Матанализ 3 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 11 сентября 2022 г. в 20:16

Содержание

Раздел #1: Метрические пространства

Пусть X – некоторое множество. Зададим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 1 (Метрика). ρ называется метрикой, если выполняются следующие три свойства:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0 \ \forall x, y \in X$
   $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X \ \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – неравенство треугольника.

Определение 2 (Метрическое пространство). Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^d$: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$

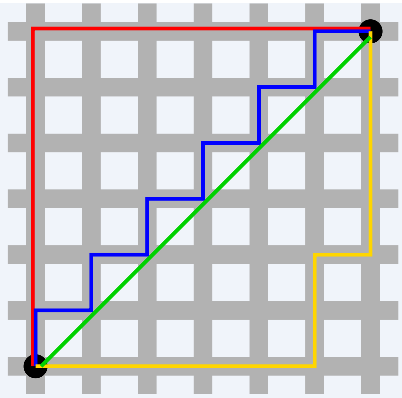
Пример (Дискретная метрика). Пусть X – некоторое множество. Зададим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Действительно, все свойства выполняются, поэтому ρ – метрика.

Пример (Манхэттенская метрика). В $\mathbb{R}^2$:

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



Пример. $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Пример. Рассмотрим $C[a, b]$. Тогда $\rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$ – метрика.

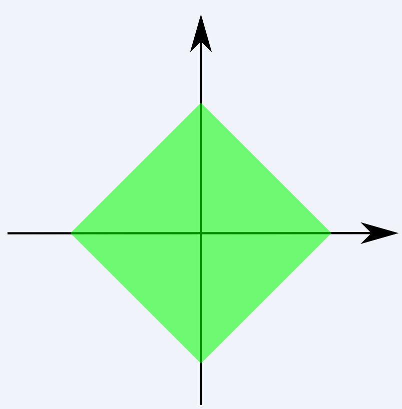
Обозначение (Открытый шар). $B_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x, a) < r\}$

Обозначение (Замкнутый шар). $\overline{B}_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x, a) \leqslant r\}$

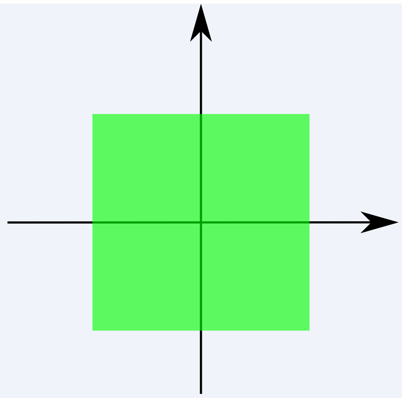
Обозначение (Сфера). $S_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x, a) = r\}$

Пример. В дискретной метрике при $r < 1$ замкнутый шар $\overline{B}_r(a)$ включает только одну точку – a, а при $r \geqslant 1$ – всё множество X.

Пример. Замкнутый шар в манхэттенской метрике:



Пример. Замкнутый шар в ρ_∞:



Утверждение 1. Пусть $B_{r_1}(a)$ и $B_{r_2}(a)$ – шары. Тогда

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1, r_2)}(a)$$

Доказательство. Возьмем $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a)$. Тогда $\rho(x, a) < r_1$ и $\rho(x, a) < r_2$, значит $\rho(x, a) < \min(r_1, r_2)$. □

Утверждение 2. $\forall a \neq b \ \exists r : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $r = \frac{\rho(a,b)}{3}$. Предположим, что пересечение непусто, т.е. $\exists x : x \in \overline{B}_r(a)$ и $x \in \overline{B}_r(b)$. Тогда

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, b) \leqslant \frac{\rho(a, b)}{3} + \frac{\rho(a, b)}{3}$$

□

Обозначение. V_x – окрестность точки x (шар).

Обозначение. $\dot{V}_x$ – проколотая окрестность x (шар, не содержащий точку x).

Определение 3 (Внутренняя точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Точка a называется *внутренней* точкой A, если $\exists V_a \subset A$.

Определение 4 (Внешняя точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Тогда точка b называется *внешней* точкой A, если b – внутренняя точка $X \setminus A$.

Определение 5 (Граничная точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Тогда c является *граничной* точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней. Иначе, точка c

называется граничной, если

$$\forall V_c \ \exists x, y \in V_c : x \in A \land y \in X \setminus A$$

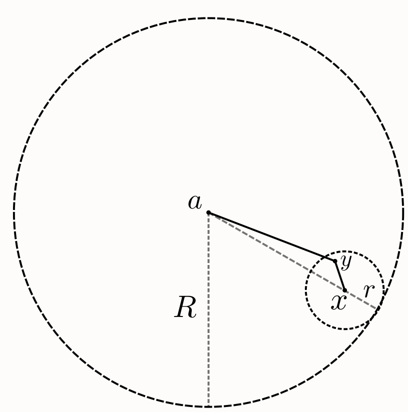
Определение 6 (Открытое множество). Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если любая его точка – внутренняя.

Теорема 1 (Об открытых множествах). 1. $\varnothing$ и X – открытые множества

2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – это открытое множество

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмем $x \in B$. Тогда $\exists \beta \in I : x \in A_\beta$. Т.к. A_β – открытое множество, то x принадлежит A_β с какой-то своей окрестностью, а значит она принадлежит и всему объединению с этой окрестностью.
3. Пусть $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Возьмем $x \in B$. Тогда $x \in A_i \ \forall i$. Точка x принадлежит всем A_i с какой-то круговой окрестностью r_i. Тогда она принадлежит пересечению с круговой окрестностью $\min r_i$.
4. Рассмотрим $B_R(a) = \{x \in X, \ \rho(x, a) < R\}$. Пусть точка $x \in B_R(a), \ \rho(x, a) < R$. Положим $r = R - \rho(x, a)$. Возьмем y из окрестности x радиуса r. Тогда в силу неравенства треугольника
$$\rho(a, y) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + R - \rho(x, a) = R$$



А значит $\forall y \in V_r(x) \ y \in B_R(a)$, т.е. любая точка $x \in B_R(a)$ принадлежит шару $B_R(a)$ с какой-то своей окрестностью.

$\square$

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: рассмотрим $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}; 1\right) = [0, 1)$.

Обозначение. $\operatorname{Int} A$ – множество всех внутренних точек множества A.

Теорема 2 (Свойства). 1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A = \bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A
3. $\operatorname{Int} A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$

Определение 7 (Замкнутое множество). Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus A$ – открыто.

Теорема 3 (О замкнутых множествах). 1. $\varnothing$, X – замкнутые множества.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Конечное объединение замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – это замкнутое множество.

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Тогда

$$X \setminus B = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

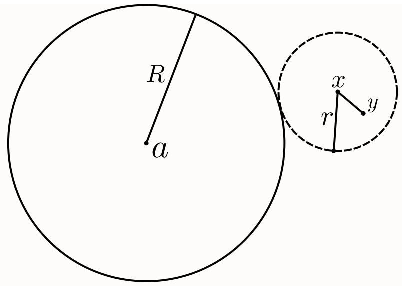
Поскольку $\forall \alpha \in I$ A_α – замкнутое, т.е. $X \setminus A_\alpha$ – открытое, то $X \setminus B$ – открытое (по теореме об открытых множествах), значит B – замкнутое множество.

3. Доказывается аналогично предыдущему пункту.
4. Рассмотрим $\overline{B}_R(a)$. Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_R(a)$ и y из окрестности x, т.е. $y \in B_r(x)$, где $r = \rho(a, x) - R$. По неравенству треугольника:

$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(y, x)$$

Поэтому

$$\rho(a, y) \geqslant r + R - \rho(y, x) > R$$



□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: $\bigcup \left[\frac{1}{n}; 1\right] = (0; 1]$ – незамкнутое множество.

Обозначение (Замыкание множества). $\operatorname{Cl} A$ – пересечение всех замкнутых множеств, которые содержат A.

Пример. $\operatorname{Cl}(0,1) = [0,1]$.

Теорема 4 (Свойства). 1. $A \subset \operatorname{Cl} A$

2. $\operatorname{Cl} A$ – замкнутое множество

3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$.

4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$

Теорема 5. $x \in \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. Докажем, что $x \notin \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \exists r > 0\ B_r(x) \cap A = \varnothing$.

$$x \in (X \setminus \operatorname{Cl} A) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Int}(X \setminus A)$$

□

Пусть A' – множество предельных точек A. Тогда

Теорема 6 (Свойства). 1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A' \subset A$

Доказательство. 3. A – замкнуто $\Leftrightarrow \operatorname{Cl} A = A$, $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$.

□

Теорема 7. $x \in A' \Leftrightarrow \forall B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A.

1.1. Нормированные пространства

Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 8 (Норма). Функция $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если выпоняются следующие свойства:

1. $||x|| \geqslant 0$
   $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Пример. $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$

Пример. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример. $||x||_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots\}} |x_i|$

Пример. $C[a,b]$, $||f|| = \max_{x \in [a,b)} |f|$

Определение 9 (Скалярное произведение). $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если выполняются:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$
   $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow= x = 0$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Упражнение. Вспомнить неравенство Коши-Буняковского

Утверждение 3. $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Доказательство. 1-2 очевидно.

3.

$$\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}$$

С другой стороны:

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle$$

□

Определение 10 (Полное пространство). Пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнение. Доказать, что $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ – полные пространства.

Обозначение. $\overline{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$

Замечание. Под V_∞ будем понимать $\{x : ||x|| > \delta\}$.

Теорема 8 (Сходимость и покоординатная сходимость). $x^i \in \mathbb{R}^d$ $(x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_d^i))$. Рассмотрим последовательность $\{x^i\}_{i=1}^\infty$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ – сходится
2. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится покоординатно.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2.$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ ||x^n - a|| < \varepsilon$$

$$x_k^n - a_k| \leqslant ||x^n - a||$$

$2 \Rightarrow 1.$

$$\sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \ldots + (x_d^n - a_d)^2}$$

□

Замечание. $x^k = \left(k\cos\frac{\pi k}{2}, k\sin\frac{\pi k}{2}\right)$