

Матанализ 2 семестр ПИ, Лекции

Собрано 10 сентября 2022 г. в 10:18

Содержание

1. Метрические пространства	1
1.1. Нормированные пространства	6

Раздел #1: Метрические пространства

Пусть X – некоторое множество. Зададим функцию $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1 (Метрика). ρ называется метрикой, если выполняются следующие три свойства:

1. $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – неравенство треугольника.

Определение 2 (Метрическое пространство). Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Пример. Метрика на \mathbb{R}^2 : $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Пример. Метрика на \mathbb{R}^d : $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$

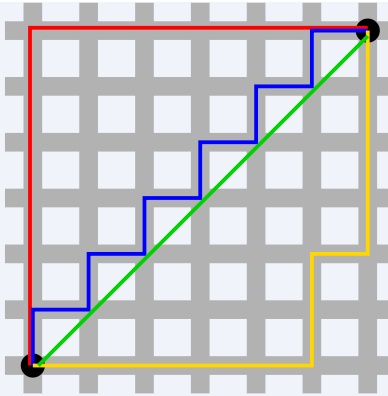
Пример (Дискретная метрика). Пусть X – некоторое множество. Зададим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Действительно, все свойства выполняются, поэтому ρ – метрика.

Пример (Манхэттенская метрика). В \mathbb{R}^2 :

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



Пример. $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Пример. Рассмотрим $C[a, b]$. Тогда $\rho(f, g) = \int_a^b |f - g|$ – метрика.

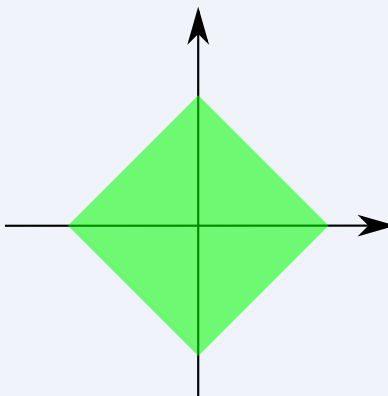
Обозначение (Открытый шар). $B_r(a) = \{x \in X, \rho(x, a) < r\}$

Обозначение (Замкнутый шар). $\overline{B}_r(a) = \{x \in X, \rho(x, a) \leq r\}$

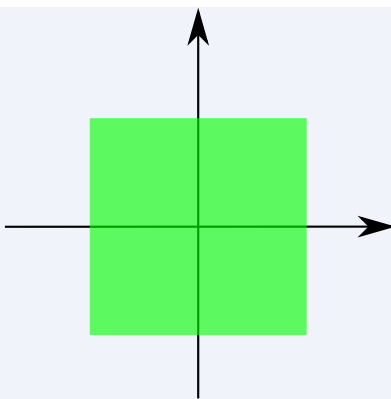
Обозначение (Сфера). $S_r(a) = \{x \in X, \rho(x, a) = r\}$

Пример. В дискретной метрике при $r < 1$ замкнутый шар $\overline{B}_r(a)$ включает только одну точку – a , а при $r \geq 1$ – всё множество X .

Пример. Замкнутый шар в манхэттенской метрике:



Пример. Замкнутый шар в ρ_∞ :



Утверждение 1. Пусть $B_{r_1}(a)$ и $B_{r_2}(a)$ – шары. Тогда

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1, r_2)}(a)$$

Доказательство. Возьмем $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a)$. Тогда $\rho(x, a) < r_1$ и $\rho(x, a) < r_2$, значит $\rho(x, a) < \min(r_1, r_2)$. \square

Утверждение 2. $\forall a \neq b \exists r : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \emptyset$.

Доказательство. Возьмем $r = \frac{\rho(a, b)}{3}$. Предположим, что пересечение непусто, т.е. $\exists x : x \in \overline{B}_r(a)$ и $x \in \overline{B}_r(b)$. Тогда

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) \leq \frac{\rho(a, b)}{3} + \frac{\rho(a, b)}{3}$$

\square

Обозначение. V_x – окрестность точки x (шар).

Обозначение. \dot{V}_x – проколота окрестность x (шар, не содержащий точку x).

Определение 3 (Внутренняя точка множества). Пусть $A \subset X$. Точка a называется *внутренней* точкой A , если $\exists V_a \subset A$.

Определение 4 (Внешняя точка множества). Пусть $A \subset X$. Тогда точка b называется *внешней* точкой A , если b – внутренняя точка $X \setminus A$.

Определение 5 (Граничная точка множества). Пусть $A \subset X$. Тогда c является *граничной* точкой множества A , если она не является ни внутренней, ни внешней. Иначе, точка c

называется граничной, если

$$\forall V_c \exists x, y \in V_c : x \in A \wedge y \in X \setminus A$$

Определение 6 (Открытое множество). Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если любая его точка – внутренняя.

Теорема 1 (Об открытых множествах). 1. \emptyset и X – открытые множества

2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество

3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество

4. Открытый шар – это открытое множество

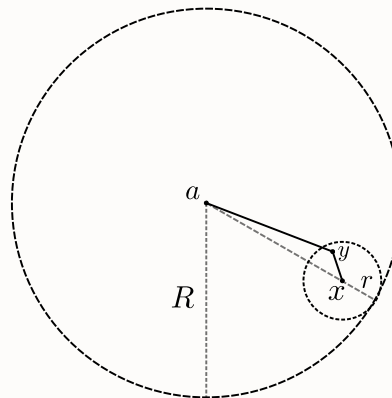
Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмем $x \in B$. Тогда $\exists \beta \in I : x \in A_\beta$. Т.к. A_β – открытое множество, то x принадлежит A_β с какой-то своей окрестностью, а значит она принадлежит и всему объединению с этой окрестностью.

3. Пусть $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Возьмем $x \in B$. Тогда $x \in A_i \forall i$. Точка x принадлежит всем A_i с какой-то круговой окрестностью r_i . Тогда она принадлежит пересечению с круговой окрестностью $\min r_i$.

4. Рассмотрим $B_R(a) = \{x \in X, \rho(x, a) < R\}$. Пусть точка $x \in B_R(a)$, $\rho(x, a) < R$. Положим $r = R - \rho(x, a)$. Возьмем y из окрестности x радиуса r . Тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + R - \rho(x, a) = R$$



А значит $\forall y \in V_r(x) y \in B_R(a)$, т.е. любая точка $x \in B_R(a)$ принадлежит шару $B_R(a)$ с какой-то своей окрестностью.

□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: рассмотрим $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}; 1\right) = [0, 1)$.

Обозначение. $\text{Int } A$ – множество всех внутренних точек множества A .

Теорема 2 (Свойства). 1. $\text{Int } A \subset A$

2. $\text{Int } A = \bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A

3. $\text{Int } A$ – открытое множество

4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$

5. $A \subset B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$

6. $\text{Int}(A \cap B) \stackrel{?}{=} \text{Int } A \cap \text{Int } B$

7. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$

Определение 7 (Замкнутое множество). Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus A$ – открыто.

Теорема 3 (О замкнутых множествах). 1. \emptyset, X – замкнутые множества.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество

3. Конечное объединение замкнутых множеств – замкнутое множество

4. Замкнутый шар – это замкнутое множество.

Доказательство. Из предыдущей теоремы + формул де-Моргана. **TODO**

4 Пусть $r = \rho(x, a) - R$. Возьмем y из окрестности x . Тогда

$$\rho(a, y) \geq -\rho(a, x) + \rho(x, y) > R$$

□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: $\bigcup \left[\frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$ – незамкнутое множество.

Обозначение (Замыкание множества). $\text{Cl } A$ – пересечение всех замкнутых множеств, которые содержат A .

Пример. $\text{Cl}(0, 1) = [0, 1]$.

Теорема 4 (Свойства). 1. $A \subset \text{Cl } A$

2. $\text{Cl } A$ – замкнутое множество

3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A$.

4. $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

$$5. \text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl} A \cup \text{Cl} B$$

$$6. \text{Cl}(\text{Cl} A) = \text{Cl} A$$

Теорема 5. $x \in \text{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

Доказательство. Докажем, что $x \notin \text{Cl} A \Leftrightarrow \exists r > 0 \ B_r(x) \cap A = \emptyset$.

$$x \in (X \setminus \text{Cl} A) \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$$

□

Пусть A' – множество предельных точек A . Тогда

Теорема 6 (Свойства). 1. $\text{Cl} A = A \cup A'$

$$2. A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$$

$$3. A \text{ – замкнуто} \Leftrightarrow A' \subset A$$

Доказательство. 3. $A \text{ – замкнуто} \Leftrightarrow \text{Cl} A = A, \text{Cl} A = A \cup A'$.

□

Теорема 7. $x \in A' \Leftrightarrow \forall B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A .

1.1. Нормированные пространства

Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} .

Определение 8 (Норма). Функция $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *нормой*, если выполняются следующие свойства:

$$1. \|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Пример. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

Пример. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример. $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots\}} |x_i|$

Пример. $C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f|$

Определение 9 (Скалярное произведение). $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если выполняются:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Упражнение. Вспомнить неравенство Коши-Буняковского

Утверждение 3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Доказательство. 1-2 очевидно.

3.

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

С другой стороны:

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$$

□

Определение 10 (Полное пространство). Пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнение. Доказать, что $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ – полные пространства.

Обозначение. $\overline{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$

Замечание. Под V_∞ будем понимать $\{x : \|x\| > \delta\}$.

Теорема 8 (Сходимость и покоординатная сходимость). $x^i \in \mathbb{R}^d$ ($x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_d^i)$). Рассмотрим последовательность $\{x^i\}_{i=1}^\infty$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ – сходится
2. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится покоординатно.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \|x^n - a\| < \varepsilon$$

2 \Rightarrow 1.

$$|x_k^n - a_k| \leq \|x^n - a\|$$

$$\sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \dots + (x_d^n - a_d)^2}$$

□

Замечание. $x^k = \left(k \cos \frac{\pi k}{2}, k \sin \frac{\pi k}{2}\right)$