Traitement du Signal

Jean-Yves Tourneret[1] et Charly Poulliat[2]

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

jyt@n7.fr

(2) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

charly.poulliat@enseeiht.fr

Bibliographie

- J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 5ème édition, 2004.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Transformée de Fourier

- Définitions
  - Formule directe

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp\left(-j2\pi f t\right) dt$$

  - Formule inverse

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp\left(j2\pi f t\right) df$$

- Hypothèses

  TF sur L^1 ou L^2

Propriétés

- Linéarité

$$\text{TF}\left[ax(t) + by(t)\right] = aX(f) + bY(f)$$

- Parité $\quad x(t)$ réelle paire $\Rightarrow X(f)$ réelle paire
- Translation et Modulation

$$\text{TF}\left[x(t - t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0) X(f)$$

$$\text{TF}\left[x(t) \exp(j2\pi f_0 t)\right] = X(f - f_0)$$

- Similitude

$$\text{TF}\left[x(at)\right] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Propriétés

- Produits de Convolution
  - Définition

$$y(t) = (h * x)(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

  - TF

$$\text{TF}\left[x(t) * y(t)\right] = X(f)Y(f)$$
$$\text{TF}\left[x(t)y(t)\right] = X(f) * Y(f)$$

- Égalite de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

Distributions

- Localisation

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Produit de Convolution

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Transformées de Fourier

$$\text{TF}\left[\delta(t)\right] = 1, \;\; \text{TF}\left[1\right] = \delta(f)$$

$$\text{TF}\left[\delta(t-t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0), \;\; \text{TF}\left[\exp(j2\pi f_0 t)\right] = \delta(f-f_0)$$

Résumé des propriétés

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\,.\,y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\,.\,Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\,X(f)$
$(-i2\pi t)^n\,x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2\,df$	

Tables

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi T f)$
$B\sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Classe 1 : signaux déterministes à énergie finie
- Classe 2 : signaux déterministes périodiques à puissance finie
- Classe 3 : signaux déterministes non périodiques à puissance finie
- Classe 4 : signaux aléatoires stationnaires

Signaux déterministes à énergie finie

- Définition E $= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale d'énergie

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \left|X(f)\right|^2$$

- Preuve

$$\begin{aligned}
s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt\right] \exp(-j2\pi f\tau)d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(t-\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau\right] x(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(u)\exp\left[j2\pi f(u-t)\right]du\right] x(t)dt \\
&= X^*(f)X(f)
\end{aligned}$$

Exemple

- Fenêtre rectangulaire

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$$

- Densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2$$

Signaux déterministes périodiques

- **Définition** $\mathsf{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$.

- Preuve

$$R_x(\tau) = \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp\left(j2\pi l f_0 \tau\right) \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp\left[j2\pi(k-l)f_0 t\right] dt\right]$$

$$= \sum_{k} |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau)$$

Exemple

- Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Signaux déterministes à puissance finie

- Définition P $= \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t-\tau) dt = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left|X_T(f)\right|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

- Exemple

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec f_1 et f_2 non commensurables.

Signaux aléatoires stationnaires

- Définition
  - Moyenne : $E[x(t)]$ indépendant de t
  - Moment d'ordre 2 : $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$E[x(t)y^*(t-\tau)] = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques : stationnarité au sens strict, large, à l'ordre deux, tests de stationnarité.

Stationnaire ou non ?

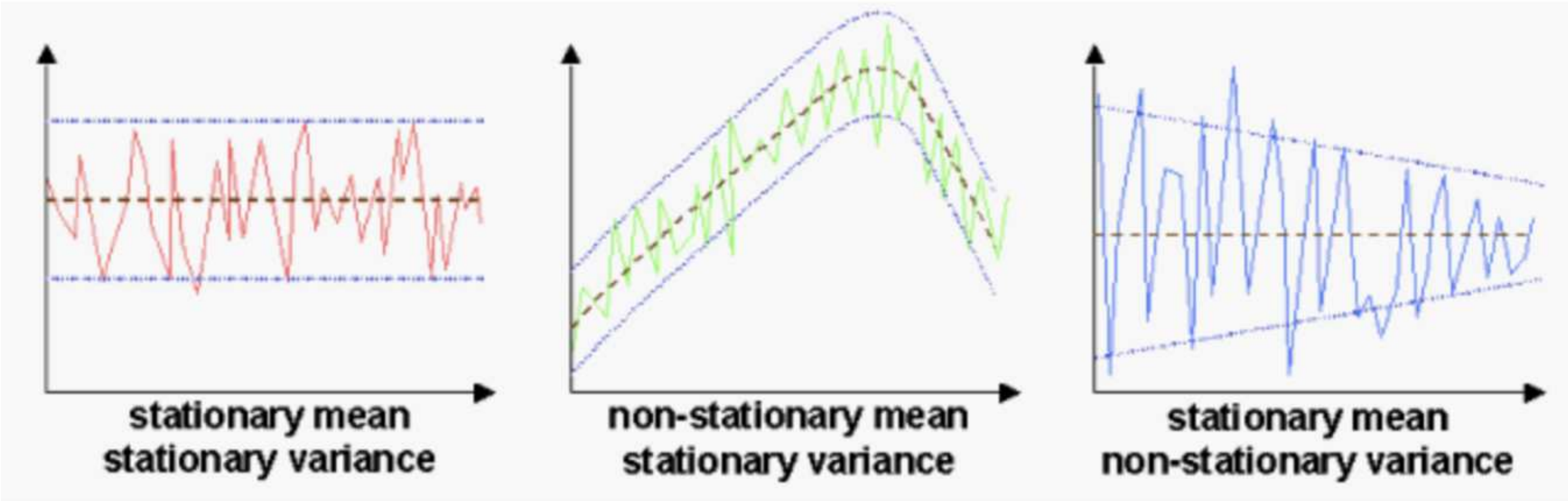


Figure 2: Constancy in mean and variance.

https://towardsdatascience.com/stationarity-in-time-series-analysis-90c94f27322

Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E\left[|x(t)|^2\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$$

- Densité spectrale de puissance
  - Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

  - Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

mais en général $X(f)$ n'existe pas !

Exemples

- Exemple 1 : Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ va uniforme sur $[0, 2\pi]$.

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Exemples

- Exemple 2 : Bruit blanc
  - Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

  - Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Propriétés de $R_x(\tau)$

- Symétrie Hermitienne : $R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$
- Valeur maximale : $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$: si $x(t)$ est un signal réel

$$d^2\left[x(t), x(t-\tau)\right] = 2\left[R_x(0) - R_x(\tau)\right]$$

  Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$.
- Décomposition de Lebesgue : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

  où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ tend vers 0 lorsque $\tau \to \infty$.

Propriétés de $s_x(f)$

- DSP réelle

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

  De plus, si $x(t)$ signal réel, $s_x(f)$ réelle paire

- Positivité : $s_x(f) \geq 0$
- Lien entre DSP et puissance/énergie

$$P \text{ ou } E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- Décomposition : dans la plupart des applications, on a $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$, où $s_1(f)$ est un spectre de raies et $s_2(f)$ un spectre continu (cas général : partie singulière).

Que faut-il savoir ?

- Reconnaître si un signal est à énergie finie, à puissance finie périodique ou aléatoire.
- Qu'est ce qu'un signal aléatoire stationnaire ?
- Les différentes définitions d'une fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$
- La définition unifiée d'une densité spectrale : $s_x(f)$ = ?
- Les différentes définitions d'une densité spectrale
- Ce qu'est un bruit blanc
- Ce qu'est un bruit gaussien
- Propriétés de $R_x(\tau)$
- Propriétés de $s_x(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Introduction

On cherche une opération avec les propriétés suivantes

- Linéarité : $T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)]$
- Invariance dans le temps
  Si $y(t) = T[x(t)]$ alors $T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$
- Stabilité BIBO
  Si $|x(t)| \leq M_x$ alors il existe M_y tel que

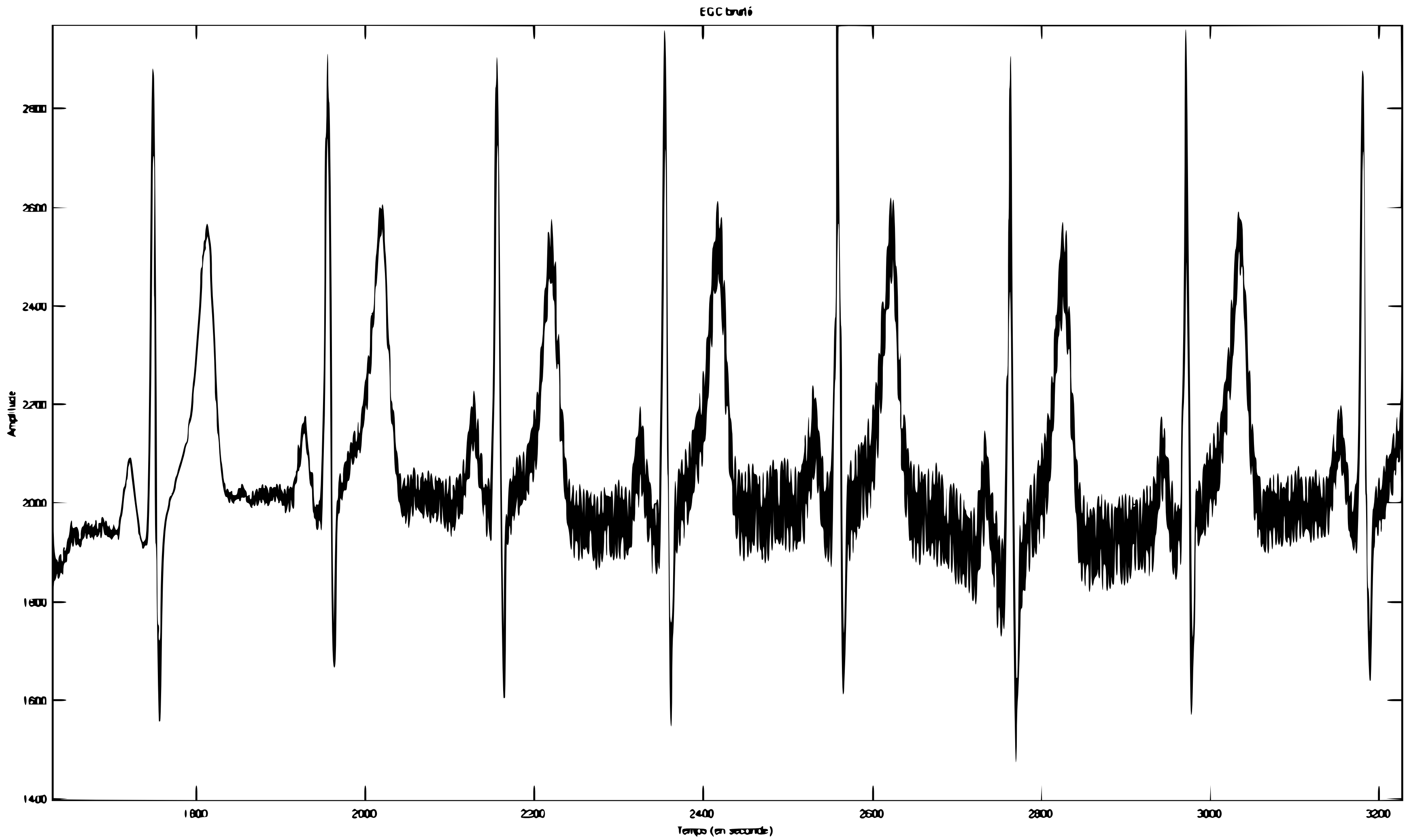
$$|y(t)| = |T[x(t)]| \leq M_y$$

- “Limitation” du spectre d’un signal

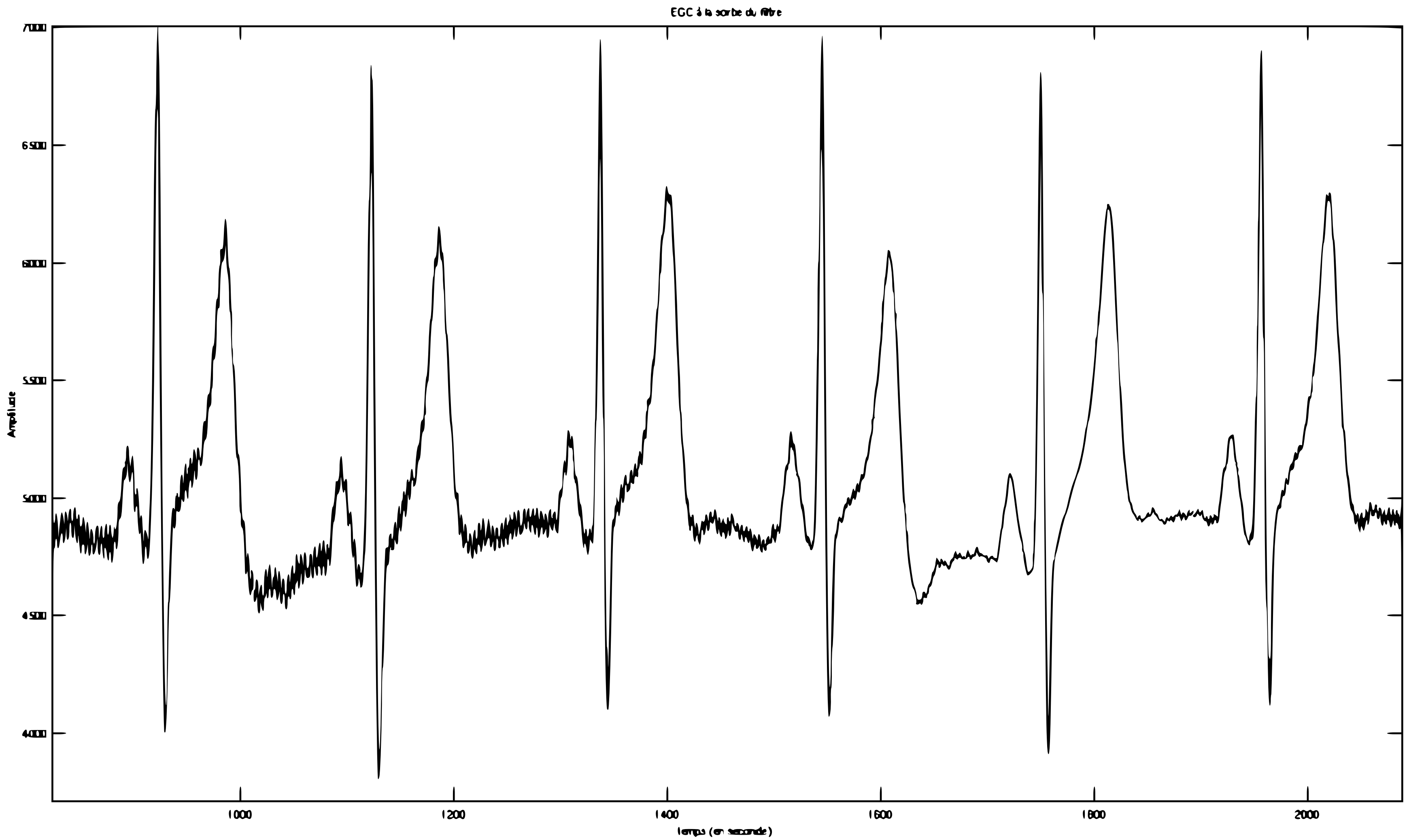
☞ Convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)h(t-u)du = h(t) * x(t)$$

ECG avant filtrage



ECG après filtrage



Commentaires

- La linéarité ne suffit pas. Contre-exemple

$$y(t) = m(t)x(t)$$

- CNS de Stabilité BIBO

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|dt < \infty, \text{i.e.}, h \in L^1$$

- Réponse impulsionnelle et Transmittance

$$H(f) = \text{TF}\left[h(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} h(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

Si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t)$. Ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.

Réalisabilité d'un filtre

- Domaine temporel
  - (1) $h(t)$ réelle
  - (2) $h(t) \in L^1$ (stabilité)
  - (3) $h(t)$ causale (filtre sans mémoire)
- Domaine spectral
  - (1) Symétrie hermitienne : $H^*(-f) = H(f)$
  - (2) ne peut se traduire
  - (3) $H(f) = -j\widetilde{H}(f)$, où $\widetilde{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$ est la transformée de Hilbert de H (preuve dans le cours manuscrit).

Écriture équivalente

En écrivant $H(f) = H_r(f) + jH_i(f)$, on obtient

$$H_r(f) = H_i(f) * \frac{1}{\pi f}$$
$$H_i(f) = - H_r(f) * \frac{1}{\pi f}$$

Identifier une relation de filtrage linéaire

- Signaux déterministes

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\Leftrightarrow\; Y(f) = X(f)H(f)$$

- Signaux aléatoires : Isométrie fondamentale

$$\text{Si } x(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi ft}, \text{ alors } y(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi ft}H(f)$$

- Exemples
  - $y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - t_k)$
  - $y(t) = x'(t)$
  - $y(t) = x(t)m(t)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Relations de Wiener Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Preuves (signaux à énergie finie)

- Densité spectrale d'énergie

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u-\tau)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} Y(f)\left[e^{-j2\pi f\tau}X(f)\right]^* df \\
&= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f)\left[e^{j2\pi f\tau}X^*(f)\right] df \\
&= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df = \text{TF}^{-1}[s_x(f)H(f)] \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Preuve (signaux à puissance finie)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t-\tau)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\int_{\mathbb{R}} h(v)x(t-v)dv\right] x^*(t-\tau)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(v)\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-v)x^*(t-\tau)dt\right] dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(v)R_x(\tau-v)dv \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

- etc ...

Preuves (signaux aléatoires)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) =& E[y(t)x^*(t-\tau)] \\
=& \langle y(t), x(t-\tau)\rangle \\
=& \langle e^{j2\pi ft}H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)}\rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft}H(f)e^{-j2\pi f(t-\tau)}s_X(f)df \\
=& \int_{\mathbb{R}} H(f)e^{j2\pi f\tau}s_X(f)df \\
=& h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$
\begin{aligned}
R_y(\tau) =& E[y(t)y^*(t-\tau)] \\
=& \langle y(t), y(t-\tau) \rangle \\
=& \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} H(f) \rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} H^*(f) s_x(f) df \\
=& \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \\
=& \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\} \\
=& \ h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\}$$

- Densité Spectrale de Puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 \quad \text{CQFD}$$

Valeur moyenne

- Propriété

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0)$$

- Preuve

$$\begin{aligned}
E[Y(t)] =& E\left[\int_{\mathbb{R}} X(t-u)h(u)du\right] \\
=& \int_{\mathbb{R}} E[X(t-u)]h(u)du \\
=& E[X(t)] \int_{\mathbb{R}} h(u)du \quad \text{(signal stationnaire)} \\
=& E[X(t)]H(0) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Formule des interférences

- Hypothèses

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

- Conclusion

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

  - Preuve (signaux à énergie finie)

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int y_1(t) y_2^*(t-\tau) dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) \left[Y_2(f) e^{-j2\pi f\tau} \right]^* df$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} s_x(f) df \quad \text{CQFD}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Exemples

- Filtre Passe-bas
  - Transmittance

$$H(f) = \Pi_F(f)$$

  - Réponse impulsionnelle

$$h(t) = F\text{sinc}\left(\pi F t\right)$$

non causale et $\notin L^1 \Rightarrow$ troncature + décalage

- Filtres liaisons montante et descendante d'une chaîne de transmission

Filtre adapté : maximisation du SNR

- Signal observé

$$x(t) = s(t) + n(t), \qquad t \in [0, T]$$

$s(t)$ signal déterministe à énergie finie et $n(t)$ signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_n(f)$.

- Filtrage

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t)$$

- Rapport signal sur bruit à l'instant $t = t_0$

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E\left[y_n^2(t_0)\right]}$$

Expression équivalente du SNR

$$SNR(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E\left[y_n^2(t_0)\right]} = \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2}{\int_{\mathbb{R}} \left|H(f)\right|^2 s_n(f)df}$$

- Numérateur

$$y_s(t) = TF^{-1}\left[S(f)H(f)\right] = \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t}df$$

- Dénominateur
  - Wiener Lee

$$s_{y_n}(f) = s_n(f)\left|H(f)\right|^2$$

  - Puissance

$$P_{y_n} = E\left[y_n^2(t_0)\right] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

- Numérateur

$$\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df\right|^2$$

avec $a(f) = \sqrt{s_n(f)}H(f)$ et $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}}e^{-j2\pi f t_0}$.

- Dénominateur

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(f)\left|H(f)\right|^2 df = \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df$$

Expression du filtre adapté

- Cauchy-Schwartz

$$SNR(t_0) = \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2}{\int_{\mathbb{R}} \left|H(f)\right|^2 s_n(f)df} \leq \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

avec égalité pour $a(f) = kb(f)$, i.e.,

$$H(f) = k\frac{S^*(f)}{s_n(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$

- Cas d'un bruit blanc

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \Leftrightarrow h(t) = Ks^*\left(t_0 - t\right)$$

Symétrie oy + Translation

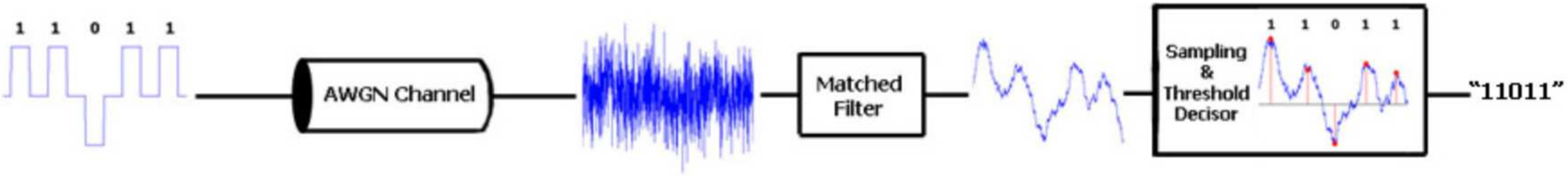
SNR maximum

- Définition

$$SNR(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 \, df = \frac{2E}{N_0}$$

où E est l'énergie du signal. On voit donc que le le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son énergie.

- Page wikipedia Matched Filter



Que faut-il savoir ?

- Reconnaître une relation de filtrage linéaire
- Densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre
- Intercorrélation entre l'entrée et la sortie d'un filtre
- Moyenne de la sortie d'un filtre
- Formule des interférences
- Réponse impulsionnelle causale et $\in L^1$, sinon ...

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
    - Introduction
    - Quadrateur
    - Quantification

Introduction

- Transformation sans mémoire

$$y(t) = g\left[x(t)\right]$$

- Exemples
  - Quadrateur

$$y(t) = x^2(t)$$

  - Quantification

$$y(t) = x_Q(t)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quadrateur

- Signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

- Exemples
  - Sinusoïde : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$Y(f) = \frac{A^2}{2}\delta(f) + \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)\right]$$

    Disparition de la fréquence f_0 et apparition de la fréquence $2f_0$
  - Somme de sinusoïdes : Termes d'intermodulation
  - Sinus cardinal : doublement de la largeur de bande

Signal aléatoire gaussien

- Définition
  On dit qu'un signal aléatoire $X(t)$ est gaussien si pour tout ensemble d'instants $(t_1, ..., t_n)$, le vecteur $[X(t_1), ..., X(t_n)]^T$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$.
- Loi univariée de $X(t)$
  La loi de $X(t)$ est alors une loi gaussienne de densité

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left\{ -\frac{[X(t) - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)} \right\}.$$

  Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$m(t) = E[X(t)] = m, \text{ et } \sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = R_X(0) - m^2.$$

  donc les paramètres de la densité de $X(t)$ sont indépendants du temps.

Signal aléatoire gaussien

- Loi bivariée de $[X(t), X(t-\tau)]$
  La loi du vecteur $\boldsymbol{V}(t) = [X(t), X(t-\tau)]^T$ est alors une loi gaussienne de $\mathbb{R}^2$ de densité

$$p[x(t), x(t-\tau)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}(t)|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]\right\}.$$

où $\boldsymbol{m}(t) = [m_1(t), m_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur moyenne, avec $m_1(t) = E[X(t)]$ and $m_2(t) = E[X(t-\tau)]$, et $\boldsymbol{\Sigma}(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de covariance définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t,\tau) & \sigma_{1,2}(t,\tau) \\ \sigma_{1,2}(\tau) & \sigma_2^2(t,\tau) \end{pmatrix}$$

où $\sigma_1^2(t,\tau)$ et $\sigma_2^2(t,\tau)$ sont les variances de $X(t)$ et de $X(t-\tau)$ et $\sigma_{1,2}(t,\tau)$ est la covariance $[X(t), X(t-\tau)]^T$. Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$\sigma_i(t,\tau) = R_X(0) - m^2$ et $\sigma_{1,2}(t,\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] - E[X(t)]E[X(t-\tau)] = R_X(\tau) - m^2$.

donc les paramètres de la densité de $\boldsymbol{V}(t)$ sont indépendants du temps.

Stationnarité de $Y(t) = g[X(t)]$

Si $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire, alors pour toute non-linéarité g, $Y(t)$ est également un signal aléatoire stationnaire. En effet

- Moyenne

$$E[Y(t)] = E\left\{g[X(t)]\right\} = \int g[x(t)]p[x(t)]dx(t).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t)]$ ne dépendent que de $R_X(0)$ et de m, $E[Y(t)]$ est une quantité indépendante de t.

- Fonction d'autocorrélation

$$E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] = \int\int g[x(t)]g[x(t-\tau)]p[x(t), x(t-\tau)]dx(t)dx(t-\tau).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t), x(t-\tau)]$ ne dépendent que de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m, $E[Y(t)Y(t-\tau)]$ est une quantité indépendante de t.

Le signal $Y(t)$ est donc stationnaire au sens large. Sa moyenne dépend de $R_X(0)$ et de m et sa fonction d'autocorrélation dépend de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m.

Quadrateur pour signaux aléatoires

- Théorème de Price
  - Hypothèses
    (X_1, X_2) vecteur Gaussien de vecteur moyenne nul
    $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$
  - Conclusion

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right)$$

  - Application au quadrateur

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

Détermination de K

- Moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E\left(X^{2n+1}\right)=0,\ E\left(X^{2n}\right)=[(2n-1)\times(2n-3)\ldots\times 3\times 1]\sigma^{2n}$$

- $\tau = 0$

$$K = R_Y(0) - 2R_X^2(0) = 3R_X^2(0) - 2R_X^2(0) = R_X^2(0)$$

- $\tau \to +\infty$

$$K = R_Y(+\infty) - 2R_X(+\infty) = R_X^2(0)$$

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

Summary

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_Y(f) = 2s_X(f) * s_X(f) + R_X^2(0)\delta(f)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quantification

- Principe

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

- Définitions
  - Pas de quantification Δq_i
  - Quantification uniforme $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$
  - Niveaux de quantification: x_i
  - Nombre de bits de quantification $N = 2^n$

Erreur de quantification

- Hypothèse

  $\epsilon(t)$ suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$, i.e., $N \geq 2^8$
- Rapport signal sur bruit de quantification

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2} \right)$$

  - Variance du bruit : $\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}$
  - Sinusoïde : $\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}$
- Conclusion

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76$$

Remarques

- Généralisation à un signal Gaussien

$$2S\sigma = N\Delta q \;\Rightarrow\; \text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + \ldots$$

- Quantification non uniforme

Que faut-il savoir ?

- Traitement non-linéaire = possibilité de créer de nouvelles fréquences
- Savoir appliquer le théorème de Price. Intérêt ?
- Définition et propriétés de la quantification
- Savoir calculer le rapport signal sur bruit de quantification