Матанализ 3 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 19 сентября 2022 г. в 15:55

Содержание

Раздел #1: Метрические пространства

Пусть X – некоторое множество. Зададим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 1 (Метрика). ρ называется метрикой, если выполняются следующие три свойства:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0 \ \forall x,y \in X$
   $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x,y \in X \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\forall x,y,z \in X \ \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – неравенство треугольника.

Определение 2 (Метрическое пространство). Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством.*

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^d$: $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$

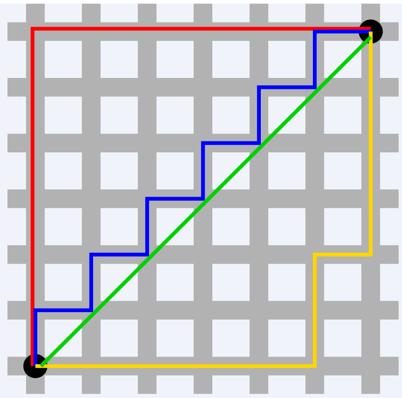
Пример (Дискретная метрика). Пусть X – некоторое множество. Зададим

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Действительно, все свойства выполняются, поэтому ρ – метрика.

Пример (Манхэттенская метрика). В $\mathbb{R}^2$:

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



Пример. $\rho_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Пример. Рассмотрим $C[a,b]$. Тогда $\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|$ – метрика.

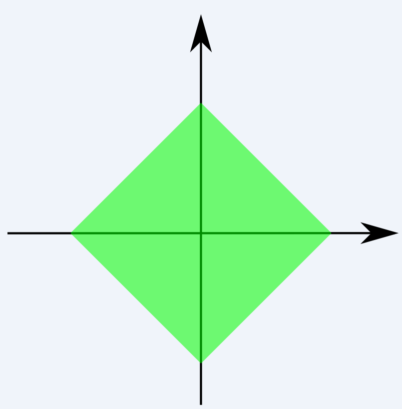
Обозначение (Открытый шар). $B_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) < r\}$

Обозначение (Замкнутый шар). $\overline{B}_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) \leqslant r\}$

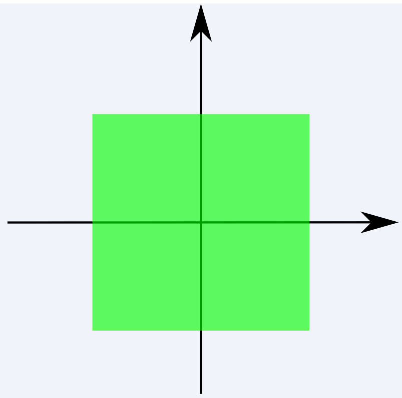
Обозначение (Сфера). $S_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) = r\}$

Пример. В дискретной метрике при $r < 1$ замкнутый шар $\overline{B}_r(a)$ включает только одну точку – a, а при $r \geqslant 1$ – всё множество X.

Пример. Замкнутый шар в манхэттенской метрике:



Пример. Замкнутый шар в ρ_∞:



Утверждение 1. Пусть $B_{r_1}(a)$ и $B_{r_2}(a)$ – шары. Тогда

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1, r_2)}(a)$$

Доказательство. Возьмем $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a)$. Тогда $\rho(x, a) < r_1$ и $\rho(x, a) < r_2$, значит $\rho(x, a) < \min(r_1, r_2)$. □

Утверждение 2. $\forall a \neq b \ \exists r : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $r = \frac{\rho(a,b)}{3}$. Предположим, что пересечение непусто, т.е. $\exists x : x \in \overline{B}_r(a)$ и $x \in \overline{B}_r(b)$. Тогда

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, b) \leqslant \frac{\rho(a, b)}{3} + \frac{\rho(a, b)}{3}$$

□

Обозначение. V_x – окрестность точки x (шар).

Обозначение. $\dot{V}_x$ – проколотая окрестность x (шар, не содержащий точку x).

Определение 3 (Внутренняя точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Точка a называется *внутренней* точкой A, если $\exists V_a \subset A$.

Определение 4 (Внешняя точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Тогда точка b называется *внешней* точкой A, если b – внутренняя точка $X \setminus A$.

Определение 5 (Граничная точка множества)**.** Пусть $A \subset X$. Тогда c является *граничной* точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней. Иначе, точка c

называется граничной, если

$$\forall V_c\ \exists x, y \in V_c : x \in A \land y \in X \setminus A$$

Определение 6 (Открытое множество). Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если любая его точка – внутренняя.

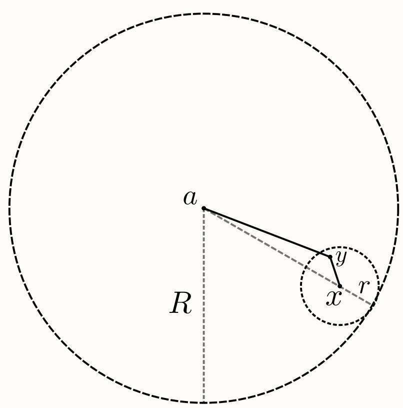
Теорема 1 (Об открытых множествах). 1. $\varnothing$ и X – открытые множества

2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – это открытое множество

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмем $x \in B$. Тогда $\exists \beta \in I : x \in A_\beta$. Т.к. A_β – открытое множество, то x принадлежит A_β с какой-то своей окрестностью, а значит она принадлежит и всему объединению с этой окрестностью.
3. Пусть $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Возьмем $x \in B$. Тогда $x \in A_i\ \forall i$. Точка x принадлежит всем A_i с какой-то круговой окрестностью r_i. Тогда она принадлежит пересечению с круговой окрестностью $\min r_i$.
4. Рассмотрим $B_R(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) < R\}$. Пусть точка $x \in B_R(a)$, $\rho(x,a) < R$. Положим $r = R - \rho(x,a)$. Возьмем y из окрестности x радиуса r. Тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(a,y) \leqslant \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + R - \rho(x,a) = R$$



А значит $\forall y \in V_x(r)\ y \in B_R(a)$, т.е. любая точка $x \in B_R(a)$ принадлежит шару $B_R(a)$ с какой-то своей окрестностью.

□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: рассмотрим $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}; 1\right) = [0,1)$.

Обозначение. $\operatorname{Int} A$ – множество всех внутренних точек множества A.

Теорема 2 (Свойства). 1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A = \bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A
3. $\operatorname{Int} A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$

Определение 7 (Замкнутое множество). Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus A$ – открыто.

Теорема 3 (О замкнутых множествах). 1. $\varnothing$, X – замкнутые множества.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Конечное объединение замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – это замкнутое множество.

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Тогда

$$X \setminus B = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

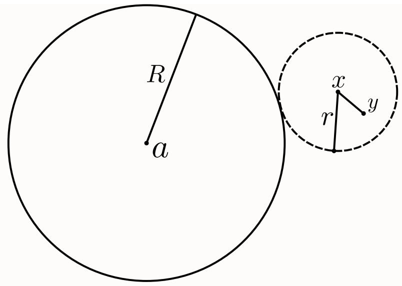
Поскольку $\forall \alpha \in I \ A_\alpha$ – замкнутое, т.е. $X \setminus A_\alpha$ – открытое, то $X \setminus B$ – открытое (по теореме об открытых множествах), значит B – замкнутое множество.

3. Доказывается аналогично предыдущему пункту.
4. Рассмотрим $\overline{B}_R(a)$. Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_R(a)$ и y из окрестности x, т.е. $y \in B_r(x)$, где $r = \rho(a,x) - R$. По неравенству треугольника:

$$\rho(a,x) \leqslant \rho(a,y) + \rho(y,x)$$

Поэтому

$$\rho(a,y) \geqslant r + R - \rho(y,x) > R$$



□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: $\bigcup\left[\frac{1}{n};1\right]=(0;1]$ – незамкнутое множество.

Пусть $E\subset\mathbb{R}^n,\ F\subset E$.

Определение 8. Точка $a\in F$ называется внутренней для F в E, если $\exists V_a^E\subset F$.

Определение 9. F называется открытым в E, если все его точки внутренние в E.

Замечание. Если множество E открыто, то ничего не изменилось. Если же множество E не открыто, то мы получаем новые определения.

Пример. Множество $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ открыто в $\mathbb{Q}$.

Пример. $(1,2]$ открыто в $(0,2]$.

Замечание. Множество F открыто в $E\Leftrightarrow\exists G$ – открытое в $\mathbb{R}^n: F=E\cap G$.

Пример. $(0,1]$ – замкнуто в $(0,2]$.

Обозначение (Замыкание множества). $\operatorname{Cl}A$ – пересечение всех замкнутых множеств, которые содержат A.

Пример. $\operatorname{Cl}(0,1)=[0,1]$.

Теорема 4 (Свойства). 1. $A\subset\operatorname{Cl}A$

2. $\operatorname{Cl}A$ – замкнутое множество

3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A=\operatorname{Cl}A$.

4. $A\subset B\Rightarrow\operatorname{Cl}A\subset\operatorname{Cl}B$

5. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B$
6. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$

Теорема 5. $x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. Докажем, что $x \notin \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \exists r > 0\ B_r(x) \cap A = \varnothing$.

$$x \in (X \setminus \mathrm{Cl}\, A) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(X \setminus A)$$

□

Пусть A' – множество предельных точек A. Тогда

Теорема 6 (Свойства). 1. $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$

2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A' \subset A$

Доказательство. 3. A – замкнуто $\Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = A$, $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$.

□

Теорема 7. $x \in A' \Leftrightarrow \forall B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A.

1.1. Нормированные пространства

Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 10 (Норма). Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если выпоняются следующие свойства:

1. $\|x\| \geqslant 0$

   $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пример. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

Пример. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример. $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots\}} |x_i|$

Пример. $C[a, b]$, $\|f\| = \max_{x \in [a,b)} |f|$

Определение 11 (Скалярное произведение). $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если выполняются:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$
   $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow= x = 0$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Упражнение. Вспомнить неравенство Коши-Буняковского

Утверждение 3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Доказательство. 1-2 очевидно.

3.

$$\langle x + y, x + y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

С другой стороны:

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle$$

□

Определение 12 (Полное пространство). Пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнение. Доказать, что $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ – полные пространства.

Обозначение. $\overline{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$

Замечание. Под V_∞ будем понимать $\{x : \|x\| > \delta\}$.

Теорема 8 (Сходимость и покоординатная сходимость). $x^i \in \mathbb{R}^d$ $(x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_d^i))$. Рассмотрим последовательность $\{x^i\}_{i=1}^\infty$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится
2. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится покоординатно.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \|x^n - a\| < \varepsilon$$

$$|x_k^n - a_k| \leqslant \|x^n - a\|$$

$2 \Rightarrow 1.$

$$\sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \ldots + (x_d^n - a_d)^2}$$

□

Замечание. Если $\lim_{k\to\infty} x^k = \infty$, то координатные последовательности $\{x^k\}$ могут и не иметь предела. Пусть, например, последовательность в $\mathbb{R}^2$ определяется формулой

$$x^k = \left(k\cos\frac{\pi k}{2}, k\sin\frac{\pi k}{2}\right)$$

Тогда

$$\|x^k\|\sqrt{k^2\cos^2\frac{\pi k}{2} + k^2\sin^2\frac{\pi k}{2}} = k \to +\infty$$

То есть $x^k \to \infty$. Тем не менее, последовательности $x_1^k = k\cos\frac{\pi k}{2}$ и $x_2^k = k\sin\frac{\pi k}{2}$ предела не имеют.

Теорема 9 (Арифметические действия и пределы). Пусть $\{x^k\}$, $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\lim x^k = a$, $\lim y^k = b$. Тогда

1. $\lim(x^k + y^k) = a + b$
2. Пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность из $\mathbb{R}$, $\lim \lambda_k = \lambda$. Тогда
$$\lim \lambda_k x_k = \lambda a$$
3. $\lim \|x^k\| = \|a\|$
4. $\lim\langle x^k, y^k\rangle = \langle a, b\rangle$

Доказательство. 1. По теореме 8 для любого $i = 1, \ldots, n$

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i, \quad \lim_{k\to\infty} y_i^k = b_i$$

Тогда $\lim_{k\to\infty}(x_i^k + y_i^k) = a_i + b_i$. Применяя теорему 8 еще раз, получаем, что $\lim_{k\to\infty}(x^k + y^k) = a + b$.

4. Заметим, что

$$\frac{1}{4}(\|a+b\| - \|a-b\|) = \frac{1}{4}(\langle a+b, a+b\rangle - \langle a-b, a-b\rangle) =$$
$$= \frac{1}{4}(4\langle a, b\rangle) = \langle a, b\rangle$$

Применяя пункты 1 и 3, получаем нужное утверждение.

□

Определение 13 (Ограниченное множество). Множество E называется ограниченным в $\mathbb{R}^n$, если $\exists c : E \subset V_0(c)$, т.е. $\forall x \in E \ \|x\| < c$.

Замечание. Ограниченность множества в $\mathbb{R}^n$ равносильна следующему условию:

$$\sup_{x \in E} \|x\| < +\infty$$

Определение 14. Проекцией $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть $E_i = \{x_i : x \in E\}$.

Замечание. Ограниченность множества E равносильна ограниченности всех проекций.

Теорема 10 (Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса). Пусть $\{x^k\}$ – последовательность в $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. Если $\{x^k\}$ ограничена, то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
2. Если $\{x^k\}$ не ограничена, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к ∞.

Доказательство. 1. $\{x_1^k\}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{R} \Rightarrow \exists x_1^{r_k}$ – сходящаяся подпоследовательность (по принципу выбора Больцано-Коши для числовых последовательностей). Рассмотрим теперь $\{x_2^{r_k}\}$ – ограничена в $\mathbb{R} \Rightarrow \exists\{x_2^{s_k}\}$ – сходящаяся подпоследовательность, где $\{s_k\}$ – подпоследовательность $\{r_k\}$. После n-ного шага мы построили последовательность $\{x_n^{l_k}\} \Rightarrow \{x^{l_k}\}$ сходится.

2. Можем построить $\{x^{r_k}\} : \|x^{r_k}\| > k$. Будем выбирать $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$.

□

Теорема 11 (Критерий Больцано-Коши). Пусть $\{x^k\}$ – последовательность из $\mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие условия:

1. $\{x^k\}$ – сходится
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n > N \ \|x^m - x^n\| < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что

$$|x_i| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_{i \in [1,n]} |x_i|$$

$1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\{x^k\}$ сходится, то

$$\forall i = 1..n \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m > N \ |x_i^m - x_i^n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Тогда

$$\|x^n - x^m\| < \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$2 \Rightarrow 1.$

$$|x_i^m - x_i^n| \leqslant \|x_i^m - x_i^n\| \leqslant \varepsilon$$

□

Определение 15 (Покрытие). Ω – семейство множеств из $\mathbb{R}^n$. Ω называется *покрытием* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $E \subset \bigcup_{A \in \Omega} A$.

Определение 16 (Открытое покрытие). Если все множества из Ω открытые, то Ω называется *открытым* покрытием.

Определение 17. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – подсемейство Ω, которое также покрывает E. Тогда $\widetilde{\Omega}$ называется *подпокрытием* Ω.

Определение 18. Множество E называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример. $(0,1)$ – не компакт. $\Omega = \{\left(\frac{1}{n}, 1\right), n \in \mathbb{N}\}$ – покрытие $(0,1)$. Из него нельзя выбрать конечное подпокрытие $(0,1)$.

Определение 19. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n : a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \dots, a_n \leqslant b_n$. Тогда *замкнутым параллелепипедом* будем называть следующее множество:

$$[a;b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Открытым параллелепипедом называется множество:

$$(a;b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

Упражнение. Открытый параллелепипед – открытое множество, замкнутый параллелепипед – замкнутое множество.

Определение 20 (Диаметр множества). $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x,y \in E} \|x - y\|$

Теорема 12 (О стягивающихся параллелепипедах). Рассмотрим параллелепипеды $P_k \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутые, $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$, $\operatorname{diam} P_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Тогда существует только одна точка, принадлежащая всем параллелепипедам.

Теорема 13. Замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ является компактом.

Лемма 1. $E \subset \mathbb{R}^n$. E замкнуто $\Leftrightarrow$ $\forall$ сходящаяся последовательность в E имеет пределом точку из E.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в E, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Покажем, что $a \in E$. Если это не так, то $a \in \mathbb{R}^n \setminus E$, и в силу открытости $\mathbb{R}^n \setminus E$ найдется окрестность V_a точки a, лежащая в $\mathbb{R}^n \setminus E$. По определению предела при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $x^k \in V_a \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. С другой стороны, $x^k \in E$ $\forall k \in \mathbb{N}$, и мы получаем противоречие.
$\Leftarrow$. $E' \subset E \Rightarrow E$ – замкнуто. $\square$

Лемма 2. Замкнутое подмножество компакта – компакт.

Доказательство. Пусть F – замнутое подмножество компакта E, Ω – открытое покрытие F. Покажем, что из Ω можно выбрать конечное подпокрытие. Добавляя к Ω множество $\mathbb{R}^n \setminus F$, мы получим открытое покрытие компакта E. Выберем из этого покрытия конечное подсемейство $\widetilde{\Omega}$, которое также покрывает E. Если множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ входит в $\widetilde{\Omega}$, удалим его оттуда. Мы получим конечное подпокрытие Ω множества F. $\square$

Теорема 14. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие условия:

1. E – компакт
2. E ограничено и замкнуто
3. Из любой последовательности в E можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из E.

Доказательство. $3 \Rightarrow 2$. Пусть $\{x^k\}$ – последовательность в E, сходящаяся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}^n$. Из условия 3) вытекает, что у $\{x^k\}$ есть подпоследовательность, предел которой лежит в E. Но любая подпоследовательность $\{x^k\}$ сходится к a, откуда $a \in E \Rightarrow$ E замкнуто.
Докажем теперь ограниченность. Если E не ограничено, то по любому $k \in \mathbb{N}$ найдется $x^k \in E$, для которого $\|x^k\| \geqslant k$. Но тогда $x^k \to \infty$ при $k \to \infty \Rightarrow$ все подпоследовательности $\{x^k\}$ также стремятся к бесконечности. Получили противоречие с условием 3).

$2 \Rightarrow 1$. E ограничено $\Rightarrow \exists c : [-c, c]^n \supset E$. Тогда E – замкнутое подмножество компакта $\Rightarrow E$ – компакт.

$1 \Rightarrow 3$. Пусть a – предел последовательности из E, но $a \notin E$. Положим $\Omega = \{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(a)\}$. Тогда $\bigcup_{A\in\Omega} A = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \Rightarrow \Omega$ – покрытие E. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – произвольное конечное подсемейство Ω. Тогда, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и положительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$

$$\widetilde{\Omega} = \left\{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{\varepsilon_k}(a)\right\}_{k=1}^{m}$$

Множество $B(a) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} B_{\varepsilon_k}(a)$ является окрестность точки a. Заметим, что

$$\bigcup_{A\in\widetilde{\Omega}} A = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B}_{\varepsilon_k}(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(a)$$

Таким образом, множество $\widetilde{\Omega}$ не покрывает E, что противоречит компактности E.

□

1.2. Отображения

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Пример. $m = 1$ – функция нескольких переменных. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример. $n = 1$ – вектор-функция. $(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = f(x)$.

Определение 21. Отображение f называется *ограниченным*, если

$$\sup_{x\in E} \|f(x)\| < +\infty$$

Замечание. Ограниченность f равносильна ограниченности координатных функций.

Определение 22 (Предел по Коши)**.** $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a – предельная точка E, $(a \in \overline{R}^n)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap \dot{B}_\delta(a)\ \ f(x) \in B_\varepsilon(A)$$

Иначе, пусть $a \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m$. Тогда A – предел, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 : \forall x \in E 0 < \|x - a\| < \delta\ \ \|f(x) - A\| < \varepsilon$$

Определение 23 (Предел по Гейне)**.** $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a – предельная точка E. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = A$, если

$$\forall \{x^n\}\ x^k \to a,\ x^k \neq a,\ x^k \in E\ \ \lim f(x_k) = A$$

Теорема 15 (Эквивалентность определений предела)**.** Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является предельной для E, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Гейне

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A – предел f в смысле Коши. Возьмем последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E \setminus \{a\}$, стремящуюся к a. В силу 1) по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, для которого

$$f(x) \in V_A(\varepsilon) \quad \forall x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E$$

Поскольку $x^k \to a$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $k > N$ справедливо включение $x^k \in V_a(\delta)$. Кроме того, $x^k \in E \setminus \{a\}$, откуда $x^k \in \dot{V}_a(\delta) \cap E$. Поэтому

$$f(x^k) \in V_A(\varepsilon) \quad \forall k > N$$

Таким образом, $f(x^k) \to A$ при $k \to \infty$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и в смысле Гейне.
2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A – предел f по Гейне. Докажем, что предел f в смысле Коши также существует и равен A. Действительно, если это не так, то

$$\exists \varepsilon : \forall \delta > 0 \ \exists x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E : f(x) \notin V_A(\varepsilon)$$

Положим

$$F = \{x \in E \setminus \{a\} : f(x) \notin V_A(\varepsilon)\}$$

Таким образом, $\dot{V}_a(\delta) \cap F \neq \varnothing$ при любом $\delta > 0$, то есть a является предельной точкой F $\Rightarrow$ найдется последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в F, стремящаяся к a. Тогда $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = A$, что невозможно, т.к. $f(x^k) \notin V_A(\varepsilon)$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

$\square$