Уточненный алгоритм решения задачи 1

После интегрирования по Бубнову-Галеркину имеем уравнение:

$$\rho h \frac{d^2 f}{dt^2} + \left[\frac{Eh^3\pi^4}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{m^4}{a^4} + 2\frac{m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4}\right) - \frac{m^2\pi^2}{a^2}P(t)\right] f = 0, \qquad (1)$$

где $P(t) = st$ – динамическая сжимающая нагрузка.

Ранее мы делили обе части уравнения на ρh, из-за чего выражение в квадратных скобках становилось очень большим по сравнению с коэффициентом при второй производной. Это приводило к некорректному решению итоговой задачи Коши.

Проанализируем уравнение (1). Его решение зависит от знака выражения в квадратных скобках. Если оно больше нуля, то решение должно иметь колебательный характер в малой окрестности начальных условий. Если меньше нуля, то решение должно резко возрастать по экспоненциальному закону.

Рассмотрим случай статической нагрузки, когда $P(t) = P_{\text{ст}}$ – величина, не зависящая от времени. В этом случае выражение в квадратных скобках равно нулю и имеем формулу:

$$P_{\text{ст}} = \frac{Eh^3\pi^2(m^2 + k^2n^2)^2}{12a^2(1-\nu^2)m^2}, \qquad k = \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Минимизируя выражение (2) по волновому числу m (и полагая $n = 1$ при $k > 1$), получим формулу для критической статической нагрузки:

$$P_{\text{ст}}{}^{\text{кр}} = P^* = \frac{Eh^3\pi^2}{3(1-\nu^2)b^2}, \qquad m = k. \qquad (3)$$

Введем в уравнение (1) безразмерный параметр прогиба

$$\zeta = f/h$$

и безразмерный параметр времени

$$\tau = \frac{P(t)}{P^*} = \frac{st}{P^*}, \quad t = \frac{P^*\tau}{s}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{s^2}{P^{*2}}\frac{d^2}{d\tau^2}.$$

Тогда:

$$\frac{s^2\rho h}{P^{*2}}\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \left[\frac{Eh^3\pi^4(m^2 + k^2n^2)^2}{12(1-\nu^2)a^4} - \frac{m^2\pi^2P^*\tau}{a^2}\right]\zeta = 0.$$

Поделив обе части этого уравнения на $\frac{\pi^2 P^*}{a^2}$, получим окончательно:

$$C\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + (B - m^2\tau)\,\zeta = 0. \qquad (4)$$

В уравнении (4) коэффициенты B и C при $n = 1$ определяются безразмерными выражениями (с учетом выражения (3) для статической критической нагрузки):

$$B = \frac{Eh^3\pi^2(m^2 + k^2)^2}{12(1-\nu^2)a^2P^*} = \frac{(m^2 + k^2)^2}{4k^2}, \qquad C = \frac{s^2\rho h a^2}{P^{*3}\pi^2}.$$

Таким образом, требуется решить уравнение (4) при начальных условиях:

$$\zeta(0) = 0.01, \qquad \dot{\zeta}(0) = 0. \qquad (5)$$

При этом задаем только отношение сторон пластины $k = 2;\ 3;\ 4$ и параметр скорости нагружения $C = 0.1;\ 1;\ 10;\ 100$.

Критический момент времени τ должен получиться больше 1 (за критический принимаем тот момент, когда ζ =2). Это время минимизируем по волновому числу m.

В интерфейсе пользователя надо предусмотреть обратный пересчет величин (реальное критическое время в секундах, реальная скорость нагружения для конкретных физических параметров в н/мс).