est constitué d'une succession d'éléments prélevés tous les  $T_e$  :  $\{x(kT_e)\}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . La figure 1.1 présente un exemple d'échantillonnage d'une fonction sinusoïdale.

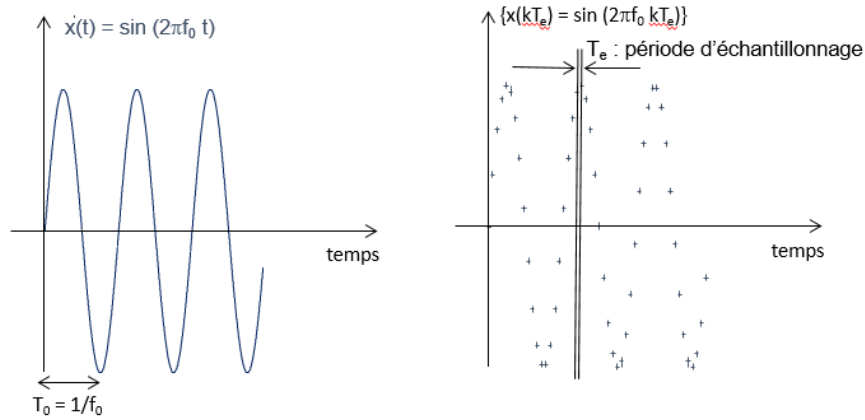


FIGURE 1.1 – Exemple de sinusoïde échantillonnée

Afin d'étudier l'effet de cet échantillonnage temporel, nous allons associer à  $\{x(kT_e)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , le modèle à temps continu suivant :

$$x_e(t) = x(t) \amalg_{T_e}(t),$$

où  $\amalg_{T_e}(t)$  représente le peigne de Dirac de largeur  $T_e$ . Si  $X(f)$  est la Transformée de Fourier de  $x(t)$  alors la transformée de Fourier de  $x_e(t)$  est donnée par :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \delta(f - kF_e) = F_e \sum_n X(f - kF_e)$$

où  $F_e = \frac{1}{T_e}$  représente la **fréquence d'échantillonnage** (nombre d'échantillons prélevés par unité de temps). La transformée de Fourier du signal  $x(t)$  est donc périodisée tous les  $F_e$  par l'opération d'échantillonnage. Afin d'éviter le recouvrement des périodisations (aliasing) la fréquence d'échantillonnage doit être choisie de manière à ce que l'on ait  $F_{max} < F_e - F_{max}$ , si  $F_{max}$  représente la fréquence maximale de  $X(f)$ .



## Théorème d'échantillonnage de Shannon

**Afin de conserver la même information dans le signal échantillonné et dans le signal à temps continu, la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  doit être choisie de manière à respecter la condition suivante :**

$$F_e > 2F_{max},$$

**si  $F_{max}$  représente la fréquence maximale de la transformée de Fourier du signal. Cette condition s'appelle la condition de Shannon.**

Claude Shannon est un ingénieur en génie électrique et un mathématicien né en 1916 aux Etats Unis. Il est un des pères de la théorie de l'information. Il a montré en 1949 que tout signal à temps continu dont le spectre est limité en bande pouvait être représenté, sans perte d'information, par une série d'échantillons du signal d'origine, à condition de correctement choisir la fréquence à laquelle on prélève ces échantillons.

## 1.1.2 Restitution par filtrage

**Si la condition de Shannon est respectée**, il est alors possible de reconstituer le signal  $x(t)$ , à partir de la suite des échantillons prélevés tous les  $T_e$ , en utilisant un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c \in [F_{max} F_e - F_{max}]$ . En notant  $y(t)$  le signal reconstitué et  $Y(f)$  sa transformée de Fourier, nous avons :

$$Y(f) = H_{PB}(f)X_e(f)$$

et donc :

$$y(t) = h_{PB}(t) * x_e(t) = h_{PB}(t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) h_{PB}(t - kT_e)$$

La reconstitution par filtrage est donc équivalente à une interpolation. Le signal est reconstruit en sommant les décalages, tous les  $T_e$ , de la fonction d'interpolation  $h_{PB}(t)$  pondérée par les échantillons du signal.

## Formule de reconstitution de Shannon

**Lorsque  $F_e = 2F_{max}$  (limite de Shannon), un seul filtre permet de reconstituer le signal de départ à partir des échantillons prélevés tous les  $T_e$  : c'est un filtre passe-bas idéal de réponse en fréquence  $H_{PB}(f) = \Pi_{F_e}(f)$ , avec  $F_e = \frac{1}{T_e}$  et  $\Pi_{F_e}(f) = 1$  pour  $f \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$ . Sa réponse impulsionnelle est donc  $h_{PB}(t) = F_e \text{sinc}(\pi F_e t)$  et le signal restitué s'écrit alors :**

$$y(t) = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc}(\pi F_e(t - kT_e))$$

**Cette expression est appelée formule de reconstitution de Shannon.**

La formule de reconstitution de Shannon permet de voir l'échantillonnage idéal d'une autre manière : comme étant la décomposition du signal sur la base orthogonale des fonctions  $\text{sinc}(\pi F_e(t - kT_e))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si, par contre, la condition de Shannon n'est pas respectée, il n'est alors plus possible de reconstituer le signal  $x(t)$ , à partir de la suite des échantillons prélevés tous les  $T_e$ , car les périodisations de  $X(f)$  tous les  $F_e$  vont venir se superposer à  $X(f)$ . On parle de repliement ou d'aliasing (voir exercice 1.6.2).

On verra néanmoins dans l'exercice 1.6.3 que pour certains signaux, présentant des propriétés particulières, il est possible d'échantillonner sans perte d'information en ne respectant pas la condition de Shannon.

### 1.1.3 Remarques

- Lorsque le signal  $x(t)$  a un spectre de type passe-bande, il est possible de ne pas respecter la condition de Shannon tout en étant capable de reconstituer le signal de départ. La condition est alors que, par un choix astucieux de  $F_e$ , les repliements puissent se faire dans les trous du spectre de départ (voir exercice 1.6.2).
- L'échantillonnage présenté plus haut est un échantillonnage idéal. En pratique, il est impossible de prélever un échantillon de signal toutes les  $T_e$  secondes. On pourra, par exemple,
  - Utiliser un filtre, mais qui ne sera pas un filtre idéal. Il est alors nécessaire de suréchantillonner par rapport à la limite de Shannon.
  - Procéder par extrapolation :  $x(kT_e + \tau) = x(kT_e)$  pour  $0 \leq \tau \leq T_e$  (bloqueur d'ordre 0) ou  $x(kT_e + \tau) = x(kT_e) + \frac{\tau}{T_e} (x(kT_e) - x((k-1)T_e))$  pour  $0 \leq \tau \leq T_e$  (bloqueur d'ordre 1 ou extrapolateur linéaire)
  - Procéder par interpolation : par exemple  $x(kT_e + \tau) = x(kT_e) + \frac{\tau}{T_e} (x((k+1)T_e) - x(kT_e))$ ,  $0 \leq \tau \leq T_e$ , pour un interpolateur d'ordre 1 (causal à un retard près)...

Les exercices 1.6.3 et 1.6.5 étudient deux méthodes "pratiques" d'échantillonnage.

- Lorsque le signal  $x(t)$  ne présente pas de fréquence maximale  $F_{max}$  mais que son spectre décroît quand la fréquence augmente, il est alors possible de réaliser une opération d'échantillonnage avec une réversibilité acceptable. On se définit alors une fréquence maximale, correspondant à l'atténuation minimale souhaitée par rapport à la valeur maximale du spectre, on positionne un filtre dit filtre anti-repliement, qui va couper le spectre au delà de la fréquence maximale choisie, puis on échantillonne (voir exercice 1.6.6).
- On définit en numérique des fréquences normalisées :  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$  qui sont donc sans dimension et qui permettent de s'affranchir de la connaissance de la valeur de  $F_e$  dans les traitements à réaliser sur le signal.

## 1.2 Numérisation du signal : Quantification

Un signal quantifié est un signal dont les amplitudes ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

### 1.2.1 Quantification uniforme : principe, impact

Chaque valeur du signal sera approchée par un multiple entier d'une quantité élémentaire appelée **pas de quantification**. Le nombre de valeurs possibles, pour l'amplitude du signal après quantification, va être donné par le **nombre de bits de quantification**, utilisés : avec  $nb$  bits on pourra coder  $2^{nb}$  niveaux sur la dynamique  $D$  du signal. Dans le cas d'une quantification uniforme (pas de quantification  $q$  constant sur toute la dynamique du signal), le pas de quantification est

donné par :  $q = \frac{D}{2^n b}$ . La figure 1.2 présente un exemple de quantification uniforme d'une fonction sinusoïdale.

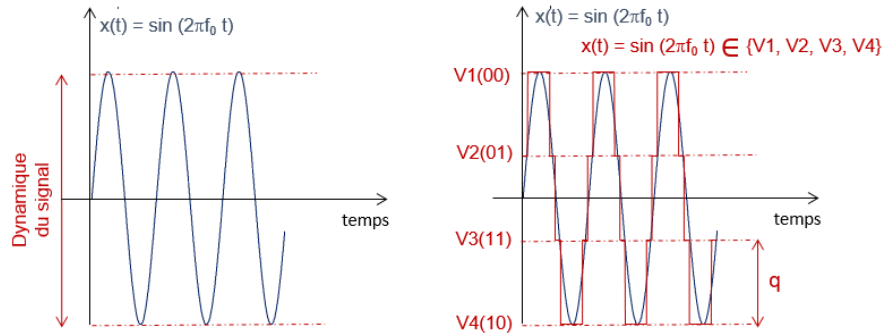


FIGURE 1.2 – Exemple de sinusoïde quantifiée.

**Plusieurs types de quantification existent.** On peut, par exemple, affecter tous les échantillons de signal appartenant à un niveau donné à la valeur min de ce niveau (quantification par troncature : on approche par  $nq$  toutes les valeurs de signal comprises entre  $nq$  et  $(n+1)q$ ) ou bien affecter à la valeur  $nq$  toutes les valeurs de signal comprises entre  $(n - \frac{1}{2})q$  et  $(n + \frac{1}{2})q$  (quantification par arrondi). Dans tous les cas, l'opération de quantification est une opération non linéaire irréversible. Cependant, si elle est effectuée dans de bonnes conditions (pas d'écrtage du signal, pas de quantification suffisamment fin) elle est équivalente à l'ajout d'un bruit,  $n_Q(t)$ , sur le signal non quantifié de départ  $x(t)$  pour donner le signal quantifié  $x_Q(t)$  (voir figure 1.3 pour un exemple) :

$$x_Q(t) = x(t) + n_Q(t),$$

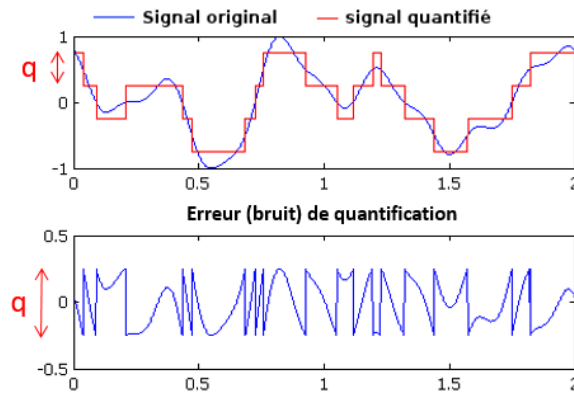


FIGURE 1.3 – Erreur, ou bruit, de quantification.

Ce bruit peut être modélisé comme un signal aléatoire de moyenne nulle, suivant une loi uniforme sur  $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$  et le rapport signal à bruit de quantification s'écrit :

$$SNR_Q(dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_x}{P_{n_Q}} \right)$$

où

$$P_{n_Q} = E \left[ n_Q^2 \right] = \int_R n_Q^2 p_{n_Q} dn_Q = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} n_Q^2 \times \frac{1}{q} dn_Q = \frac{q^2}{12}$$

ce qui conduit à

$$SNR_Q(dB) = 6 nb + constante,$$

où la constante dépend du signal considéré (voir exercice 1.6.7).

A l'heure actuelle, du fait du nombre de bits de quantification disponibles sur les processeurs, cette opération s'avère alors quasi transparente.

#### Bruit de quantification

**L'opération de quantification est donc une opération irréversible mais si elle est effectuée dans de bonnes conditions (pas d'écrêtage du signal, pas de quantification suffisamment fin) elle est équivalente à l'ajout d'un bruit sur le signal non quantifié de départ, avec un rapport signal à bruit de quantification qui s'écrit  $SNR_Q(dB) = 6 nb + constante$ , où  $nb$  est le nombre de bit de quantification utilisé et la constante dépend du signal considéré.**

### 1.2.2 Quantification non uniforme

Afin de diminuer le nombre de bits nécessaires pour quantifier un signal, il faudrait pouvoir adapter le pas de quantification à l'amplitude du signal d'entrée. On a alors une quantification non uniforme. En pratique cette opération est réalisée en utilisant une compression avant quantification uniforme, de manière à amplifier les faibles amplitudes et à minimiser l'effet des fortes amplitudes. Deux lois de compression sont normalisées et utilisées : la loi  $A$  et la loi  $\mu$ . Ce sont deux approximations de la loi logarithmique utilisée pour les signaux audio dans les applications traitant la voix humaine. L'échantillon de signal,  $y$ , en sortie de la compression est donné, en fonction de l'échantillon du signal en entrée  $x$ , par :

— Loi  $A$  :

$$\begin{aligned} y &= sgn(x) \frac{A |x|}{1 + \ln(A)} \quad 0 \leq |x| \leq \frac{1}{A} \\ &= sgn(x) \frac{1 + \ln(A |x|)}{1 + \ln(A)} \quad \frac{1}{A} \leq |x| \leq 1 \end{aligned}$$

La loi  $A$  est utilisée principalement en Europe avec un paramètre de compression de 87,6. Elle permet, en téléphonie par exemple, d'utiliser 8 bits de quantification au lieu des 12 qui seraient nécessaires avec un quantifieur uniforme étant donnée la dynamique du signal à quantifier (figure 1.4).

— Loi  $\mu$  :  $y = sgn(x) \frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , utilisée principalement aux États-Unis et au Japon avec  $\mu = 255$ .

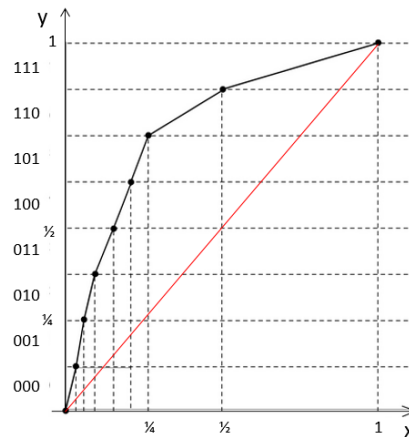
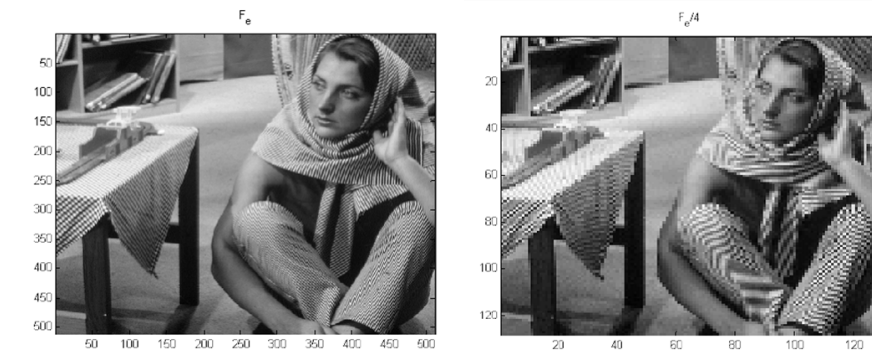


FIGURE 1.4 – Caractéristique de compression à 13 segments (loi A)

### 1.3 Numérisation du signal : exemples sur une image

La figure 1.5 présente une image de  $512 \times 512$  pixels, codée sur  $nb = 8$  bits et sa version sous échantillonnée d'un facteur 4 ( $128 \times 128$  pixels). Cette image (Barbara) est très utilisée en traitement d'images. Elle permet ici de voir apparaître le phénomène de Moiré : on voit apparaître sur l'image sous échantillonnée des structures différentes de celles contenues dans l'image d'origine.

FIGURE 1.5 – Image de départ (quantifiée sur 8 bits,  $512 \times 512$  pixels), Image sous échantillonnée d'un facteur 4

La figure 1.6 présente Barbara codée sur  $nb = 4$  bits et sur  $nb = 2$  bits. Dans le dernier cas, par exemple, on ne voit alors plus que  $2^{nb} = 2^2 = 4$  niveaux de gris (au lieu de  $2^8 = 256$  allant du noir au blanc sur l'image de départ).

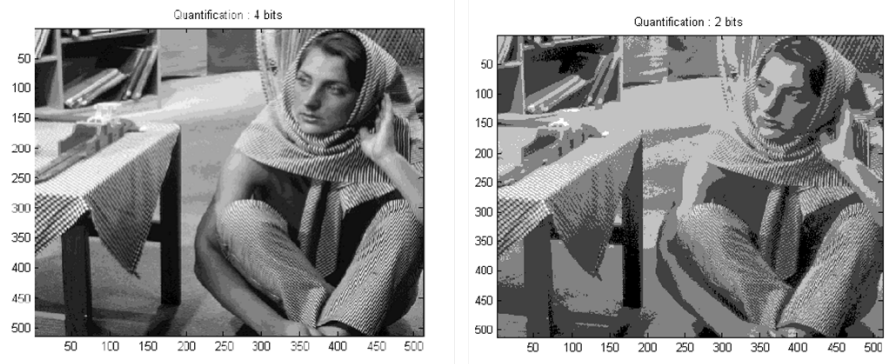


FIGURE 1.6 – Image quantifiée sur  $nb = 4$  bits, Image quantifiée sur  $nb = 2$  bits

## 1.4 Outils de traitement du signal à numériser

Un certain nombre d'outils de traitement du signal sont définis pour des signaux analogiques (signaux définis à chaque instant par des valeurs réelles) :

- La **transformée de Fourier** et la **densité spectrale de puissance**, permettant de visualiser la représentation fréquentielle des signaux pour en extraire de l'information (exemples : bande occupée par le signal en vue d'une transmission, détection de défauts apparaissant comme des composantes fréquentielles particulières).
- Les **fonctions d'auto et d'inter corrélation**, permettant d'accéder à la densité spectrale de puissance du signal, mais également utiles pour d'autres fonctions (exemple : extraction d'un signal dans du bruit).
- Les **filtres**, permettant de construire et de modifier des signaux (exemples : modulation, réduction du bruit, suppression de certaines composantes fréquentielles).

Objectif de la partie numérique du cours de traitement du signal

**Il va être nécessaire de réaliser un certain nombre d'approximations, d'estimations pour passer des outils définis de manière théorique, sur des signaux analogiques, aux outils que l'on va être capable d'implanter en numérique.**

**L'objectif du cours de traitement numérique du signal est de présenter, d'expliquer ces modifications et leurs impacts sur les résultats attendus afin d'être capable d'utiliser correctement les outils numériques et d'analyser correctement les résultats obtenus.**

## 1.5 Notion de temps de traitement et de traitement temps réel

Comme on pourra le constater par la suite, **tous les traitements numériques des signaux sont basés sur une même opération de base qui est l'opération d'addition/multiplication (ou MAC = Multiplication Accumulation)**. Le temps nécessaire à un traitement sera donc évalué en nombre d'addition/multiplication nécessaires. Un traitement est accompli en temps réel quand il délivre un échantillon de signal en sortie de traitement pour un échantillon de signal en entrée (c'est-à-dire à chaque période d'échantillonnage  $T_e$ ).

## 1.6 Exercices

Les corrections se trouvent dans le poly d'exercices et problèmes résolus.

### 1.6.1 Exercice 1 : Cosinus mal échantillonné

On échantillonne le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  avec  $f_0 = 5\text{kHz}$  à la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 8\text{kHz}$ .

1. Déterminer la densité spectrale du signal échantillonné  $x_e(t)$  et la représenter graphiquement pour  $|f| < 12\text{kHz}$ .
2. Quel signal obtient-on si on filtre le signal  $x_e(t)$  précédent à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_c = 4\text{kHz}$ ? Même question si on filtre le signal  $x_e(t)$  à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante  $[-6\text{kHz}, -4\text{kHz}] \cup [4\text{kHz}, 6\text{kHz}]$ .

### 1.6.2 Exercice 2 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant :  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 10\text{kHz}$ .

1. Tracer la transformée de Fourier de  $x(t)$  :  $X(f)$ .
2. Est-il possible d'échantillonner  $x(t)$  sans perte d'information? Si oui à quelle condition?
3. Tracer, entre 0 et  $F_e$ , la transformée de Fourier de  $x(t)$  échantillonné à  $T_e = 1/F_e$  quand :
  - (a)  $F_e = 30\text{kHz}$ .
  - (b)  $F_e = 8\text{kHz}$ .
4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire  $x(t)$  par filtrage passe-bas à  $F_e/2$ . Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente?

### 1.6.3 Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal passe-bande

On considère le signal  $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$ , avec  $x^+(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{j2\pi f_0 t}$  et  $x^-(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{-j2\pi f_0 t}$ ,  $f_0 = 8\text{kHz}$  et  $B = 2\text{kHz}$ .

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  et la représenter graphiquement.
2. Comment s'écrit la condition de Shannon pour le signal  $x(t)$ ?
3. On échantillonne le signal  $x(t)$  à la fréquence  $F_e = 6\text{kHz}$ .
  - (a) Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné  $x_e(t)$  dans la bande  $[-9\text{kHz}, 9\text{kHz}]$
  - (b) On désire restituer le signal  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$  par un filtrage de réponse en fréquence  $H(f)$ .
    - 1<sup>ier</sup> cas :  $H(f) = \Pi_F(f)$  avec  $F = 6\text{kHz}$ . Quel sera le signal restitué par ce filtre?
    - 2<sup>me</sup> cas :  $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$  avec  $f_0 = 8\text{kHz}$  et  $B = 2\text{kHz}$ . Quel sera le signal restitué par ce filtre?
    - Conclusion?

### 1.6.4 Exercice 4 : Echantillonneur moyennneur

L'échantillonneur moyennneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les  $T_e$  secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps  $\theta$  ( $\theta \ll T$ ) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$y(kT_e) = \frac{1}{\theta} \int_{kT_e - \theta}^{kT_e} x(u) du$$

$$x_{ech}(t) = \sum_k y(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

1. Démontrer que le signal échantillonné  $x_{ech}(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta} \left[ \Pi_{\theta}(t) * x\left(t - \frac{\theta}{2}\right) \right] \cdot \text{III}_{T_e}(t)$$

où  $\Pi_{\theta}(t)$  et  $\text{III}_{T_e}(t)$  représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur  $\theta$  et le peigne de Dirac de période  $T_e$ .

2. En déduire la transformée de Fourier correspondante  $X_{ech}(f)$ .
3. En considérant un signal à support spectral borné  $2\Delta f$  et en prenant en compte que la fonction  $\text{sinc}(\pi\theta f)$  peut être supposé constante sur l'intervalle  $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$

$$\text{sinc}(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

- (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier  $\theta$  pour que le signal  $x(t)$  puisse être restitué par filtrage de  $x_{ech}(t)$  ?
- (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

### 1.6.5 Exercice 5 : Echantillonneur bloqueur

L'échantillonneur bloqueur est un échantillonneur réalisable en pratique qui consiste à acquérir un échantillon du signal,  $x(t)$ , toutes les  $T_e$  secondes (période d'échantillonnage) et à le bloquer pendant  $\tau$  secondes ( $\tau \ll T_e$ ).

1. Proposer une écriture du signal échantillonné de cette manière,  $x_e(t)$ , en fonction de l'expression du signal échantillonné de manière idéale :  $x_{ei}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$ .
2. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné à l'aide de cette méthode. L'écrire en fonction de la transformée de Fourier,  $X(f)$ , du signal de départ.
3. Est-il possible de dimensionner  $\tau$  pour que l'échantillonnage par bloqueur se rapproche d'un échantillonnage idéal ?

### 1.6.6 Exercice 6 : Signal à spectre non borné - Recherche de la $F_e$

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

1. Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ . Tracer  $|X(f)|$ .
2. En théorie le signal  $x(t)$  est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.



3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage,  $F_e$ , à utiliser.
4. Une fois  $F_e$  déterminée, quel traitement doit-on appliquer au signal avant de l'échantillonner ?

### 1.6.7 Exercice 7 : Quantification d'un sinusoïde

Soit un signal sinusoïdal  $x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ , avec  $f_0 = 50\text{Hz}$ ,  $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$  et  $\phi$  une phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et  $2\pi$ . On suppose que la quantification de cette sinusoïde est effectuée dans de bonnes conditions : pas d'écrtage du signal, pas de quantification  $q = \frac{D}{2^{nb}}$  suffisamment fin ( $D$  représentant la dynamique du signal et  $nb$  le nombre de bits de quantification). Elle est donc équivalente à l'ajout d'un bruit,  $n_Q(t)$ , sur le signal non quantifié de départ, bruit aléatoire, centré qui suit une loi uniforme sur  $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$ . Déterminer le rapport signal à bruit de quantification en fonction de  $nb$ .



## 2. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Pour un signal  $x(t)$ , la transformée de Fourier  $X(f)$  et son inverse sont données par :

$$X(f) = \int_R x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_R X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

### 2.1 De la TF à la TFD

#### 2.1.1 Introduction

Un signal en numérique est un tableau de points contenant un nombre fini,  $N$ , de valeurs de signal :  $[x(0) \ x(1) \dots \ x(N-1)]$ , le  $k^{\text{ième}}$  élément  $x(k)$  représentant en réalité  $x(kT_e)$  si on considère un échantillonnage temporel périodique de période  $T_e$ . On travaille donc avec des signaux échantillonnés et limités dans le temps et il n'est pas possible d'utiliser l'expression donnée précédemment pour  $X(f)$  pour déterminer leurs transformées de Fourier. Des approximations doivent être effectuées à partir de cette expression pour obtenir un outil numérique capable d'estimer une représentation fréquentielle et les effets induits par ces approximations doivent être connus de manière à être capable de mener correctement une analyse spectrale en numérique.

L'objectif de ce paragraphe va être de lister les approximations à réaliser pour passer de la Transformée de Fourier (TF), définie par l'expression précédente de  $X(f)$ , à la Transformée de Fourier numérique ou Discrète (TFD) qui sera finalement donnée par l'expression suivante :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

### 2.1.2 Echantillonnage

Un signal numérique est forcément échantillonné :

$$x(t) \rightarrow \{x(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

L'échantillonnage du signal va avoir pour effet de périodiser sa transformée de Fourier, qui est approchée par la somme des aires des rectangles sous la courbe, au facteur  $T_e$  près :

$$X(f) \rightarrow X_1(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

$X_1(f)$  est bien périodique de période  $F_e = \frac{1}{T_e}$  :  $X_1(f + F_e) = X_1(f)$ . On devra donc faire attention au respect du théorème d'échantillonnage de Shannon pour ne pas provoquer de recouvrement lors de l'échantillonnage. On devra également faire attention à la manière dont on lit la TF du signal échantillonné. En effet si elle est observée sur une période, entre 0 et  $F_e$ , la partie positive du spectre sera observée entre 0 et  $F_e/2$ , tandis que la partie négative le sera entre  $F_e/2$  et  $F_e$ .

Remarque : sans connaissance de la fréquence d'échantillonnage, on pourra tracer la transformée de Fourier du signal avec une échelle en **fréquences normalisées, définies par** :

$$\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$$

TF du signal échantillonné

**L'échantillonnage du signal a pour effet de périodiser sa transformée de Fourier. On devra donc faire attention au respect du théorème d'échantillonnage de Shannon mais également à l'analyse de la TF du signal échantillonné qui est classiquement observée sur une période côté fréquences positives (utilisation de fft sous matlab par exemple).**

### 2.1.3 Limitation de la durée du signal à $N$ points

Un signal numérique est forcément observé sur un nombre fini de points :

$$\{x(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{x(kT_e)\}_{k=0, \dots, N-1}$$

Cette connaissance du signal sur un nombre limité de points (dimension du tableau représentant le signal numérique) conduit à une distorsion de la transformée de Fourier :

$$X_1(f) \rightarrow X_2(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) w(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

qui donne :

$$X_2(f) = X_1(f) * W_1(f)$$

$$\text{où } W_1(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \text{ avec } w(kT_e) = \begin{cases} 1 & k=0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Cette distorsion de la transformée de Fourier implique un pouvoir séparateur limité pour l'analyse spectrale (possibilité de dissocier 2 motifs spectraux de fréquences proches) et un certain taux d'ondulation (des ondulations apparaissent autour des transitions brutales du spectre : phénomène de Gibbs).

Ces paramètres (pouvoir séparateur et taux d'ondulation) sont liés à la forme de  $W_1(\tilde{f})$ , plus précisément à la largeur de son lobe principal et à l'amplitude de ses lobes secondaires (voir figure 2.1).

On pourra faire varier le pouvoir séparateur et le taux d'ondulation de l'analyse spectrale en tronquant le signal étudié avec différentes fenêtres  $w(kT_e)$ , autres que rectangulaire (fenêtres de pondération ou d'apodisation), de manière à obtenir différentes formes pour  $W_1(f)$  et donc différentes versions de la TFD du même signal.

La figure 2.2 présente quelques fenêtres classiques d'apodisation, tandis que la figure 2.3 présente leurs transformées de Fourier. On peut constater que les lobes centraux sont plus ou moins larges, conduisant à un pouvoir séparateur plus ou moins grand pour l'analyse spectrale. On peut également constater que les lobes secondaires sont plus ou moins atténués, conduisant à un taux d'ondulation plus ou moins grand pour l'analyse spectrale. Lorsque des fenêtres autres que rectangulaires sont utilisées on parle de transformée de Fourier pondérée.

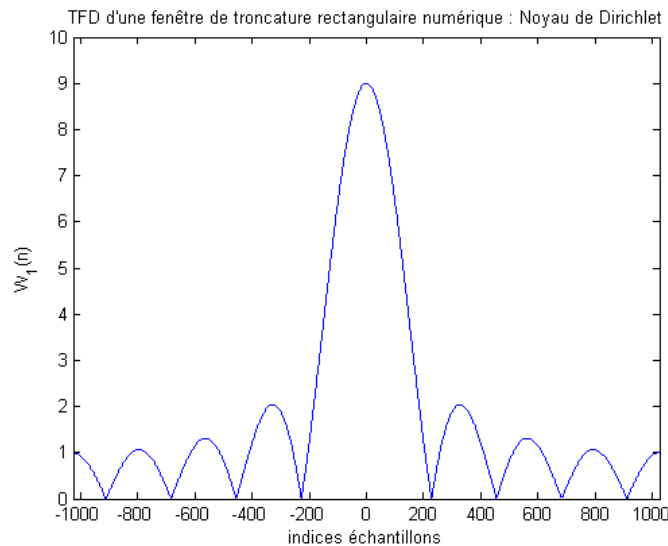


FIGURE 2.1 – Transformées de Fourier de la fenêtre rectangulaire : Noyau de Dirichlet.

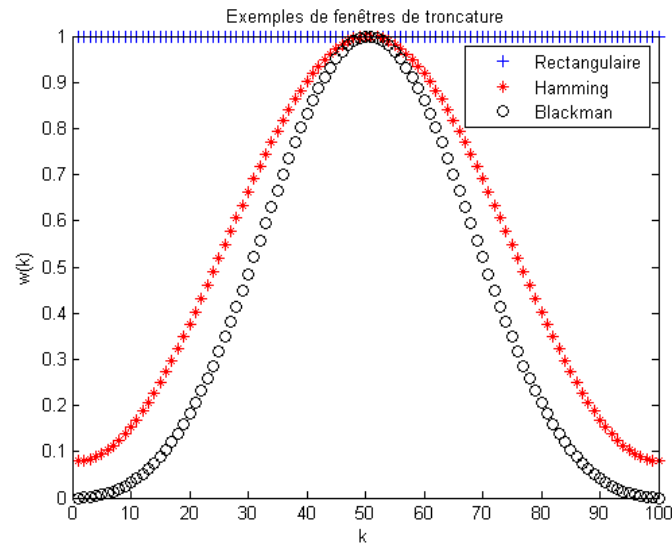


FIGURE 2.2 – Quelques exemples de fenêtres d'apodisation.

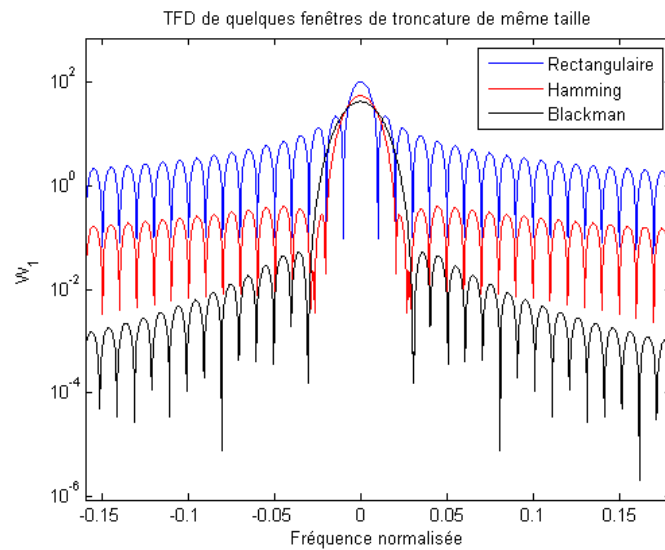


FIGURE 2.3 – Transformées de Fourier de quelques fenêtres de troncature.

## TF d'un signal à durée limitée

La connaissance du signal sur un nombre limité de points conduit à une distorsion de la transformée de Fourier attendue : convolution par la TF de la fenêtre modélisant la troncature du signal. Cette distorsion implique un pouvoir séparateur limité pour l'analyse spectrale numérique et un certain taux d'ondulation. Elle dépend de la fenêtre utilisée et on réalisera donc chaque analyse spectrale en utilisant plusieurs fenêtres de troncature (fenêtres de pondération) pour obtenir différentes visualisations de la TF d'un même signal afin d'en extraire différentes informations.

La figure 2.4 présente un exemple dans lequel les différentes fenêtres utilisées permettent de mettre en exergue différentes composantes spectrales. Mais quel est donc le signal qui pourrait correspondre à ces différents spectres ?

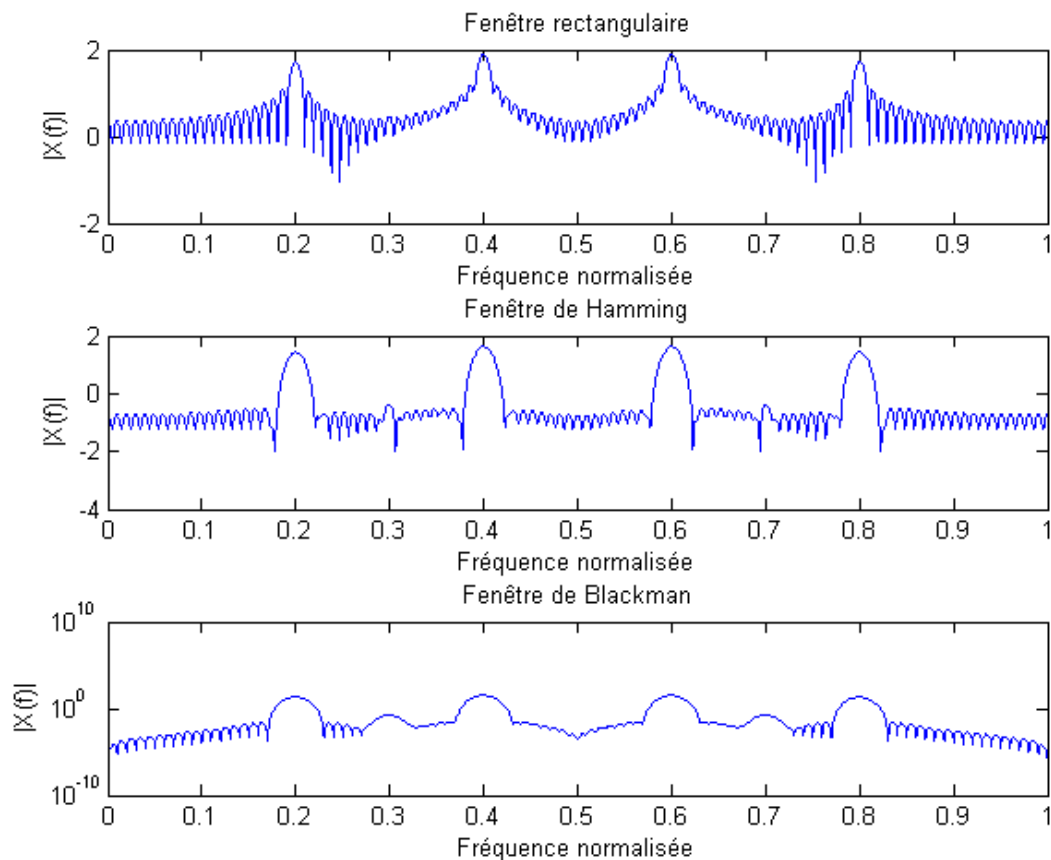


FIGURE 2.4 – Différentes versions de la transformée de Fourier d'un même signal.

### 2.1.4 Calcul de $N$ points du spectre

Tout comme le signal numérique ne peut pas être à temps continu, il ne sera possible de calculer qu'un nombre fini d'échantillons de la TFD :

$$X_2(f) \rightarrow \{X_2(n\Delta f)\}_{n=0,\dots,N-1}$$

En considérant que l'on calcule, sur une période  $F_e$ , un nombre de point de la TFD identique au nombre  $N$  de points de signal (réversibilité de l'algorithme), on obtient un pas de calcul  $\Delta f = \frac{F_e}{N}$  et donc une transformée de Fourier discrète qui s'écrit :

$$X\left(n\frac{F_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{F_e}{N} kT_e} = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Le fait de ne pouvoir calculer qu'un certain nombre de points de la transformée de Fourier numérique a un impact sur la résolution de l'analyse spectrale. Celle-ci sera liée au nombre de points calculés sur une période de la TFD : pas de calcul  $\Delta f = \frac{F_e}{N}$ . **Afin d'augmenter la résolution spectrale, on pourra utiliser une technique d'interpolation fréquentielle, la plus connue et utilisée étant celle du Zero Padding.** On construit un nouveau signal, à partir du signal  $x(kT_e)$  donné sur  $N$  points, en le prolongeant par des zéros :

$$y(kT_e) = \begin{cases} x(kT_e) & k=0, \dots, N-1 \\ 0 & k=N, \dots, MN-1. \end{cases}$$

La TFD de ce nouveau signal :

$$Y\left(n\frac{F_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{MN-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{MN}}, \quad n = 0, \dots, MN-1$$

dispose d'un pas de calcul plus fin :  $\frac{F_e}{MN}$ . On calcule  $MN$  points distants de  $\frac{F_e}{MN}$  entre 0 et  $F_e$  (une période de la TFD), au lieu de  $N$  points distants de  $\frac{F_e}{N}$  entre 0 et  $F_e$ . La résolution spectrale est donc améliorée.

Les figures 2.5 et 2.6 proposent des tracés du module de la transformée de Fourier numérique d'un cosinus numérique observé sur  $N = 1000$  points, pour différentes valeurs du paramètre  $MN$ . Ces tracés sont donnés avec une échelle en fréquences normalisées :  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$ .

Un autre impact de la discrétisation fréquentielle est une périodisation temporelle. On doit, en effet, considérer en numérique que les signaux sont périodisés, de même que leurs transformées de Fourier. Ce dernier point a une conséquence importante : cela ne permet pas de conserver à la TFD la propriété très intéressante de la TF qui consiste à transformer un produit de convolution en produit (et inversement). En effet, comme nous le verrons par la suite (section 2.2), la transformée de Fourier Discrète transforme un produit en produit de convolution circulaire, c'est-à-dire en produit de convolution entre des signaux périodisés. Néanmoins, il est possible de faire en sorte que le produit de convolution linéaire (produit de convolution "classique") et le produit de convolution circulaire soient identiques en prolongeant les signaux de longueur  $N$  par au moins  $N$  zéros.



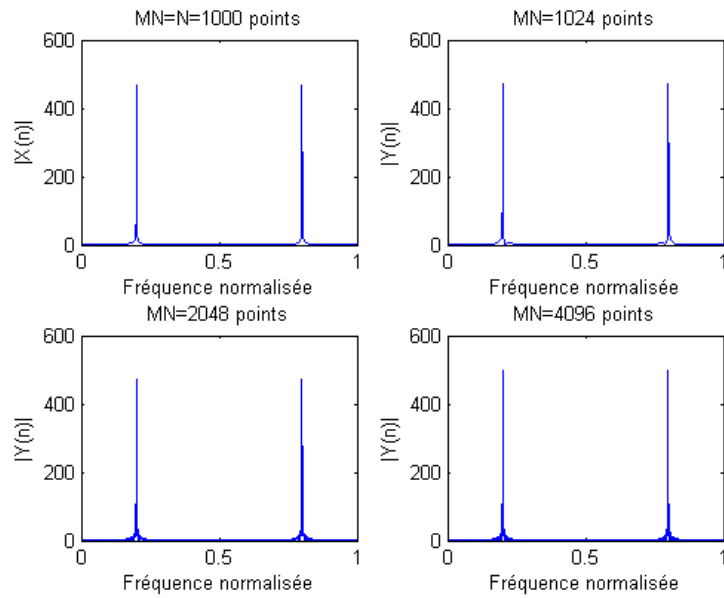


FIGURE 2.5 – Transformées de Fourier d'un cosinus de fréquence normalisée 0.2 pour différentes valeurs du paramètre de zero padding.

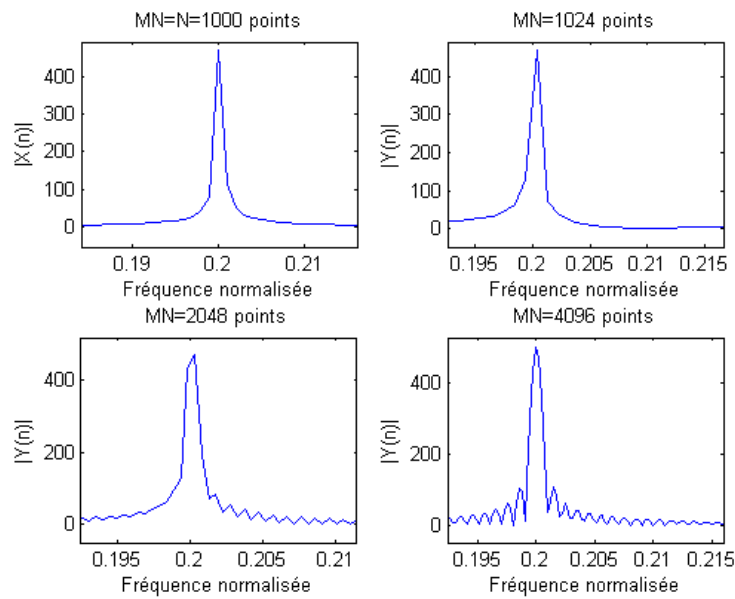


FIGURE 2.6 – Transformées de Fourier d'un cosinus de fréquence normalisée 0.2 pour différentes valeurs du paramètre de zero padding : zoom un pic de la figure 2.5

## TF discrète en fréquences

Tout comme le signal numérique ne peut pas être à temps continu, il ne sera possible de calculer qu'un nombre fini d'échantillons de la TFD. Cela a deux conséquences : une mauvaise résolution de la TFD observée, qui pourra être améliorée en utilisant une méthode d'interpolation comme le zero padding, et un signal qui devra être considéré comme périodique en temporel par transformée de Fourier inverse, ce qui aura pour effet de transformer un produit en produit de convolution circulaire (entre signaux périodisés).

## 2.1.5 Expressions de la TFD et de la TFD inverse

Les trois approximations précédemment étudiées (échantillonnage temporel, limitation de la durée du signal et échantillonnage fréquentiel) conduisent finalement à l'outil suivant pour calculer la transformée de Fourier en numérique :

## TFD

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Le même cheminement conduirait à obtenir l'expression de la TFD inverse :

## TFD inverse

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{+j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Notons que, dans ces expressions,  $x(k)$  est une notation simplifiée pour  $x(kT_e)$ , de même que  $X(n)$  est une notation simplifiée pour  $X\left(n\frac{F_e}{N}\right)$ . Ils représentent respectivement le  $k^{ieme}$  élément du tableau de points de signal et le  $n^{ieme}$  élément du tableau de points de la TFD du signal. On utilisera ces notations par la suite.

## 2.2 Propriétés de la TFD

## 2.2.1 Linéarité

La transformée de Fourier est linéaire :

$$TFD [x_1(k) + \lambda x_2(k)] = TFD [x_1(k)] + \lambda TFD [x_2(k)], \quad \lambda \text{ scalaire.}$$

## 2.2.2 Translation =&gt; rotation de phase

Une translation dans le domaine temporel entraîne un déphasage dans le domaine fréquentiel :

$$TFD [x(k - k_0)] = TFD [x(k)] e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N}} = X(n) e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N}}$$

Démonstration :

$$TFD [x(k - k_0)] = \sum_{k=k_0}^{N-1+k_0} x(k - k_0) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{(m+k_0)n}{N}} = e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N}} X(n)$$

### 2.2.3 Symétrie Hermitienne

Soit  $X(n)$  la transformée de Fourier discrète d'un signal réel  $x(k)$ , on a :

$$X(N - n) = X(-n) = X^*(n)$$

*Démonstration :*

Si  $x(k)$  réel alors  $x^*(k) = x(k)$  et  $X(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right]^* = X^*(n)$ .

D'autre part  $X(N - n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{k(N-n)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = X(-n)$ .

### 2.2.4 Convolution circulaire

Le produit de convolution linéaire ("classique") est donné en numérique par :

$$(x_1 * x_2)(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p) x_2(k - p)$$

**! Attention ! la transformée de Fourier discrète ne transforme pas un produit en produit de convolution linéaire mais en produit de convolution circulaire (entre signaux périodisés) :**

$$X_1(n) X_2(n) \xrightarrow{TFD^{-1}} (x_1 \otimes x_2)(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p) x_2([k - p]_{\text{modulo } N})$$

si  $X_1(n)$  est la transformée de Fourier discrète de  $x_1(k)$  et  $X_2(n)$  la transformée de Fourier discrète  $x_2(k)$ .

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} TFD^{-1} [X_1(n) X_2(n)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_1(n) X_2(n) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right) \left( \sum_{q=0}^{N-1} x_2(q) e^{-j2\pi \frac{qn}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_1(p) x_2(q) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}}, \text{ avec } l = p + q - k. \end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} = \begin{cases} 0 & l \neq iN \\ N & l = iN \Leftrightarrow q = k - p + iN. \end{cases}$$

Ce qui donne bien :

$$TFD^{-1} [X_1(n) X_2(n)] = \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p) x_2([k - p]_{\text{modulo } N}) = (x_1 \otimes x_2)(k)$$

Les figures 2.7 et 2.8 illustrent la différence entre un produit de convolution linéaire et un produit de convolution circulaire sur un exemple considérant deux signaux de  $N = 3$  points :  $x_1 = [1 \ 2 \ 3]$  et  $x_2 = [1 \ 1 \ 1]$ . Le produit de convolution linéaire considère que les signaux sont nuls en dehors de leurs  $N$  points (figure 2.7), tandis que le produit de convolution circulaire considère des signaux périodisés (figure 2.8). On constate que les résultats de ces deux produits de convolution sont différents :  $[0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 5 \ 3 \ 0]$  pour le produit de convolution linéaire et  $[6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6]$  pour le produit de convolution circulaire.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1(p) : & \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \dots & \\
 x_2(p) : & \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots & \\
 x_2(p-k) : & \begin{array}{l}
 k=-3 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=-2 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=-1 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=1 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=2 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\
 k=3 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots
 \end{array} & \sum_p x_1(p)x_2(p-k) : \\
 & & \begin{array}{l} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 5 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 0 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURE 2.7 – Produit de convolution linéaire entre les signaux  $x_1 = [1 \ 2 \ 3]$  et  $x_2 = [1 \ 1 \ 1]$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1(p_{\text{modulo } N}) : & \dots 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \dots & \\
 x_2(p_{\text{modulo } N}) : & \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots & \\
 x_2((p-k)_{\text{modulo } N}) : & \begin{array}{l}
 k=-3 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=-2 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=-1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=0 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=2 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots \\
 k=3 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots
 \end{array} & \sum_p x_1(p)x_2((p-k)_{\text{modulo } N}) : \\
 & & \begin{array}{l} \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \\ \rightarrow 6 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURE 2.8 – Produit de convolution circulaire entre les signaux  $x_1 = [1 \ 2 \ 3]$  et  $x_2 = [1 \ 1 \ 1]$

Néanmoins, il est possible de rendre le résultat du produit de convolution circulaire égal à celui du produit de convolution linéaire en prolongeant les signaux par un nombre de zéros au moins égal au nombre de point de signal (figure 2.9).



FIGURE 2.9 – Produit de convolution circulaire = Produit de convolution linéaire entre les signaux  $x_1 = [1 \ 2 \ 3]$  et  $x_2 = [1 \ 1 \ 1]$

### 2.2.5 Egalité de Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x^*(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*(n) \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*(n) X(n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \end{aligned}$$

### 2.2.6 Algorithme de calcul rapide

La transformée de Fourier discrète se prête à un algorithme de calcul rapide que l'on nomme FFT pour "Fast Fourier Transform". Son principe, détaillé au paragraphe suivant, consiste à décomposer le signal de départ (sur  $N$  points) en une succession de sous suites entrelacées en effectuant à chaque étape de l'algorithme des transformées de Fourier disjointes sur les points d'indices pairs et les points d'indices impairs du tableau représentant le signal numérique. La condition de départ est que le nombre de points  $N$  soit une puissance de 2.

## 2.3 Algorithme de calcul rapide (FFT) de Cooley Tuckey

### 2.3.1 Principe

La transformée de Fourier de départ  $X(n)$  porte sur les  $N$  points d'un signal numérique  $x(k)$  :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

en notant  $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ . On parle de TFD d'ordre  $N$ . Son temps de calcul est évalué à  $N^2$  opérations d'additions/multiplications.

On suppose que  $N$  est une puissance de 2 :  $N = 2^p$  et on va commencer à décomposer le signal en sous suites entrelacées.

#### Première décomposition

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n} X_2(n), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

où :

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{-in}, \quad X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/2-1$$

On peut évaluer le temps de calcul suite à cette première décomposition à  $2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N$  opérations d'additions/multiplications, ce qui est déjà  $\ll N^2$ , surtout si  $N$  est grand.

#### Deuxième décomposition

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{12}(n), \quad X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n} X_{22}(n), \quad n = 0, \dots, N/2-1,$$

où :

$$X_{11}(n) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2i) W_{N/4}^{-in}, \quad X_{12}(n) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2i+1) W_{N/4}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/4-1$$

$$X_{12}(n) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_2(2i) W_{N/4}^{-in}, \quad X_{22}(n) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_2(2i+1) W_{N/4}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/4-1$$

avec  $x_1(p) = x(2i)$  et  $x_2(p) = x(2i+1)$ ,  $i, p = 0, \dots, N/2-1$ .

...

#### Dernière décomposition

On continue jusqu'à arriver à la plus petite transformée de Fourier possible qui porte sur deux points et que l'on appelle le "papillon" de la transformée de Fourier numérique (figure 2.10). On aura alors réalisé  $Np$  transformées de Fourier d'ordre 2 ou "papillons", soit un temps de calcul de  $N \log_2(N) \ll N^2$  opérations d'additions/multiplications.

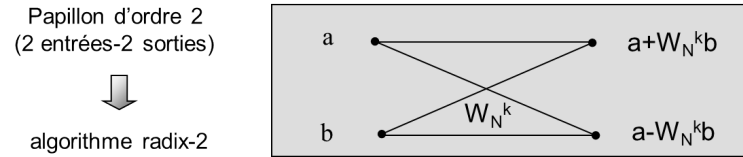


FIGURE 2.10 – Papillon de la FFT : transformée de Fourier d'ordre 2 = 2 opérations d'addition/multiplication

### 2.3.2 Exemple pour $N = 2^3 = 8$

#### Première décomposition

$$X(n) = X_1(n) + W_8^{-n} X_2(n), \quad n = 0, \dots, 7,$$

où  $X_1(n)$  porte sur  $x(0), x(2), x(4), x(6)$  et  $X_2(n)$  porte sur  $x(1), x(3), x(5), x(7)$ .

#### Deuxième et dernière décomposition

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_4^{-n} X_{12}(n), \quad n = 0, \dots, 3,$$

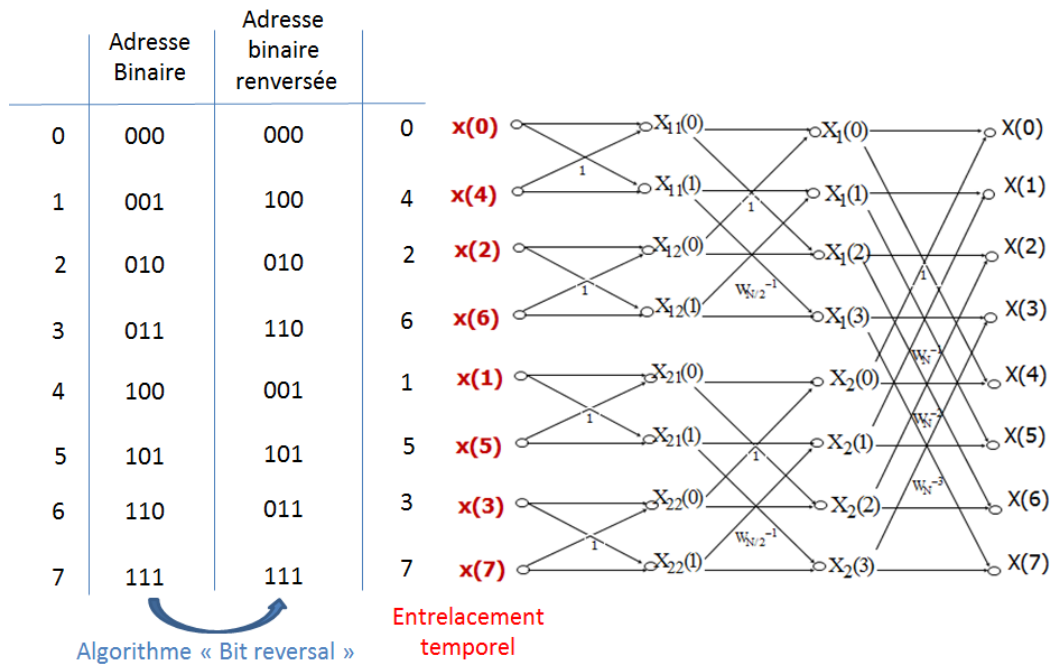
où  $X_{11}(n)$  porte sur  $x(0), x(4)$  et  $X_{12}(n)$  porte sur  $x(2), x(6)$ .

$$X_2(n) = X_{21}(n) + W_4^{-n} X_{22}(n), \quad n = 0, \dots, 3,$$

où  $X_{21}(n)$  porte sur  $x(1), x(5)$  et  $X_{22}(n)$  porte sur  $x(3), x(7)$ .

#### Graphe correspondant

On a  $p = 3$  colonnes de  $\frac{N}{2} = 4$  papillons, soit  $p \times \left(\frac{N}{2}\right) \times 2 = pN = \log_2(N)N = 3 \times 8 = 24$  opérations d'additions multiplications, au lieu de  $N^2 = 64$  si nous n'avions pas utilisé l'algorithme de FFT. On remarque que les échantillons de signal ne se présentent pas dans leur ordre naturel à l'entrée de l'algorithme. On peut utiliser un algorithme de renversement de l'adresse binaire ("bit reversal") afin de les présenter dans l'ordre voulu.

FIGURE 2.11 – Graphe de la FFT pour  $N = 2^3$ 

## 2.4 Exercices

Les corrections se trouvent dans le poly d'exercices.

### 2.4.1 Exercice 1 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de la limitation de la durée du signal

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On observe le signal sur une durée limitée  $L$ .

1. Montrer que la transformée de Fourier du signal observé sur une durée  $[0, L]$  s'écrit  $X_L(f) = X(f)G(f, L)$ .
2. Déterminer le module de  $G(f, L)$ .
3. Montrer que  $|G(f, L)|$  est compris entre  $1 - e^{-aL}$  et  $1 + e^{-aL}$ .
4. Chiffrer ces bornes pour  $L = \frac{4}{a}$ .
5. Déterminer la phase de  $G(f, L)$ .
6. En utilisant les développements limités dans le cas où  $L \gg \frac{1}{a}$ , montrer qu'on peut arriver à la valeur approchée de la phase suivante :

$$\text{Arg}[G(f, L)] \simeq e^{-aL} \sin(2\pi fL)$$

7. Borner la valeur approchée de la phase et la chiffrer pour  $L = \frac{4}{a}$ .
8. Quelle conclusion peut-on tirer de ces calculs sur l'effet de la troncature du signal  $x(t)$  ?



### 2.4.2 Exercice 2 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de l'échantillonnage du signal

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

1. Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ . Tracer  $|X(f)|$ .
2. En théorie le signal  $x(t)$  est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage à utiliser  $F_e$ .
4. Donner l'expression de la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  échantillonné à  $T_e$ , c'est-à-dire la transformée de Fourier de  $\{x(kT_e)\}$  pour  $k = -\infty, \dots, +\infty$ . On la notera  $X_e(f)$ .
5. Déterminer  $X_e(f)$  pour le signal donné par (2.2). Vérifier qu'elle est périodique de période  $F_e$ . La comparer à  $X(f)$ .

### 2.4.3 Exercice 3 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : échantillonnage et limitation de la durée du signal

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

1. Donner l'expression de la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  échantillonné à  $T_e$  et limité à  $N$  points, c'est-à-dire la transformée de Fourier de  $\{x(kT_e)\}$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ . On la notera  $X_D(f)$ .
2. Déterminer  $X_D(f)$  pour le signal donné par (2.3). La comparer à  $X(f)$ .

### 2.4.4 Exercice 4 : Etude de la TFD d'un signal à spectre discontinu : calcul d'un nombre fini de points du spectre

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \phi = \text{constante} \quad (2.4)$$

1. Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ .
2. Déterminer la transformée de Fourier du signal observé sur une durée limitée  $[0, L]$ . On la note  $X_L(f)$ .
3. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné à  $T_e$  et observé sur  $N$  points. On la note  $X_D(f)$ .
4. La transformée de Fourier numérique (spectre du signal) ne sera calculée que pour un nombre fini,  $N$ , de points :  $X_D(f) \rightarrow \left\{X_D\left(n\frac{F_e}{N}\right)\right\}$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ . Dans le cas où  $f_0 = \frac{n_0}{N}F_e$ , avec  $n_0$  entier, déterminer  $X_D(n)$  (notation pour  $X_D\left(n\frac{F_e}{N}\right)$ ) puis tracer  $|X_D(n)|$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ . Que constate-t-on ?
5. Tracer  $|X_D(n)|$ , pour  $n = 0, \dots, N-1$ , dans le cas où  $f_0 = \frac{n_0 + \epsilon}{N}F_e$ ,  $n_0$  entier et  $0 < \epsilon < 1$ . Ce résultat est-il satisfaisant (permet-il une analyse spectrale correcte) ?
6. Quelle méthode peut-on utiliser pour améliorer la visualisation de la transformée de Fourier numérique (et donc le résultat de l'analyse spectrale) ?



## 3. Fonctions d'inter et d'auto corrélation

Les fonctions d'inter et d'auto corrélation peuvent être obtenues en numérique dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

### 3.1 Calcul dans le domaine temporel

#### 3.1.1 Signaux déterministes

Le  $k^{\text{ième}}$  échantillon de la fonction d'intercorrélation numérique entre les signaux  $x$  et  $y$  s'écrit :

— Pour un signal déterministe à énergie finie :

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k)$$

— pour un signal déterministe à puissance moyenne finie périodique de période  $N_0$  :

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)y^*(n-k)$$

— pour un signal déterministe à puissance moyenne finie non périodique :

$$R_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)y^*(n-k)$$

#### 3.1.2 Signaux aléatoires

Le  $k^{\text{ième}}$  échantillon de la fonction d'intercorrélation numérique entre les signaux aléatoires  $x$  et  $y$  s'écrit :

$$R_{xy}(k) = E [x(n)y^*(n-k)]$$

**Estimateur biaisé**

En supposant le signal ergodique et en utilisant un estimateur de la moyenne, le  $k^{\text{ième}}$  élément de la fonction d'intercorrélation numérique entre les signaux aléatoires  $x$  et  $y$  pourra être estimé de la manière suivante :

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k)$$

si  $N$  représente le nombre de points des signaux considérés. En réalité, si on considère les signaux numériques comme des tableaux de  $N$  points ( $[x(0) \dots x(N-1)]$  et  $[y(0) \dots y(N-1)]$ ), la somme précédente porte sur  $N - k$  échantillons du produit  $x(n)y^*(n-k)$  (signaux décalés, produit non nul uniquement entre  $k$  et  $N - 1$ ). L'estimateur précédent est donc, en réalité, donné par :

Estimateur biaisé

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)y^*(n-k)$$

et il est biaisé :

$$E \left[ \widehat{R}_{xy}(k) \right] = \frac{N - |k|}{N} R_{xy}(k).$$

Le biais est ici multiplicatif et triangulaire (voir figure 3.1 dans les exemples).

**Estimateur non biaisé**

Afin de supprimer le biais, on peut définir un deuxième estimateur temporel de la manière suivante :

Estimateur non biaisé

$$\widehat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N - k} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-k) \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

On a bien alors

$$E \left[ \widehat{R}_{xy}(k) \right] = R_{xy}(k)$$

Cependant cet estimateur possède une grande variance sur les bords. En effet, lorsque  $k \rightarrow N$  peu de points vont être utilisés pour réaliser l'estimation. Celle-ci variera donc beaucoup entre différentes réalisations de signal (voir figure 3.2 dans les exemples). Ceci reste vrai avec l'estimateur biaisé mais le phénomène est masqué par le fait que le biais soit triangulaire.

**Exemples : cosinus, ligne d'image SAR (Synthese Aperture Radar)**

La figure 3.1 trace une estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation ( $x = y$ ) d'un cosinus, obtenue grâce à la fonction `xcorr.m` de matlab. On voit apparaître le biais multiplicatif triangulaire.

La figure 3.2 trace une estimation non biaisée de la fonction d'autocorrélation d'un cosinus, obtenue grâce à la fonction `xcorr.m` de matlab, avec le paramètre '`unbiased`'. On voit apparaître la variance de l'estimation sur les bords de la fenêtre d'analyse.

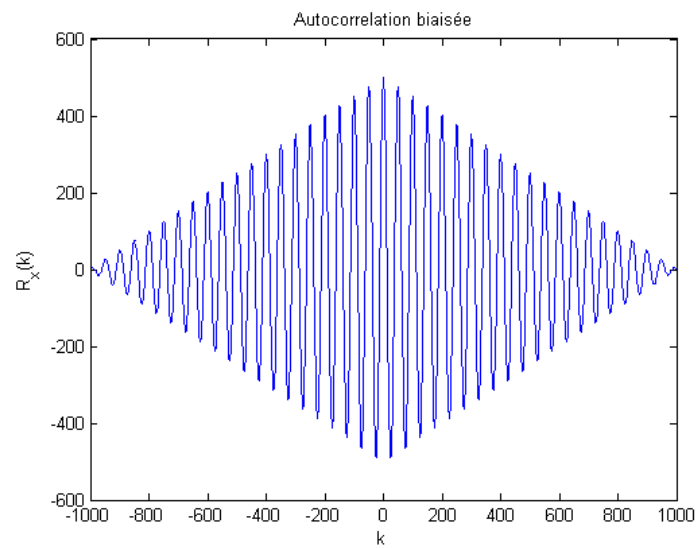


FIGURE 3.1 – Estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation du cosinus

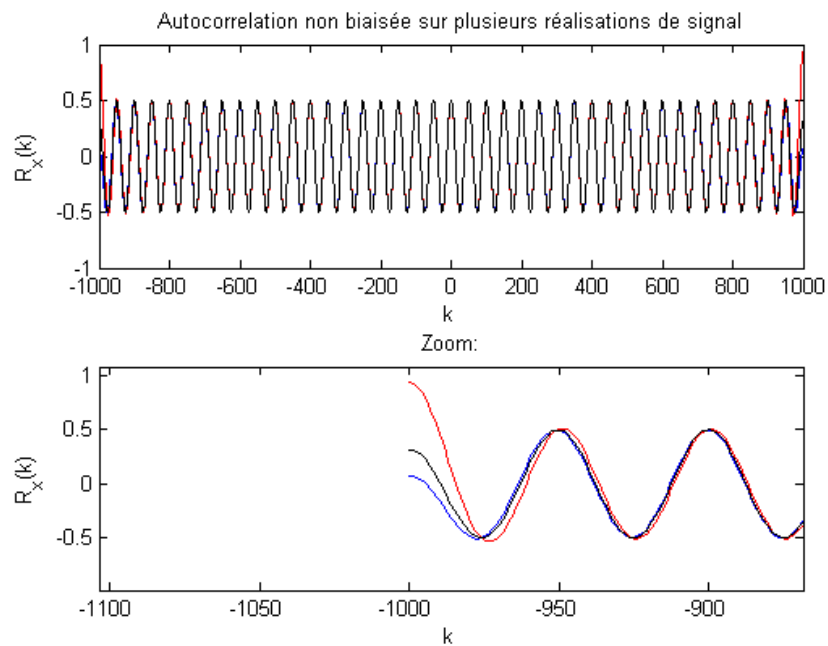


FIGURE 3.2 – Estimations non biaisées de la fonction d'autocorrélation du cosinus

La figure 3.3 compare les estimations biaisée et non biaisée de la fonction de covariance (*autocorrelation – moyenne*<sup>2</sup>) d'un signal réel (ligne d'image SAR (Synthese Aperture Radar)) à la covariance théorique. On constate que la covariance estimée avec un estimateur biaisé semble donner un résultat plus proche de la covariance théorique que la covariance estimée avec un estimateur non biaisé. Cette constatation reste généralement vraie pour les signaux réels. Notons que pour une comparaison valable des estimateurs biaisés et non biaisés, il faudrait comparer leur erreur quadratique moyenne. Il a été montré que, dans de nombreux cas en effet, l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur biaisé est nettement inférieure à celle de l'estimateur non biaisé. Dans les deux cas cependant, on peut améliorer les estimations en augmentant la durée d'observation. L'estimateur biaisé est, en effet, asymptotiquement non biaisé, tandis que la variance de l'estimateur non biaisé apparaît sur les bords.

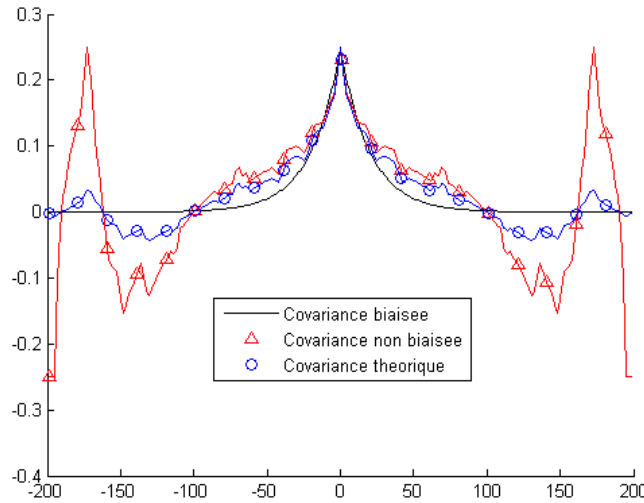


FIGURE 3.3 – Estimations de la covariance sur une ligne d'image SAR

### 3.2 Calcul dans le domaine fréquentiel

En partant de l'expression

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-k)$$

On remarque qu'il est possible d'écrire la fonction d'intercorrélacion comme un produit de convolution :

$$\widehat{R}_{xy}(k) = x(k) * y^*(-k)$$

On peut alors estimer la fonction d'intercorrélacion dans le domaine fréquentiel de la manière suivante :

## Estimateur fréquentiel

$$\widehat{R}_{xy}(k) = TFD^{-1} [TFD [x(k)] TFD^* [y(k)]]$$

**L'intérêt de cette estimation fréquentielle est qu'elle permet de réduire le temps de calcul.**

En effet, en utilisant l'algorithme de la FFT (voir paragraphe 2.3), le temps de calcul pour obtenir  $N$  éléments de  $\widehat{R}_{xy}$  est donné par

$$\sim 3N \log_2(N) + N \text{ opérations d'addition/multiplication}$$

(2 FFT, 1 FFT inverse et  $N$  produits), si on fait le calcul avec un estimateur fréquentiel, au lieu de

$$N + (N - 1) + \dots + 1 = \frac{N(N + 1)}{2} \sim \frac{N^2}{2}$$

( $N$  pour  $k = 0$ ,  $N - 1$  pour  $k = 1$ , ... 1 pour  $k = N - 1$ ), en utilisant une estimation dans le domaine temporel.

Et

$$3N \log_2(N) + N \ll \frac{N^2}{2}, \text{ surtout quand } N \text{ est grand.}$$

**Attention cependant :** ce calcul, utilisant un passage dans le domaine fréquentiel, suppose que la transformée de Fourier discrète inverse transforme un produit en produit de convolution linéaire. Or nous avons vu que la transformée de Fourier discrète (ou TFD inverse) transformait un produit en produit de convolution circulaire, c'est-à-dire un produit de convolution entre signaux périodisés (période  $N$ ). Néanmoins nous avons également vu plus tôt qu'il est possible de se ramener à un produit de convolution linéaire en utilisant du Zero Padding (au moins autant de zéros ajoutés que de longueur de signal avant de passer dans le domaine transformé).

### 3.3 Quelques propriétés

#### 3.3.1 Symétrie Hermitienne

Comme c'est la cas à temps continu, la fonction d'intercorrélation numérique possède la propriété de symétrie hermitienne :

$$\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}_{xy}^*(k)$$

Soit pour des signaux réels :  $\widehat{R}_{xy}(-k) = \widehat{R}_{xy}(k)$ . Cette propriété est intéressante car elle permet d'économiser la moitié du temps de calcul.

#### 3.3.2 Bornes

La fonction d'autocorrélation numérique est bornée par sa valeur en 0 qui représente la puissance du signal :

$$\widehat{R}_x(k) \leq \widehat{R}_x(0) = P_x$$

$P_x = R_x(0)$  représentant la puissance du signal  $x$ .

Mais aussi :

$$\widehat{R}_{xy}(k) \leq \frac{1}{2} \left( \widehat{R}_x(0) + \widehat{R}_y(0) \right)$$





## 4. Densité Spectrale de Puissance (DSP)

La Densité Spectrale de Puissance reflète la contribution de chaque fréquence à la puissance moyenne du signal. Elle permet de fournir une représentation fréquentielle aux signaux aléatoires pour lesquels nous ne pouvons calculer une transformée de Fourier (mais reste utilisable pour les signaux déterministes). Elle est donnée par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal :

$$S_x(f) = TF [R_x(\tau)]$$

Il est donc naturel d'envisager d'estimer en numérique la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire en prenant la TFD de l'estimation de sa fonction d'autocorrélation. On appellera cet estimateur l'estimateur "de base". Malheureusement cet estimateur "de base" s'avère ne pas être consistant : il est biaisé et sa variance ne tend pas vers 0 lorsque l'on augmente la durée d'observation pour réaliser l'estimation. On définit donc des estimateurs de la DSP plus satisfaisants, à partir de cet estimateur "de base".

### 4.1 Estimateurs "de base" : corrélogramme, périodogramme

#### 4.1.1 Définitions

La manière la plus naturelle d'estimer la densité spectrale de puissance du signal  $x$  est d'utiliser sa définition en utilisant l'estimée de la fonction d'autocorrélation et la transformée de Fourier discrète :

##### Corrélogramme

$$\hat{S}_x(n) = TFD \left[ \hat{R}_x(k) \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

On appelle cet estimateur le corrélogramme, biaisé ou non biaisé selon que l'on utilise un estimateur biaisé ou non biaisé pour l'estimation de la fonction d'autocorrélation. Le corrélogramme

utilisant un estimateur biaisé pour la fonction d'autocorrélation est également appelé périodogramme et est donné par l'expression suivante, en notant  $X(n)$  la TFD d'une réalisation du signal  $x$  (tableau de  $N$  points).

#### Périodogramme

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N} |X(n)|^2 \left( = \frac{1}{N} TFD [x(k) * x^*(-k)] \right)$$

Notons que cette définition de la DSP par périodogramme permet un lien plus direct avec le cadre des signaux déterministes : la densité spectrale de puissance ou d'énergie est en effet proportionnelle au module de la transformée de Fourier du signal au carré pour les signaux déterministes.

#### 4.1.2 Problèmes posés par ces estimateurs "de base"

On constate qu'en moyenne les estimateurs de la fonction d'autocorrélation se comportent comme la fonction d'autocorrélation théorique multipliée par une fenêtre (rectangulaire pour l'estimateur non biaisé, triangulaire pour l'estimateur biaisé) :

$$\begin{aligned} E \left[ \widehat{R}_x(k) \right] &= \Pi_N(k) R_x(k) \quad \text{dans le cas d'un estimateur non biaisé.} \\ &= \frac{N - |k|}{N} R_x(k) \quad \text{dans le cas d'un estimateur biaisé.} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'estimée de la densité spectrale de puissance :

$$E \left[ \widehat{S}_x(n) \right] = S_x(n) * W(n)$$

où  $W(n)$  représente la transformée de Fourier de la fenêtre. Les estimateurs de base de la DSP possèdent donc un biais convolutif avec :

- $W(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\frac{\pi n}{N})}$  dans le cas de l'utilisation d'un estimateur non biaisé pour la fonction d'autocorrélation.
- $W(n) = \left( \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\frac{\pi n}{N})} \right)^2$  (noyau de Fejer) dans le cas de l'utilisation d'un estimateur biaisé pour la fonction d'autocorrélation.

et leur variance ne tend pas vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini. Il est difficile d'établir la variance de ces estimateurs pour un signal de distribution quelconque. Cette variance est donc calculée dans le cas particulier du bruit blanc et généralisée par approximation aux autres signaux (voir ref [2], page 258). **Ces estimateurs de la DSP (corrélogramme, périodogramme) ne sont donc pas consistants.** De plus, l'estimateur utilisant une estimation non biaisée pour la fonction d'autocorrélation peut donner des valeurs négatives pour la DSP.

#### 4.2 Périodogramme avec fenêtrage

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre sur la transformée de Fourier discrète en parlant de TFD pondérée, on peut également, pour estimer la DSP, utiliser un périodogramme sur le signal pondéré :

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{N} |TFD [x(k)w(k)]|^2$$

où  $w(k)$  représente la fenêtre de pondération choisie (voir chapitre sur la transformée de Fourier).

### 4.3 Périodogramme cumulé (ou de Bartlett)

Cette méthode tire son nom du statisticien anglais M. S. Bartlett, qui a été le premier à la proposer. Pour calculer un périodogramme cumulé, le signal de  $N$  points  $x$  est divisé en  $M$  parties :  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  de  $L = \frac{N}{M}$  points. Un périodogramme moyenné est alors effectué :

$$\widehat{S}_x(n) = \frac{1}{LM} \sum_{i=1}^M |TFD[x_i(k)]|^2,$$

afin de diminuer la variance d'estimation de la DSP. La variance sera diminuée d'un facteur  $M$  lorsque l'on moyenne  $M$  périodogrammes indépendants.

L'inconvénient de cet estimateur va être l'augmentation du biais car le lobe central du noyau de Fejer est alors plus large ( $2/L$  au lieu de  $2/N$ ). De plus, on diminue la résolution du spectre obtenu ( $L$  points calculés sur  $F_e$  au lieu de  $N$ ).

### 4.4 Périodogramme de Welch

Cette méthode a été proposée par Peter D. Welch en 1967. Le principe est le même que pour le périodogramme cumulé mais les différentes parties  $x_i$  sont autorisées à se recouvrir, ce qui réduit encore la variance d'estimation de la DSP pour une même résolution, et le signal est fenêtré avant calcul de la TFD. Typiquement on laisse les fenêtres se recouvrir sur la moitié de leur longueur et la fenêtre de troncature par défaut est celle de Hamming.

### 4.5 Exemple sur une ligne d'image SAR

La figure 4.1 trace la DSP théorique d'une ligne d'image SAR (Synthese Aperture Radar) et la compare aux estimations par périodogramme, par corrélogramme biaisé et corrélogramme non biaisé. On constate effectivement que le périodogramme et le corrélogramme biaisé sont identiques et plus proches de la DSP théorique que le corrélogramme non biaisé.

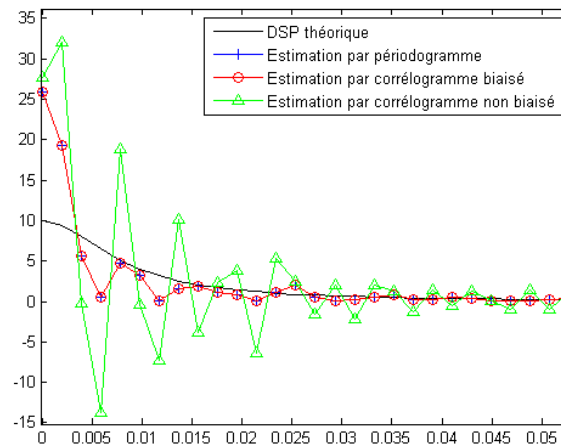


FIGURE 4.1 – Calcul de la DSP sur une ligne d'image SAR

La figure 4.2 trace la DSP théorique d'une ligne d'image SAR et son estimation par périodogramme cumulé. On peut effectivement constater que la variance d'estimation a réduit du fait du cumul.

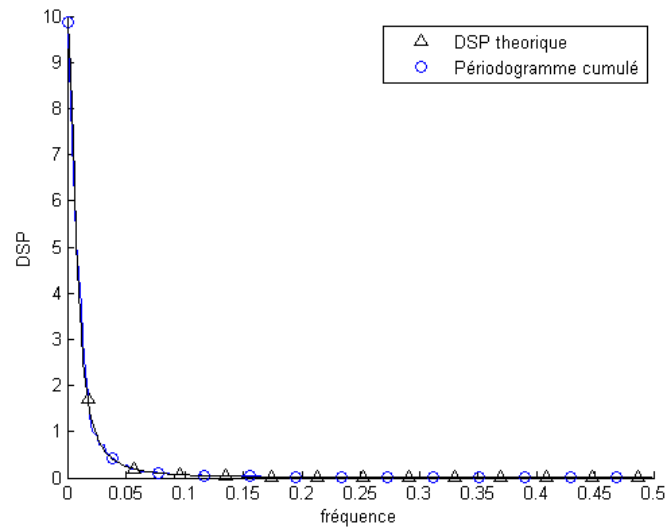


FIGURE 4.2 – Calcul de la DSP sur une ligne d'image SAR en utilisant un périodogramme cumulé

## 5. La transformée en z

Tout comme la transformée de Laplace permet l'étude des systèmes analogiques linéaires et invariants dans le temps, la transformée en z va permettre l'étude des systèmes numériques linéaires invariants dans le temps, et donc l'étude des filtres numériques linéaires invariants dans le temps qui feront l'objet du prochain chapitre.

Ce chapitre permet de donner les éléments essentiels concernant la transformée en z afin de l'utiliser comme un outil d'étude. Pour plus de détails, voir, par exemple, la référence [5].

### 5.1 Définition

La transformée en z du signal numérique  $x(n)$  est définie par :

TZ

$$X(z) = TZ [x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, z \in C$$

### 5.2 Convergence

La région de convergence est l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que la série  $X(z)$  converge. On utilisera le critère de Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|v(n)|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} v(n) \quad \text{converge}$$

pour avoir une condition suffisante de convergence :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n)z^n \text{ converge pour } 0 \leq R_x^- \leq |z| < R_x^+ < \infty$$

avec

$$R_x^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|}$$

et

$$R_x^+ = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$$

Exemple :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \quad \text{converge pour } |z| > 1 : R_x^- = 1 \text{ and } R_x^+ = \infty$$

## 5.3 Propriétés

### 5.3.1 Linéarité

$$TZ [ax(n) + by(n)] = aTZ [x(n)] + bTZ [y(n)]$$

Convergence : si  $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$  et  $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$  alors le domaine de convergence contient  $]R^-, R^+[$ .

### 5.3.2 Décalage temporel

$$TZ [x(n - n_0)] = z^{-n_0} TZ [x(n)]$$

Même domaine de convergence que pour  $X(z) = TZ [x(n)]$ .

### 5.3.3 Changement d'échelle

$$TZ [a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Convergence :  $aR_x^- \leq |z| < aR_x^+$

### 5.3.4 Dérivabilité

La transformée en z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence. On en déduit :

$$TZ [nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour  $X(z) = TZ [x(n)]$ .

### 5.3.5 Produit de convolution

Le produit de convolution entre les suites  $x(n)$  et  $y(n)$  est défini par :

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

On a alors :

$$TZ [x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

et sa région de convergence peut être plus large que l'intersection des régions de convergence de  $X(z)$  et  $Y(z)$ .

## 5.4 Transformée en z inverse

### 5.4.1 Définition

La transformée en z inverse est définie par :

TZ inverse

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz,$$

$C^+$  contour fermé inclu dans l'anneau de convergence.

### 5.4.2 Preuve

L'expression de la transformée en z inverse découle directement du calcul de l'intégrale :

$$J(n, k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus on montre :  $J(n, k) = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ j2\pi, & n = k. \end{cases}$

On en déduit alors :

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1} dz \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \right) J(n, k) = x(n) \quad (5.2)$$

*Remarque* : il existe des tables de transformées en z et transformées en z inverse.

*Rappel* : Si  $z_i$  est un pôle simple de  $g(z)$  :

$$\text{Residu } [g(z)]_{z=z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) g(z)$$

Si  $z_i$  est un pôle d'ordre  $\alpha$  de  $g(z)$  :

$$\text{Residu } [g(z)]_{z=z_i} = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \left[ \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial z^{\alpha-1}} (g(z)(z - z_i)^\alpha) \right]_{z=z_i}$$

## 5.5 Tables de transformées en z

Signal : $x(n)$	Transformée en z : $X(z)$	Domaine de convergence
$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$	1	$\mathbb{C}$
$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n > 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$	$z^{-k}$	$\mathbb{C}^*$
1	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$n$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$a^n$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  > a$
$na^n$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  > a$
$\cos(\omega n)$	$\frac{1 - \cos\omega z^{-1}}{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{\sin\omega z^{-1}}{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega n)$	$\frac{1 - a \cos\omega z^{-1}}{1 - 2a \cos\omega z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$
$a^n \sin(\omega n)$	$\frac{a \sin\omega z^{-1}}{1 - 2a \cos\omega z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$

FIGURE 5.1 – Tables de transformées en z



## 5.6 Exercices

Les corrections se trouvent dans le poly d'exercices et problèmes résolus.

### 5.6.1 Exercice 1 : Convergence

Soit un réel  $a \in ]0, 1[$  et  $u(n)$  l'échelon de Heaviside (ou échelon unité) :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n > 0 \\ 0 & \text{pour } n \leq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée en  $z$  du signal  $x(n) = a^n u(n)$ , avec  $|a| < 1$ , et préciser avec soin la région de convergence de  $X(z)$ .
2. Déterminer la transformée en  $z$  du signal  $y(n) = -a^n u(-n - 1)$ , avec  $|a| < 1$ , et préciser avec soin la région de convergence de  $Y(z)$ .
3. Soit  $b$  un réel tel que  $b > a$  et  $|b| < 1$ . On considère un système de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

Déterminer la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du système dans les trois cas suivants :

- la région de convergence de  $H(z)$  est  $|z| < a$ ,
- la région de convergence de  $H(z)$  est  $a < |z| < b$ ,
- la région de convergence de  $H(z)$  est  $|z| > b$ .

### 5.6.2 Exercice 2 : Fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps

Soit le système d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  défini par l'équation récurrente suivante :  $y(n) - ay(n-1) = x(n)$ , avec  $|a| < 1$ .

1. Soit  $x(n) = b^n u(n)$  avec  $|b| < 1$ . Déterminer sa transformée en  $z$ , ainsi que son domaine d'existence.
2. Déterminer la réponse du système à l'entrée  $x(n)$  définie à la question précédente, en supposant que le système est causal.
3. Déterminer la fonction de transfert, ainsi que la réponse impulsionnelle du système.



## 6. Filtrage numérique

On va s'intéresser aux filtres numériques linéaires, invariants dans le temps (LIT), rationnels.

### 6.1 Un outil d'étude : la transformée en $z$

Tout comme la transformée de Laplace permet l'étude des filtres analogiques de type LIT, la transformée en  $z$  va permettre l'étude des filtres numériques LIT. Tout comme, la transformée de Laplace permet de réaliser à la fois une étude temporelle (quand  $p \in \mathbb{C}$ ) et une étude fréquentielle (quand  $p = j\omega$ ) des filtres analogiques LIT, la transformée en  $z$  va permettre à la fois de réaliser à la fois une étude temporelle (quand  $z \in \mathbb{C}$ ) et une étude fréquentielle (quand  $z = e^{j\omega} = e^{j2\pi f}$ ) des filtres numériques LIT. Les principaux éléments concernant la transformée en  $z$  sont donnés dans le chapitre précédent.

### 6.2 Définitions

#### 6.2.1 Linéarité

Si  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  sont les sorties du filtre qui correspondent respectivement aux entrées  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$ , le filtre est linéaire s'il fait correspondre  $y_1(n) + y_2(n)$  à une entrée  $x_1(n) + x_2(n)$ .

#### 6.2.2 Invariance temporelle

Si  $y(n)$  est la sortie du filtre qui correspond à l'entrée  $x(n)$ , le filtre est dit invariant dans le temps s'il fait correspondre  $y(n - n_0)$  à l'entrée  $x(n - n_0)$ ,  $n_0$  représentant un retard de  $n_0$  échantillons.

### 6.2.3 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert

On peut écrire tout signal numérique de la manière suivante :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

où  $\delta(n)$  représente le Dirac numérique qui vaut 1 pour  $n = 0$  et 0 ailleurs.

Si on note  $h(n)$  la sortie du filtre correspondant à l'entrée  $\delta(n)$  et  $y(n)$  la sortie du filtre correspondant à  $x(n)$ , alors du fait de la linéarité et de l'invariance temporelle nous obtenons pour tout signal numérique  $x(n)$ , placé à l'entrée d'un filtre numérique linéaire invariant dans le temps, une réponse  $y(n)$  donnée par :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = x(n) * h(n)$$

On peut donc écrire toute sortie  $y(n)$  d'un filtre numérique linéaire invariant dans le temps en fonction de l'entrée appliquée  $x(n)$  et de  $h(n)$  qui est appelée **réponse impulsionnelle du filtre** (réponse à une impulsion représenté par  $\delta(n)$ ). Cette réponse impulsionnelle  $h(n)$  définit donc le filtre. **Sa transformée en z,  $H(z)$ , est appelée fonction de transfert du filtre.** Si  $Y(z)$  et  $X(z)$  sont respectivement les transformées en z de  $y(n)$  et  $x(n)$ , on a alors :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = TZ[h(n)]$$

D'où la représentation d'un filtre numérique linéaire invariant dans le temps :

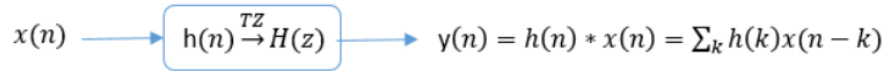


FIGURE 6.1 – Filtre numérique linéaire invariant dans le temps

### 6.2.4 Filtres numériques rationnels

Les filtres numériques rationnels sont définis par une fonction de transfert rationnelle en z (par analogie avec les filtres analogiques qui, eux, sont définis par une fonction de transfert rationnelle en p) :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

Un filtre numérique rationnel est ainsi défini par deux vecteurs de coefficients :  $A = [a_0 \ a_1 \dots \ a_{M-1}]$  et  $B = [b_0 \ b_1 \dots \ b_{N-1}]$  stockés en mémoire.

On pourra, par exemple, réaliser le filtrage sous Matlab en utilisant la fonction *filter.m* de la manière suivante :  $y = \text{filter}(B, A, x)$ , si  $x$  représente le signal à filtrer,  $y$  le signal filtré et  $B$  et  $A$  les tableaux de coefficients définissant le filtre à utiliser. Nous reviendrons par la suite plus en détail sur cette catégorie de filtres.

### 6.2.5 Réponse en fréquence et temps de propagation de groupe (TPG)

La réponse en fréquence, ou réponse harmonique, du filtre est donnée par :

Réponse en fréquence ou réponse harmonique

$$H(\tilde{f}) = [H(z)]_{z=e^{j2\pi\tilde{f}}}$$

où  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$  (fréquence normalisée), avec  $F_e$  qui représente la fréquence d'échantillonnage. On peut également écrire :

$$|H(\tilde{f})|^2 = \left[ H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=e^{j2\pi\tilde{f}}}$$

ce qui peut faciliter certains calculs (voir exercices).

Le temps de propagation de groupe (TPG) est donné en fréquences normalisées par :

Temps de propagation de groupe (TPG)

$$TPG(\tilde{f}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_H(\tilde{f})}{d\tilde{f}}, \text{ avec } \varphi_H(\tilde{f}) = \text{Arg} [H(\tilde{f})]$$

$TPG(\tilde{f})$  représente le temps que met un paquet d'onde à la fréquence  $\tilde{f}$  pour traverser le filtre. Lorsque l'on souhaite réaliser un filtre numérique les spécifications portent généralement sur le module de sa réponse en fréquence et on souhaite un TPG le plus constant possible, au moins sur la/les bande(s) passante(s). Notons cependant qu'il existe des filtres de phase, pour lesquels les spécifications portent sur la phase de la réponse en fréquence (afin de corriger, par exemple, un TPG non constant).

## 6.3 Réalisabilité d'un filtre numérique

**Un filtre numérique est réalisable si les trois conditions suivantes sont respectées :**

- **Le filtre doit être causal.** Cette condition se décline sur la réponse impulsionnelle du filtre de la manière suivante :  $h(n) = 0$  pour  $n < 0$ .
- **Le filtre doit être stable :** pour toute entrée bornée, la sortie doit être bornée. Cette condition se décline sur la réponse impulsionnelle du filtre de la manière suivante :  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ . Nous verrons par la suite, pour les filtres rationnels, que cette condition conduit à une condition portant sur les pôles de la fonction de transfert du filtre.
- **La réponse impulsionnelle du filtre,  $h(n)$ , doit être réelle.**

## 6.4 Classification des filtres numériques rationnels : RIF, RII

Les filtres rationnels sont divisés en deux catégories :

- Les filtres rationnels dits "à réponse impulsionnelle infinie" (ou RII)
- Les filtres rationnels dits "à réponse impulsionnelle finie" (ou RIF).

### 6.4.1 Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

La définition vue précédemment pour les filtres numériques rationnels définit en réalité les filtres rationnels dits "à réponse impulsionnelle infinie" (RII, ou IIR en anglais) :

Définition des filtres RII par leur fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

En utilisant le fait que  $TZ^{-1} [z^{-k} X(z)] = x(n-k)$  et en fixant  $a_0$  à 1 (par analogie avec les filtres analogiques), cette définition par la fonction de transfert en  $z$  conduit, dans le domaine temporel, à une équation récurrente (là où nous avons une équation différentielle pour les filtres analogiques) :

Définition des filtres RII dans le domaine temporel

$$y(n) = - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k).$$

On parle de filtres "à réponse impulsionnelle infinie" car, ainsi définis, ils présentent une réponse impulsionnelle qui s'auto-entretient :

$$h(n) = - \sum_{k=1}^{M-1} a_k h(n-k), \text{ pour } n \geq N$$

Chaque nouvelle valeur ne dépend que des valeurs passées et on peut donc ainsi obtenir un nombre infini de valeurs (ou coefficients) pour la réponse impulsionnelle.

On dit encore **filtres récurrents** car ce sont des filtres qui possèdent une boucle de réaction, boucle de réaction qui permet d'obtenir cette réponse impulsionnelle qui s'auto-entretient.

**Un filtre numérique rationnel de type RII est donc défini par deux vecteurs de coefficients,  $A = [a_0 \ a_1 \dots \ a_{M-1}]$  et  $B = [b_0 \ b_1 \dots \ b_{N-1}]$ , et peut être implanté sous Matlab de la manière suivante :  $y = \text{filter}(B, A, x)$ , si  $x$  représente le signal à filtrer,  $y$  le signal filtré et  $B$  et  $A$  les tableaux de coefficients définissant le filtre à utiliser.**

### 6.4.2 Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

On définit les filtres numériques rationnels à "Réponse Impulsionnelle Finie" (RIF, FIR en anglais) ou **filtres non récurrents**, de la manière suivante, en supprimant tout bonnement la boucle de réaction.

Définition des filtres RIF par leur fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}$$

Ce qui conduit dans le domaine temporel à :

Définition des filtres RIF dans le domaine temporel

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k).$$

Les coefficients  $b_k$  définissant le filtre RIF sont donc les échantillons prélevés sur la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \delta(n-k) = b_n, \quad n = 0, \dots, N-1$$

car

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = k \\ 0 & \text{pour } n \neq k. \end{cases}$$

Un des intérêts fondamentaux de ces filtres est qu'ils ne posent pas de problèmes d'instabilité. Ils présentent également très simplement un TPG constant, la condition étant que leur réponse impulsionnelle soit paire ou impaire, comme nous le verrons par la suite.

**Les filtres RIF ne sont définis que par un vecteur de coefficients,  $B = [b_0 \ b_1 \dots \ b_{N-1}]$ , et peuvent être implantés sous Matlab de la manière suivante :  $y = \text{filter}(B, 1, x)$ , si  $x$  représente le signal à filtrer,  $y$  le signal filtré et  $B$  le tableau de coefficients définissant le filtre à utiliser.**

## 6.5 Stabilité des filtres numériques rationnels récurrents (RIR)

### 6.5.1 Condition de stabilité

En supposant, dans l'expression de la fonction de transfert définissant les filtres rationnels de type RIR, que  $N < M$  et en réalisant une décomposition en éléments simples on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Ce qui donne par transformée en  $z$  inverse (solution causale) :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} A_k p_k^n u(n),$$

où  $u(n)$  représente la fonction de Heaviside :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n > 0 \\ 0 & \text{pour } n \leq 0. \end{cases}$$

Afin d'assurer la stabilité du système il faut que  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$  soit borné.

Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{M-1} |A_k| |p_k|^n u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &\leq \sum_{k=0}^{M-1} |A_k| \sum_{n=0}^{+\infty} |p_k|^n \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &\leq \sum_{k=0}^{M-1} |A_k| \frac{1}{1 - |p_k|} \text{ si } |p_k| < 1 \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &\text{ sera donc borné, et le système stable, si } |p_k| < 1 \forall k \end{aligned}$$

Condition de stabilité sur  $H(z)$

**Un filtre numérique rationnel de type RII est stable si tous les pôles (racines du dénominateur) de sa fonction de transfert  $H(z)$  sont de modules inférieurs à 1 (on dit souvent dans le cercle unité  $\Leftrightarrow$  cercle de rayon 1).**

Rappelons qu'il existe une condition similaire pour les filtres analogiques : un filtre analogique est stable si les pôles de sa fonction de transfert  $H(p)$  sont à parties réelles négative.

### 6.5.2 Remarques

- Si tous les zéros (racines du numérateur) de la fonction de transfert du filtre,  $H(z)$ , sont de modules inférieurs à 1 (dans le cercle unité), le filtre est dit à minimum de phase. Ce type de filtres est très intéressant car il est d'inverse stable, ce qui est une propriété recherchée dans beaucoup d'applications.
- La position des poles dans le cercle unité est également intéressante. Pour un filtre stable résonnant, on montre (voir exercice 4) que plus le module des pôles associés est proche de 1, plus la résonance est forte. Lorsque, pour un filtre stable, les pôles sont proches du cercle unité, on sait qu'il faudra faire davantage attention aux effets de la quantification des coefficients du filtre qui pourraient amener les pôles à sortir de la zone de stabilité.
- Nous verrons par la suite (exercice 4) qu'il est également possible de définir une zone de stabilité dans le plan des coefficients du filtre.
- Il existe des méthodes de conception de filtres numériques récurrents basées sur le placement des zéros et des pôles de leurs fonctions de transfert (voir références [6] et [7])



## 6.6 Synthèse des filtres numériques rationnels

La synthèse d'un filtre numérique correspond au passage entre les spécifications à respecter et l'ensemble des coefficients définissant le filtre numérique.

Les spécifications à respecter correspondent à un gabarit que l'on se donne sur la réponse en fréquence du filtre et qui fixe des marges dans lesquelles elle doit se trouver. Les synthèses des filtres RIF et RII se font de manière très différente (cf plus loin).

### 6.6.1 Introduction

#### Notion de gabarit

Le gabarit à respecter pour le filtre à synthétiser correspond à la définition des marges dans lesquelles la réponse en fréquence du filtre synthétisé doit se trouver.

Les figures 6.2 et 6.3 montrent un exemple de gabarit donné sur le module de la réponse en fréquence pour un filtrage de type passe-bas.

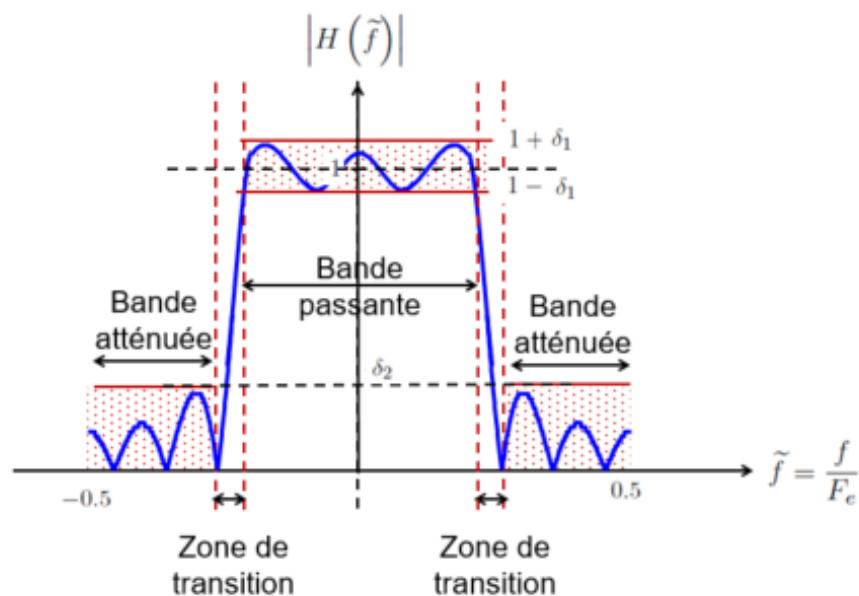


FIGURE 6.2 – Exemple de gabarit à respecter (en rouge) pour un filtre passe-bas.

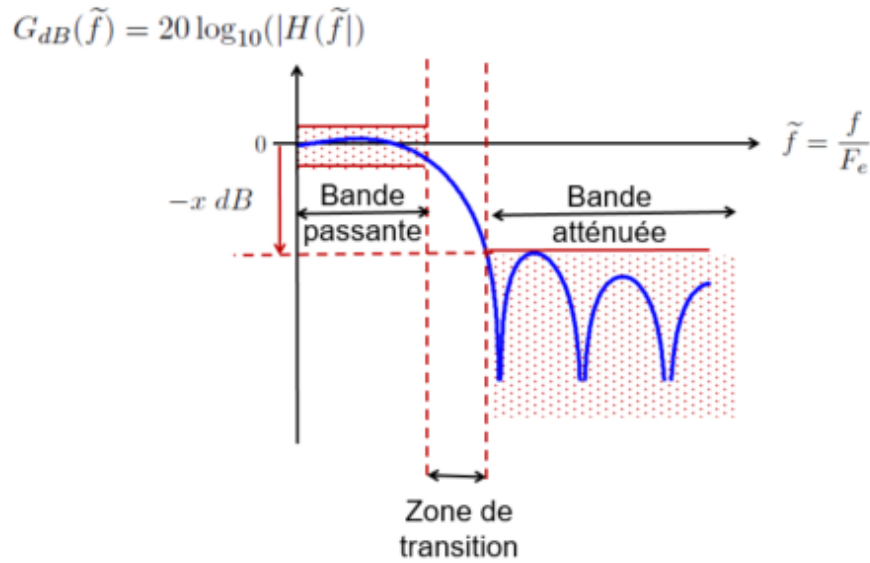


FIGURE 6.3 – Exemple de gabarit (en dB) à respecter (en rouge) pour un filtre passe-bas.

### Réponses en fréquences idéales cibles pour la synthèse

La figure 6.4 présentent les 4 réponses en fréquence idéales classiques : pour un filtre passe-bas qui laisse passer les fréquences autour de 0 ("basses fréquences") jusqu'à la fréquence  $\tilde{f}_c$  (fréquence de coupure normalisée), pour un filtre passe-haut qui coupe les fréquences autour de 0 ("basses fréquences") jusqu'à la fréquence  $\tilde{f}_c$  et laisse passer les fréquences au-delà de  $\tilde{f}_c$  ("hautes fréquences"), pour un filtre passe-bande qui ne laisse passer que les fréquences se trouvant sur une certaine bande (entre  $\tilde{f}_{c1}$  et  $\tilde{f}_{c2}$ ) et coupe toutes les autres, pour un filtre coupe-bande (ou réjecteur) qui laisse passer toutes les fréquences sauf celles se trouvant entre  $\tilde{f}_{c1}$  et  $\tilde{f}_{c2}$ .

### Remarque : Filtre idéal et filtrage en temps réel

Nous pouvons envisager en numérique de réaliser un filtrage idéal : on calcule le spectre de notre signal (TFD), on met à 0 dans le tableau correspondant toutes les fréquences que l'on souhaite éliminer puis on revient au signal filtré par TFD inverse. Cependant, ce filtrage ne se fait pas en temps réel car ils sous entend que l'on dispose de tout les échantillons de signal pour en calculer le spectre. Or, dans le cadre d'une transmission, les échantillons de signal sont envoyés et arrivent les uns après les autres (toutes les  $T_e$  secondes si  $T_e$  représente la période d'échantillonnage). Un filtrage ne pourra être réalisé en temps réel que s'il est réalisé dans le domaine temporel, en implantant l'expression  $y(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$  ou l'expression  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$ , selon que l'on souhaite réaliser un filtre de type RII ou bien de type RIF et en s'assurant que le calcul de la/des somme(s) puisse se faire en  $T_e$  secondes. C'est cette implantation dans le domaine temporel qui va conduire, comme nous allons le voir par la suite, à un filtrage qui sera non idéal et donc à la nécessité de définir un gabarit à respecter. Notons également qu'il n'y aura pas un filtre unique respectant le gabarit. On pourra choisir celui qui satisfait le mieux aux critères que l'on se donne (le plus simple d'implantation, celui qui présente la charge de calcul la plus faible, le plus stable numériquement ...)

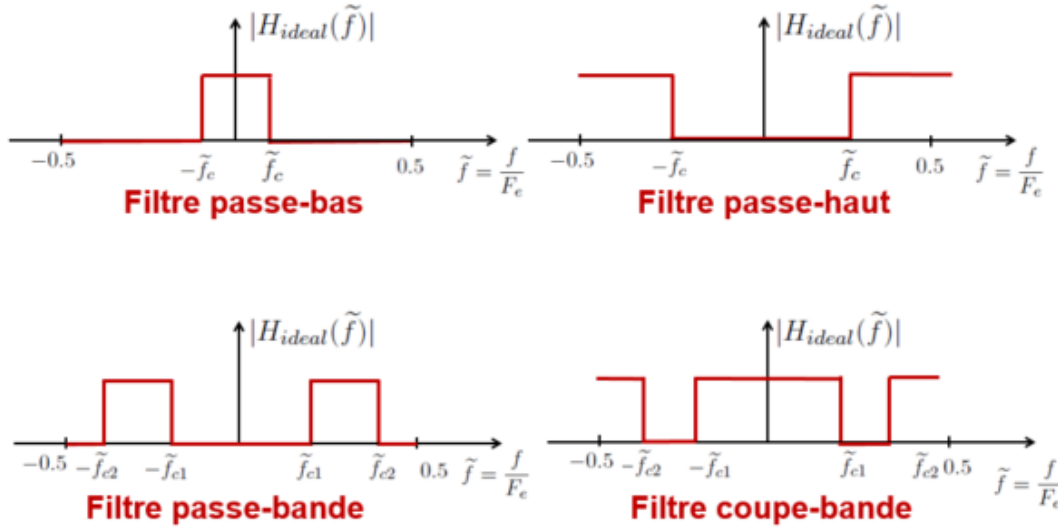


FIGURE 6.4 – Réponse en fréquences idéales (cibles pour la synthèse).

### 6.6.2 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie

#### Synthèse par développement en série de Fourier

La synthèse de filtres RIF est assez intuitive et facile à mettre en oeuvre. On se donne une réponse en fréquences idéale,  $H_I(\tilde{f})$ , du filtre à réaliser et un gabarit à respecter. On travaille en numérique, on doit donc considérer que la réponse en fréquence est périodique de période 1 en fréquences normalisées (TF d'une réponse impulsionnelle échantillonnée). Un filtre RIF peut donc être synthétisé directement par un développement en série de Fourier de la réponse en fréquence idéale :

$$H_I(\tilde{f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_I(k) e^{j2\pi\tilde{f}k}.$$

où les coefficients de la série de Fourier  $h_I(k)$  représentent les échantillons de la réponse impulsionnelle, ou "coefficients"  $b_k$ , définissant le filtre :

$$h_I(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_I(\tilde{f}) e^{-j2\pi k\tilde{f}} d\tilde{f}$$

$h_I(k)$  représente ici le  $k^{\text{ième}}$  point de la réponse impulsionnelle  $h_I(t)$  du filtre qui est échantillonnée avec une période d'échantillonnage  $T_e = \frac{1}{F_e}$  (il s'agit en réalité de  $h_I(kT_e)$ ).

En pratique le nombre de coefficients de la réponse impulsionnelle devra être limité. En effet celle-ci sera représentée par un tableau contenant un nombre fini de valeurs. On modélise cette limitation par l'application d'une fenêtre de troncature,  $w(n)$ , sur la réponse impulsionnelle idéale. Cela conduit à la réponse impulsionnelle réelle suivante :

$$h(n) = h_I(n) \times w(n)$$

et donc à une réponse en fréquence qui n'est plus idéale :

$$H(\tilde{f}) = H_I(\tilde{f}) * W(\tilde{f})$$

En effet, cette convolution de la réponse en fréquence idéale par la transformée de Fourier de la fenêtre de troncature va générer des transitions adoucies et des oscillations autour des transitions (voir tracé en bleu dans la figure 6.2). Nous retrouvons les mêmes phénomènes que ceux déjà évoqués dans le chapitre sur la transformée de Fourier d'un signal de durée limitée.

Lorsque l'on conserve tout simplement un certain nombre de points de la réponse impulsionnelle idéale pour former la réponse impulsionnelle réelle :  $[h_I(-N) \dots h_I(N)]$ , c'est comme si on utilisait une fenêtre de troncature rectangulaire. Dans les autres cas nous avons une pondération de la réponse impulsionnelle idéale, en plus de la troncature :  $[h_I(-N)w(-N) \dots h_I(N)w(N)]$ , en supposant que l'on conserve  $2N + 1$  éléments de  $h_I(k)$  et que l'on utilise une fenêtre de troncature,  $w$ , de  $2N + 1$  échantillons :  $[w(-N) \dots w(N)]$ .

#### Synthèse d'un filtre RIF

**Le nombre de points conservé sur la réponse impulsionnelle idéale pour former le tableau représentant la réponse impulsionnelle réelle est appelé *ORDRE* du filtre.**

**Les éléments du tableau représentant la réponse impulsionnelle réelle sont appelés *COEFFICIENTS* du filtre.**

**La synthèse d'un filtre RIF va alors consister à déterminer l'ordre du filtre, ainsi que la fenêtre de troncature à utiliser, afin que celui-ci satisfasse au gabarit souhaité.**

Les figures 6.5 et 6.6 présentent des exemples d'influence de l'ordre et de la fenêtre de troncature utilisée dans la cas d'un filtrage passe-bas.

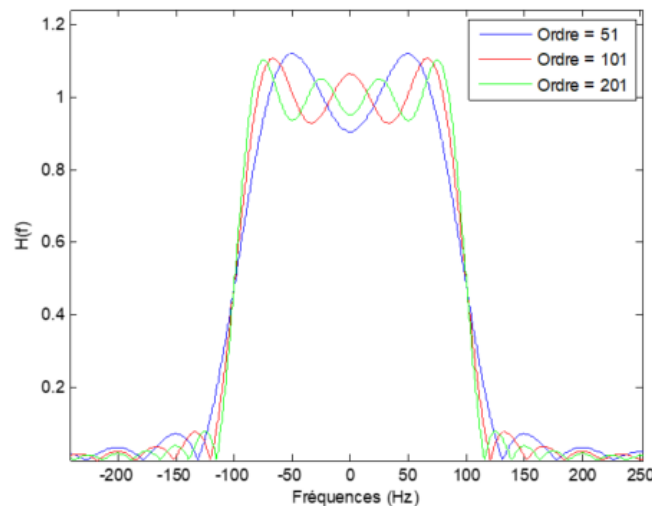


FIGURE 6.5 – Exemple d'influence de l'ordre dans la synthèse d'un filtre RIF de type passe-bas - Fenêtre rectangulaire

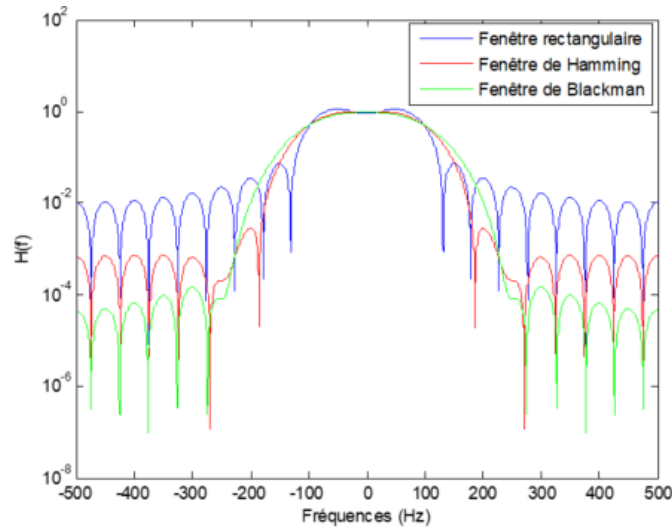


FIGURE 6.6 – Exemple d’influence de la fenêtre de troncature dans la synthèse d’un filtre RIF de type passe-bas - Ordre = 21

**Attention la réponse impulsionnelle obtenue doit être causale pour que le filtre soit réalisable. Si elle ne l’est pas en sortie de la synthèse on doit la décaler afin qu’elle le devienne et, ce faisant, on introduit un retard**

$$h_{causal}(n) = h\left(n - \frac{N}{2}\right) \text{ si } N \text{ est pair}$$

$$h_{causal}(n) = h\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \text{ si } N \text{ est impair}$$

Ce décalage ne modifie pas le module de la réponse en fréquence mais ajoute une phase linéaire en fréquence, qui ne fera qu’ajouter un facteur constant au temps de propagation de groupe (pas de dégroupage).

En supposant  $N$  pair et en notant  $H_{causal}(\tilde{f}) = TFD[h_{causal}(n)]$ , on a :

$$H_{causal}(\tilde{f}) = H(\tilde{f})e^{-j\pi\tilde{f}N}$$

et donc :

$$\left|H_{causal}(\tilde{f})\right| = \left|H(\tilde{f})\right|$$

$$Arg\left[H_{causal}(\tilde{f})\right] = Arg\left[H(\tilde{f})\right] - \pi\tilde{f}N$$

#### Remarques

- Il existe un calcul (très approximatif) permettant de se donner un ordre de départ pour la synthèse :  $Ordre = \frac{2}{3} \log_{10} \left( \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \right) \frac{F_c}{\Delta f}$ , où  $2\delta_1$  représente la largeur admise autour de 1 en bande passante (en linéaire pas en dB),  $\delta_2$  représente l’atténuation minimum en bande coupée (en linéaire pas en dB) et  $\Delta f$  représente la largeur de la zone de transition.

Type de fenêtre :	Largeur de la zone de transition ( $\Delta\omega$ )	Atténuation min en bande coupée (en dB)
Rectangulaire	$\frac{1.8\pi}{\text{Ordre}}$	21
Barlett	$\frac{5.6\pi}{\text{Ordre}}$	25
Hanning	$\frac{6.2\pi}{\text{Ordre}}$	44
Hamming	$\frac{6.6\pi}{\text{Ordre}}$	53
Blackman	$\frac{11\pi}{\text{Ordre}}$	74
Kaiser ( $\beta = 4.54$ )	$\frac{5.8\pi}{\text{Ordre}}$	50
Kaiser ( $\beta = 5.67$ )	$\frac{7.8\pi}{\text{Ordre}}$	60

TABLE 6.1 – Caractéristiques des fenêtres de troncature

- En général le choix de la fenêtre fixe l'amplitude des oscillations et, pour une fenêtre donnée, l'ordre  $(2N + 1)$  va fixer la largeur de la zone de transition : voir tableau 6.1. Comme cela a été vu dans le chapitre sur la transformée de Fourier, on retrouve ici le compromis à réaliser entre la largeur de la transition et l'amplitude des oscillations : une fenêtre qui permet d'avoir des oscillations de plus faible amplitude, comparée à une autre, fournit une zone de transition plus large pour un même ordre.
- Les résultats obtenus par synthèse directe peuvent être ensuite optimisés grâce, par exemple, à la méthode des moindres carrés (minimisation au sens des moindres carrés de la distance entre le gabarit désiré et le gabarit du filtre obtenu par la synthèse en série de Fourier, fonction *firls.m* sous Matlab) ou à l'algorithme de Remez (pour obtenir la meilleure approximation du gabarit présentant des ondulations d'amplitude constante, fonction *firgr.m* sous Matlab).
- Il existe des fonctions matlab fournissant les coefficients du filtre souhaité sans avoir à réaliser le calcul de la impulsionnelle (voir, par exemple, *fir1.m* pour les filtres "classiques" ou *rcosdesign.m* pour réaliser un filtre en cosinus surélevé très utilisé en transmission). Il est également possible de rentrer la réponse en fréquence souhaitée comme un tableau de point et d'obtenir la réponse impulsionnelle correspondante en utilisant la TFD inverse (*ifft.m* sous Matlab).

#### Avantages/Inconvénients des filtres RIF

- Les filtres RIF sont fréquemment désignés par le terme de filtres non-récurrents, car ils ne présentent pas de boucle de réaction de la sortie vers l'entrée, ce qui assure leur stabilité de manière inconditionnelle (pour peu que les coefficients du filtre soient bornés).
- Les filtres RIF peuvent avoir très simplement un temps de propagation de groupe constant. En effet : Si

$$\text{Arg} [H(\tilde{f})] = \text{constante}$$

alors

$$\text{Arg} [H_{\text{causal}}(\tilde{f})] = \text{constante} - \pi \tilde{f} N$$

Et donc :

$$TPG(\tilde{f}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\text{Arg} [H_{\text{causal}}(\tilde{f})]}{d\tilde{f}} = \frac{N}{2}$$

Or  $\text{Arg} [H(\tilde{f})]$  est constant si la réponse impulsionnelle  $h(n)$  est paire ou impaire :

$$\begin{aligned} \text{Arg} [H(\tilde{f})] &= \text{Arg} \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) \left( \cos(2\pi \tilde{f}n) + j \sin(2\pi \tilde{f}n) \right) \right] \\ &= \left( \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) \sin(2\pi \tilde{f}n)}{\sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) \cos(2\pi \tilde{f}n)} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } h(n) \text{ pair} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } h(n) \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

- La synthèse des filtres RIF est très simple.
- Certains gabarits très contraints peuvent nécessiter l'utilisation de beaucoup trop de coefficients et donc un temps de calcul beaucoup trop élevé. Dans ce cas on utilisera plutôt un filtre de type RII.

### 6.6.3 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie

#### Principe de la méthode

Les filtres RII sont des filtres qui présentent une boucle de réaction de la sortie vers l'entrée (filtres récurrents). L'idée de leur synthèse est de s'appuyer sur les bibliothèques très fournies de modèles pour le filtrage analogique.

La synthèse de filtre analogique consiste, à partir d'un gabarit défini sur la réponse en fréquence souhaitée  $H(f)$ , à choisir un modèle dans la bibliothèque de modèles et à adapter ses paramètres de façon à obtenir un filtre satisfaisant au gabarit. Elle fournit une fonction de transfert en  $p$  :  $H(p)$ .

En numérique le gabarit est donné sur  $H(\tilde{f})$  et nous souhaitons obtenir une fonction de transfert en  $z$  :  $H(z)$ .

Il "suffirait" donc de trouver un "passage" entre  $H(\tilde{f})$  et  $H(f)$ , puis entre  $H(p)$  et  $H(z)$  pour utiliser ce qui existe en synthèse analogique à des fins numériques.

#### Mise en pratique

La figure 6.7 résume la manière de réaliser une synthèse de filtre RII. Les explications sont données dans la suite.

- Le passage entre  $H(\tilde{f})$  et  $H(f)$  qui semble naturel est de prendre :  $f = \tilde{f}F_e$ . Nous allons cependant voir par la suite qu'il va falloir le modifier.
- Le passage entre  $H(p)$  et  $H(z)$  doit permettre de conserver au filtre numérique la stabilité et la conformité au gabarit fixé obtenue à l'issue de la synthèse analogique. Pour cela on doit trouver une transformée du plan des  $p$  vers le plan des  $z$  qui transforme :
  - le demi plan gauche (lieu de stabilité en analogique : pôles de  $H(p)$  à parties réelles négatives) en l'intérieur du cercle unité (lieu de stabilité en numérique : pôles de  $H(z)$  de modules inférieurs à 1)
  - l'axe imaginaire (lieu de parcours de la réponse en fréquence en analogique :  $H(f) = [H(p)]_{p=j\omega=j2\pi f}$ ) en le cercle unité (lieu de parcours de la réponse en fréquence en numérique :  $H(\tilde{f}) = [H(z)]_{z=e^{j2\pi \tilde{f}}}$ ).

Cette transformée est la **transformée bilinéaire**. Elle est obtenue par approximation numérique de l'opérateur intégrale définissant le passage dans le filtre analogique (voir figure 6.8) et

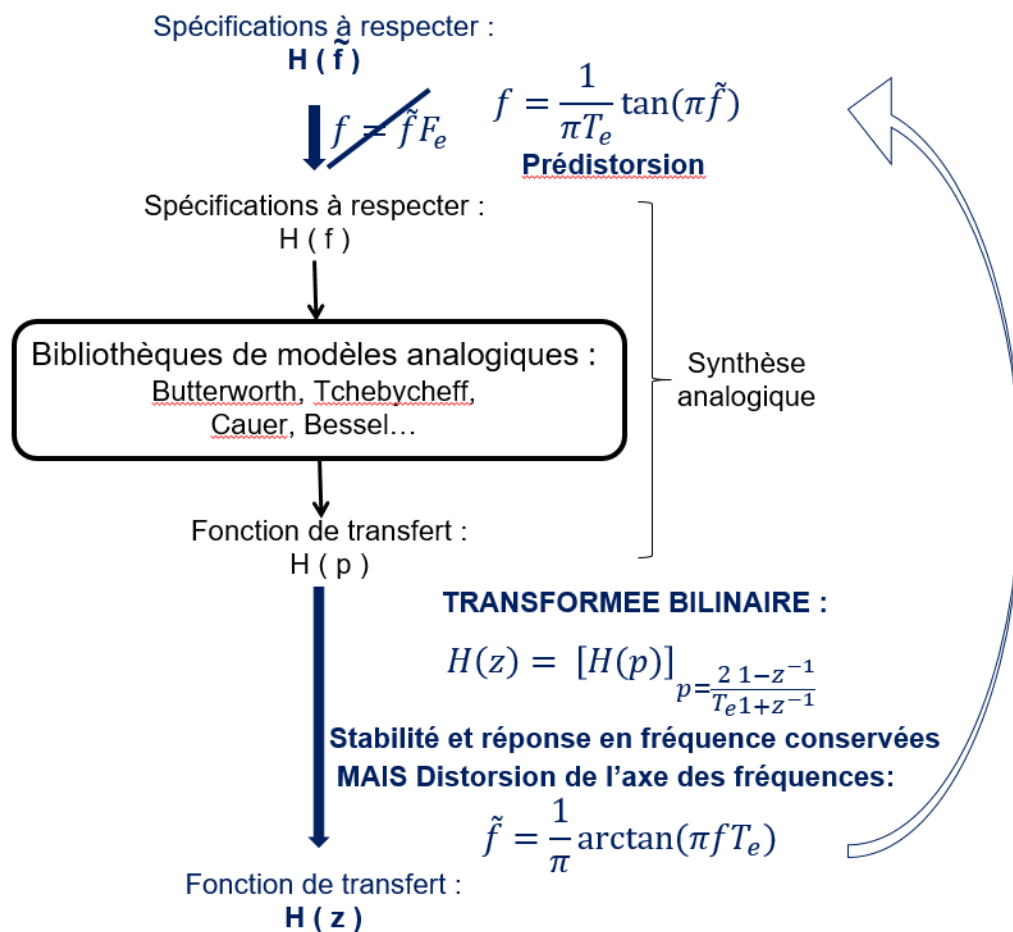


FIGURE 6.7 – Méthode de synthèse d'un filtre numérique rationnel de type RII (filtre récursif).



donne  $H(z)$ , à partir de  $H(p)$  de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 y(t) = \int_0^t x(u) du & \longrightarrow & y(n) = y(n-1) + \frac{T_e}{2} (x(n) - x(n-1)) \\
 \downarrow \text{TL} & & \downarrow \text{TZ} \\
 Y(p) = \frac{X(p)}{p} \Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p} & & Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T_e}{2} (1 + z^{-1}) X(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{\frac{T_e}{2} (1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}}
 \end{array}$$

FIGURE 6.8 – Obtention de la transformée bilinéaire.

- Attention cependant car, même si la transformée bilinéaire permet de passer de  $H(p)$  à  $H(z)$  en conservant la stabilité et la réponse en fréquence du filtre, elle ne transforme pas les fréquences  $f$  en  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$ .  
En effet, quand  $p = j2\pi f$  alors

$$z = \frac{1 + \frac{j2\pi f T_e}{2}}{1 - \frac{j2\pi f T_e}{2}}$$

On a bien transformé l'axe imaginaire en le cercle unité mais pas  $f$  en  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$ .  
En écrivant

$$z = \frac{1 + \frac{j2\pi f T_e}{2}}{1 - \frac{j2\pi f T_e}{2}} = e^{j2\pi \tilde{f}}$$

on obtient

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \arctan(\pi f T_e)$$

Ceci n'est néanmoins pas gênant car il suffit de passer du gabarit sur  $H(\tilde{f})$  au gabarit sur  $H(f)$ , non pas en faisant  $f = \tilde{f} F_e$  mais en faisant

$$f = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi \tilde{f})$$

La distorsion de l'axe des fréquences introduite par la transformée bilinéaire est ainsi compensée par une prédistorsion lors du passage de  $H(\tilde{f})$  vers  $H(f)$ .

Une fois établis les passages de  $H(\tilde{f})$  vers  $H(f)$  et de  $H(p)$  vers  $H(z)$ , on constate donc que la synthèse analogique revient à faire une synthèse analogique : choix du modèle et adaptation des paramètres pour satisfaire au gabarit.

## Synthèse des filtres RII

A partir du gabarit numérique souhaité (sur  $H(\tilde{f})$ ), on détermine un gabarit analogique (sur  $H(f)$ ) en conservant les amplitudes mais en prédistorant les fréquences de la manière suivante :

$$f = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi \tilde{f})$$

Le gabarit obtenu permet de réaliser une synthèse analogique, en utilisant les bibliothèques très fournies de modèles disponibles.

Une fois la fonction de transfert analogique,  $H(p)$ , satisfaisant au gabarit obtenue, on déduit la fonction de transfert numérique  $H(z)$  en appliquant la transformée bilinéaire :

$$H(z) = [H(p)]_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Cette transformée conserve la stabilité et la réponse en fréquence du filtre mais provoque une distorsion de l'axe des fréquence qui a été pré-compensée au départ.

Parmi les modèles analogiques les plus courants on trouve :

- Le modèle de Butterworth, qui est le plus simple :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}, \text{ où } f_c \text{ représente la fréquence de coupure}$$

Ce modèle ne présente pas d'ondulations, ni en bande passante, ni en bande atténuée.

L'ordre du filtre  $n$  permet de régler la raideur de la transition entre la bande passante et la bande atténuée.

La zone de transition est plus large qu'avec les autres modèles pour un même ordre mais la phase de la réponse en fréquence est modérément non linéaire (TPG à peu près constant sur la bande passante).

- Le modèle de Tchebychef (ou Chebyshev) présente des ondulations en bande passante ou en bande atténuée (type I ou type II), ce qui permet une zone de transition plus étroite qu'un modèle de Butterworth pour un même ordre. La phase de la réponse en fréquence est, par contre, non linéaire (TPG non constant).
- Le modèle de Caue (ou Elliptique) présente des ondulations en bande passante et en bande atténuée, ce qui permet une zone de transition encore plus étroite que les modèles précédents pour un même ordre. La phase de la réponse en fréquence est, pour ce modèle aussi, non linéaire (TPG non constant).
- Le modèle de Bessel présente une phase à peu près linéaire pour la réponse en fréquence, ne présente pas d'ondulations ni en bande passante ni en bande atténuée mais sa zone de transition va être beaucoup plus large que les autres filtres pour un même ordre. C'est un filtre de phase.

Des exemples de synthèse de filtres RII se trouvent dans la section exercices (corrections dans le poly exercices et problèmes résolus). Notons que de nombreuses fonctions sont proposées par Matlab pour réaliser une synthèse de RII en utilisant les différents modèles issus des bibliothèques analogiques.

**Avantages/Inconvénients des filtres RII**

- Du fait de la présence de pôles dans leur fonction de transfert (boucle de réaction), les filtres RII présentent des risques d'instabilité.
- Le temps de propagation de groupe des filtres RII n'est pas constant. Néanmoins, selon le modèle analogique utilisé, le TPG sera plus ou moins perturbé en bande passante.
- La synthèse des filtres RII est plus complexe que celle des filtres RIF.
- Le principal avantage des filtres RII va être de satisfaire certains gabarits avec un coût calculatoire plus faible que les filtres RIF (ordre, ou nombre de coefficients nécessaires, moins élevé).

**6.7 Implantation des filtres numériques rationnels**

Comme nous l'avons évoqué précédemment, un filtrage numérique ne pourra être réalisé en temps réel que s'il est réalisé dans le domaine temporel, en implantant les expressions :

$$y(n) = - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) \text{ pour un filtre RII}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) \text{ pour un filtre RIF}$$

Ces expressions, définissant un filtre numérique dans le domaine temporel, s'appuient sur 3 opérations élémentaires : le retard, la multiplication et l'addition. La fonction de transfert d'un système numérique effectuant un retard de  $T_e$  (un coup d'échantillonnage) étant  $z^{-1}$ , il est d'usage de représenter les retards unités dans les schémas bloc d'implantation des filtres par la notation  $z^{-1}$ .

**6.7.1 Structure directe**

La structure la plus directe pour implanter un filtre numérique rationnel est donné par le schéma de la figure 6.9. Cette implantation nécessite deux files d'attente et  $\sim M + N + 1$  opérations d'additions/multiplications. Il est cependant possible de n'utiliser qu'une seule file d'attente : c'est la structure canonique présentée dans le paragraphe suivant.

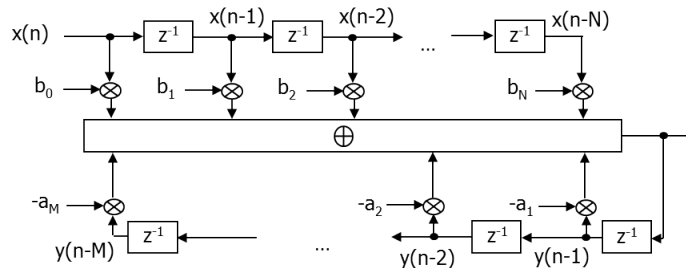


FIGURE 6.9 – Structure directe

### 6.7.2 Structure canonique

En utilisant une variable intermédiaire :

$$W(z) = \frac{X(z)}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

on obtient  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w(n-k)$  avec  $w(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k w(n-k) + x(n)$ , et donc une structure d'implantation simplifiée, dite canonique et présentée dans la figure 6.10. Cette implantation ne nécessite qu'une seule file d'attente et  $\sim M + N + 1$  opérations d'additions/multiplications.

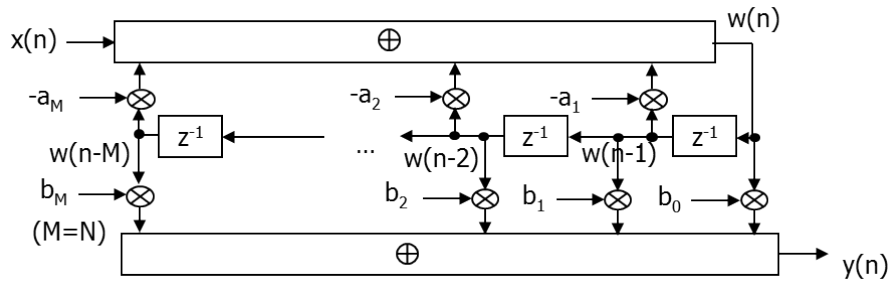


FIGURE 6.10 – Structure canonique

### 6.7.3 Structures décomposées

La plupart du temps on implante un filtre numérique en le décomposant en cellules du premier et du deuxième ordre. L'implantation peut se faire de deux manières : en série ou en parallèle.

#### Structure décomposée en série (ou cascade)

La figure 6.11 illustre la structure d'implantation par décomposition série. Elle est obtenue en exprimant la fonction de transfert globale du filtre comme un produit de fonctions de transfert plus simples :

$$H(z) = G \prod_{i=0}^{M-1} H_i(z)$$

où  $G$  est une constante et les  $H_i(z)$  sont des cellules du premier et du deuxième ordre de la forme :

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

ou

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

obtenues en factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(z)$ . Les cellules du premier ordre ont des pôles et des zéros réels, tandis que les cellules du second ordre ont des zéros et des pôles qui sont complexes conjugués, les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  eux sont toujours réels.

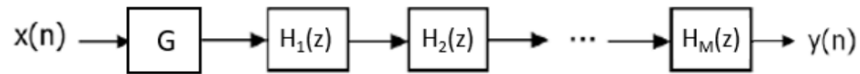


FIGURE 6.11 – Structure série

**Structure décomposée en parallèle**

La figure 6.12 représente une décomposition parallèle. Elle est obtenue en exprimant la fonction de transfert globale du filtre comme une somme de fonctions de transfert plus simples :

$$H(z) = G + \sum_{i=0}^{M-1} H_i(z)$$

où  $G$  est une constante et les  $H_i(z)$  sont des cellules du premier et du deuxième ordre de la forme :

$$H_i(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

ou

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

obtenues en décomposant  $H(z)$  en éléments simples.

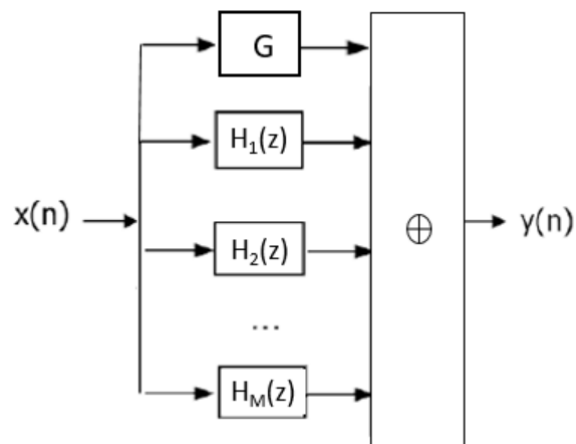


FIGURE 6.12 – Structure parallèle

### 6.7.4 Structure non récursive

Il s'agit de la structure des filtres à réponses impulsionnelles finies, ou filtres RIF. Elle est représentée dans la figure 6.13.

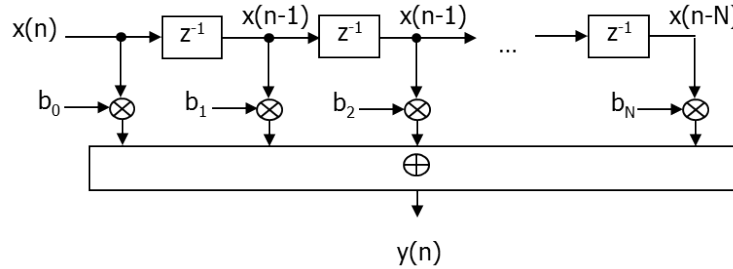


FIGURE 6.13 – Structure non récursive

## 6.8 Exercices

### 6.8.1 Exercice 1

On considère un filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} \quad (6.1)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels  $\in ]0, 1[$  avec  $b > a$ .

1. Quel est l'ordre du filtre défini par la fonction de transfert  $H(z)$  ?
2. Déterminer l'équation récurrente définissant le filtre dans le domaine temporel.
3. Quel type de filtre rationnel (RIF, RII) est défini par  $H(z)$  ? Justifiez votre réponse.
4. Le filtre défini par  $H(z)$  est-il stable ? Justifiez votre réponse.
5. En réutilisant les résultats de l'exercice 5.6.1 déterminer la réponse impulsionnelle  $h(n)$  permettant de pouvoir réaliser le filtre.

### 6.8.2 Exercice 2

Soit le filtre d'entrée  $x(n]$  et de sortie  $y(n]$  défini par l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = x(n) - ax(n-1) \quad (6.2)$$

1. Déterminer sa fonction de transfert  $H(z)$ .
2. Déterminer la transformée en  $z$  de  $\delta(n)$  et de  $\delta(n-1)$ , où  $\delta(n)$  représente le Dirac numérique :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

En déduire la réponse impulsionnelle du filtre.

3. Déterminer la transformée en  $z$  de la fonction échelon unité  $u(n)$ , ainsi que son domaine d'existence. En déduire la réponse indicielle du filtre (réponse à un échelon).

4. Le filtre défini par l'équation 6.2 est-il un filtre RIF ou un filtre RII ? Justifiez votre réponse.
5. Le filtre défini par l'équation 6.2 est-il stable ? Justifiez votre réponse.
6. Le filtre défini par l'équation 6.2 est-il causal ? Justifiez votre réponse.

### 6.8.3 Exercice 3 : synthèse d'un filtre passe-bas de type RIF

On veut synthétiser un filtre passe-bas en essayant d'approcher par un filtre RIF la fonction de transfert idéale de la figure 6.14. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle d'un filtre à  $2N + 1$  coefficients utilisant une fenêtre rectangulaire de troncature et d'un filtre à  $2N + 1$  coefficients utilisant une fenêtre de troncature de Hamming donnée par  $w(n) = 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{2N+1})$ .

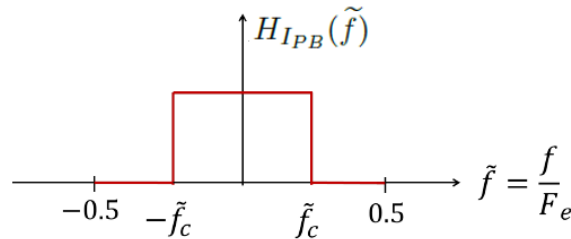


FIGURE 6.14 – Filtre passe-bas - Fonction de transfert idéale

### 6.8.4 Exercice 4 : étude de la cellule du second ordre

#### Cellule du second ordre purement récurrente

On la définit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

1. Exprimez sa fonction de transfert en  $z$ .
2. Dans le plan des coefficients ( $a_1$  en abscisse,  $a_2$  en ordonnées), tracez le domaine de stabilité du filtre.
3. Donnez l'expression de la réponse en fréquence en fonction de  $a_1$  et  $a_2$ .
4. A quelle condition existe-t-il une pulsation de résonance  $\tilde{\omega}_0$  ( $\tilde{\omega} = 2\pi \tilde{f}$ ) ?
5. Montrez que la valeur du module de la réponse harmonique à la résonance est inversement proportionnelle à la distance des pôles au cercle de rayon 1. On se placera dans le cas où  $a_1^2 < 4a_2$  (vraie cellule du second ordre) et on écrira la réponse en fréquence en  $\tilde{\omega}_0$  sous forme polaire. On donne :

$$|H(\tilde{\omega}_0)| = \frac{2\sqrt{a_2}}{(1-a_2)\sqrt{4a_2-a_1^2}}$$

6. Donnez l'expression de la réponse impulsionnelle en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  des pôles dans le cas où  $a_1^2 < 4a_2$ .
7. Proposez une structure de réalisation de ce filtre.

**Cellule du second ordre générale**

On considère une équation générale de la cellule du second ordre :

$$y(n) = x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

1. Exprimez sa fonction de transfert en  $z$ .
2. Montrez que cette cellule du second ordre peut être considérée comme la mise en cascade de la cellule purement réursive précédente et d'un filtre RIF.
3. En déduire une structure de réalisation.
4. Pour  $b_2 = 1$  montrez que la phase du RIF est linéaire.

**6.8.5 Exercice 5 : synthèse RII guidée**

On se propose de synthétiser un filtre passe-bas numérique de type RII. Le gabarit à respecter est donné par la figure 6.15. Afin de simplifier les calculs la fréquence d'échantillonnage sera considérée égale à 1Hz.

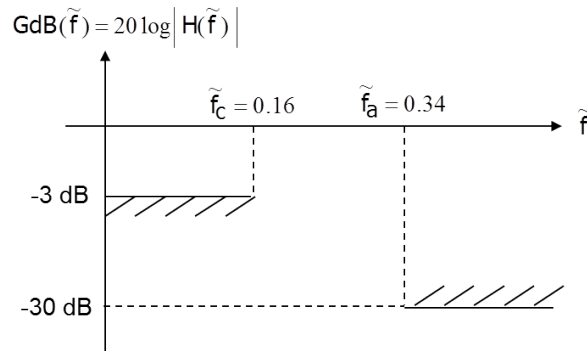


FIGURE 6.15 – Gabarit numérique à respecter

1. La synthèse de filtre RII est une méthode de synthèse numérique qui utilise la synthèse analogique. Cette synthèse analogique a besoin en entrée d'un gabarit analogique à respecter. On passera donc dans un premier temps du gabarit numérique sur  $H(\tilde{f})$  au gabarit d'entrée de la synthèse analogique portant sur  $H(f)$ . Tracez le gabarit à respecter par  $H(f)$ .
2. Réalisation de la synthèse analogique :
  - (a) Première étape : on doit choisir une fonction modèle analogique et régler ses paramètres afin de satisfaire le gabarit souhaité. On impose dans cet exercice d'utiliser le modèle passe-bas de Butterworth, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}},$$

où  $\omega_c$  représente la pulsation de coupure. Montrez que le paramètre  $N$  permettant au modèle de Butterworth de satisfaire le gabarit à moindre coût est égal à 3.

- (b) Deuxième étape : passer de  $|H(\omega)|^2$  à  $H(p)$ .

$$|H(\omega)|^2 = [ |H(p)|^2 ]_{p=j\omega}$$



d'où pour  $N = 3$  :

$$|H(p)|^2 = \frac{1}{1 - p^6} = H(p)H(-p)$$

(on oublie pour l'instant le  $\frac{1}{\omega_c}$ , sachant qu'on remplacera  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$  à la fin).

Parmi les 6 pôles de  $|H(p)|^2$  (qui sont les racines sixièmes de l'unité), 3 appartiennent à  $H(p)$ , 3 appartiennent à  $H(-p)$ . On choisira comme pôles pour  $H(p)$  :  $p_0 = -1$ ,  $p_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Expliquez ce qui conduit à ce choix.

On en déduit donc la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

soit en remplaçant  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$  :

$$H(p) = \frac{\omega_c^3}{(p + \omega_c)(p^2 + p\omega_c + \omega_c^2)}$$

- (c) Troisième étape : Application de la transformée bilinéaire. Après application de la transformée bilinéaire sur  $H(p)$  on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

avec

$$H_1(z) = \frac{0.43(1+z^{-1})}{1-0.29z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{0.135 + 0.27z^{-1} + 0.135z^{-2}}{1-0.753z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

3. Le filtre obtenu est-il stable ? Justifiez votre réponse.
4. Le filtre obtenu est-il résonnant ? Justifiez votre réponse.
5. On souhaite filtrer un signal  $x$  en utilisant le filtre RII synthétisé. En appelant  $y$  le signal de sortie, proposer un programme matlab permettant de passer de  $x$  à  $y$ . Ce programme pourra être testé pour filtrer des sinusoides lors des séances de TP.



## 7. Références

- [1] : "Traitement numérique du signal, théorie et pratique", M. Bellanger, Masson, collection CENT-ENST.
- [2] : "Traitement numérique des signaux", M. Kunt, Dunod, Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique.
- [3] : "Traitement numérique du signal, Une introduction", A.W.M. Van Den Enden et N.A.M. Verhoeckx, Masson.
- [4] : "Introduction au traitement du signal", P. Duvaut, F. Michaut, M. Chuc, Hermes, Collection traitement du signal.
- [5] : Documents sur la variable complexe, la transformée de Laplace et la transformée en  $z$  : <http://dubigeon.perso.enseeiht.fr/teaching/complex.html>
- [6] : "Introduction to digital filters, with audio applications", J.O. Smith, BookSurge, 2007.
- [7] : "Digital signal processing : fundamentals and applications", Tan Li, Jiang Jean, Elsevier, 2013.
- [8] : Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer et J. R. Buck, Discrete-time signal processing, Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 3<sup>rd</sup> edition, 2009.
- [9] : Signal and Systems, by Simon Haykin and Barry Van Veen, Wiley, 2<sup>nd</sup> edition, 2002.
- [10] : John G. Proakis, Dimitri G. Manolakis, Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications, Pearson Education, 4<sup>th</sup> edition, 2006.