«Дифференциальные уравнения»

Составление дифференциальных уравнений семейства линий

Задача состоит в том, что нужно исключить константу, путём дифференциирования, то есть:

- Дифференцируем исходное уравнение
- Выражаем параметр C
- Подставляем C в производную
- Упрощаем полученное уравнение

Пример.

$$y = e^{Cx}$$

$$y' = Ce^{Cx} \Longrightarrow C = \frac{1}{x}\ln y$$

$$y' = \frac{1}{x}\ln y \cdot e^{\ln y}$$

$$y' = \frac{y}{x}\ln y$$

Ответ: $y' = \frac{y}{x}\ln y$

Для составления уравнений изогональных траекторий (пересекающих линии данного семейства под углом φ) надо:

- Составить дифференциальное уравнение семейства линий.
- Воспользоваться соотношением $\beta - \alpha = \pm\varphi$(кроме случая $\varphi = 90°$, в этом случае пользуемся следующим равенством $y' = -\frac{1}{\tilde{y}'}$), где
  y' - уравнение семейства кривых
  $\tilde{y}'$ - уравнение изогональных траекторий
- Воспользоваться формулой $\pm tg\,\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$, подставляя
  $tg\alpha = y'$ (подствляем уравнение семейства кривых, выраженное через x и y)
  $tg\beta = \tilde{y}'$
- Выражаем $\tilde{y}'$ и получаем ответ.

Пример.

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \varphi = 45°$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} = tg\alpha$$

$$tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{\tilde{y}' + \frac{x}{y}}{1 - \frac{x\tilde{y}'}{y}} = \pm 1$$

$$\tilde{y}' + \frac{x}{y} = 1 - \frac{x\tilde{y}'}{y}$$

$$\tilde{y}' + \frac{x\tilde{y}'}{y} = 1 - \frac{x}{y}$$

$$\tilde{y}'(1 + \frac{x}{y}) = 1 - \frac{x}{y}$$

$$\tilde{y}' = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$$

и соответственно(при равенстве -1)

$$\tilde{y}' = \frac{\frac{x}{y} - 1}{1 + \frac{x}{y}}$$

Ответ: $(x + y)y' = y - x; \quad (x - y)y' = x + y$
(На самом деле после тангенса разности можно было писать вместо $\tilde{y}'$ просто y')

Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения вида $y' = f(x)g(y)$ или $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$

Для их решения надо:

- Разделить(или умножить) уравнения так, чтобы в одной стороне был только x, а в другой - только y.
- Проверить, что при делении мы не потеряли решение(когда делитель$= 0$).
- Проинтегрировать обе стороны.
- Преобразовать до красивого ответа.

Пример. Решить уравнение $xy\mathrm{d}x + (x+1)dy = 0$

$$xy\mathrm{d}x + (x+1)dy = 0$$

$$(x+1)dy = -xy\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

Также не забывам про $x = -1$, который является решением.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C$$

$$|y| = e^{-x+\ln|x+1|+C}$$

$$y = \tilde{C}(x+1)e^{-x}$$

Ответ: $y = C(x+1)e^{-x}; \quad x = -1$

Полезная замена

Если уравнение имеет вид $y' = f(ax+by)$, то сделаем замену $z = ax+by$ или $z = ax+by+c$, где c любое.

Пример. Решить уравненние $(x+2y)y' = 1$

Замена: $z = x+2y$

Тогда

$$z' = 1 + 2y' \Longrightarrow y' = \frac{z'-1}{2}$$

Подставим в наше исходное уравнение:

$$z(z'-1) = 2$$

$$z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = 2$$

$$z\mathrm{d}z = (2+z)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{z}{z+2}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$$

Надо не забыть потом проверить является ди $z = -2$ решением.

$$z - 2\ln|z+2| = x + C$$

Производим обратную замену:

$$x + 2y - 2\ln|2x+y+2| = x + \tilde{C}$$

$$y - \ln|2x+y+2| = \tilde{\tilde{C}}$$

$$2x + y + 2 = \hat{C}e^{y}$$

Проверяем является ли $z = 2x+y = -2$ решением, ответ - да, но оно входит в одно из решений нашего уравнения при $\hat{C} = 0$, поэтому записывать его отдельно не имеет смысла.

Ответ: $2x + y + 2 = Ce^{y}$

Замечание. На самом деле необязательно писать везде изменение C(но это не точно), поэтому в дальнейшем этого делать не будем.

Геометричечкие задачи

Чтобы решать геометрические задачи, надо:

- Построить чертеж.
- Обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах).
- Выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'.
- Применить данное в условии задачи соотношение, которое превращается в дифференциальное уравнение, уже из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

Замечание. На этом всё, дальше только смекалочка ;)
Ну может потом тут появится пример с рисунком

Физические задачи

Для их решения необходимо:

- Решить какую из величин взять за независимую переменную, а какую - за искомую функцию.
- Выразить на сколько изменится искомая функция y, за приращение независимой переменной x на Δx, те получить:
$$y(x + \Delta x) - y(x) = \text{выражение из других величин из задачи}$$
- Поделить всё выражение на Δx и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$, те получим y' слева и дифференциальное уравнение в целом.
- Из условия задачи, решая уравнение, находим оставшиеся величины и подставляем их в исходное дифференциальное уравнение.

Замечание. Иногда дифференциальное уравнение можно составить простым путём, воспользовавшись физическим смыслом производной($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ - скорость изменининя величины v за время t(ускорнеие))

Пример. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?

Независимая переменная x - толщина слоя.
Искомая функция $y(x)$ - количество света прошедшее через слой толщиной x.

По условию:
$$y(x + \Delta x) - y(x) = k\Delta x \cdot y(x)$$
$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x \cdot y(x)}{\Delta x} \Longrightarrow y'(x) = ky(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky \Longrightarrow y = Ce^{kx}$$

Из условия «Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света» имеем:
$$y(0) = C$$
$$y(35) = \frac{1}{2}y(0) = \frac{1}{2}C = Ce^{35k}$$
$$e^{35k} = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = -\frac{ln2}{35}$$

Вопрос был «Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?», то есть необходимо найти $y(200)$:
$$y(200) = e^{-\frac{ln2}{35}\cdot 200} \approx 0,02$$

Таким образом сквозь слой пройдёт 2% света, то есть сам слой поглотит 98% света.

Ответ: 98%

Однородные уравнения

Это уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{или} \qquad M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

где M и N однородные уравнения одной и той же степени.

Чтобы их решить необходимо:

- Сделать замену $y = tx$(тогда верно и $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x$)
- Решить полученное уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(x+2y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

Замена: $y = tx \qquad (\mathrm{d}y = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x)$

$$(x+2tx)\mathrm{d}x - x(t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t) = 0$$

$$x(t\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\mathrm{d}t) = 0$$

$$t\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\mathrm{d}t = 0$$

Причём $x = 0$ является решением.

$$(t+1)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t$$

Причём $t = -1 \quad (y = -x)$ является решением.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$\ln|x| = \ln|t+1| + \ln C \quad (\ln C \text{ тоже самое,что и } C)$$

$$t + 1 = Cx$$

$$\frac{y}{x} + 1 = Cx$$

$$y + x = Cx^2$$

Ответ: $y + x = Cx^2; \quad x = 0$
(Решение $y = -x$ уже есть в решении $y + x = Cx^2$ при $C = 0$)

Полезные замены

- Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

его можно привести к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } ax + by + c = 0$$

Пример. Решить уравнение $(2x - 4y + 6)\mathrm{d}x + (x + y - 3)\mathrm{d}y = 0$

$$y' = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$$

Причём $x + y - 3 = 0$ не является решением.

Точка пересечения $-(1, 2)$.

Замена: $v = y - 2$, $t = x - 1$

$$v' = \frac{4v-1}{t+v}$$

$$v' = \frac{4\frac{v}{t}-2}{1+\frac{v}{t}}$$

Замена: $u = \frac{v}{t}, \quad v' = u't + u$.

$$u't + u = \frac{4u-2}{u+1}$$

$$u't = \frac{4u-2-u^2-u}{u+1} = \frac{3u-2-u^2}{u+1}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t = \frac{3u-2-u^2}{u+1}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int \frac{u+1}{(u-1)(u-2)}\mathrm{d}u$$

Причём $u = 1 (y = x + 1)$ и $u = 2 (y = 2x)$ решения.

$$\frac{u+1}{(u-2)(u-1)} = \frac{3}{u-2} + \frac{-2}{u-1}$$

$$-\ln t = 3\ln|u-2| - 2\ln|u-1| + \ln C$$

$$\frac{1}{t} = C\frac{(u-1)^2}{(u-2)^3}$$

Обратная замена

$$\frac{1}{t} = C\frac{(\frac{v}{t}-1)^2}{(\frac{v}{t}-2)^3}$$

$$1 = C\frac{(v-t)^2}{(v-t)^3}$$

$$(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$$

Причём ответ $y = 2x$ уже содержится в этом уравнении при $C = 0$.

Ответ: $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2, \quad y = x+1$.

- Если же у прямых нет точки пересечения, (то есть $a_1x + b_1y = k(ax+by)$), то уравнение имеет вид

$$y' = F(ax+by)$$

и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z = ax + by (\text{или } z = ax + by + c)$$

Пример. Решить уравнение $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

$$y' = \frac{x - y - 1}{y - x + 2}$$

Причём $y - x + 2 = 0$ не решение.
Замена: $z = y - x + 2, \quad y = z + x - 1, \quad y' = z' + 1$

$$z' + 1 = \frac{z - 1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$$

$$z' = -\frac{1}{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{z}$$

$$\int z\mathrm{d}z = -\int \mathrm{d}x$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C$$

$$z^2 = -2x + C$$

Обратная замена

$$(y - x + 2)^2 + 2x = C$$

Ответ: $(y - x + 2)^2 + 2x = C$

- Некоторые уравненения можно привести к однородным заменой

$$y = z^m$$

Число m обычно неизвестно. Чтобы его найти, необходимо сделать замену и, требуя однородности от уравнения(сумма степеней переменных у всех слагаемых должна быть одинакова), находим m, если это возможно.

Пример. Решить уравнение $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$
Замена: $y = z^m, \quad y' = mz^{m-1}z'$

$$2x^4mz^{2m-1}z' + z^{4m} = x^6$$

$$4 + (2m - 1) = 4m = 6 \Longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Производим необходимую замену: $y = z^{\frac{3}{2}}$

$$3x^4z^2z' + z^6 = 4x^6$$

$$z' = \frac{4x^6 - z^6}{3x^4z^2} = \frac{4x^2}{3z^2} - \frac{z^4}{3x^4} = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^{-4}$$

Замена: $z = tx, \mathrm{d}z = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t + x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$

$$t + x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{3}t^{-2} - \frac{1}{3}t^4$$

$$x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{3t^2} - \frac{t^4}{3} - t = \frac{4 - t^6 - 3t^3}{3t^2}$$

$$3t^2x\mathrm{d}t = (4 - t^6 - 3t^3)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3t^2}{4 - t^6 - 3t^3}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|t^3 + 4| - \ln|t^3 - 1| + C = 5\ln x$$

$$C\frac{t^3 + 4}{t^3 - 1} = x^5$$

$$C\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^3 + 4}{\left(\frac{z}{x}\right)^3 - 1} = x^5$$

$$C\frac{z^3 + 4x^3}{z^3 - x^3} = x^5$$

$$C(y^2 + 4x^3) = x^5(y^2 - x^3)$$

Ответ: $C(y^2 + 4x^3) = x^5(y^2 - x^3)$

Линейные уравнения первого порядка

Это уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Чтобы решить подобное уравнение надо:

- Решить однородное уравнение вида

$$y' + a(x)y = 0$$

- В общем решении заменить C на неизвестную функцию $C(x)$.
- Полученное уравнение для y подставить в исходное и найти $C(x)$.

Пример. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$$

Причём $x = 0$ - не решение.
Решаем однородное уравнение $y' - 2\frac{y}{x} = 0$.

$$y' = 2\frac{x}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{x}{y}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln y = 2\ln Cx$$

$$y = Cx^2$$

$$y' = C'x^2 + 2Cx$$

Подставляем получившиеся y и y' в исходное уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

$$x(C'x^2 + 2Cx) - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C'x^3 + 2Cx^2 - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C'x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Longrightarrow C = x^2 + \tilde{C}$$

Подставляем C в решение однородного уравнения.

$$y = Cx^2 = x^4 + \tilde{C}x^2$$

Ответ: $y = x^4 + Cx^2$

Полезные замены

- Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять искомую функцию и независимую переменную.

  Пример. Решить уравнение $(2x + y)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + 4\ln(y)\,\mathrm{d}y$.

  Делим на $\mathrm{d}y$

$$2x + y = yx' + 4\ln y$$

$$yx' - 2x = y - 4\ln y$$

  Решаем однородное $yx' - 2x = 0$

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2x$$

$$2\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$2\ln(Cy) = \ln x$$

$$x = Cy^2$$

$$x' = C'y^2 + 2Cy$$

  Подставляем получившиеся x и x' в исходное уравнение $yx' - 2x = y - 4\ln y$.

$$C'y^3 + 2Cy^2 - 2Cy^2 = -4\ln y + y$$

$$C' = -4\frac{\ln y}{y^3} + \frac{1}{y^2}$$

$$C = -4\int\frac{\ln y}{y^3} + \int\frac{1}{y^2}$$

$$C = -4(-\frac{\ln y}{2y^2} - \frac{1}{4y^2}) - \frac{1}{y} + \tilde{C}$$

$$C = \frac{2\ln y}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \tilde{C}$$

$$C = \frac{2\ln y + 1 - y}{y^2} + \tilde{C}$$

  Подставляем C в решение однородного уравнения.

$$x = 2\ln y - y + 1 + \tilde{C}y^2$$

  Ответ: $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$

- Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

  Для его решения надо:

  - Разделить уравнение на y^n.

- Сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$.
- Решить полученное линейное уравнение.

Пример. Решить пример $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Разделим на $\sqrt{y}$, причём $y = 0$ - решение.

$$\frac{xy'}{\sqrt{y}} - 2x^2 = 4\sqrt{y}$$

Замена $z = \sqrt{y}, \quad z' = \frac{y'}{x\sqrt{y}}$

$$2xz' - 2x^2 = 4z \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$xz' - x^2 = z$$
$$xz' - 2z = x^2$$

Решаем однородное $xz' - 2z = 0$

$$xz' - 2z = 0$$

$$xz' = 2z$$

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2z$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln C$$

$$z = Cx^2$$

$$z' = C'x^2 + 2Cx$$

Подставляем получившиеся z и z' в исходное уравнение $xz' - 2z = x^2$.

$$C'x^3 + 2Cx^2 - x^2 = 2Cx^2$$

$$C'x^3 = x^2$$

$$C' = \frac{1}{x}$$

$$C = \ln \tilde{C}x$$

Подставляем C в решение однородного уравнения.

$$z = x^2\ln(Cx)$$

Обратная замена: $y = z^2$

$$y = x^4\ln^2(Cx)$$

Ответ: $y = x^4\ln^2(Cx); \quad y = 0$

- Уравнение Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Для его решения надо:

- Найти частное решение $y_1(x)$.
- «Метод пристального взгляда»
  Иногда частное решение можно подобрать, внимательно посмотрев на свободный член уравнения (не содержащий y)
  Пример.
  $$y' + y^2 = x^2 - 2x (= x(x-2))$$
  Надо брать «подобный» правой части $y = ax + b$
  Пример.
  $$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$
  В этом случае можно сделать замену $y = \frac{a}{x}$
  Производя необходимую замену, находим a и b.
- Сделать замену $y = y_1(x) + z$.
- Решить полученное уравнение Бернулли.

Пример. Решить уравнение $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^x(e^x + 1)$$

Попробуем найти частное решение вида $y_1(x) = e^x + b$
Подставим частное решение:

$$e^x + 2e^{2x} + 2be^x - e^{2x} - 2be^{2x} - b^2 = e^{2x} + e^x$$

$$e^x + e^{2x} - b^2 = e^{2x} + e^x \Longrightarrow -b^2 = 0 \Longrightarrow b = 0$$

То есть частное решение имеет вид: $y_1(x) = e^x$
Замена: $\tilde{y} = e^x + z, \quad \tilde{y}' = e^x + z'$

$$e^x + z' + 2e^{2x} + 2ze^x - e^{2x} - 2ze^{2x} - z^2 = e^{2x} + e^x$$

$$z' = z^2$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int \mathrm{d}x$$

$$z = -\frac{1}{x + C}$$

Обратная замена

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}$$

Ответ: $y = e^x - \frac{1}{x+C}; \quad y = e^x$

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то есть:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

или же:

$$\mathrm{d}F(x,y) = F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y$$

Тогда, чтобы решить данное уравнение надо:

- Проинтегрировать по x равенство $F'_x = M(x,y)$, а за константу взять некоторую неизвестную функцию $\varphi(y)$.
- Приравнять производную по y получившегося уравнения к F'_y и выразить из него функцию $\varphi(y) = f(y) + const$.
- Получить $F(x,y) = C$, что и будет являться ответом.

Пример. Решить уравнение $(2x+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3-3y^2)\mathrm{d}y = 0$

Так как $\frac{\partial(2x+3x^2y)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3-3y^2)}{\partial x} = 3x^2$, то уравнение имеет вид

$$\mathrm{d}F(x,y) = F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y$$

Тогда

$$F'_x = 2x+3x^2y, \quad F'_y = x^3-3y^2$$

$$F = \int (2x+3x^2y)\,\mathrm{d}x = x^2 + x^3y + \varphi(y)$$

.

$$(x^2+x^3y+\varphi(y))'_y = x^3 - \varphi'(y) = x^3 - 3y^2 = F'_y$$

$$\varphi'(y) = -3y^2 \Longrightarrow \varphi(y) = -y^3 + const$$

Следовательно, уравнение имеет вид:

$$x^2 + x^3y - y^3 = C$$

Ответ: $x^2 + x^3y - y^3 = C$

Если же условие $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то придётся искать интегрирующий множитель - функция $m(x,y) \not\equiv 0$, после умножения на которую должны получить уравнение в полных дифференциалах.

К сожалению, нет общего метода для поиска интегрирующего множить, но есть ряд приёмов, которые помогут упростить этот процесс:

- Применить метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$\mathrm{d}(xy) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}(y^2) = 2y\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}, \quad \mathrm{d}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Пример. Решить уравнение $(x^2+y^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \quad |\cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$dx + \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0$$

Приняв во внимание, что $\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}(arctg\frac{x}{y})$, получим:

$$dx + \mathrm{d}(arctg\frac{x}{y}) = 0$$

$$\mathrm{d}(x + arctg\frac{x}{y}) = 0$$

$$x + arctg\frac{x}{y} = C$$

Ответ: $x + arctg\frac{x}{y} = C$

- ???Воспользоваться «универсальной» заменой:

$$\mu = e^{-\int \varphi(x)\mathrm{d}x}, \quad -\varphi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N},$$

где μ - интегрирующий множитель.