Матанализ 3 семестр ПИ,
Лекции

Собрано 26 сентября 2022 г. в 13:50

Содержание

Раздел #1: Метрические пространства

Пусть X – некоторое множество. Зададим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 1 (Метрика). ρ называется метрикой, если выполняются следующие три свойства:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0 \ \forall x,y \in X$
   $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x,y \in X \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\forall x,y,z \in X \ \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – неравенство треугольника.

Определение 2 (Метрическое пространство). Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Пример. Метрика на $\mathbb{R}^d$: $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$

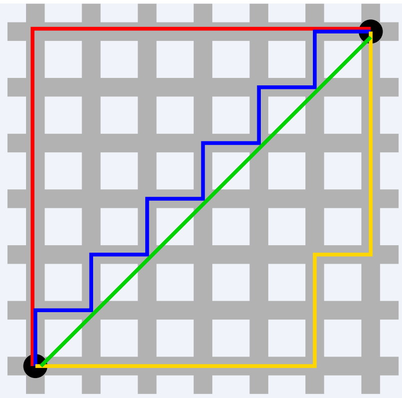
Пример (Дискретная метрика). Пусть X – некоторое множество. Зададим

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Действительно, все свойства выполняются, поэтому ρ – метрика.

Пример (Манхэттенская метрика). В $\mathbb{R}^2$:

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



Пример. $\rho_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Пример. Рассмотрим $C[a,b]$. Тогда $\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|$ – метрика.

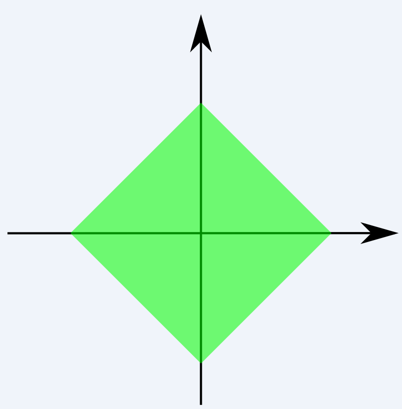
Обозначение (Открытый шар). $B_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) < r\}$

Обозначение (Замкнутый шар). $\overline{B}_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) \leqslant r\}$

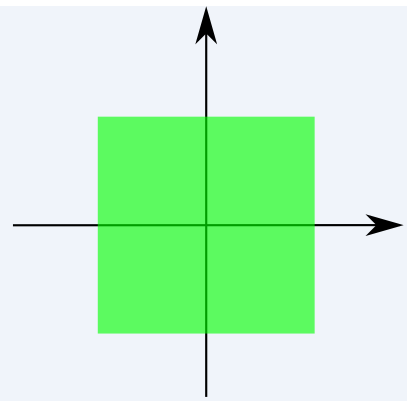
Обозначение (Сфера). $S_r(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) = r\}$

Пример. В дискретной метрике при $r < 1$ замкнутый шар $\overline{B}_r(a)$ включает только одну точку – a, а при $r \geqslant 1$ – всё множество X.

Пример. Замкнутый шар в манхэттенской метрике:



Пример. Замкнутый шар в ρ_∞:



Утверждение 1. Пусть $B_{r_1}(a)$ и $B_{r_2}(a)$ – шары. Тогда

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min(r_1,r_2)}(a)$$

Доказательство. Возьмем $x \in B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a)$. Тогда $\rho(x,a) < r_1$ и $\rho(x,a) < r_2$, значит $\rho(x,a) < \min(r_1, r_2)$. □

Утверждение 2. $\forall a \neq b\ \exists r : \overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \varnothing$.

Доказательство. Возьмем $r = \frac{\rho(a,b)}{3}$. Предположим, что пересечение непусто, т.е. $\exists x : x \in \overline{B}_r(a)$ и $x \in \overline{B}_r(b)$. Тогда

$$\rho(a,b) \leqslant \rho(a,x) + \rho(x,b) \leqslant \frac{\rho(a,b)}{3} + \frac{\rho(a,b)}{3}$$

□

Обозначение. V_x – окрестность точки x (шар).

Обозначение. $\dot{V}_x$ – проколотая окрестность x (шар, не содержащий точку x).

Определение 3 (Внутренняя точка множества). Пусть $A \subset X$. Точка a называется *внутренней* точкой A, если $\exists V_a \subset A$.

Определение 4 (Внешняя точка множества). Пусть $A \subset X$. Тогда точка b называется *внешней* точкой A, если b – внутренняя точка $X \setminus A$.

Определение 5 (Граничная точка множества). Пусть $A \subset X$. Тогда c является *граничной* точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней. Иначе, точка c

называется граничной, если

$$\forall V_c\ \exists x, y \in V_c : x \in A \wedge y \in X \setminus A$$

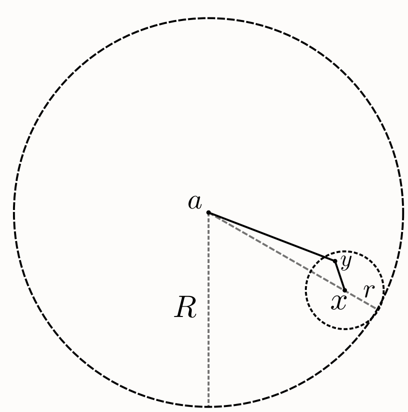
Определение 6 (Открытое множество). Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если любая его точка – внутренняя.

Теорема 1 (Об открытых множествах). 1. $\varnothing$ и X – открытые множества

2. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество
4. Открытый шар – это открытое множество

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмем $x \in B$. Тогда $\exists \beta \in I : x \in A_\beta$. Т.к. A_β – открытое множество, то x принадлежит A_β с какой-то своей окрестностью, а значит она принадлежит и всему объединению с этой окрестностью.
3. Пусть $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Возьмем $x \in B$. Тогда $x \in A_i\ \forall i$. Точка x принадлежит всем A_i с какой-то круговой окрестностью r_i. Тогда она принадлежит пересечению с круговой окрестностью $\min r_i$.
4. Рассмотрим $B_R(a) = \{x \in X,\ \rho(x,a) < R\}$. Пусть точка $x \in B_R(a)$, $\rho(x,a) < R$. Положим $r = R - \rho(x,a)$. Возьмем y из окрестности x радиуса r. Тогда в силу неравенства треугольника
$$\rho(a,y) \leqslant \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + R - \rho(x,a) = R$$



А значит $\forall y \in V_x(r)\ y \in B_R(a)$, т.е. любая точка $x \in B_R(a)$ принадлежит шару $B_R(a)$ с какой-то своей окрестностью.

□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: рассмотрим $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}; 1\right) = [0, 1)$.

Обозначение. $\operatorname{Int} A$ – множество всех внутренних точек множества A.

Теорема 2 (Свойства). 1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A = \bigcup$ всех открытых множеств, которые содержатся в A
3. $\operatorname{Int} A$ – открытое множество
4. A – открытое $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$
7. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$

Определение 7 (Замкнутое множество). Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus A$ – открыто.

Теорема 3 (О замкнутых множествах). 1. $\varnothing$, X – замкнутые множества.

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество
3. Конечное объединение замкнутых множеств – замкнутое множество
4. Замкнутый шар – это замкнутое множество.

Доказательство. 1. Очевидно

2. Пусть $B = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Тогда

$$X \setminus B = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

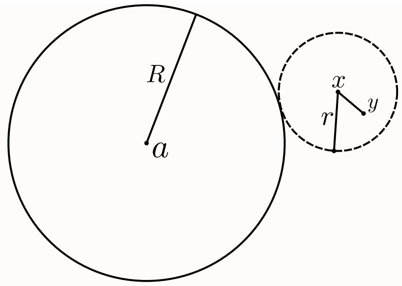
Поскольку $\forall \alpha \in I$ A_α – замкнутое, т.е. $X \setminus A_\alpha$ – открытое, то $X \setminus B$ – открытое (по теореме об открытых множествах), значит B – замкнутое множество.

3. Доказывается аналогично предыдущему пункту.
4. Рассмотрим $\overline{B}_R(a)$. Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_R(a)$ и y из окрестности x, т.е. $y \in B_r(x)$, где $r = \rho(a,x) - R$. По неравенству треугольника:

$$\rho(a,x) \leqslant \rho(a,y) + \rho(y,x)$$

Поэтому

$$\rho(a,y) \geqslant r + R - \rho(y,x) > R$$



□

Замечание. Конечность в пункте 3 существенна: $\bigcup\left[\frac{1}{n};1\right] = (0;1]$ – незамкнутое множество.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset E$.

Определение 8. Точка $a \in F$ называется внутренней для F в E, если $\exists V_a^E \subset F$.

Определение 9. F называется открытым в E, если все его точки внутренние в E.

Замечание. Если множество E открыто, то ничего не изменилось. Если же множество E не открыто, то мы получаем новые определения.

Пример. Множество $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ открыто в $\mathbb{Q}$.

Пример. $(1,2]$ открыто в $(0,2]$.

Замечание. Множество F открыто в $E \Leftrightarrow \exists G$ – открытое в $\mathbb{R}^n : F = E \cap G$.

Пример. $(0,1]$ – замкнуто в $(0,2]$.

Обозначение (Замыкание множества). $\operatorname{Cl} A$ – пересечение всех замкнутых множеств, которые содержат A.

Пример. $\operatorname{Cl}(0,1) = [0,1]$.

Теорема 4 (Свойства). 1. $A \subset \operatorname{Cl} A$

2. $\operatorname{Cl} A$ – замкнутое множество

3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{Cl} A$.

4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

5. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B$
6. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$

Теорема 5. $x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство. Докажем, что $x \notin \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \exists r > 0\ B_r(x) \cap A = \varnothing$.

$$x \in (X \setminus \mathrm{Cl}\, A) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(X \setminus A)$$

□

Пусть A' – множество предельных точек A. Тогда

Теорема 6 (Свойства). 1. $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$

2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. A – замкнуто $\Leftrightarrow A' \subset A$

Доказательство. 3. A – замкнуто $\Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = A$, $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$.

□

Теорема 7. $x \in A' \Leftrightarrow \forall B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A.

1.1. Нормированные пространства

Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 10 (Норма). Функция $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если выпоняются следующие свойства:

1. $||x|| \geqslant 0$

   $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||,\ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Пример. $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$

Пример. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример. $||x||_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots\}} |x_i|$

Пример. $C[a,b]$, $||f|| = \max_{x \in [a,b)} |f|$

Определение 11 (Скалярное произведение). $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если выполняются:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$

   $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow= x = 0$
2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Упражнение. Вспомнить неравенство Коши-Буняковского

Утверждение 3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Доказательство. 1-2 очевидно.

3.

$$\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

С другой стороны:

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle$$

□

Определение 12 (Полное пространство). Пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнение. Доказать, что $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ – полные пространства.

Обозначение. $\overline{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$

Замечание. Под V_∞ будем понимать $\{x : \|x\| > \delta\}$.

Теорема 8 (Сходимость и покоординатная сходимость). $x^i \in \mathbb{R}^d$ ($x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_d^i)$). Рассмотрим последовательность $\{x^i\}_{i=1}^\infty$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится
2. $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ сходится покоординатно.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \|x^n - a\| < \varepsilon$$

$$|x_k^n - a_k| \leqslant \|x^n - a\|$$

$2 \Rightarrow 1.$

$$\sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + \ldots + (x_d^n - a_d)^2}$$

□

Замечание. Если $\lim_{k\to\infty} x^k = \infty$, то координатные последовательности $\{x^k\}$ могут и не иметь предела. Пусть, например, последовательность в $\mathbb{R}^2$ определяется формулой

$$x^k = \left(k\cos\frac{\pi k}{2}, k\sin\frac{\pi k}{2}\right)$$

Тогда

$$\|x^k\|\sqrt{k^2\cos^2\frac{\pi k}{2} + k^2\sin^2\frac{\pi k}{2}} = k \to +\infty$$

То есть $x^k \to \infty$. Тем не менее, последовательности $x_1^k = k\cos\frac{\pi k}{2}$ и $x_2^k = k\sin\frac{\pi k}{2}$ предела не имеют.

Теорема 9 (Арифметические действия и пределы)**.** Пусть $\{x^k\}$, $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\lim x^k = a$, $\lim y^k = b$. Тогда

1. $\lim(x^k + y^k) = a + b$
2. Пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность из $\mathbb{R}$, $\lim \lambda_k = \lambda$. Тогда

$$\lim \lambda_k x_k = \lambda a$$

3. $\lim \|x^k\| = \|a\|$
4. $\lim\langle x^k, y^k\rangle = \langle a, b\rangle$

Доказательство. 1. По теореме 8 для любого $i = 1, \ldots, n$

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i, \quad \lim_{k\to\infty} y_i^k = b_i$$

Тогда $\lim_{k\to\infty}(x_i^k + y_i^k) = a_i + b_i$. Применяя теорему 8 еще раз, получаем, что $\lim_{k\to\infty}(x^k + y^k) = a + b$.

4. Заметим, что

$$\frac{1}{4}(\|a+b\| - \|a-b\|) = \frac{1}{4}(\langle a+b, a+b\rangle - \langle a-b, a-b\rangle) =$$
$$= \frac{1}{4}(4\langle a, b\rangle) = \langle a, b\rangle$$

Применяя пункты 1 и 3, получаем нужное утверждение.

□

Определение 13 (Ограниченное множество). Множество E называется ограниченным в $\mathbb{R}^n$, если $\exists c : E \subset V_0(c)$, т.е. $\forall x \in E \ \|x\| < c$.

Замечание. Ограниченность множества в $\mathbb{R}^n$ равносильна следующему условию:

$$\sup_{x \in E} \|x\| < +\infty$$

Определение 14. Проекцией $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть $E_i = \{x_i : x \in E\}$.

Замечание. Ограниченность множества E равносильна ограниченности всех проекций.

Теорема 10 (Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса). Пусть $\{x^k\}$ – последовательность в $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. Если $\{x^k\}$ ограничена, то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
2. Если $\{x^k\}$ не ограничена, то из неё можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к ∞.

Доказательство. 1. $\{x_1^k\}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{R} \Rightarrow \exists x_1^{r_k}$ – сходящаяся подпоследовательность (по принципу выбора Больцано-Коши для числовых последовательностей). Рассмотрим теперь $\{x_2^{r_k}\}$ – ограничена в $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_2^{s_k}\}$ – сходящаяся подпоследовательность, где $\{s_k\}$ – подпоследовательность $\{r_k\}$. После n-ного шага мы построили последовательность $\{x_n^{l_k}\} \Rightarrow \{x^{l_k}\}$ сходится.

2. Можем построить $\{x^{r_k}\} : \|x^{r_k}\| > k$. Будем выбирать $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$.

□

Теорема 11 (Критерий Больцано-Коши). Пусть $\{x^k\}$ – последовательность из $\mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие условия:

1. $\{x^k\}$ – сходится
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n > N \ \|x^m - x^n\| < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что

$$|x_i| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_{i \in [1,n]} |x_i|$$

$1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\{x^k\}$ сходится, то

$$\forall i = 1..n \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m > N \ |x_i^m - x_i^n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Тогда

$$\|x^n - x^m\| < \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$2 \Rightarrow 1$.

$$|x_i^m - x_i^n| \leqslant \|x_i^m - x_i^n\| \leqslant \varepsilon$$

$\square$

Определение 15 (Покрытие). Ω – семейство множеств из $\mathbb{R}^n$. Ω называется *покрытием* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $E \subset \bigcup_{A \in \Omega} A$.

Определение 16 (Открытое покрытие). Если все множества из Ω открытые, то Ω называется *открытым* покрытием.

Определение 17. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – подсемейство Ω, которое также покрывает E. Тогда $\widetilde{\Omega}$ называется *подпокрытием* Ω.

Определение 18. Множество E называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример. $(0,1)$ – не компакт. $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right), n \in \mathbb{N}\right\}$ – покрытие $(0,1)$. Из него нельзя выбрать конечное подпокрытие $(0,1)$.

Определение 19. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n : a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \dots, a_n \leqslant b_n$. Тогда *замкнутым параллелепипедом* будем называть следующее множество:

$$[a; b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Открытым параллелепипедом называется множество:

$$(a; b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

Упражнение. Открытый параллелепипед – открытое множество, замкнутый параллелепипед – замкнутое множество.

Определение 20 (Диаметр множества). $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x, y \in E} \|x - y\|$

Теорема 12 (О стягивающихся параллелепипедах). Рассмотрим параллелепипеды $P_k \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутые, $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$, $\operatorname{diam} P_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Тогда существует только одна точка, принадлежащая всем параллелепипедам.

Теорема 13. Замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ является компактом.

Лемма 1. $E \subset \mathbb{R}^n$. E замкнуто $\Leftrightarrow \forall$ сходящаяся последовательность в E имеет пределом точку из E.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в E, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Покажем, что $a \in E$. Если это не так, то $a \in \mathbb{R}^n \setminus E$, и в силу открытости $\mathbb{R}^n \setminus E$ найдется окрестность V_a точки a, лежащая в $\mathbb{R}^n \setminus E$. По определению предела при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $x^k \in V_a \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. С другой стороны, $x^k \in E$ $\forall k \in \mathbb{N}$, и мы получаем противоречие.
$\Leftarrow$. $E' \subset E \Rightarrow E$ – замкнуто. □

Лемма 2. Замкнутое подмножество компакта – компакт.

Доказательство. Пусть F – замнутое подмножество компакта E, Ω – открытое покрытие F. Покажем, что из Ω можно выбрать конечное подпокрытие. Добавляя к Ω множество $\mathbb{R}^n \setminus F$, мы получим открытое покрытие компакта E. Выберем из этого покрытия конечное подсемейство $\widetilde{\Omega}$, которое также покрывает E. Если множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ входит в $\widetilde{\Omega}$, удалим его оттуда. Мы получим конечное подпокрытие Ω множества F. □

Теорема 14. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие условия:

1. E – компакт
2. E ограничено и замкнуто
3. Из любой последовательности в E можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из E.

Доказательство. $3 \Rightarrow 2$. Пусть $\{x^k\}$ – последовательность в E, сходящаяся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}^n$. Из условия 3) вытекает, что у $\{x^k\}$ есть подпоследовательность, предел которой лежит в E. Но любая подпоследовательность $\{x^k\}$ сходится к a, откуда $a \in E \Rightarrow E$ замкнуто.

Докажем теперь ограниченность. Если E не ограничено, то по любому $k \in \mathbb{N}$ найдется $x^k \in E$, для которого $\|x^k\| \geqslant k$. Но тогда $x^k \to \infty$ при $k \to \infty \Rightarrow$ все подпоследовательности $\{x^k\}$ также стремятся к бесконечности. Получили противоречие с условием 3).

$2 \Rightarrow 1$. E ограничено $\Rightarrow \exists c : [-c, c]^n \supset E$. Тогда E – замкнутое подмножество компакта $\Rightarrow E$ – компакт.

$1 \Rightarrow 3$. Пусть a – предел последовательности из E, но $a \notin E$. Положим $\Omega = \{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(a)\}$. Тогда $\bigcup_{A\in\Omega} A = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \Rightarrow \Omega$ – покрытие E. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – произвольное конечное подсемейство Ω. Тогда, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и положительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$

$$\widetilde{\Omega} = \left\{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{\varepsilon_k}(a)\right\}_{k=1}^{m}$$

Множество $B(a) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} B_{\varepsilon_k}(a)$ является окрестность точки a. Заметим, что

$$\bigcup_{A\in\widetilde{\Omega}} A = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B}_{\varepsilon_k}(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(a)$$

Таким образом, множество $\widetilde{\Omega}$ не покрывает E, что противоречит компактности E.

□

1.2. Отображения

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Пример. $m = 1$ – функция нескольких переменных. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример. $n = 1$ – вектор-функция. $(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = f(x)$.

Определение 21 (Ограниченное отображение). Отображение f называется *ограниченным*, если

$$\sup_{x\in E} \|f(x)\| < +\infty$$

Замечание. Ограниченность f равносильна ограниченности координатных функций.

Определение 22 (Предел по Коши). $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a – предельная точка E, $(a \in \overline{R}^n)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap \dot{B}_\delta(a)\ \ f(x) \in B_\varepsilon(A)$$

Иначе, пусть $a \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m$. Тогда A – предел, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0 : \forall x \in E 0 < \|x - a\| < \delta\ \ \|f(x) - A\| < \varepsilon$$

Определение 23 (Предел по Гейне). $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a – предельная точка E. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = A$, если

$$\forall\{x^n\}\ x^k \to a,\ \ x^k \neq a,\ \ x^k \in E\ \ \lim f(x_k) = A$$

Теорема 15 (Эквивалентность определений предела). Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является предельной для E, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда равносильны утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Гейне

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A – предел f в смысле Коши. Возьмем последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E \setminus \{a\}$, стремящуюся к a. В силу 1) по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, для которого

$$f(x) \in V_A(\varepsilon) \quad \forall x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E$$

Поскольку $x^k \to a$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $k > N$ справедливо включение $x^k \in V_a(\delta)$. Кроме того, $x^k \in E \setminus \{a\}$, откуда $x^k \in \dot{V}_a(\delta) \cap E$. Поэтому

$$f(x^k) \in V_A(\varepsilon) \quad \forall k > N$$

Таким образом, $f(x^k) \to A$ при $k \to \infty$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и в смысле Гейне.
2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A – предел f по Гейне. Докажем, что предел f в смысле Коши также существует и равен A. Действительно, если это не так, то

$$\exists \varepsilon : \forall \delta > 0 \ \exists x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E : f(x) \notin V_A(\varepsilon)$$

Положим

$$F = \{x \in E \setminus \{a\} : f(x) \notin V_A(\varepsilon)\}$$

Таким образом, $\dot{V}_a(\delta) \cap F = \varnothing$ при любом $\delta > 0$, то есть a является предельной точкой F $\Rightarrow$ найдется последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в F, стремящаяся к a. Тогда $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = A$, что невозможно, т.к. $f(x^k) \notin V_A(\varepsilon)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 16 (Единственность предела отображения). Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}^m}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Тогда $A = B$.

Теорема 17. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^m$. Тогда равносильны следующие условия:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$
2. $\lim_{x\to a} f_i(x) = A_i$

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Положим

$$z^k = \left(\frac{1}{k}, 0\right), \quad w^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \quad (k \in \mathbb{N})$$

Тогда $z^k \to (0,0)$ и $w^k \to (0,0)$ при $k \to \infty$. Кроме того,

$$f(z^k) \to 0, \quad f(w^k) = \frac{1/k^2}{2/k^2} \to \frac{1}{2}$$

Если бы предел f в точке $(0,0)$ существовал, то он был бы равен одновременно 0 и $\frac{1}{2}$, что невозможно.

Пример. Пусть

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

$\left(\frac{1}{k}, 0\right), \left(0, \frac{1}{k}\right)$ – по Гейне предела не существует.

Теорема 18 (Арифметические действия с пределами). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : E \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}^m$. Тогда

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$
2. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A$

2'. Если $\lambda(x) : E \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} \lambda(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \alpha A$$

3. $\langle f, g\rangle \xrightarrow[x\to a]{} \langle A, B\rangle$
4. Если $m = 1$, $B \neq 0$, то $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Теорема 19 (Предел композиции). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \to F$, $g : F \to \mathbb{R}^s$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

Теорема 20 (Критерий Больцано-Коши). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ – предельная точка E, $f : E \to \mathbb{R}^m$. Тогда равносильны следующие условия:

1. f имеет пределом в точке a точку в $\mathbb{R}^m$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_a : \forall x_1, x_2 \in V_a \cap E\ \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$

1.3. Непрерывность отображений

Определение 24 (Непрерывные отображения). $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$. Отображение f называется *непрерывным* в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x \in E \cap V_\delta(a)\ f(x) \in V_\varepsilon(f(a))$$

Замечание. Если точка a – изолированная точка E, то отображение в a всегда непрерывно.

Замечание (Непрерывность на языке неравенств).

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ \|x - a\| < \delta\ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Замечание. f непрерывна $\Leftrightarrow$ все её координатные функции непрерывны.

Теорема 21 (Непрерывность композиции). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \to F$, $g : F \to \mathbb{R}^s$, Если f непрерывно в точке a и g непрерывно в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывно в точке a.

Доказательство. Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в E, стремящаяся к a. Тогда

$$f(x^k) \to f(a), \quad g(f(x^k)) \to g(f(a))$$

Таким образом, $g(f(x^k)) \to (g \circ f)(a)$ при $k \to \infty$, что и означает непрерывность $g \circ f$ в точке a. □

Теорема 22. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывны в точке $a \in E$. Тогда

1. $f + g$ непрерывно в точке a
2. Если функция $\lambda : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, то λf непрерывно в точке a
3. $f \cdot g$ непрерывно в точке a
4. Если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке a.

Определение 25 (Непрерывное на множестве отображение). Будем называть отображение $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ *непрерыным на* E, если оно непрерывно в каждой точке E.

Обозначение. $C(E \to \mathbb{R}^m)$, $C(E, \mathbb{R}^m)$, $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Теорема 23 (Непрерывный образ компакта). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – компактное, f непрерывно на E. Тогда образ множества E – компакт. Таким образом, непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство. Рассмотри $f(E) \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $\{y_k\} \in f(E)$. Тогда $\exists x_k \in E : f(x_k) = y_k$. Поскольку E – компакт, то $\exists \{x_{k_l}\} : \lim_{l \to \infty} x_{k_l} = a \in E$. Рассмотрим теперь последовательность $y_{k_l} = f(x_{k_l})$. При $l \to \infty$ она стремится к $f(a)$ (по непрерывности). $a \in E \Rightarrow f(a) \in f(E)$ □

Теорема 24 (Вейерштрасса). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ – непрерывна на E, E – компакт. Тогда

1. f ограничена на E
2. Если $m = 1$, то f достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Доказательство. 1. По предыдущей теореме.

2. Положим
$$M = \sup_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R}$$
Построим последовательность $\{y_k\} : M - \frac{1}{k} < y_k \leqslant M,\ y_k \in f(E)$. $y_k \to M \Rightarrow M \in E \Rightarrow M = \max_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R}$.

□

Замечание. Любой отрезок в $\mathbb{R}^n$ есть компакт.
$$\Delta_{a,b} = \{a + t(b - a),\ t \in [0,1],\ a, b \in \mathbb{R}^n\}$$

Теорема 25. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$. Тогда равносильны следующие условия

1. f непрерывно на E
2. $\forall$ открытого $G \subset \mathbb{R}^m$ $f^{-1}(G)$ открыто в E.

1.4. Линейные отображения

Определение 26. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $T : E \to \mathbb{R}^m$. Будем называть отображение f *линейным*, если $\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, b \in \mathbb{R}$
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Обозначение. $T(x) = T_x$

Обозначение. $\mathbb{O}_x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m$

Обозначение. $x_k = \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}$, $T(x_k) = k \cdot T(x_1)$

Замечание (Композиция линейных операторов)**.** Если $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ Тогда $T(S(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$.

Теорема 26. Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Тогда

1. T непрерывен на $\mathbb{R}^n$
2. $\exists C \geqslant 0 : ||T_x|| \leqslant C \cdot ||x||\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

3. Пусть E – ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда $T(E)$ ограничен в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. 2. Ранее было доказано, что сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ компактна в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$C = \sup_{x \in S} \|T_x\|$$

Так как сам оператор T непрерывен, то по теореме Вейерштрасса $C < +\infty$. При $x = 0$ требуемое неравенство очевидно. Для $x \neq 0$ положим $z = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $z \in S$, и в силу линейности T

$$\|T_x\| = \|T(z\|x\|)\| = \|T_z\| \cdot \|x\| \leqslant C \cdot \|x\|$$

1. Пусть множество E ограничено в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $E \subset V_\delta(0)$. По предыдущему пункту,

$$\|T_x\| \leqslant C\|x\| \leqslant C\delta$$

Поэтому $T(E) \subset V_{C\delta}(0)$, что и дает ограниченность $T(E)$.

□

Определение 27 (Операторная норма). $\|T\| = \sup \dfrac{\|T_x\|}{\|x\|}, \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Замечание. Если нам удалось подобрать C, что выполняется неравенство из пункта 2 теоремы, то $\|T\| \leqslant C$. Если же для какого-то $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верно неравенство $\|T_x\| \geqslant C\|x\|$, то $\|T\| \geqslant C$.

Замечание. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_x\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|T_x\|$

Доказательство. Пусть $A = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_x\|$, $B = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|T_x\|$

1. $A \leqslant B$ – очевидно.
2.
$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = A$$
3.
$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{0 < \|x\| \leqslant 1} \frac{\|T_x\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T_x\| = B$$

□

Теорема 27. Операторная норма – это действительно норма.

Доказательство. 1. Неравенство $\|T\| \geqslant 0$ очевидно. Если $\|T\| = 0$, то

$$\|T_x\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

откуда $T_x = 0$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому $T = \mathbb{O}$

2. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\lambda T(x)\|$
3. Возьмем $x : \|x\| = 1$. Тогда

$$\|T + S\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_x + S_x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} (\|T_x\| + \|S_x\|) \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_x\| + \sup_{\|x\|=1} \|S_x\|$$

□

Теорема 28 (Оценка нормы линейного оператора). $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, A – матрица оператора T. Тогда

$$\|T\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Доказательство. Хотим доказать, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|T_x\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \|x\|}$$

$$\|T_x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (T_i(x))^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)$$

□

Теорема 29. Пусть A – матрица размером $n \times n$. Тогда равносильны следующие утверждения:

1. $\det A \neq 0$
2. Неоднородная система
$$A \cdot x = y, \quad y - n \times 1$$
имеет единственное решение при каждом $y \in \mathbb{R}^n$
3. Однородная система
$$A \cdot x = 0$$
имеет только нулевое решение.