

Матанализ 2 семестр ПИ,

Лекции

Собрано 28 мая 2022 г. в 10:52

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1. Неопределенный интеграл	1
1.2. Определенный интеграл Римана	5
1.3. Суммы Дарбу	6
1.4. Критерии интегрируемости функции	8
1.5. Свойства интеграла Римана	13
1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса	15
1.7. Интегральные неравенства	22
1.8. Несобственные интегралы	24
1.8.1. Свойства несобственного интеграла	25
1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов	27
1.9. Интегралы от знакопеременных функций	29
1.10. Длина, площадь и объём	33
1.10.1. Площадь	33
1.10.2. Объём	34
1.10.3. Длина пути	34
1.10.4. Длина кривой	35
1.10.5. Приложения интеграла Римана	37
1.11. Полярные координаты	38
1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах	39
1.11.2. Вычисление объемов	40
1.11.3. Длина кривой	42
1.12. Функции ограниченной вариации	45
2. Ряды	50
2.1. Группировка слагаемых	52
2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми	53
2.2.1. Ряды с произвольными членами	57
2.2.2. Произведение рядов	63
2.3. Функциональные последовательности и ряды	64
2.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов	69
2.5. Степенные ряды	74
2.6. Разложения элементарных функций	80
2.6.1. Логарифм и арктангенс	84
2.7. Степенная функция	86
2.8. Бесконечные произведения	87
2.9. Метод обобщенного суммирования	88
2.10. Ряды Фурье	89

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Определение 1. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f , если F дифференцируема на $\langle A, B \rangle, F'(x) = f(x) \forall x \in \langle A, B \rangle$.

Теорема 1. Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

\Leftarrow . $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. \square

Определение 2. $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f . Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f .

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in \langle A, B \rangle$$

2. Арифметические действия:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x) dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda \int f(x) dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1. Если функция f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B \rangle$.

Упражнение. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Определение 3. $E \subset \mathbb{R}, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E , то F – первообразная f на множестве E .

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int a \, dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$ | 8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$ |
| 2. $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$ | 9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \neq 0$ |
| 4. $\int e^x \, dx = e^x + c$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, a > 0$ |
| 5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c, a \neq 0$ |
| 6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} + c, a \in \mathbb{R}$ |
| 7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ | |

Доказательство. Дифференцирование □

Пример. $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$ – неберущийся интеграл. $\operatorname{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закреплённая при $x \rightarrow 0+$).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 2 (Линейность неопределённого интеграла). $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B \rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B \rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

□

Теорема 3 (Замена переменной). $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B \rangle$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

□

Замечание. $\varphi'(x) dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y) dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B \rangle \rightarrow \langle C, D \rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B \rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y) dy = G(\psi(y)) + c$$

□

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c \end{aligned}$$

Пример. $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = - \int \cos x d \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.

Иначе: $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.

Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1 \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

□

Замечание. $\int u dv = uv - \int v du$

Пример. $\int x e^x dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Пример. $\int \ln x dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

Упражнение. $\int e^x \cdot \sin x dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f dg = fg - \int g df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

Пример. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n .

Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n} \right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}} dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 2. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a \int \frac{x dx}{(x^2+q)^n} + b \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$

2. Интеграл $\int \frac{x dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2 + q$, т.к. $dy = 2x dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1 , который является табличным.

Пример (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c$$

Упражнение. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

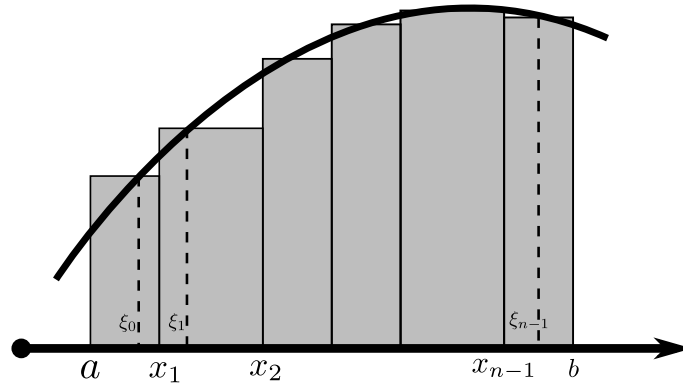
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int \frac{\cos x}{x} dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x} dx$
- $\int \sin x^2 dx$
- $\int \cos x^2 dx$
- $\int e^{-x^2} dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Определение 4. $[a, b], a < b$. Набор точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ – разбиение (дробление) отрезка $[a, b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k \in [0, n-1]} \Delta x_k$ – ранг дробления (мелкость), $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – оснащение дробления τ . Пара (τ, ξ) называется оснащённым дроблением.

Определение 5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ – суммы Римана (интегральные суммы).



Определение 6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм при ранге $\rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание. Последовательность оснащённых дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^\infty : \lambda^{(i)} \rightarrow 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \rightarrow 0 \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \rightarrow I$.

Определение 7 (Интеграл Римана). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, а число I называется интегралом f по $[a, b]$.

$R[a, b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Определение 8. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – дробление $[a, b]$.

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание. Если f – непрерывна на $[a, b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow S$ ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

$$1. S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), s_\tau = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$$

Доказательство. $M_k \geq f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geq f(\xi_k) \Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geq \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.

Если f ограничена на $[a, b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$.

Если f не ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l} \left(A - \sum_{k \neq l} f(\xi_k^*) \Delta x_k \right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta x_k > A \Rightarrow \sup_{\xi} \sigma = +\infty = S$$

□

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}]$ – T – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l) \cdot M' + (x_{l+1} - c) M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x \in [x_l, c]} f, M'' = \sup_{x \in [c, x_{l+1}]} f$. $M_l \geq M', M_l \geq M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.

Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l \Delta x_l - (c - x_l) M' - (x_{l+1} - c) M'' \geq M_l (x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.
Добавить больше точек можно по индукции. □

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$ (по свойству 2). \square

Утверждение 3. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа $I \exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. \square

Определение 9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем

$$I^* = \inf_{\tau} S_{\tau} \quad I_* = \sup_{\tau} s_{\tau}$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание. $I^* \geq I_*$.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 5 (Критерий интегрируемости функции). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leq I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

\Leftarrow . Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau \Rightarrow 0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leq I \leq S_\tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leq S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau| < \varepsilon.$

□

Замечание. Если $f \in R[a, b] \Rightarrow s_\tau \leq \int_a^b f \leq S_\tau.$

Следствие. $f \in R[a, b] \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leq S_\tau - \int_a^b f \leq S_\tau - s_\tau, 0 \leq \int_a^b f - s_\tau \leq S_\tau - s_\tau.$

□

Замечание. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 4 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$.

Утверждение 5 (Критерий Римана интегрируемости). $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$

Определение 10. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x, y \in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D . Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{y \in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a, b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$$

Теорема 6 (Интегрируемость непрерывной функции). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b].$

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a, b].$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a, b] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ , будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

□

Теорема 7 (Интегрируемость монотонной функции). f монотонна на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

□

Замечание. $f \in R[a, b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. \tilde{f} — отличается от f в точках t_1, t_2, \dots, t_m . $|f|$ ограничена на $[a, b] \Rightarrow |\tilde{f}|$ ограничена. $|f| \leq A$, возьмем $\tilde{A} = \max\{A, |\tilde{f}(t_1)|, |\tilde{f}(t_2)|, \dots, |\tilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и \tilde{f} отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f, \xi)$.

□

Теорема 8 (Интегрируемость функции и её сужения). 1. $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$

2. Если $a < c < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$, то $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a, b]$. τ_0 — дробление $[\alpha, \beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a, b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 :$

$$\lambda_{\tau_2} < \delta_2$$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a, b]$, $\lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}$, $\tau_1 = \tau' \cap [a, c]$, $\tau_2 = \tau' \cap [c, b]$

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

□

Определение 11. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[a, b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

Следствие. f – кусочно-непрерывная на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

Доказательство. Возьмём точки a_1, a_2, \dots, a_m (может $a_1 = a$ и/или $a_m = b$). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и \exists конечные $\lim_{x \rightarrow a_k+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a, b]$ □

Определение 12. Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.

Определение 13. $E \subset \mathbb{R}$ – имеет нулевую меру, если для $\forall \varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right)$$

Пример. Множество из одной точки.

Упражнение. Чему равна мера \mathbb{N} ?

Теорема 9 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 10 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями). $f, g \in R[a, b]$. Тогда

$$1. f + g \in R[a, b]$$

$$2. f \cdot g \in R[a, b]$$

3. $\alpha f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a, b]$
5. Если $\inf_{[a, b]} |g| > 0$, то $\frac{f}{g} \in R[a, b]$

Доказательство. 1. $D \subset [a, b]$. $x, y \in D$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(y) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_D(f+g) &\leq \omega_D(f) + \omega_D(g) \\ \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f+g) &\leq \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(f) + \omega_{[x_k, x_{k+1}]}(g) \\ \omega_k(f+g) &\leq \omega_k f + \omega_k g \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f+g \in R[a, b]$$

2. $|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$ (т.к. $R[a, b] \Rightarrow$ ограничена на $[a, b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$
 $|\omega_k|f| \leq |\omega_k f|$
5. $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Докажем, что $\frac{1}{g} \in R[a, b]$.
 $0 < m = \inf_{[a, b]} |g|$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \left| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k \left(\frac{1}{g} \right) \leq \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

□

Пример. 1. $\int_0^1 x^2 dx$

$$x^2 \in C[a, b] \Rightarrow x^2 \in R[a, b].$$

Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx$ – упражнение

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, D \notin R[a, b], a < b$$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

□

$$4. r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.

$$r(x) \in R[0, 1]$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рациональные числа из $[0, 1]$ со знаменателем $\leq N$, конечное число $= C_N$, множество X .

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$

Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \frac{1}{N}$

$$s_\tau(r) = 0$$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geq \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k + \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \leq \underbrace{1 \cdot 2C_N \cdot \delta}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0 \Rightarrow r \in R[0, 1] \text{ и } \int_0^1 r(x) dx = 0$$

□

Если $f \in R_D, g \in R[a, b]$, то $f(g) \in R[a, b]$? (D – множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0, 1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0, 1]$

$$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0, 1]$$

Теорема 11 (Интегрируемость композиции). $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(\varphi) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a, b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега.

□

1.5. Свойства интеграла Римана

$$1. \int_b^a f = - \int_a^b f$$

$$2. \int_a^a f = 0 \quad (\forall f \text{ на вырожденном отрезке } f \in R[a, a])$$

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
 $a, b, c \in \mathbb{R}, f \in R[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство. $f \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, c], f \in R[c, b], \{\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\bar{\bar{\tau}}^{(n)}, \bar{\bar{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ – последовательности оснащенных дроблений $[a, c]$ и $[c, b]$ (равномерных, т.е. $\bar{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \bar{\bar{\lambda}}$)
 $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\bar{\tau}}^{(n)}$ – дробление $[a, b]$
 $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\bar{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
 $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\bar{\sigma}}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. □

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

□

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$

$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. □

- Монотонность интеграла: $a < b, f, g \in R[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leq \sigma_\tau(g)$ □

Следствие. $a < b, f \in R[a, b]$, если $f \leq M \in \mathbb{R}$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f \leq M(b-a)$,

если $f \geq m$ на $[a, b]$ то $\int_a^b f \geq m(b-a)$

Следствие. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$ и $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке c .

Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c-\delta; c+\delta] \cap [a, b]}_{[\alpha, \beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\int_a^b f = \int_a^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^b f \geq \int_{\alpha}^{\beta} f \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

□

Замечание. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание. $f \in R[a, b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$

□

Если не знаем, что $a \geq b$ или $b \geq a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса

Теорема 12. $f, g \in R[a, b], g \geq 0$ на $[a, b], m \leq f \leq M$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leq fg \leq Mg$ на $[a, b]$

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m, M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0$, то $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$

Возьмём $\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$

□

Замечание. Для $g \leq 0$ тоже верно.

Следствие. 1. $f \in C[a, b], g \in R[a, b], g \geq 0$ (или $g \leq 0$).

Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min_{[a,b]} f$ и $M = \max_{[a,b]} f$

Подберём $\mu \in [m, M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a, b] : f(c) = M$

□

2. $f \in R[a, b], m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f = \mu(b - a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме.

□

3. $f \in C[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1.

□

Замечание. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Определение 14. $f \in R[a, b], a < b$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ – интегральное среднее f на $[a, b]$

Если возьмём равномерное разбиение $[a, b]$, то $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

То есть $\frac{\sigma_n}{b-a} \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, где $\frac{\sigma_n}{b-a}$ – среднее арифметическое значений функции в точках ξ_k

Определение 15. $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток (может быть и лучом), $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, f – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E . $a \in E$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in E$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 13 (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом). $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируема на каждом отрезке из E , $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$. Тогда

1. $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ – дифференцируема в точке x_0 , $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in E$, подберем $\delta > 0$ $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$

$|f|$ на $[A, B]$ ограничена числом M . $\Delta x: x_0 + \Delta x \in [A, B]$

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| \right| \leq |\Delta x| \cdot M \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

2. Проверим, что $\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0: \forall t: |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (по непрерывности.)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \\ &< \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon, \quad k = \int_a^b k \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

□

Пример. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, x > 1$

$$\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Упражнение. $\int \text{Si}(x) dx = ?$

Следствие. Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 16. $\psi(x) = \int_x^a f$ (Условия на f и a прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.

$\Rightarrow \psi'(x) = -f(x)$ (Если f непрерывна).

Теорема 14 (Формула Ньютона-Лейбница). $f \in R[a, b]$, F – первообразная f на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$$

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a) \quad \square$$

Замечание. $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b \quad \text{— двойная подстановка.}$$

Замечание. $G(x) = F(x) + C$ — тоже первообразная.

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Пример. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ — чушь!

1. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ — не везде на $[-1, 1]$
2. $\frac{1}{x^2}$ не интегрируема на $[-1; 1]$, т.к. не ограничена.

Замечание. Обобщение теоремы.

$f \in R[a; b]$, $F \in C[a, b]$, F — первообразная f на $[a, b]$ за исключением некоторого конечного числа точек.

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = a, \alpha_m = b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ — все точки на (a, b) , в которых $F' \neq f$

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1} (F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a).$$

(Рассмотрим $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\alpha_k + \varepsilon}^{\alpha_{k+1} - \varepsilon} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + \varepsilon)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)$) \square

Замечание. Без непрерывности F не получится: на $[-1, 1]$

$$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, f(x) = 0$$

$$0 = \int_{-1}^1 f \neq F \Big|_{-1}^1 = 2$$

Замечание. $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.
 F дифференцируема, F' интегрируема.

Замечание. $F' \in R[a, b]$ – существенно.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

F' не ограничена, а значит не интегрируема.

Замечание. Интегрируемость $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} \exists$ первообразной.
 $\nRightarrow \operatorname{sign} x$ интегрируема на $[-1, 1]$, но первообразной нет.
 \nRightarrow Предыдущее замечание.

Теорема 15 (Интегрирование по частям в определенном интеграле.). f, g – дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in R[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Доказательство. f, g – дифференцируемы \Rightarrow непрерывны \Rightarrow интегрируемы.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (f g)' = f g \Big|_a^b$$

$$\int_a^b (f g)' = \int_a^b (f' g + g' f)$$

□

Замечание. $\int_a^b f dg = f g \Big|_a^b - \int_a^b g df$
 $dg(x) = g'(x) dx$

Теорема 16 (Замена переменной в определенном интеграле). $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$, дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A; B]$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

Доказательство. $f(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a, b] \Rightarrow f(\varphi) \cdot \varphi' \in R[a, b]$

Пусть F - первообразная f на $[A, B] \Rightarrow F(\varphi)$ - первообразная $f(\varphi) \cdot \varphi'$ на $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \cdot \varphi' = F(\varphi) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

□

Упражнение. Пусть f четная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a = 2 \int_0^a f$

Пусть f нечетная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 0$

Теорема 17 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $n \in \mathbb{N}_0$,

$f \in C^{n+1}\langle A; B \rangle, a, x \in \langle A; B \rangle$. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$

Доказательство. По индукции:

База: $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть верно для $n-1$. Докажем для n .

$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt$. Проинтегрируем остаток по

частям: $u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \left(-f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n} \Big|_{t=a}^x + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t) (x-t)^n}{n} dt \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \end{aligned}$$

□

Замечание. $\exists c \in (a, x) \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \rightarrow \pi$

Лемма 1. $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_m = (m-1) \cdot (I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m - \text{чётно} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 1, m - \text{нечётно} \end{cases}$$

Упражнение. $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывна.Доказать, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ **Теорема 18 (Формула Валлиса).** $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$ **Доказательство.** $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0; 1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$< \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$$

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi, \Rightarrow x_n \rightarrow \pi$$

□

Теорема 19 (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне). $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$, g монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f$, $F' = f$, $F(a) = 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg' = g(b) \int_a^b f - \int_a^b Fg' = \\ &= g(b) \int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f\end{aligned}$$

□

Упражнение. Оценить $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

1.7. Интегральные неравенства

Теорема 20 (Неравенство Йенсена). f – выпукла и непрерывна на $\langle A, B \rangle$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$ – непрерывна, $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывна, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

Доказательство. Обозначим $c = \int_a^b \lambda \varphi$, $E = \{x \in [a, b] : \lambda(x) > 0\}$, $m = \inf_E \varphi$, $M = \sup_E \varphi$ (m и M конечны по теореме Вейерштрасса)

Если $m = M$, то есть φ постоянна на E , то $c = m$ и обе части неравенства равны $f(m)$.

Пусть $m < M$. Тогда $c \in (m, M)$ и, следовательно, $c \in (A, B)$. Функция f имеет в точке c опорную прямую; пусть она задается уравнением $y = \alpha x + \beta$. По определению опорной прямой $f(c) = \alpha c + \beta$ и $f(t) \geq \alpha t + \beta$ при всех $t \in \langle A, B \rangle$. Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha \int_a^b \lambda \varphi + \beta \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda \cdot (\alpha \varphi + \beta) \leq \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi)$$

□

Замечание. Строгое неравенство, если f строго выпукла и $\varphi \not\equiv \text{const}$.

Теорема 21 (Неравенство Гельдера). $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$. Обозначим $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$. Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left| \int_a^b f g \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Следствие (Неравенство Коши-Буняковского). $f, g \in C[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b f g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

Теорема 22 (Неравенство Минковского). $f, g \in C[a, b], p \geq 1$.

$$\left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 17. Пусть $f \in C[a, b]$.

1. Величина

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

называется интегральным средним арифметическим функции f на $[a, b]$.

2. Если $f > 0$, то величина

$$\exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

называется интегральным средним геометрическим функции f на $[a, b]$.

Замечание. Интегральное среднее геометрическое есть пределы при $n \rightarrow \infty$ последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \right) = \exp \left(\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k) \Delta x_k \right)$$

при $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

Теорема 23 (Об интегральных средних). $f \in C[a, b]$, $f > 0$. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Доказательство. Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для $\ln x$. \square

1.8. Несобственные интегралы

Определение 18. f локально интегрируема (по Риману) на промежутке E , если она интегрируема на каждом отрезке из E .

Замечание. Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

Определение 19. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in R_{loc}[a, b]$. Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ – несобственный интеграл.

$$\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \int_a^{\rightarrow b} f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 20. Несобственный интеграл называется сходящимся, если из \mathbb{R} .

Определение 21. Аналогично, для $-\infty \leq a < b < +\infty$, $f \in R_{loc}(a, b]$

$$\int_{\rightarrow a}^b f = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 24 (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Phi(t) = \int_a^t f$. $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{t \rightarrow b-} \Phi(t)$. Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b) |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$. \square

Замечание. Расходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \Delta \in (a, b) \quad \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| \geq \varepsilon$

Замечание. Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f = \lim_{t \rightarrow b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Пример. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что f локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если $\int_a^b f$ сходится, то $\forall c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

В обратную сторону, если при $c \in (a, b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

Доказательство. $\forall t \in (a, b) \quad \int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$ – по аддитивности определенного интеграла. Перейдем к пределу при $t \rightarrow b-$ – предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. \square

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\underbrace{\int_t^b f}_{\text{остаток интеграла}} \xrightarrow{t \rightarrow b-} 0$.

Доказательство.

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow{t \rightarrow b-} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

\square

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^t f + \beta \int_a^t g$$

□

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится. Действительно, если $f+g$ сходится, то сходится и интеграл от $f = (f+g) - g$ (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$, то

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство. Перейдем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leq \int_a^t g$$

□

Замечание. Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b)$, $f', g' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$$

Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

Доказательство. Устремим t к b слева в равенстве

$$\int_a^t f g' = f g|_a^t - \int_a^t f' g$$

□

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$ – дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in C[A, B)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^t (f \circ \varphi) \varphi', \quad \psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \psi(\varphi(t))$$

1. Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что $\exists \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' = I$, т.е. $\Phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \beta-]{} I$. Возьмем $\{t_n\} : t_n \rightarrow \beta, t_n < \beta$. Тогда $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(\beta-), \varphi(t_n) \in [A, B)$. Поэтому $\Phi(t_n) = \psi(\varphi(t_n)) \rightarrow I$. В силу произвольности выбора $\{t_n\}$, $\Phi(t) \rightarrow I$ при $t \rightarrow \beta-$.
2. Пусть существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = J \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен J . Если $\varphi(\beta-) \in [A, B)$, то интеграл собственный. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \rightarrow B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$ (по теореме Больцано-Коши). Докажем, что $\gamma_n \rightarrow \beta$. Пусть $\beta' \in [\alpha, \beta)$. Т.к. $\max_{[\alpha, \beta']} \varphi < \beta$, а $\varphi(\gamma_n) \rightarrow B$, то, начиная с некоторого номера, $\gamma_n \in (\beta', \beta)$. Поэтому $\gamma_n \rightarrow \beta$, откуда $\psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow J$.

□

Пример. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = \pi$, то $t = +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot 2 + 1 - t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 3} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Замечание. $a < b \in \mathbb{R}$. Пусть $x = b - \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \cos x dx = \sin x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - \sin 1 - \text{не существует}$$

1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Лемма 2. $f \in R_{loc}[a, b), f \geq 0$. Тогда $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$ на $[a, b)$ ограничена сверху.

Доказательство. $F(t)$ возрастает на $[a, b)$ ($F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f \geq 0$).

$\exists \lim_{t \rightarrow b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ возрастает и F ограничена сверху. □

Замечание. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 25 (Признак сравнения). $f, g \in R_{loc}[a, b), f, g \geq 0$

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow b-$$

Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. 1. По определению O -большого найдутся такие $\Delta \in (a, b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leq K g(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_{\Delta}^b f \leq K \int_{\Delta}^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходил, то по пункту 1 сходил бы и интеграл $\int_a^b f$. □

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $f, g \in R_{loc}[a; b), f \geq 0, g > 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0; +\infty]$. Тогда

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\int_a^b f$ сходится, то $\int_a^b g$ сходится
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно

Доказательство. 1. $\frac{f}{g}$ ограничено в $(b-\varepsilon; b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$ при $x \rightarrow b- \Rightarrow$ по теореме

$$\int_a^b f \text{ сходится}$$

2. Т.к. $l > 0$, то $f > 0$ в $(b - \varepsilon; b)$. Тогда поменяем f и g местами в п.1

3. Следует из пунктов 1 и 2.

□

Следствие. Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение. $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^7 x}$

Пример. Докажем, что $f \geq 0$, $\int_a^{+\infty} f$ сходится $\nRightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \\ k, & x = k \\ \text{линейно и непрерывно соединим точки, } & x \in E \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \\ \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k - \frac{1}{k^2(k+1)}}^{k + \frac{1}{k^2(k+1)}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

□

Замечание. Можно построить пример с $g > 0$. $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2}$

1.9. Интегралы от знакопеременных функций

Определение 22. $-\infty < a < b \leq +\infty, f \in R_{loc}[a; b)$

$\int_a^b f$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^b |f|$

Замечание. Если $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходится абсолютно, то $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Доказательство. $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$ + признак сравнения для неотрицательных функций. □

Замечание. Если $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Лемма 3. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a; b) \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon$

Тогда $\left| \int_{\Delta}^b f \right| < \int_{\Delta}^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^{\Delta} f + \int_{\Delta}^b f$ сходится по критерию Больцано-Коши. \square

Определение 23.

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad - \text{положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad - \text{отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$$0 \leq x_{\pm} \leq |x|, f_+ = \max\{f; 0\}, f_- = \max\{-f; 0\}$$

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow_{0 \leq f_{\pm} \leq |f|} \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ — сходятся \Rightarrow

$\Rightarrow_{f=f_+-f_-} \int_a^b f$ сходится \square

Замечание. Обратное утверждение к лемме неверно: $\int_a^b f$ сходится $\nRightarrow \int_a^b |f|$ сходится.

Определение 24. Если $\int_a^b f$ сходится, а $\int_a^b |f|$ расходится, то $\int_a^b f$ называют условно сходящимся.

Замечание. $\int_a^b f$ сходится абсолютно, $\int_a^b g$ сходится условно $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$ сходится условно, т.к. $g = (f+g) - f$.

Теорема 26 (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов). $f \in$

$C[a; b), g \in C^1[a; b], g$ монотонна.

1. **Признак Дирихле.** Если функция $F(t) = \int_a^t f$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.
2. **Признак Абеля.** Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что $\int_a^b Fg'$ сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \underset{|F| \leqslant K}{K} \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \cdot |g \Big|_a^b| = K|g(a)|$$

2. g ограничена и монотонна $\Rightarrow \alpha = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$
 Функция $g - \alpha$ монотонна, $\xrightarrow{x \rightarrow b-} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g - \alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g - \alpha)$ сходится, а интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \int_a^b f \cdot \alpha$$

□

Замечание. Можно ослабить условия: $f \in R_{loc}[a; b), g$ монотонна на $[a; b)$

Определение 25. в.р. $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$ – главное значение.

Пример.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx &= +\infty \end{aligned}$$

Пример. 1. $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot \sin x dx, f(x) \geqslant 0$.

- Если $\int_1^{+\infty} f$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$ сходится абсолютно.
 $0 \leq |f(x) \cdot \sin x| \leq |f(x)| = f(x)$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ расходится
 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1. $l = 0$ и f монотонна, то признак Дирихле и $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$ – сходится.

Но: $\int_1^{+\infty} |f(x) \sin x| dx$ не сходится.

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_1^{\infty} f(x) |\sin x| dx \geq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} f(x) \cos 2x dx}_{\text{сходится}}$$

2. $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f \sin x dx$ расходится.

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) \cdot \sin x dx \geq \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \min\{f(a_k), f(b_k)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cdot l = \varepsilon > 0$$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin x dx$ расходится

3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$ – расходится

$f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow \infty$ $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ сходится.

Выделим главную часть: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + r(x) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} +$
сх-ся

$$\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся абс-но}} + \underbrace{\frac{\sin^4 x}{x^2}}_{\text{сх-ся абс.}} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leq \frac{c}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + r(t), t \rightarrow 0 \right)$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

При $x \rightarrow 0$ $\sin x \sim x$ и $\sin x > 0$ на $(0; 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится. Но сходится в смысле главного значения.

Замечание. $\int_1^{+\infty} f \cdot g$, f – периодична с периодом $T > 0$, g – монотонна $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
Тогда

1. Если $\int_1^{+\infty} g$ сходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$
2. Если $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то $\left(\int_1^{+\infty} fg \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0 \right)$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится
 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$ сходится

1.10. Длина, площадь и объём

1.10.1. Площадь

Определение 26. $\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$ – длина вектора.

$$\|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}$$

Определение 27. Движение – отображение $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния.

$$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$$

Определение 28. Площадь – функционал $S : P \rightarrow [0; +\infty)$, где $\{P\}$ – множество квадратуемых фигур из \mathbb{R}^2

Теорема 27 (Свойства площади). 1. Аддитивность: P_1, P_2 – квадратуемы и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Тогда $P_1 \cup P_2$ – квадратуемая и $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab

3. Инвариантность относительно движений: $S(U(P)) = S(P)$

4. Монотонность: P, P_2 – квадратуемые, $P_1 \subset P$, тогда $S(P_1) \leq S(P)$

Доказательство. $P = P_1 \cup (P \setminus P_1)$, $P_1 \cap (P \setminus P_1) = \emptyset$. Тогда по аддитивности площади:
 $S(P) = S(P_1) + S(P \setminus P_1) \geq S(P_1)$ \square

5. Если P содержится в некотором отрезке, то $S(p) = 0$

Доказательство. P можно поместить в прямоугольник сколь угодно малой площади. \square

6. Усиленная аддитивность: P_1 и P_2 пересекаются по множеству нулевой площади. Тогда $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Доказательство. Возьмем $P = P_1 \cap P_2 \Rightarrow S(P_1) = S(P) + S(P_1 \setminus P) = S(P_1 \setminus P)$
 $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1 \setminus P) + S(P_2) = S(P_1) + S(P_2)$ \square

1.10.2. Объём

Определение 29. Объём – функционал $V : \{T\} \rightarrow [0; +\infty)$, где $\{T\}$ – класс кубируемых тел

Теорема 28 (Свойства объёма). 1. Аддитивность: T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, тогда $T_1 \cup T_2$ – кубируемое, $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

2. Нормированность на прямоугольных параллелепипедах. Объём параллелепипеда:
 $a \times b \times c = abc$

3. Инвариантность относительно движения: $V(U(T)) = V(T)$

4. Монотонность: T_1, T – кубируемые, $T_1 \subset T$, тогда $V(T_1) \leq V(T)$

5. Если тело T содержится в некотором прямоугольнике, то его объём равен нулю.

6. Усиленная аддитивность. T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2$ нулевого объёма, тогда
 $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Определение 30. $P \subset \mathbb{R}^2, h \geq 0$. Множество $Q = P \times [0; h]$ называется прямым цилиндром с основанием P и высотой h .

Определение 31. $T \subset \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}$
 $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$ – сечение

1.10.3. Длина пути

Определение 32. $\gamma : [a; b] \rightarrow R^m, \gamma$ – непрерывное отображение
 $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ – i -тая координатная функция.
 Если все γ_i непрерывны, то отображение γ непрерывно.

Определение 33. Путь в R^m – $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow R^m$

$\gamma(a)$ – начало пути

$\gamma(b)$ – конец пути

$\gamma^* = \gamma([a, b])$ – носитель пути. В каком-то смысле можно считать, что это изображение пути.

Пример. Полуокружность:

$\gamma^1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t \in [-1, 1]$, пробегаем дугу слева направо.

$\gamma^2(t) = (-\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$

$\gamma^3(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$

$\gamma^4(t) = (\cos t, |\sin t|), t \in [-\pi, \pi]$. пробежали дугу туда и обратно.

Все четыре отображения разные, но носитель пути у всех одинаковый.

Определение 34. $\gamma(a) = \gamma(b)$ – замкнутый путь

Определение 35. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ только при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, то путь несамопересекающийся (простой)

Определение 36. Если $\gamma_i \in C^r[a, b], i = 1, \dots, m$, то путь γ гладкости $r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Определение 37. Если $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ – противоположный путь.

Упражнение. Посмотреть на кривые Пеано.

Определение 38. $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{\gamma} : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ – эквивалентные, если существует строго возрастающая функция и $[a; b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha; \beta] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ u$.

Это отношение эквивалентности:

1. $\gamma \sim \gamma, u = id[a; b]$
2. $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \sim \tilde{\gamma} \quad u^{-1}$ – обратное отображение
3. $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3 \quad u_1 \circ u_2$

Определение 39. Класс эквивалентных путей – кривая

Каждый представитель класса – параметризация кривой

Кривая называется g -гладкой, если у неё найдется гладкая параметризация

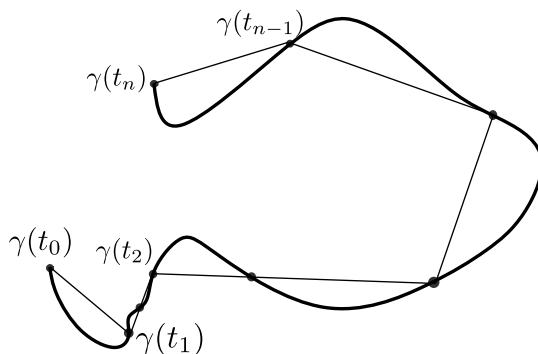
1.10.4. Длина кривой

Определение 40. $\gamma \in C([a; b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$ – путь в \mathbb{R}^m

1. Длина кривой, соединяющей точки A и B не меньше $\|AB\|$
2. Нужна аддитивность: $a < c < b$, $\gamma^1 = \gamma|_{[a;c]}$, $\gamma^2 = \gamma|_{[c;b]} \Rightarrow S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

Пример. $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – дробление $[a, b]$

l_τ – вписанная ломаная.



Определение 41. γ – путь в \mathbb{R}^m . Длиной пути γ называется $S_\gamma = \sup_\tau l_\tau$

Определение 42. Путь с $S_\gamma < +\infty$ – спрямляемый.

Лемма 4. Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. $\gamma \sim \tilde{\gamma} \circ u$, $u : [a; b] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha; \beta]$ строго возрастает

$\tau = \{t_k\}_{k=1}^n$ – дробление $[a; b]$

$\tilde{t}_k = u(t_k)$, $\tilde{\tau} = \{\tilde{t}_k\}$ – дробление $[\alpha; \beta]$

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|}_{\text{длина отрезка}} = \sum_{k=0}^{n-1} \|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_{k+1}) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_k)\| = l_{\tilde{\tau}}$$

$$l_\tau = l_{\tilde{\tau}} \leq S_{\tilde{\gamma}} \Rightarrow S_\gamma \leq S_{\tilde{\gamma}}$$

Поменяем: γ и $\tilde{\gamma}$ местами $\Rightarrow S_{\tilde{\gamma}} \leq S_\gamma$

□

Замечание. Противоположные пути имеют одинаковую длину.

Лемма 5 (Аддитивность длины пути). $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < c < b$

$$\gamma^1 = \gamma|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma|_{[c;b]}$$

$$S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$$

Доказательство. Обозначим $S_1 = S_{\gamma^1}, S_2 = S_{\gamma^2}$. Возьмём дробления τ_1 и τ_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$; тогда $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ – дробление $[a, b]$. Построим по τ_1 и τ_2 ломанные, вписанные в γ^1 и γ^2 , и обозначим через l_1 и l_2 их длины. Тогда $l_1 + l_2 = l_\tau \leq s_\gamma$. Последовательно переходя в левой части к супремуму по всевозможным дроблениям τ_1 и τ_2 , получаем

$$s_1 + l_2 \leq s_\gamma,$$

$$s_1 + s_2 \leq s_\gamma.$$

Докажем противоположное неравенство

$$s_\gamma \leq s_1 + s_2.$$

Возьмём дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и докажем, что $l_\tau \leq s_1 + s_2$; отсюда и будет следовать требуемое. Если $c \in \tau$, то $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 и τ_2 – дробления $[a, c]$ и $[c, b]$. Поэтому

$$l_\tau = l_1 + l_2 \leq s_1 + s_2.$$

Если $c \notin \tau$, то добавим c в число точек дробления, то есть положим $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Пусть $c \in (t_\nu, t_{\nu+1})$. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned} l_\tau &= \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(c) - \gamma(t_\nu)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(c)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = l_{\tau^*} \end{aligned}$$

По доказанному

$$l_\tau \leq l_{\tau^*} \leq s_1 + s_2$$

□

Определение 43. Длина кривой – длина какой-то из её параметризаций

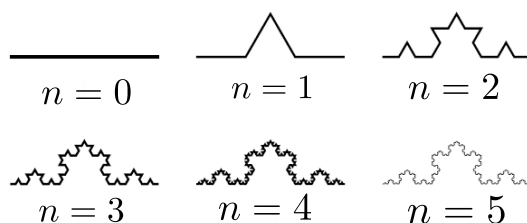
Пример. Пример ограниченной, но неспрямляемой кривой: кривая Коха. Длины:

$$1. \ n = 1: \frac{1}{3} \cdot 4$$

$$2. \ n = 2: \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$3. \ n = 3: \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

1.10.5. Приложения интеграла Римана



Определение 44. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

$Q_f \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y \in [0; f(x)] \}$ – подграфик

Если $f \in C[a; b]$, то Q_f называют криволинейной трапецией

Теорема 29. Пусть $f \in R[a; b]$. Тогда Q_f квадратуема

Доказательство. Без доказательства □

Замечание. Суммы Дарбу s_τ, S_τ

$$\forall \tau \quad s_\tau \leq S(Q_f) \leq S_\tau$$

Вспомним, что $\sup_\tau S_\tau = \inf_\tau S_\tau$

$$\Rightarrow S(Q_f) = \int_a^b f dx$$

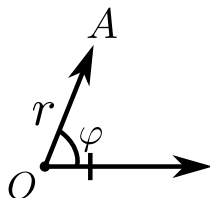
Замечание. $S(Q_f) = - \int_a^b f$

Пример. Площадь эллипса: $E = \{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \}, a, b > 0$

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, x \in [0; a]$$

$$S_E = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t dt = 4ba \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ba$$

1.11. Полярные координаты



Чтобы была взаимная однозначность, можно считать, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Можно обобщать на $r \in \mathbb{R}$, а не только \mathbb{R}_+ .

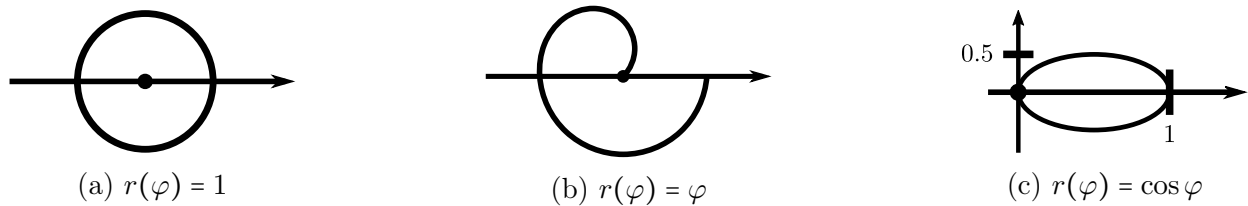
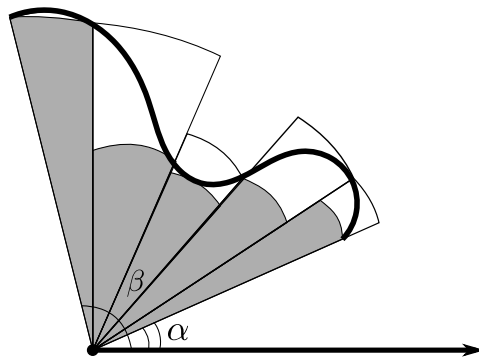


Рис. 1: Примеры функций в полярных координатах

1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах

$r(\varphi) : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{\psi_k\}$ – разбиение $[\varphi_1, \varphi_2]$.



Площадь сектора равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Обозначим

$$s_\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \min_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

$$S_\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \max_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

Тогда

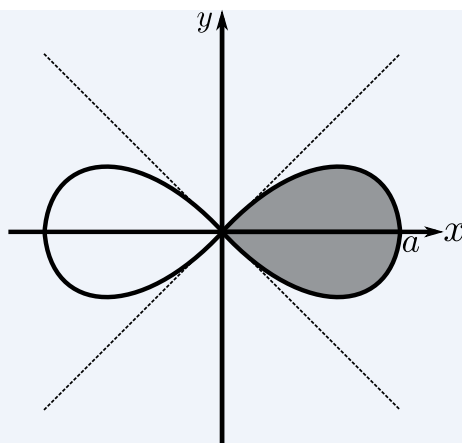
$$s_\tau \leq S(Q) \leq S_\tau$$

Если $r^2(\varphi) \in R[\varphi_1, \varphi_2]$, то $\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = S(Q)$. Значит, искомая площадь равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$$

Пример. Найдём площадь S правого лепестка лемнискаты Бернулли

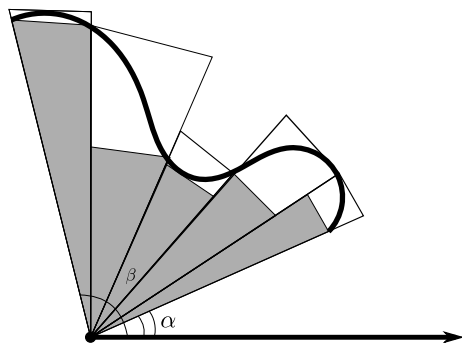
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad a > 0$$



$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot 2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Упражнение. Посчитать площадь правого лепестка лемниската Бернулли.

Замечание. Можно было приближать не секторами, а треугольниками.



$$\frac{1}{2} \min_{\varphi \in [\psi_k, \psi_{k+1}]} r^2(\varphi) \sin \Delta\psi_k$$

В данном случае, нельзя перейти к эквивалентным. Тогда

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \leq \sin \alpha \leq \alpha$$

1.11.2. Вычисление объемов

T – кубируемое.

- Существует отрезок $[a, b]$ такой, что $T(x) = \emptyset \quad \forall x \notin [a, b]$
- $\forall x \in [a, b] \quad T(x)$ – квадратируемая фигура.

$\tau = \{x_k\}$ – разбиение $[a, b]$. Возьмем цилиндры с $h = \Delta x_k$, основаниями $\min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} S(x)$ и

$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} S(x)$. Тогда

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Пример. Найдем объем V эллипсоида

$$D = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c > 0$$

Если $x \notin [-a, a]$, то $D(x) = \emptyset$. Если $x = \pm a$, то $D(x) = \{(0, 0)\}$. Если $x \in (-a, a)$, то

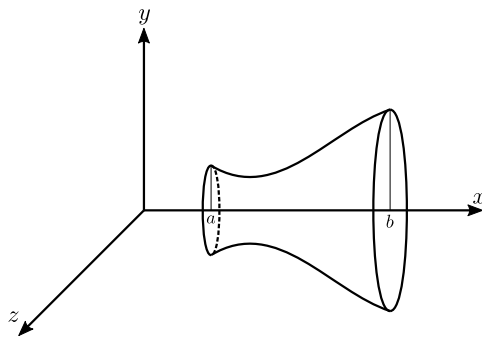
$$D(x) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}$$

есть эллипс с полуосями $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллипса вычисляется по формуле: $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Отсюда

$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{x=0}^a = \frac{4}{3} \pi abc$$

Замечание. Пусть $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$, T_f – тело, получающееся вращением подграфика функции f вокруг оси OX . Тело T_f задается равенством

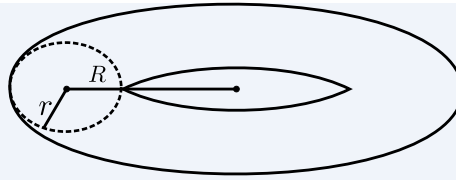
$$T_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x) \right\}$$



Замечание. Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Для тела вращения T_f при каждом $x \in [a, b]$ сечение есть круг радиуса $f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$. Значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2$$

Пример. Найдем объем V_T тора – тела, образованного вращением круга $\{(x, y) : x^2 + (y - R)^2 \leq r^2\}$ ($0 < r < R$) вокруг оси OX .



Тор представляется в виде разности тел вращения подграфиков функций, графики которых – верхняя и нижняя полуокружности, то есть функции

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \int_{-r}^r f_1^2 - \pi \int_{-r}^r f_2^2 = \\ &= \pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) dx = \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

Замечание. Вокруг OY вращаем $y = f(x)$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

1.11.3. Длина кривой

Если $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ – путь в \mathbb{R}^m , $\gamma_i \in C^1[a, b]$, $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m)$. По определению евклидовой длины

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'^2}$$

Теорема 30 (Длина гладкого пути). Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкий путь. Тогда γ спрямляем и

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$$

Доказательство. 1. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Пусть дробление $\eta = \{u_k\}_{k=0}^n$ отрезка Δ . Тогда

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k))^2}$$

По формуле Лагранжа при каждом i и k найдется такая точка $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$, что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma'_i(c_{ik}) \Delta u_k$$

Поэтому

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'^2(c_{ik})} \cdot \Delta u_k$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \quad m_\Delta^{(i)} = \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'^2(t)|$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_\Delta^{(i)})^2}, \quad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m (m_\Delta^{(i)})^2}$$

Тогда

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leq l_\eta \leq M_\Delta(\beta - \alpha)$$

Переходя к супремуму по всем дроблениям, мы получим

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leq s_{\gamma|\Delta} \leq M_\Delta(\beta - \alpha)$$

В частности, при $\Delta = [a, b]$, отсюда следует, что путь γ спрямляем.

2. Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и обозначим

$$m_k = m_{[t_k, t_{k+1}]}, \quad M_k = M_{[t_k, t_{k+1}]}$$

По доказанному

$$m_k \Delta t_k \leq s_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \leq M_k \Delta t_k$$

Кроме того, при всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$m_k \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_k$$

и поэтому

$$m_k \Delta t_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\| \leq M_k \Delta t_k$$

Складывая неравенства и пользуясь аддитивностью длины пути и интеграла, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leq s_\gamma \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leq \int_a^b \|\gamma'\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

Докажем, что для всех дроблений между левой и правой суммами лежит лишь одно число. Суммы в левой и правой части не обязаны быть интегральными для $\|\gamma'\|$, поэтому

оценим разность между ними непосредственно. Если $M_\Delta + m_\Delta \neq 0$, то

$$\begin{aligned} M_\Delta - m_\Delta &= \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^m \left((M_\Delta^{(i)})^2 - (m_\Delta^{(i)})^2 \right)}{M_\Delta + m_\Delta} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)} \right) \cdot \frac{M_\Delta^{(i)} + m_\Delta^{(i)}}{M_\Delta + m_\Delta} \leq \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Если же $M_\Delta = m_\Delta = 0$, то доказанное неравенство очевидно.

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора все функции $|\gamma'_i|$ равномерно непрерывны на $[a, b]$.

Поэтому для каждого $i = 1, \dots, m$ найдется такое $\delta_i > 0$, что

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta_i \Rightarrow \|\gamma'_i(x) - \gamma'_i(y)\| < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$$

Положим $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i$. Для любого разбиения с рангом меньше, чем δ $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Поэтому

$$\left| s_\gamma - \int_a^b \|\gamma'\| \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon$$

Так как ε произвольно, то $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$.

□

Замечание. По аддитивности эта теорема распространяется на кусочно-гладкие пути.

Замечание. Запишем частный случай теоремы 1 при $m = 2$. Пусть $\gamma = (x(t), y(t)) \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2)$

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Следствие. $y = f(x) \in C^1[a, b]$. Тогда график спрямляем и

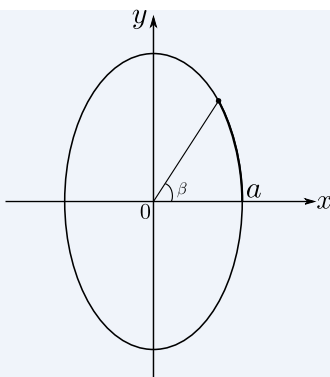
$$S_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

График f – это путь

$$\Gamma_f(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$$

Пример. Длина дуги эллипса.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \beta]$$



$$\begin{aligned} s &= \int_0^\beta \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\beta \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt = b \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Величина $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Интеграл

$$E(\varepsilon, \beta) = \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

называется **эллиптическим интегралом второго рода**.

Замечание. Эллиптическим интегралом первого рода называется интеграл

$$K(\varepsilon, \beta) \int_0^\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}} dt$$

1.12. Функции ограниченной вариации

Определение 45. Величина

$$V_a^b f = \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

называется **полной вариацией** f на $[a, b]$.

Если $V_a^b f < +\infty$, то f называется функцией **ограниченной вариации** на отрезке $[a, b]$. Множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$ обозначается $V[a, b]$.

Теорема 31 (Свойства). 1. Вариация аддитивна: если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < c < b$, то

$$V_a^b = V_a^c + V_c^b$$

2. Если f является кусочно-гладкой на $[a, b]$, то

$$V_a^b f = \int_a^b |f'|$$

3. Вариация монотонна: если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то

$$V_\alpha^\beta = V_a^b f$$

Вариацию можно определить и для функция, заданных на промежутке произвольного типа. Если $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, то

$$V_a^b f = \sup_{[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle} V_\alpha^\beta f$$

4. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда γ спрямляем в том и только том случае, когда $\gamma_i \in V[a, b]$ при всех $i = 1, \dots, m$.

5. Если f монотонна на $[a, b]$, то $f \in V[a, b]$

$$V_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

6. Если $f \in V[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Докажем свойства 3, 4, 5 и 6.

3. По аддитивности

$$V_a^b f = V_a^\alpha + V_\alpha^\beta + V_\beta^b \geq V_a^\alpha f$$

4. Доказательство следует из двусторонней оценки

$$|\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| \leq \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leq \sum_{j=1}^m |\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k)|$$

5. Для любого дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| = |f(b) - f(a)|$$

6. При всех $x \in [a, b]$

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f$$

□

Теорема 32 (Арифметические действия над функциями ограниченной вариации). Пусть $f, g \in V[a, b]$. Тогда

1. $f + g \in V[a, b]$

2. $fg \in V[a, b]$
3. $\alpha f \in V[a, b]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
4. $|f| \in V[a, b]$
5. если $\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0$, то $\frac{f}{g} \in V[a, b]$

Доказательство. Обозначим $\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

1. Складывая по всем k неравенства

$$|\Delta_k(f + g)| \leq |\Delta_k f| + |\Delta_k g|$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(f + g)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k g| \leq V_a^b f + V_a^b g$$

Переходя в левой части к супремуму по всем дроблениям, получаем, что

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g$$

2. По свойству 6 функции f и g ограничены; пусть $|f|$ ограничена числом K , а $|g|$ – числом L . Тогда

$$|\Delta_k(fg)| \leq L|\Delta_k f| + K|\Delta_k g|$$

Складывая эти неравенства и переходя к супремуму, получим

$$V_a^b fg \leq L V_a^b f + K V_a^b g$$

3. Утверждение для αf следует из 2, если взять в качестве g функцию, тождественно равную α .
4. Аналогично, из неравенств

$$|\Delta_k |f|| \leq |\Delta_k f|$$

сложив и перейдя к супремуму, вытекает, что

$$V_a^b |f| \leq V_a^b f$$

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{g} \in V[a, b]$, а потом воспользоваться утверждением 2. Пусть $m = \inf_{x \in [a, b]} |g(x)|$. Тогда

$$\left| \Delta_k \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{\Delta_k g}{g(x_k)g(x_{k+1})} \right| \leq \frac{|\Delta_k g|}{m^2}$$

откуда

$$V_a^b \frac{1}{g} \leq \frac{1}{m^2} V_a^b g$$

□

Теорема 33 (Характеристика функций ограниченной вариации). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in V[a, b]$ в том и только том случае, когда f представляется в виде разности двух возрастающих на $[a, b]$ функций.

Доказательство. Достаточность очевидна из свойства 5 и предыдущей теоремы. Докажем необходимость. Пусть

$$g(x) = \overset{x}{V}_a f, \quad x \in [a, b]; \quad h = g - f$$

Если $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, то по аддитивности

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \overset{x_2}{V}_{x_1} f \geq 0, \\ h(x_2) - h(x_1) &= \overset{x_2}{V}_{x_1} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 \end{aligned}$$

то есть функции g и h возрастают. □

Следствие. $V[a, b] \subset R[a, b]$

Доказательство. Действительно, монотонная функция интегрируема и разность интегрируемых функций интегрируема. □

Следствие. Функция ограниченной вариации не может иметь разрывов второго рода.

Доказательство. Это следует из теоремы 33 и из того, что монотонная на отрезке функция не может иметь разрывов второго рода. □

Следствие. Ни один из классов $V[a, b]$ и $C[a, b]$ не содержится в другом.

Доказательство. Так как существуют разрывные монотонные функции, то $V[a, b] \not\subset C[a, b]$. Приведем пример непрерывной функции, вариация которой бесконечна. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Тогда $f \in C[0, 1]$. Обозначим $x_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$). При этом

$$f(x_k) = \frac{(-1)^k}{k}, \quad |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим дробление: $0 < x_n < \dots < x_1 = 1$ (для удобства точки дробления замурованы в порядке убывания). Сумма из определения вариации равна

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_n) - f(0)| = -1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Докажем, что последовательность **гармонических** сумм

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

не ограничена сверху. При $m \in \mathbb{N}$ оценим сумму с номером 2^m снизу. Для этого сгруппируем слагаемые, а затем оценим сумму в каждой группе как количество слагаемых, умноженное на самое малое слагаемое:

$$\begin{aligned} H_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Поэтому $f \notin V[0, 1]$

□

Раздел #2: Ряды

Определение 46. Рядами называется сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

где $\{a_k\}$ – последовательность из \mathbb{R} (из \mathbb{C})

Определение 47. Частичной суммой называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Определение 48. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Утверждение 6. $\forall \{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм какого-то ряда.

Доказательство. $a_1 = S_1, a_k = S_k - S_{k-1}$

□

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots = 0$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = +\infty$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots$, сходится при $|a| < 1$

Пример. $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \in \mathbb{C}$, сходится при $|z| < 1$.

Упражнение. Что будет, если $|z| = 1$?

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha^{2k} = \cos \alpha$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$

Замечание. $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ – гармонические суммы.

Свойство 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\forall m \in \mathbb{N} \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ тоже сходится. Верно и что если $\exists m \in \mathbb{N} \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ сходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n a_k$. Перейдем к пределу по $n \rightarrow \infty$. □

Свойство 2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=m}^{\infty} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

Доказательство. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ □

Свойство 3 (Линейность суммирования). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходятся, то $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ сходится. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C} и $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Замечание. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{i=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ расходится

Доказательство. $a_k = (a_k + b_k) - b_k$ □

Свойство 4. $z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится.

Свойство 5 (Монотонность). $a_k, b_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ из $\overline{\mathbb{R}}$ и $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Теорема 34 (Критерий Больцано-Коши). Пусть есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ сходится, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Возьмем $m = n + p$. □

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда следует отсюда.

2.1. Группировка слагаемых

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ – подпоследовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$

$$A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k, \quad j \in \mathbb{N}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ – получен из $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при помощи группировки.

Теорема 35 (Группировка членов ряда). 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ ($S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ или $S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$$

2. $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$, и $a_n \rightarrow 0$ и $\exists L \in \mathbb{N}$: в каждом A_j не более чем L штук a_k . Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k = S$$

3. $a_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} A_j = S \in \overline{\mathbb{R}}$ и все a_k из одной группы одного знака. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Доказательство. 1. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_m = \sum_{j=1}^m A_j$. T_m – подпоследовательность S_n ($T_m = S_{n_{m+1}}$)

2. По определению сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N \quad |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

А также

$$\exists K : \forall k > K \quad |a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Возьмем $M = \max\{K, n_{N+1}\}$ и $n_m \leq n < n_{m+1}$ Тогда

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| = \left| \sum_{k=n_m+1}^n a_k \right| + |S_{n_m} - S| \leq \\ &\leq \sum_{k=n_m+1}^n |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Возьмем $\varepsilon > 0 \exists M : \forall m > M \quad |S_{n_m} - S| < \varepsilon$. Пусть $N = n_{m+1}$. Возьмем $n_m \leq n < n_{m+1}$. Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \dots, a_{n_{m+1}} \geq 0$. Тогда

$$S_{n_m} \leq S_n \leq S_{n_{m+1}}$$

Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \dots, a_{n_{m+1}} \leq 0$, то знаки в другую сторону.

$$|S_n - S| \leq \max \{|S_{n_m} - S|, |S_{n_{m+1}} - S|\}$$

□

2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми

Лемма 6. Если $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится} \Leftrightarrow S_n \text{ ограничена сверху}$$

Доказательство. S_n неубывает, поэтому S_n сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничена сверху

□

Замечание. Если $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists \lim S_n = S \in \overline{R} \quad (S = \sup S_n)$$

Достаточно ограниченности сверху подпоследовательности S_n .

Теорема 36 (Признак сравнения). $a_k, b_k \geq 0, a_k = O(b_k)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Доказательство. $\exists N \in \mathbb{N}, A > 0 : a_k \leq A b_k$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq A \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty$$

□

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $a_k \geq 0, b_k > 0$ и $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}$ ограничена + теорема.

2. Если $l > 0$, то $a_k > 0$ с некоторого места, поэтому поменяем ролями a_k и b_k .

3. Следует из 1 и 2.

□

Следствие. $a_k \sim b_k, k \rightarrow \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. При $\alpha < 1$ расходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$. С другой стороны, при $\alpha \geq 2$ сходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{5^k}$ сходится, т.к.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k^5}{5^k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^7}{5^k} = 0$$

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – плохая запись!!!

Теорема 37 (Радикальный признак Коши). $a_k \geq 0, \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = K$. Тогда

1. Если $K > 1$ то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $K < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. Т.к. $K > 1$, то бесконечно много $\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1 \Rightarrow a_k \not\rightarrow 0$.

2. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-K}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера все $\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = \frac{1+K}{2} \in (0, 1) \Rightarrow a_n \leq \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ сходится (геометрическая прогрессия).

□

Замечание. Если $k = 1$, то бывает и сходимость, и расходимость. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Теорема 38 (Признак Даламбера). $a_k > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда

1. Если $D > 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится
2. Если $D < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. С некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_{n+1} > a_n > a_N \forall n > N$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$.

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = \frac{1+D}{2} \in (0, 1) \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+D}{2} \cdot a_n$.

Для $m > N$

$$a_m < \frac{1+D}{2} \cdot a_{m-1} < \left(\frac{1+D}{2}\right)^2 a_{m-2} < \dots < \left(\frac{1+D}{2}\right)^{m-N} a_N$$

Т.е. мы оценили a_m сверху членами геометрической прогрессии.

□

Замечание. $D = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

Замечание. Эти два признака можно сформулировать и без использования пределов.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$, $a > 0$. Используя признак Даламбера

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{a^k} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0$$

По признаку Коши

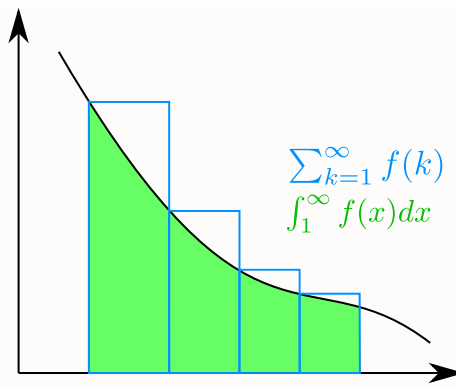
$$\sqrt[k]{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a}{\sqrt[k]{k!}} \rightarrow 0$$

Замечание. $a_n > 0$. Если $\exists D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = D$. Обратное неверно!

Упражнение. Доказать.

Теорема 39. f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x) dx$

Доказательство. Пусть f невозрастает, $f \geq 0$.



$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$$

Просуммируем эти неравенства:

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k) \quad (1)$$

и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$

□

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha \in (1, 2)$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ сходится, поэтому сходится и ряд.

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$. При каких α и β сходится?

Замечание. Пусть $f \geq 0, f$ убывает на $[1; +\infty)$. Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает:

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \geq 0$$

Кроме того, по неравенствам (1)

$$0 \leq A_n = f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - f(n+1) - \int_1^{n+1} f \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$$

поэтому последовательность $\{A_n\}$ ограничена, а значит существует конечный неотрицательный предел $\{A_n\}$. Обозначим его c . Тогда справедлива асимптотическая формула:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Если ряд расходится (и интеграл), то

$$\sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^{n+1} f$$

Пример. $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + \gamma + \varepsilon_n = \ln(n+1) + \gamma + \varepsilon_n = \left| \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \right| =$
 $\ln n + \gamma + \delta_n \Rightarrow H_n \sim \ln n$
 $\gamma = 0,577215$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha \in (0; 1)$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx + c_{\alpha} + \varepsilon_n = \left| \int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(1) - \frac{1}{1-\alpha} \right| = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + d_{\alpha} + \delta_n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha > 1$

Замечание. $\int_{n+1}^{\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f$ (Посмотреть на примере 3, как ведет себя "хвостик")

2.2.1. Ряды с произвольными членами

Определение 49. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если $\sum |a_k|$

Замечание. $\sum a_k, \sum b_k$ – сходится абсолютно. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ – сходится абсолютно

Доказательство. $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha| |a_k| + |\beta| |b_k|$ + признак сравнения □

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k, z_k \in \mathbb{C}, z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $|x_k|, |y_k| \leq |z_k| \leq |x_k| + |y_k|$ □

Замечание.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Следствие. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $x_+ = \max\{x, 0\}, x = x_+ - x_-$
 $x_- = \max\{-x, 0\}, |x| = x_+ + x_-, |x| \geq x_{\pm} \geq 0$

1. $a_k \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

2. $a_k \in \mathbb{C}, a_k = x_k + iy_k$

$\sum |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum x_k, \sum y_k$ абсолютно сходится $\Rightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится $\Rightarrow \sum a_k$ □

Замечание. $\sum a_k$ - сходится условно, $\sum b_k$ сходится абсолютно $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ - сходится условно

Теорема 40 (Радикальный признак Коши абсолютной сходимости). $K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $K > 1$, то $\sum a_k$

2. $K < 1$, то $\sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $K > 1 \Rightarrow |a_n| \not\rightarrow 0 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n$ расходится $K < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ сходится □

Теорема 41 (Признак Даламбера абсолютной сходимости). $a_k \neq 0, D = \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ - существует

1. $D > 1 \Rightarrow \sum a_k$ расходится

2. $D < 1 \Rightarrow \sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. Аналогично □

Лемма 7 (Преобразования Абеля). Договоримся, что $\sum_{k=m}^n a_k$ при $m > n$

$\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$A_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$A_k = \sum_{j=1}^k a_j + A_0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ □

Теорема 42 (Признак Дирихле). $\{a_k\} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\} \in \mathbb{R}$ - монотонно убывает. Если $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничена, $b_n \rightarrow 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. $A_0 = 0$. Применим Преобразование Абеля: $\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ $\rightarrow 0$

$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ Покажем, что * сходится абсолютно.

$\exists M : \forall k \xrightarrow{+0} |A_k| \leq M, b_k - b_{k+1}$ одного знака.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n| = M(b_1)$$

□

Теорема 43 (Признак Абеля). $\{a_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\}$ из \mathbb{R} – монотонная. Если $\sum a_k$ сходится, последовательность b_k ограничена, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. \exists конечный $\lim b_n = \alpha$

$\{a_k\}$ и $\{b_n - \alpha\}$ – удовлетворяют предыдущей теореме $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha)$ – сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

□

Определение 50. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$, если b_k одного знака, называется *знако-чередующимися*.

Теорема 44 (Признак Лейбница). Пусть $\{b_n\}$ монотонна, $b_n \rightarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $b_k \geq 0$. Рассмотрим последовательность $\{S_{2m}\}$. Она убывает, т.к.

$$S_{2m} - S_{2(m-1)} = b_{2m} - b_{2m-1} \leq 0$$

и ограничена снизу, поскольку

$$S_{2m} = -b_1 + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \dots + (b_{2m-2} - b_{2m-1}) + b_{2m} \geq -b_1 + b_{2m} \geq -b_1$$

Поэтому существует конечный $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$. Но тогда

$$S_{2m+1} = S_{2m} - b_{2m+1} \rightarrow S$$

т.к. $b_{2m+1} \rightarrow 0$.

□

Замечание. Признак Лейбница следует из принципа Дирихле, если положить $a_k = (-1)^k$.

Замечание. Поскольку

$$S_{2m} = (-b_1 + b_2) + \dots + (-b_{2m-1} + b_{2m}) \leq 0 \quad \text{и} \quad S_{2m} \geq -b_1$$

то, по теореме о предельном переходе в неравенстве $-b_1 \leq S \leq 0$.

Замечание. Рассмотрим остаток лейбницевого ряда $S - S_n$. Тогда

$$-b_1 \leq (-1)(S - S_n) \leq 0$$

Для доказательства нужно применить замечание 1 к остатку ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$. При $\alpha > 1$ он сходится абсолютно, т.к.

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \right| = \frac{1}{k^\alpha}$$

При $\alpha \in (0, 1]$ он абсолютно не сходится, но сходится по признаку Лейбница.

Пример. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln 2n + \gamma + \delta_{2n} - (\ln n + \gamma + \delta_n) \\ &= \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \rightarrow \ln 2 \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Он получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ перестановкой членов. Обозначим частичные суммы этих рядов T_n и S_n соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} T_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+1} &= T_{3m} + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+2} &= T_{3m+1} - \frac{1}{4m+2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{\ln 2}{2}$, то есть сумма после перестановки слагаемые поменялась.

Определение 51. $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (биекция). Тогда мы будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

получен перестановкой слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 45 (Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к S , $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (биекция). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно к S .

Доказательство. 1. Пусть $a_k \geq 0$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$$

Для всех n верно

$$T_n \leq S_m \leq S$$

где $m = \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \Rightarrow T_n \leq S$, т.е. перестановка не увеличивает сумму ряда. Применим к новому ряду $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Но такая перестановка тоже не увеличит сумму ряда, а значит $S \leq T$.

2. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $a_{k\pm}, a_{\varphi(k)\pm}$. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ сходятся. По доказанному, $a_{\varphi(k)\pm}$ сходятся к тем же суммам. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3. Пусть $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k = x_k + i \cdot y_k$. По замечанию к определению абсолютной сходимости ряды с вещественными x_k и y_k абсолютно сходятся. По доказанному их суммы не меняются при перестановке, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

□

Замечание. Перестановка членов расходящегося положительного ряда приводит к расходящемуся положительному ряду. Действительно, если бы ряд после перестановки сходил, то теореме сходил бы и исходный ряд.

Замечание. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ расходятся.

Доказательство. Если бы они оба сходились, то сходил бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ как сумма двух сходящихся. Если бы один из них сходил, а другой расходился, то расходился бы и

исходный ряд как разность сходящегося и расходящегося. \square

Теорема 46 (Римана. Перестановка членов условно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно. Тогда $\forall S \in \mathbb{R} \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$. Более того, существует перестановка, после которой ряд вообще не будет иметь суммы.

Доказательство. Для определенности докажем теорему, когда $S \in [0, +\infty)$. Пусть $\{b_p\}$ и $\{c_q\}$ – подпоследовательности всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда; $b_p = a_{n_p}, c_q = a_{m_q}$. По предыдущему замечанию оба ряда $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$ расходятся. Положим $p_0 = q_0 = 0$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p > S$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p \leq S < \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

Затем обозначим через q_1 наименьшее число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_1} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q < S \leq \sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q$$

Такие p_1 и q_1 найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$. Продолжим построение неограниченно. Пусть номера $p_1, \dots, p_{s-1}, q_1, \dots, q_{s-1}$ уже выбраны. Обозначим через p_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p > S - \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s-1} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q \leq S < \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

Затем обозначим через q_s наименьшее натуральное число, для которого $\sum_{q=1}^{q_s} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_s} b_p$ то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s} c_q < S \leq \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s-1} c_q$$

Такие p_s и q_s найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$.

Ряд

$$b_1 + \dots + b_{p_1} + c_1 + \dots + c_{q_1} + \dots + b_{p_{s-1}+1} + \dots + b_{p_s} + c_{q_{s-1}+1} + \dots + c_{q_s} + \dots \quad (2)$$

получен из исходного ряда перестановкой. Докажем, что он сходится к S . Сгруппировав члены одного знака, мы получим ряд

$$B_1 + C_1 + \dots + B_s + C_s + \dots$$

где $B_s = \sum_{p=p_{s-1}+1}^{p_s} b_p$, $C_s = \sum_{q=q_{s-1}+1}^{q_s} c_q$. Обозначим его частные суммы через T_n . По построению $0 < T_{2s-1} - S \leq b_{p_s}, c_{q_s} \leq T_{2s} - S < 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к S , b_{p_s} и c_{q_s} стремятся к нулю. Следовательно, $T_n \rightarrow S$. По теореме о группировке членов ряда и ряд (2) сходится к S . \square

2.2.2. Произведение рядов

Определение 52. $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j$ – произведение частичных сумм.

Определение 53. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_k$

Возьмем биекцию $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Такая биекция существует, так как декартово произведение счетных множеств это тоже счетное множество.

$$\gamma = (\varphi, \psi)$$

Тогда $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ – произведение рядов $\sum a_k$ и $\sum b_k$

Теорема 47 (Коши об умножении рядов). Пусть есть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и оба абсолютно сходятся к суммам A и B . Тогда при любой нумерации произведение будет абсолютно сходиться к $A \cdot B$

Доказательство. Пусть есть $\gamma = (\varphi, \psi) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ – биекция.

$$A^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, B^* = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

Возьмем $N \in \mathbb{N}$ и посмотрим на такую частичную сумму $\sum_{l=1}^N |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}| \leq \sum_{k=1}^{\max \varphi(l)} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{\max \psi(l)} |b_k| \leq$

$\leq A^* \cdot B^*$. При каждом N частичная сумма ряда будет ограничена. Тогда ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ сходится абсолютно. А в абсолютно сходящихся можно менять нумерацию.

Рассмотрим какую-то нумерацию. Например, "по квадратам".

$$S_{n^2} = \sum_{k,l=1}^n a_k b_l = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \cdot B.$$

\square

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходятся к A и B , то их произведение "по квадратам" сходится к AB (даже без абсолютной сходимости).

Доказательство. Упражнение. \square

Определение 54. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j}$ называется произведением $\sum a_k$ и $\sum b_k$ по Коши. ("По диагонали")

Иногда нумеруют с нуля $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Тогда запись будет следующая: $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$

Следствие. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ абсолютно сходятся к A и B , то их произведение по Коши абсолютно сходится к AB

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

"Квадрат по Коши": $c_k = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}$

$|c_k| \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k}} = 1 \Rightarrow c_k \not\rightarrow 0$

Замечание. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходятся, причем хотя бы один абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится.

Замечание. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходятся к A и B , и их произведение по Коши сходится к C , то $C = A \cdot B$

Пример. Возьмем два расходящихся ряда.

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2^{k-1}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ -1, & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$c_0 = 1, \quad c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = -1 - \sum_{l=1}^{k-1} 2^{l-1} + 2^{k-1} = 0$$

2.3. Функциональные последовательности и ряды

Определение 55 (Предел комплексной функции). $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

Замечание. Мы говорим о вещественных функциях, но почти все это можно переносить на функции комплексно-значного аргумента. $X \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Определение 56. X – множество. $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f на множестве X поточечно, если $\forall x \in X \{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ как числовая последовательность.

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$

В кванторах: $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Пример. $X = [0; 1], f_n(x) = x^n$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{X} f$$

Определение 57. X – множество, $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$,

$\{f_n\}$ сходится к f равномерно на X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$

Замечание. Если f_n сходится равномерно, значит сходится поточечно. Наоборот неверно.

Замечание. Как и для числовых последовательностей можно писать $\forall n \geq N$ или $|\cdot| \leq \varepsilon$

Пример. $f_n(x) \equiv c_n$

Если $c_n \rightarrow c$, то $f_n(x) \Rightarrow f(x) = c$ на любом множестве.

Замечание. Если $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, то равномерная сходимость $\{f_n\}$ равносильна одновременной равномерной сходимости $\{Re f_n\}$ и $\{Im f_n\}$

Определение 58. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – функциональная последовательность, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – функциональный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно, если $S_n(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$ сходится поточечно.

$E = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ сходится}\}$ – множество сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно, если $S_n(x)$ сходится равномерно.

Запись равномерной сходимости в кванторах: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)}_{\text{остаток ряда}} \right| < \varepsilon$

Замечание. $f_n \xrightarrow{X} f \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Доказательство. $\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ □

Пример. $f_n = x^n$ на $[0; 1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$
 Посмотрим на $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0; 1)} |x^n| = 1 \not\rightarrow 0$

Замечание. $X_0 \subset X$

Если $f_n \xrightarrow{X} f$, то $f_n \xrightarrow{X_0} f$

Если $f_n \not\xrightarrow{X_0} f$, то $f_n \not\xrightarrow{X} f$

$X = [0; \lambda]$, $\lambda < 1$ – сходится равномерно.

$$\sup_{x \in [0; \lambda]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0; \lambda]} |x^n| = \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Замечание. $f_n \xrightarrow{X} f$, $g_n \xrightarrow{X} g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, тогда $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{X} \alpha f + \beta g$

Доказательство. Упражнение. (Неравенство треугольника для sup) □

Замечание. $f_n \xrightarrow{X} f$ и g ограничена на X , тогда $f_n g \xrightarrow{X} f \cdot g$

Теорема 48 (Критерий Больцано-Коши). $X, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

f_n равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Замечание. Можно записать $\forall n > N$ и $\forall m |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon$

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $f_n \xrightarrow{X} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f_n - f_{n+m}| \leq |f_n - f| + |f_{n+m} - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

\Leftarrow . $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$ и $\forall m \in \mathbb{N} \forall x \in X |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Фиксируем $x_0 \in X$. Получим числовую последовательность (есть критерий Коши) \Rightarrow

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\text{при } m \rightarrow \infty \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема 49 (Критерий Больцано-Коши для рядов). $X, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)}_{\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)}$$

Доказательство. Аналогично. □

Следствие. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно $\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$

Пример. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, X = \mathbb{R}$

$$f(x) = 0, f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

Но $f_n(x) \not\xrightarrow{\mathbb{R}} 0$

$$\text{Рассмотрим } [0; 1]: \sup_{x \in [0; 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0; 1]} \frac{nx}{1+n^2x^2} \geq \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$$

Пример. $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}, x = [-1; 1]$

$$f(x) = 1 \quad f_n(x) - f(x) = \left| \frac{n^2 - n^2 - x^2}{n^2 + x^2} \right| = \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sup_E |f_n - f| \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$$

Пример. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x = [0; 1)$

$$f(x) = 0$$

$$\sup_{x \in [0; 1)} |x^n - x^{n+1}| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{[0; 1)} f$$

$f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = nx^{n-1}(1 - x \cdot \frac{n+1}{n}) = 0$ при $\frac{n}{n+1}, 0$. f_n возрастает до $\frac{n}{n+1}$ и убывает дальше.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k, X = [0; 1)$

$S(x) = \frac{1}{1-x}$ — поточечно. $f_n(x) = x^{n+1} \not\xrightarrow{X} 0$ / Не выполнено необходимое условие равномерной сходимости.

Теорема 50 (Признак Вейерштрасса). $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $|f_n(x)| \leq a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно.

Доказательство. $\forall x \in X \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}$.

По критерию Больцано-Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon. \quad \square$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно и равномерно, т.к. $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Замечание. Другими словами, если члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда, то функциональный ряд равномерно сходится.

Определение 59 (Равномерная ограниченность). Последовательность функций $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *равномерно ограниченной* на X , если последовательность норм g_n ограничена.

Последнее равносильно тому, что

$$\exists M \in [0; +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Теорема 51 (Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов). Пусть X – множество, $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), g_k : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Признак Дирихле. Если

1. последовательность $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ равномерно ограничена на X ;
2. при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $g_n \rightarrow 0(X)$,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X .

2. Признак Абеля. Если

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X ;
2. при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $\{g_k\}$ равномерно ограничена на X ,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X .

Доказательство. В обоих случаях проверим выполнение условия Больцано-Коши равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

1. При каждом $x \in X$ применим преобразование Абеля, положив $a_k = f_k(x), b_k = g_k(x), A_0 = 0$. Тогда $A_k = F_k(x)$. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{F_n\}$

$$\exists K > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |F_k(x)| \leq K,$$

а в силу равномерного стремления g_n к нулю

$$\exists N \quad \forall k > N \quad \forall x \in X \quad |g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N, m > n, x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) g_k(x) \right| < 4K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

2. Снова применим при каждом $x \in X$ преобразование Абеля, положив на этот раз $a_k = f_k(x), b_k = g_k(x), A_0 = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Тогда $A_k = - \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)$ есть остаток равномерно сходящегося ряда. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{g_k\}$

$$\exists L > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |g_k(x)| \leq L,$$

а в силу равномерного стремления остатка ряда к нулю

$$\exists N \quad \forall k > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N, \quad m > n, \quad x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) g_k(x) \right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4L} \cdot L = \varepsilon.$$

□

Замечание. Напомним, что ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$, где $b_k \geq 0$ при всех k , называется *знакопередающим*.

Следствие (Признак Лейбница равномерной сходимости рядов). Пусть X – множество, $g_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна, $g_n \rightarrow 0(X)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} g_k$ равномерно сходится на X .

Замечание. Признак Лейбница следует из признака Дирихле, если положить $f_k(x) = (-1)^{k-1}$ при всех $x \in X$.

2.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 52 (Перестановка пределов). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка $D, f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и

1. $f_n \xrightarrow{D} f$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ – конечные и совпадают, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N : \forall m, n > N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Перейдем к пределу при $x \rightarrow x_0$. Тогда $|A_n - A_m| \leq \varepsilon \Rightarrow A_n$ сходится в себе $\Rightarrow A_n$ сходится к A .

Докажем, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$. По $\varepsilon > 0$ подберем номер L такой, что

$$\forall l > L \quad \forall x \in D \quad |f_l(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и номер K , что

$$\forall k > K \quad |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Положим $M = 1 + \max\{L, K\}$. Тогда при любом $x \in D$

$$|f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

По определению предела функции найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0 , что

$$\forall x \in \dot{V}_{x_0} \cap D \quad |f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда при любом $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| < \varepsilon$$

В силу произвольности ε это и значит, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_0$. □

Теорема 53 (Почленный переход к пределу). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D , $f_k : D \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к некоторой сумме A , а предел $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x)$ существует и равен A , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

Следствие (Непрерывность предельной функции в точке). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$ и

1. $f_n \xrightarrow{D} f$
2. все функции f_n непрерывны в точке x_0

Тогда функция f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Для изолированной точки x_0 утверждение тривиально. Если x_0 – предельная точка D , то $A_n = f_n(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = f(x_0)$$

что и означает непрерывность f в точке x_0 . \square

Следствие (Непрерывность суммы ряда в точке). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, f_k : D \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. все функции f_k непрерывны в точке x_0

Тогда функция S непрерывна в точке x_0 .

Следствие (Непрерывность предельной функции на множестве). Пусть $D \subset \mathbb{R}, f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и

1. $f_n \xrightarrow{D} f$
2. все функции f_n непрерывны на D

Тогда функция f непрерывна на D .

Другими словами, равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Следствие (Непрерывность суммы ряда на множестве, Стокса-Зейделя). Пусть $D \subset \mathbb{R}, f_k : D \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. все функции f_k непрерывны на D

Тогда функция S непрерывна на D .

Другими словами, сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Утверждение 7. Равномерная сходимость – не необходимое условие. Например

$$f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n$$

Теорема 54 (Признак Дини). Пусть $f, f_n \in C[A, B], f_n \rightarrow f \forall x \in [A, B], \{f_n(x)\}$ – возрастает.

Тогда $f_n \xrightarrow{[A, B]} f$.

Теорема 55 (Предельный переход под знаком интеграла). Пусть $f_n \in C[a, b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Доказательство. $f \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b f$ имеет смысл. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N, x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Поэтому для всех $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

□

Теорема 56 (Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов). Пусть $f_k \in C[a, b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k$$

Другими словами, равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.

Пример. Последовательность $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0, 1]$. В то же время

$$\int_0^1 f_n = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{n^2}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1+x}$ на $(-1, 1)$. При $x = 1$ он расходится, но его почленное интегрирование по отрезку $[0, 1]$ приводит к верному равенству:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Теорема 57 (Предельный переход под знаком производной). Пусть E – ограниченный промежуток, $f_n, \varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, функции f_n дифференцируемы на E , $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на E и существует $c \in E$ такое, что последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда

1. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к некоторой функции f

2. f дифференцируема на E

3. $f' = \varphi$

Равенство $f' = \varphi$ можно записать в виде

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$$

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$g_n(x) = g_{n,x_0}(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in E \setminus \{x_0\}$$

Докажем, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}, x \in E \setminus \{x_0\}$ по формуле Лагранжа, примененной к функции $f_n - f_m$, найдется такое ξ между x и x_0 , что

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi)$$

Поэтому

$$\sup_{E \setminus \{x_0\}} |g_n - g_m| \leq \sup_E |f_n' - f_m'|$$

Последовательность $\{f_n'\}$ равномерно сходится и, значит, равномерно сходится в себе на E . Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ по критерию Больцано-Коши она равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$.

В частности, при $x_0 = c$ последовательность $\{g_{n,c}\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Поскольку умножение на ограниченную функцию $x \mapsto x - c$ не нарушает равномерной сходимости, последовательность $\{f_n - f_n(c)\}$ также равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Так как в точке c все ее члены равны нулю, она равномерно сходится на E . По условию последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда и последовательность

$$f_n = (f_n - f_n(c)) + f_n(c)$$

равномерно сходится на E как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей. Первый пункт теоремы доказан.

Обозначим $f = \lim f_n$. Снова зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

По доказанному $g_n \xrightarrow{E \setminus \{x_0\}} h$, а по определению производной $g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f_n'(x_0)$. Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x_0) = \varphi(x_0)$$

По определению производной $f'(x_0)$ существует и равняется $\varphi(x_0)$. В силу произвольности x_0 второе и третье утверждения теоремы доказаны. \square

Теорема 58 (Почленное дифференцирование рядов). Пусть E – ограниченный промежуток, функции f_k дифференцируемы на E , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ равномерно сходится на E и существует такое $c \in E$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится. Тогда

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E
2. Его сумма дифференцируема на E
3. $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1' = \sum_{k=1}^{\infty} 0$ сходится равномерно на любом промежутке.

Пример. Последовательность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$ равномерно сходится к 0 на \mathbb{R} , так как $\|f_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Однако, последовательность $f'_n(x) = \cos nx$ не имеет предела при $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$.

Пример. Последовательность $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Последовательность же $f'_n(x) = x^n$ сходится на $[0, 1]$ неравномерно, и в точке 1 ее предел равен 1, а не 0.

Пример. Пусть f_0 – 1-периодическая функция, а ее сужение на $[0, 1]$ задается равенством

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & [0, \frac{1}{2}], \\ 1-x, & [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Положим $f_k(x) = \frac{1}{4^k} f_0(4^k x)$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на \mathbb{R} , так как $\|f_k\| = \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k} < +\infty$. Кроме того, $f_k \in C(\mathbb{R})$. Следовательно, $f \in C(\mathbb{R})$.

Докажем, что f не дифференцируема ни в одной точке. Упражнение :)

2.5. Степенные ряды

Определение 60 (Степенной ряд). Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

где $c_n, a, z \in \mathbb{C}$, называется степенным рядом. Числа c_n называются его коэффициентами, а a – центром.

Определение 61 (Радиус сходимости). Величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда, если

1. $\forall z : |z - a| < R$ ряд сходится
2. $\forall z : |z - a| > R$ ряд расходится

Замечание. Далее будем считать, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$

Теорема 59 (Формула Коши-Адамара). Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости, и он выражается формулой

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказательство. Пусть $z \neq a$. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Вынося положительный не зависящий от n множитель $|z - a|$ за знак верхнего предела, имеем

$$K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} = \overline{\lim} \left(|z - a| \sqrt[n]{|c_n|} \right) = |z - a| \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $|z - a| < R$, то $K < 1$, и ряд сходится, а если $|z - a| > R$, то $K > 1$, и ряд расходится. \square

Замечание. По признаку Коши при $|z - a| < R$ ряд сходится абсолютно.

Определение 62 (Круг сходимости). Пусть дан степенной ряд, R – его радиус сходимости. Множество

$$V_a(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$$

называется *кругом сходимости* ряда.

Замечание. Часто радиус сходимости можно найти не только по формуле Коши-Адамара, но и с помощью признака Даламбера. Именно,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

если предел в правой части существует.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ При $|z| \geq 1$ ряд расходится. Поэтому радиус сходимости этого ряда равен 1, а множество сходимости совпадает с кругом сходимости.

Пример. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ он абсолютно сходится.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = -1$ то ряд – гармонический, а значит он расходится. При $x = -1$ ряд сходится по признаку Лейбница.

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Упражнение. $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$

Теорема 60 (Равномерная сходимость степенных рядов). Пусть дан степенной ряд, $R \in (0, +\infty]$ – его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд равномерно сходится в круге $\overline{V_a(r)}$ (круг с границей).

Доказательство. Если $|z - a| \leq r$, то

$$|c_k(z - a)^k| \leq |c_k|r^k$$

$z = r$ – внутри круга сходимости $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ сходится абсолютно. Значит, по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно в круге $\overline{V_a(r)}$. \square

Следствие. Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Теорема 61 (Теорема Абеля о степенных рядах). Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \in (0, +\infty)$ – его радиус сходимости. Если ряд сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то он равномерно сходится на $[a, a + R]$ или $[a - R, a]$ соответственно, а его сумма непрерывна в точке $a + R$ слева (соответственно, в точке $a - R$ справа).

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $a = 0$.

$$a_k \cdot x^k = a_k \cdot R^k j \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ сходится равномерно на $[0, R]$. Последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^k\right\}$ равномерно ограничена на $[0, R]$ и убывает в силу неравенства $0 \leq \frac{x}{R} \leq 1$. Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ равномерно сходится на $[0, R]$. И применить теорему Стокса-Зейделя \square

Следствие (Интегрирование степенных рядов). Пусть дан вещественный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k$, $R \in (0; +\infty]$ – его радиус сходимости. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k$ можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если $[A; B] \subset (a - R; a + R)$, то

$$\int_A^B \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(B - a)^{k+1} - (A - a)^{k+1}}{k + 1} \quad (*).$$

Если, кроме того, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то равенство (*) верно и при $B = a + R$ или $A = a - R$ соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$. Обозначим $r = \max\{|A|, |B|\}$. Тогда

$$[A, B] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$

По теореме о равномерном сходимости степенных рядов ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, $R \in (0; +\infty]$ равномерно сходится на $[A, B]$. Следовательно, его можно интегрировать по $[A, B]$ почленно. Если $B = R$, то ряд равномерно сходится на отрезке $[0, B]$ по теореме Абеля о степенных рядах, а на отрезке с концами A и 0 – по теореме о равномерной сходимости степенных рядов. Поэтому ряд равномерно сходится на $[A, B]$. Аналогично рассматривается случай $A = -R$. \square

Определение 63. $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. a – внутренняя точка D . Если $\exists \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$, то f дифференцируема в точке a и обозначается $f'(a)$.

Пример. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$n = 0 \quad f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1} \xrightarrow{z \rightarrow a} na^{n-1}$$

$$(z^n)' = nz^{n-1} \text{ в } \mathbb{C}.$$

$$\text{При } n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{N} \cup \{0\}\} \quad (z^n)' = nz^{n-1} \text{ в } \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Лемма 8 (Радиусы сходимости рядов).

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(z-a)^{k-1}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$$

равны.

Доказательство. По формуле Коши-Адамара достаточно.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|n}.$$

Т.к. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, то

$$\exists N : \sqrt[n]{|c_n|} \leq \sqrt[n]{n|c_n|} \leq (1 + \varepsilon) \sqrt[n]{|c_n|}.$$

\square

Теорема 62 (Дифференцирование степенных рядов). $R \in (0; +\infty]$ – радиус сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = f(z)$,

Тогда f – бесконечно дифференцируема $V_a(R)$ и ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, \quad |z-a| < R$$

Доказательство. $m = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(z-a)^k - (z_1-a)^k}{(z-a) - (z_1-a)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left((z-a)^{k-1} + (z-a)^{k-2}(z_1-a) - (z-a)^{k-3}(z_1-a)^2 + \dots + (z_1-a)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

$z \neq z_1; z_1, z \in V_a(\rho), \rho < R$

$$|c_{k_0} \left((z-a)^{k_0-1} + (z-a)^{k_0-2}(z_1-a) + \dots + (z_1-a)^{k_0-1} \right)| \leq |c_{k_0}| k_0 \rho^{k_0-1}.$$

По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно в $\overline{V}_a(\rho)$. □

Теорема 63 (Единственность разложения функции в степенной ряд). $R \in (0; +\infty]$ – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, |z-a| < R$.

Тогда коэффициенты определяются единственным образом:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Доказательство.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, \quad |z-a| < R$$

При $z = a$

$$f^{(m)}(a) = c_m \cdot m!$$

□

Определение 64. f имеет производную всех порядков в точке a .

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ – ряд Тейлора функции f с центром в точке a .

Замечание. Частичные суммы – многочлены Тейлора.

$z = a$ – ряд Маклорена.

Пример. 1. Ряд сходится к f .

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

2. Ряд расходится.

$$\frac{1}{1+x}, \quad |x| \geq 1.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{сходится при } x^2 < 1.$$

$$\frac{1}{1+z^2} - \text{не опр. при } z = i \text{ или } -i.$$

3. Ряд сходится, но не к f .

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{где } P_n - \text{некоторый многочлен.}$$

$$n=1 \quad \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = \underbrace{\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right)'}_{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} = \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{В нуле: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \underset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y} \cdot e^{-y} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

$$f^{(m)}(0) = 0.$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{сумма}=0}$$

Теорема 64 (Признак разложимости в ряд Тейлора). $f \in C^\infty\langle A; B \rangle$; $x, a \in \langle A; B \rangle, x \neq a$.

$\exists M > 0$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$ на $\tilde{\Delta}_{a,x}$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x)$$

.

Доказательство. (из I семестра)

$$|f(x) - T_{a,n}f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

и устремить $n \rightarrow \infty$.

□

Определение 65. $-\infty \leq A < B \leq +\infty, f : (A; B) \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A; B)$. Функция f – аналитическая, если раскладывается в степенной ряд в окрестности a .

$$\mathcal{A}(A; B) \subsetneq C^\infty(A; B)$$

2.6. Разложения элементарных функций

Определение 66. При $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Теорема 65 (T1). Функции \exp, \sin, \cos бесконечно дифференцируемы на \mathbb{C} и

$$(e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$$

.

Доказательство. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в круге сходимости. Продифференцируем:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \\ (\sin z)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos z \\ (\cos z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = -\sin z. \end{aligned}$$

□

Теорема 66 (T2. Основное свойство степени).

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Доказательство.

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^j}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}$$

□

Теорема 67 (Т3). Синус – нечетная функция, косинус – четная.

Доказательство. Это свойство очевидно из определения. \square

Теорема 68 (Т4. Формулы Эйлера).

$$e^{iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Доказательство. $i^{2k} = (-1)^k$, запишем разложения синуса и косинуса в виде:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}, \quad i \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

сложим их, получим степенной ряд для e^{iz} .

Для доказательства второй и третьей формулы Эйлера заменим z на $-z$ и воспользуемся свойством **Т3**:

$$e^{-iz} = \cos z + i \sin z.$$

Остаётся взять полусумму выражений для e^{iz} и e^{-iz} и их полуразность, делённую на i . \square

Замечание. Укажем частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Комплексное число может быть записано в алгебраическом форме:

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

и в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

По формуле Эйлера последнее выражение можно переписать в виде

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной*.

Теорема 69 (Т5). Тожества для тригонометрических функций остаются справедливыми

при комплексных значениях аргумента. Например,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Доказательство. По формулам Эйлера и основному свойству степени

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \\ &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)} \right) = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

□

Определение 67. Функции ch и sh , определяемые формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*.

Замечание. По формулам Эйлера

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad i \operatorname{sh} z = \sin iz, \quad i \sin z = \operatorname{sh} iz.$$

отсюда получаются разложения гиперболических функций в степенные ряды

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

абсолютно сходящиеся на \mathbb{C} . Производные этих функций равны

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

На рис.2 изображены графики гиперболических функций вещественной переменной.

Теорема 70 (Т6). Функции \cos и \sin не ограничены на \mathbb{C} .

Доказательство. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\cos i\alpha = \operatorname{ch} \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \pm\infty} +\infty, \quad |\sin i\alpha| = |\operatorname{sh} \alpha| \xrightarrow{\alpha \rightarrow \pm\infty} +\infty$$

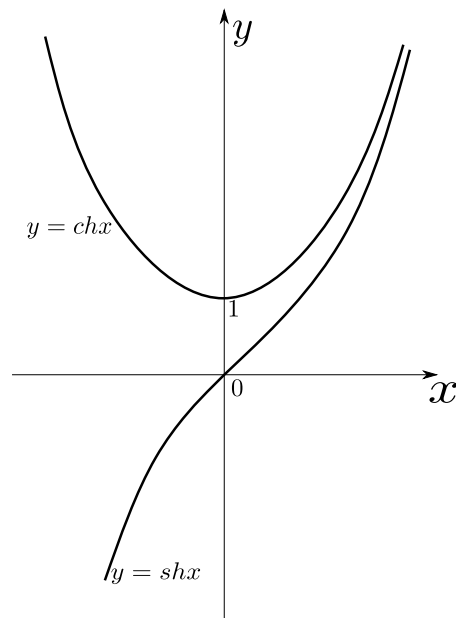


Рис. 2: Гиперболический косинус и синус

□

Теорема 71 (Т7). e^z не имеет нулей. $\sin z$ и $\cos z$ не имеют нулей не из \mathbb{R} .

Доказательство. $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x > 0.$$

$\cos z = 0$. В силу Т5 и связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\dots) = \cos x \operatorname{ch} y = 0 \\ \operatorname{Im}(\dots) = \sin x \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

□

Теорема 72 (Т8). e^z имеет периоды $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и не имеет других периодов. $\sin z, \cos z$ имеют периоды $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и не имеют других периодов.

Доказательство. По формуле Эйлера

$$e^{2\pi ik} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.$$

$$\Rightarrow e^{z+2\pi ik} = e^z.$$

Докажем, что других периодов нет. Пусть $T = 2\pi ik$ – период. $e^{z+T} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$. При $z = 0$:

$e^T = 1$. Пусть $T = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда $e^\alpha e^{i\beta} = 1$. Если $e^\alpha = 1$, тогда $\alpha = 0$; $e^{i\beta} = 1$. По формуле Эйлера

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta = 1$$

$$\Rightarrow \cos \beta = 1, \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Следствие.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.6.1. Логарифм и арктангенс

Замечание.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1.$$

Заменим x на $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

Проинтегрируем $\int_0^t \dots dx$.

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

При $t = 1$ сходится по признаку Лейбница.

По Теореме Абеля:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = -(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots), \quad -1 \leq t < 1.$$

$$\frac{1}{2}(\ln(1+t) - \ln(1-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}, \quad |t| < 1$$

Подставим $t = \frac{1}{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}$$

Теорема 73 (Формула Стирлинга). $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \theta \in (0; 1)$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$$

$$\left(n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Доказательство.

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}$$

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2} = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{4n^2 + 4n} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

Пусть $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Левое неравенство означает, что последовательность $\{a_n\}$ строго убывает, а правое – что последовательность $\{a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}\}$ строго возрастает. Т.к. $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$, то по теореме о пределе монотонной последовательности обе последовательности сходятся к общему пределу, причём

$$\exists \lim a_n = a : a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

Другими словами,

$$e^{\frac{0}{12n}} = 1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}} \Rightarrow a_n = a \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

$$n! = a \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{ne^{\frac{\theta_n}{12n}}}.$$

$$\pi = \lim \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{\left(\frac{(2n)!}{(2n)!!}\right)^2} = \lim \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}\right)^2 =$$

$$\lim \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n} \cdot a^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot n \cdot e^{\frac{\theta_n}{6n}}}{a \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2ne^{\frac{\theta'_n}{24n}}}}\right)^2 = \lim \frac{1}{n} \left(\frac{a \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2}} e^{\alpha_n}\right)^2 = \lim \frac{a^2}{2} e^{2\alpha_n} \underset{\alpha_n \rightarrow 0}{=} \frac{a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = \pi \Leftrightarrow a = \sqrt{2\pi}$$

□

Утверждение 8. $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, t \in (-1; 1)$

$$t = p^2 \quad \frac{1}{1+p^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p^{2k}, |p| < 1$$

Проинтегрируем: $x \in (-1; 1) \int_0^x \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, |x| < 1$

На границе круга сходимости: при -1 или 1 . Если $x = 1$, то это сумма обратных нечетных чисел со знакопеременением. Применяем признак Лейбница, ряд сходится.

$x = -1$ – тоже сходится.

Подставим $x = 1$, посмотрим, что получится. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ Этот ряд убывает очень медленно.

Поэтому если хочется посчитать число пи, этот способ работает, но он медленный.

Побыстрее это можно сделать в другой точке: $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} \right)$

2.7. Степенная функция

Определение 68. $(1+x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{N}$ получается бином Ньютона.

Обобщенные биномиальные коэффициенты: $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$C_\alpha^0 = 1$$

Теорема 74. $\alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1; 1) \Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$

Доказательство. $\alpha \in \mathbb{N}_0$ – знаем.

Пусть α не такие. Через формулу Даламбера: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$. Радиус

сходимости – 1. Обозначим $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k = S(x)$

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k \cdot k x^{k-1}$$

Запишем такое равенство: $xS'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k k x^k$

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^{k+1} \cdot (k+1) x^k$$

Посмотрим, что такое $C_\alpha^{k+1}(k+1) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!} = (\alpha-k)C_\alpha^k$

$$xS'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k k x^k, \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^{k+1} \cdot (k+1) x^k \Rightarrow (1+x)S'(x) = \alpha S(x)$$

$$g(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}$$

$$g'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\alpha - S(x) \cdot \alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{S'(x)(1+x) - S(x) \cdot \alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0$$

Значит, функция $g \equiv \text{const}$

$$g(0) = \frac{1}{1} \Rightarrow g(x) \equiv 1$$

□

Пример. $\alpha = \frac{1}{2}: \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$C_{\frac{1}{2}}^k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}$$

$$C_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left((2k-1) \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot c \right)$$

Упражнение. $\alpha = -\frac{1}{2}$ Этот случай важный! $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot x^k$

Почему это важно? Сделаем замену: $x = -t^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dots, |t| < 1$$

$$\arcsin x = \dots$$

Замечание. $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ограничения на x излишни.

Замечание (Поведение на концах). $\alpha \geq 0$ абсолютная сходимости $x \neq \pm 1$
 $\alpha \in (-1; 0)$ $x = -1$ расходится, при $x = 1$ сходится условно. $\alpha \leq -1$ расходится $x \neq \pm 1$

2.8. Бесконечные произведения

Определение 69. $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$
 $P_N = \prod_{n=1}^N p_n$
 \exists конечный $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P \neq 0$

Теорема 75 (Необходимое условие сходимости). $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится $\Rightarrow p_n \rightarrow 1$

Доказательство. $\lim p_n = \lim \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$ □

Замечание. Начиная с некоторого момента, знак у p_n стабилизируется. Это важно, так как можно откинуть конечное число множителей, оно не будет влиять на сходимость.

Пример. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$
 $P_N = \prod_{n=2}^N \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1)(N+1)}{N \cdot N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N+1}{N} \rightarrow \frac{1}{2}$

Пример. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{N}}}{\dots}$ $P_N = \frac{e^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}}{N+1}$ Домножим и поделим: $\frac{e^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}}{N+1} \cdot \frac{N}{N} = \frac{N}{e^{\ln N}} = \frac{N}{N+1}$.
 $e^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N} \rightarrow e^{\gamma}$, где γ – постоянная Эйлера.

Теорема 76. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ сходится
 $p_n = 1 + \alpha_n$

Доказательство. $S_N = \ln P_N$

$$P_N = e^{S_N}$$

$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится... $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ □

Замечание. Теперь говорим в терминах того, что $1 + \alpha_n \rightarrow 1 \Leftrightarrow$ сходимости.

Теорема 77. Все a_n одного знака. Тогда $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится.

Доказательство. Упражнение

□

Определение 70. $\prod(1 + \alpha_n)$ сходится абсолютно, если сходится $\prod(1 + |a_n|)$ **Теорема 78.** $\prod(1 + \alpha_n)$ абсолютно сходится \Leftrightarrow абсолютно сходится $\sum a_n$ и/или $\sum \ln(1 + a_n)$ **Доказательство.** Упражнение

□

Замечание. Условная сходимость по аналогии.**Замечание.** Говорят о числовых произведениях, функциональные произведения это нечто странное.

2.9. Метод обобщенного суммирования

Пример. $S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. В нашем понимании такой ряд не сходится. Можно было бы расставить скобочки и получить ноль. Но мы так делать не можем. Половина частичных сумм будет 0, половина частичных сумм равна 1. Разумно было бы получить $\frac{1}{2}$. Можно записать эту сумму как $S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - S_1$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

Знаем такую формулу: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Подставив $x = 1$ получим искомый ряд. Идея неплоха, но $\frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}}$. Домножим и числитель и знаменатель на $1 - x$
 $\frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}} = \frac{1-x^n}{1-x^m} = (1-x^n)(1+x^n+x^{2m}+\dots) = 1 - x^n + x^m - x^n x^{2m} + \dots$. А что будет слева, если $x = 1$ подставить? Получим $\forall m, n \in \mathbb{N} \setminus 1 \frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ – любое рациональное число.

Пример. Хотим посчитать такую сумму: $S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots$. $S_2 + S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots = S_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}$. $S_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$. Что такое $S_3 - S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots = 4S_3 \Rightarrow 3S_3 = -S_2$
 $S_3 = -\frac{1}{12}$

Определение 71. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A(M)$ – суммирование по обобщенному методу M

Наложим некоторые ограничения на обобщенные методы:

1. Линейность. $\sum a_n = A(M), \sum b_n = B(M)$
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B(M)$
2. Регулярность: $\sum a_n = A \Rightarrow \sum a_n = A(M)$
3. Эффективность. Мы не можем использовать метод только для одного ряда.

Пример. 1. Метод степенных рядов (Пуассона-Абеля) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Построим $\sum a_n x^{n-1}$
 $\sum a_n = S(-), \forall x \in (0, 1) \sum a_n x^{n-1} = S(x) \lim_{x \rightarrow 1-} S(x) = S$
 Регулярность следует из теоремы Абеля.

2. Метод средних арифметических (Чезаро)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

$\sum a_n = S(Ch) \Leftrightarrow \lim \sigma_n = S$. Линейность очевидна. Докажем регулярность.

Доказательство. $\lim S_n = S \Rightarrow \lim \sigma_n = S$. Посчитаем $|\sigma_n - S| = \frac{|S_1 - S + S_2 - S + \dots + S_n - S|}{n} \leq$

$$\frac{|S_1 - S| + |S_2 - S| + \dots + |S_n - S|}{n} = \underbrace{\frac{|S_1 - S| + \dots + |S_{N-1} - S|}{n}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{|S_n - S| + \dots + |S_N - S|}{n}}_{< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N+1}{n}} \quad \square$$

Теорема 79 (Фробениуса). $\sum a_n = S(Ch) \Rightarrow \sum a_n = S(-)$

Пример. Показать, что обратное неверно. Посчитать $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

2.10. Ряды Фурье

Замечание. Раскладываем 2π периодичные функции

Определение 72. $A \sin(\omega x + \varphi)$ – гармоника

A – амплитуда

φ – начальная фаза

ω – частота

Утверждение 9. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Будем считать, что функция f идеальна и ряд равномерно сходится на промежутке от $-\pi$ до π ($[0; 2\pi]$). Тогда проинтегрируем ряд $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi \cdot a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx f(x) dx = \pi a_n$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx f(x) dx = a_n$$

Замечание. $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cos x + \sin x \cos \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi + x)$

Пример. $a_0 - \frac{1}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 1$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n - \text{нечетно} \\ 0, n - \text{четно} \end{cases} \quad f(x) \sim 1 \cdot \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$