«Дифференциальные уравнения»

Составление дифференциальных уравнений семейства линий

Задача состоит в том, что нужно исключить константу, путём дифференицiирования, то есть:

- Дифференцируем исходное уравнение
- Выражаем параметр C
- Подставляем C в производную
- Упрощаем полученное уравнение

Пример.

$$y = e^{Cx}$$

$$y' = Ce^{Cx} \Longrightarrow C = \frac{1}{x}\ln y$$

$$y' = \frac{1}{x}\ln y \cdot e^{\ln y}$$

$$y' = \frac{y}{x}\ln y$$

Ответ: $y' = \frac{y}{x}\ln y$

Для составления уравнений изогональных траекторий (пересекающих линии данного семейства под углом φ) надо:

- Составить дифференциальное уравнение семейства линий.
- Воспользоваться соотношением $\beta - \alpha = \pm\varphi$(кроме случая $\varphi = 90°$, в этом случае пользуемся следующим равенством $y' = -\frac{1}{\tilde{y}'}$), где
  y' - уравнение семейства кривых
  $\tilde{y}'$ - уравнение изогональных траекторий
- Воспользоваться формулой $\pm tg\,\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$, подставляя
  $tg\alpha = y'$ (подствляем уравнение семейства кривых, выраженное через x и y)
  $tg\beta = \tilde{y}'$
- Выражаем $\tilde{y}'$ и получаем ответ.

Пример.

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \varphi = 45°$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} = tg\alpha$$

$$tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{\tilde{y}' + \frac{x}{y}}{1 - \frac{x\tilde{y}'}{y}} = \pm 1$$

$$\tilde{y}' + \frac{x}{y} = 1 - \frac{x\tilde{y}'}{y}$$

$$\tilde{y}' + \frac{x\tilde{y}'}{y} = 1 - \frac{x}{y}$$

$$\tilde{y}'(1 + \frac{x}{y}) = 1 - \frac{x}{y}$$

$$\tilde{y}' = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$$

и соответсенно(при равенстве -1)

$$\tilde{y}' = \frac{\frac{x}{y} - 1}{1 + \frac{x}{y}}$$

Ответ: $(x + y)y' = y - x; \quad (x - y)y' = x + y$
(На самом деле после тангенса разности можно было писать вместо $\tilde{y}'$ просто y')

Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравниния вида $y' = f(x)g(y)$ или $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$

Для их решения надо:

- Разделить(или умножить) уравнения так, чтобы в одной стороне был только x, а в другой - только y.
- Проверить, что при делении мы не потеряли решение(когда делитель$=0$).
- Проинтегрировать обе стороны.
- Преобразовать до красивого ответа.

Пример. Решить уравнение $xy\mathrm{d}x + (x+1)dy = 0$

$$xy\mathrm{d}x + (x+1)dy = 0$$

$$(x+1)dy = -xy\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

Также не забывам про $x = -1$, который является решением.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$ln\,|y| = -x + ln\,|x+1| + C$$

$$|y| = e^{-x+ln\,|x+1|+C}$$

$$y = \tilde{C}(x+1)e^{-x}$$

Ответ: $y = C(x+1)e^{-x}; \quad x = -1$

Полезная замена

Если уравнение имеет вид $y' = f(ax+by)$, то сдлеаем замену $z = ax+by$ или $z = ax+by+c$, где c любое.

Пример. Решить уравненние $(x+2y)y' = 1$

Замена:

$$z = x + 2y$$

Тогда

$$z' = 1 + 2y' \Longrightarrow y' = \frac{z'-1}{2}$$

Подставим в наше исходное уравнение:

$$z(z'-1) = 2$$

$$z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = 2$$

$$z\mathrm{d}z = (2+z)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{z}{z+2}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$$

Надо не забыть потом проверить является ди $z = -2$ решением.

$$z - 2ln|z+2| = x + C$$

Производим обратную замену:

$$x + 2y - 2ln|2x+y+2| = x + \tilde{C}$$

$$y - ln|2x+y+2| = \tilde{\tilde{C}}$$

$$2x + y + 2 = \hat{C}e^{y}$$

Проверяем является ли $z = 2x + y = -2$ решением, ответ - да, но оно входит в одно из решений нашего уравнения при $\hat{C} = 0$, поэтому записывать его отдельно не имеет смысла.

Ответ: $2x + y + 2 = Ce^{y}$

Замечание. На самом деле необязательно писать везде изменение C(но это не точно), поэтому в дальнейшем этого делать не будем.

Геометричечкие задачи

Чтобы решать геометрические задачи, надо:

- Построить чертеж.
- Обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах).
- Выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'.
- Применить данное в условии задачи соотношение, которое превращается в дифференциальное уравнение, уже из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

Замечание. На этом всё, дальше только смекалочка ;)
Ну может потом тут появится пример с рисуноком

Физические задачи

Для их решения необходимо:

- Решить какую из величин взять за независимую переменную, а какую - за искомую функцию.
- Выразить на сколько изменится искомая функция y, за приращение независимой переменной x на Δx, те получить: 2
$$y(x + \Delta x) - y(x) = \text{выражение из других величин из задачи}$$
- Поделить всё выражение на Δx и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$, те получим y' слева и дифференциальное уравнение в целом.
- Из условия задачи, решая уравнение, находим оставшиеся величины и подставляем их в исходное дифференциальное уравнение.

Замечание. Иногда дифференциальное уравнение можно составить простым путём, воспользовавшись физическим смыслом производной($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ - скорость изменииня величины v за время t(ускорнеие))

Пример. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?

Независимая переменная x - толщина слоя.
Искомая функция $y(x)$ - количество света прошедшее через слой толщиной x.

По условию:

$$y(x + \Delta x) - y(x) = k\Delta x \cdot y(x)$$
$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x \cdot y(x)}{\Delta x} \Longrightarrow y'(x) = ky(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky \Longrightarrow y = Ce^{kx}$$

Из условия «Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света» имеем:

$$y(0) = C$$
$$y(35) = \frac{1}{2}y(0) = \frac{1}{2}C = Ce^{35k}$$
$$e^{35k} = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = -\frac{ln2}{35}$$

Вопрос был «Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?», то есть необходимо найти $y(200)$:

$$y(200) = e^{-\frac{ln2}{35}\cdot 200} \approx 0,02$$

Таким образом сквозь слой пройдёт 2% света, то есть сам слой поглотит 98% света.

Ответ: 98%

Однородные уравнения

Это уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{или} \qquad M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

где M и N однородные уравнения одной и той же степени.

Чтобы их решить необходимо:

- Сделать замену $y = tx$(тогда верно и $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x$)
- Решить полученное уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(x+2y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

Замена:

$$y = tx \qquad (\mathrm{d}y = x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x)$$

$$(x+2tx)\mathrm{d}x - x(t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t) = 0$$

$$x(t\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\mathrm{d}t) = 0$$

$$t\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\mathrm{d}t = 0$$

Причём $x = 0$ является решением.

$$(t+1)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t$$

Причём $t = -1 \quad (y = -x)$ является решением.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$ln|x| = ln|t+1| + lnC \quad (lnC \text{ тоже самое,что и } C)$$

$$t + 1 = Cx$$

$$\frac{y}{x} + 1 = Cx$$

$$y + x = Cx^2$$

Ответ: $y + x = Cx^2; \quad x = 0$

(Решение $y = -x$ уже есть в решении $y + x = Cx^2$ при $C = 0$.

Полезные замены

- Если Дифференциальное уравнение имеет вид

  $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

  его можно привести к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых

  $$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } ax + by + c = 0$$

  Пример.

- Если же у прямых нет точки пересечения, (то есть $a_1x + b_1y = k(ax + by)$), то уравнение имеет вид

  $$y' = F(ax + by)$$

  и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

  $$z = ax + by(\text{или } z = ax + by + c)$$

Пример.

- Некоторые уравненения можно привести к однородным заменой

  $$y = z^m$$

  Число m обычно неизвестно. Чтобы его найти, необходимо сделать замену и, требуя однородности от уравнения(???сумма степеней переменнфх у всех слагаемых должна быть одинакова???), находим m, если это возможно.

  Пример.

Линейные уравнения первого порядка

Это уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Чтобы решить подобное уравнение надо:

- Решить однородное уравнение вида

$$y' + a(x)y = 0$$

- В общем решении заменить C на неизвестную функцию $C(x)$.
- Полученное уравнение для y подставить в исходное и найти $C(x)$.

Пример.

Полезные замены

- Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять искомую функцию и независимую переменную.

  Пример.

- Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

  Для его решения надо:

  - Разделить уравнение на y^n.
  - Сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$.
  - Решить полученное линейное уравнение.

  Пример.

- Уравнение Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

  Для его решения надо:

  - Найти частное решение $y_1(x)$.
  - Сделать замену $y = y_1(x) + z$.
  - Решить полученное уравнение Бернулли.

  Пример.

- «Метод пристального взгляда»

  Иногда частное решение можно подобрать внимательно посмотрев на свободный член уравнения(не содержащий y)

  Пример.

$$y' + y^2 = x^2 - 2x (= x(x-2))$$

  Надо брать «подобный» правой части $y = ax + b$

  Пример.

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$

  В этом случае можно сделать замену $y = \frac{a}{x}$

  Производя необходимую замену, находим a и b.

  Пример.

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель