

ΧΡΥΣΑΦΟΓΕΩΡΓΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: ge15042

ΟΜΑΔΑ ΜΕ

(φοιτητές που έχουν κατοχυρώσει
παρουσίες σε προηγούμενα έτη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\alpha=2$$

1.

Αρχικά δημιουργώ στο MATLAB function που υπολογίζει τον πίνακα $(n^2)*L$

```
function L = matrix(n)
for (i=1:n)
k(i)=1+2^(-1)+sin(pi*i/n);
end
A=diag(-2*k(1:n))+diag(k(1:n-1),1)+diag(k(2:n),-1);
A=(n^2)*A;
L=sparse(A);
end
```

Στην αρχή κάνω μία επανάληψη for από το 1 μέχρι το n, όπου n είναι input από τον χρήστη και υπολογίζω το $E(u)$. Στη συνέχεια δημιουργώ τον πίνακα L με τη βοήθεια της εντολής diag. Έπειτα φτιάχνω τον ζητούμενο πίνακα $(n^2)*L$ και τέλος κάνω χρήση αραιών πινάκων με την εντολή sparse για να είναι οικονομική η υλοποίηση.

Δημιουργώ στον MATLAB function που υλοποιεί τη γνωστή μέθοδο των δυνάμεων.

```
% INPUT:
% A - coefficient matrix
% x - initial guess
% tol - tolerance for estimated relative error
% maxiter - maximum number of Power Method iterations to perform
%
% OUTPUT:
% lambda - final estimate of dominant eigenvalue
% v - final estimate of corresponding eigenvector
% relerr - estimated relative error in infinity norm
% niter - number of iterations executed

function [lambda,v,relerr,niter] = PowerMethod(A,x,tol,maxiter)

relerr = inf;
niter = 1;

while relerr >= tol & niter < maxiter,
    z = x/norm(x,2);
    x = A*z;
    alpha1 = z'*x;
    if niter>1,
        relerr = abs( alpha1-alpha0 )/abs( alpha0 );
    end
    alpha0 = alpha1;
    niter = niter+1;
end
lambda = alpha1;
v = z;
```

Στην αρχή αρχικοποιώ το σφάλμα και τον αριθμό των επαναλήψεων. Μετά κάνω επανάληψη while, που τερματίζει είτε όταν η ακρίβεια που θέλω να πετύχω ξεπεράσει το σφάλμα, είτε όταν ξεπεράσω των αριθμό επαναλήψεων που θέλω να κάνω. Μέσα στην while κάνω την μέθοδο των δυνάμεων και υπολογίζω την ιδιοτιμή, το ιδιοδιάνυσμα και το καινούριο σφάλμα της συγκεκριμένης επανάληψης. Πριν τελειώσει η while διορθώνω τις τιμές τους. Αφού τελειώσει η while τελειώνει και η μέθοδος των δυνάμεων και βρίσκουμε την εκτίμηση για τη μέγιστη ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Για να βρω την ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα δημιουργώ παραλλαγή της PowerMethod, αρκεί να βρω τη μέγιστη ιδιοτιμή του αντιστρόφου του

```
function [lambda,v,relerr,niter] = InvPowerMethod(A,x,tol,maxiter)

relerr = inf;
niter = 1;

while relerr >= tol & niter < maxiter,
    z = x/norm(x,2);
    x = A\z;
    alpha1 = z'*x;
    if niter>1,
        relerr = abs( alpha1-alpha0 )/abs( alpha0 );
    end
    alpha0 = alpha1;
    niter = niter+1;
end
lambda = 1/alpha1;
v = z;
```

n=100

```
>> clear all  
>> L=matrix(100);  
>> x=ones(100,1);  
>> tol=10^(-6);  
>> maxiter=2000;  
>> PowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

-9.9296e+04

```
>> InvPowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

-22.5309

Άρα με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων και $n=100$ βρήκαμε ότι η μέγιστη κατ'απόλυτο ιδιοτιμή του πίνακα είναι $-9.9296e+04$ και η μικρότερη -22.5309

Ομοίως για $n=1000$, $n=10000$

n=1000

```
>> L=matrix(1000);  
>> maxiter=200000;  
>> x=ones(1000,1);  
>> PowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

```
-9.9883e+06  
>> InvPowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

-22.9722

Μέγιστη κατ'απόλυτο τιμή ιδιοτιμή είναι -9.9883e+06
Και μικρότερη -22.9722

n=10000

```
>> L=matrix(10000);  
>> maxiter=20000000;  
>> x=ones(10000,1);  
>> PowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

-9.9635e+08

```
>> InvPowerMethod(L,x,tol,maxiter)
```

ans =

-23.0167

Άρα η μέγιστη κατ'απόλυτο ιδιοτιμή είναι -9.9635e+08 και η
ελάχιστη -23.0167.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θα δημιουργήσω νέα function που θα αποθηκεύει σε ένα πίνακα στήλη τις ιδιοτιμές σε κάθε επανάληψη της μεθόδου των δυνάμεων.

```
function d=Powers(A,x,tol,maxiter)
n=length(A(:,1));
for i=1:n
[1,v]=PowerMethod(A,x,tol,maxiter);
A=A-1*v*v';
d(i)=1
u(:,1)=v;
end
```

n=100

```
>> L=matrix(100);
>> x=ones(100,1);
>> tol=10^(-6);
>> maxiter=2000;
>> d=Powers(L,x,tol,maxiter);
>> d=abs(d);
>> d=sort(d);
>> d(2)
```

ans =

145.3460

Αφού κάλεσα την Powers.m αποθήκευσα σε έναν πίνακα στήλη d τις ιδιοτιμές της κάθε επανάληψης της μεθόδου των δυνάμεων. Στη συνέχεια αντικατέστησα αυτόν τον πίνακα με τον πίνακα abs(d), δηλαδή με τα στοιχεία του d σε απόλυτη τιμή. Ταξινόμησα τον νέο πίνακα σε αύξουσα σειρά και βρήκα το 2ο στοιχείο του. Τελικά, βρήκα ότι η δεύτερη μικρότερη κατ'απόλυτο ιδιοτιμή του πίνακα είναι 145.3460

Ομοίως για $n=1000$, $n=10000$