Производная функции

Рассматриваемые вопросы

1. Задачи, приводящие к понятию производной
2. Определение производной
3. Геометрический, физический и экономический смыслы производной
4. Односторонние производные
5. Дифференцируемость и непрерывность
6. Правила дифференцирования
7. Таблица производных
8. Уравнения касательной и нормали к кривой
9. Производная сложной функции
10. Производная обратной функции
11. Дифференцирование неявных функций
12. Производная функции, заданной параметрически
13. Логарифмическое дифференцирование
14. Эластичность функции

1. Задачи, приводящие к понятию производной

- Задача о скорости движения

Пусть материальная точка M движется по прямой.

Расстояние s, которое проходит эта точка за время t, определяется уравнением движения $s = f(t)$.

Найдем скорость точки в данный момент t.

За время t точка пройдет путь $s = f(t)$,

а за время $t + \Delta t$ – путь $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$.

Значит, за промежуток времени Δt точка M проходит путь

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Если движение равномерное, то уравнение движения имеет вид: $s = vt.$

В этом случае $\Delta s = v\Delta t,$ а отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$

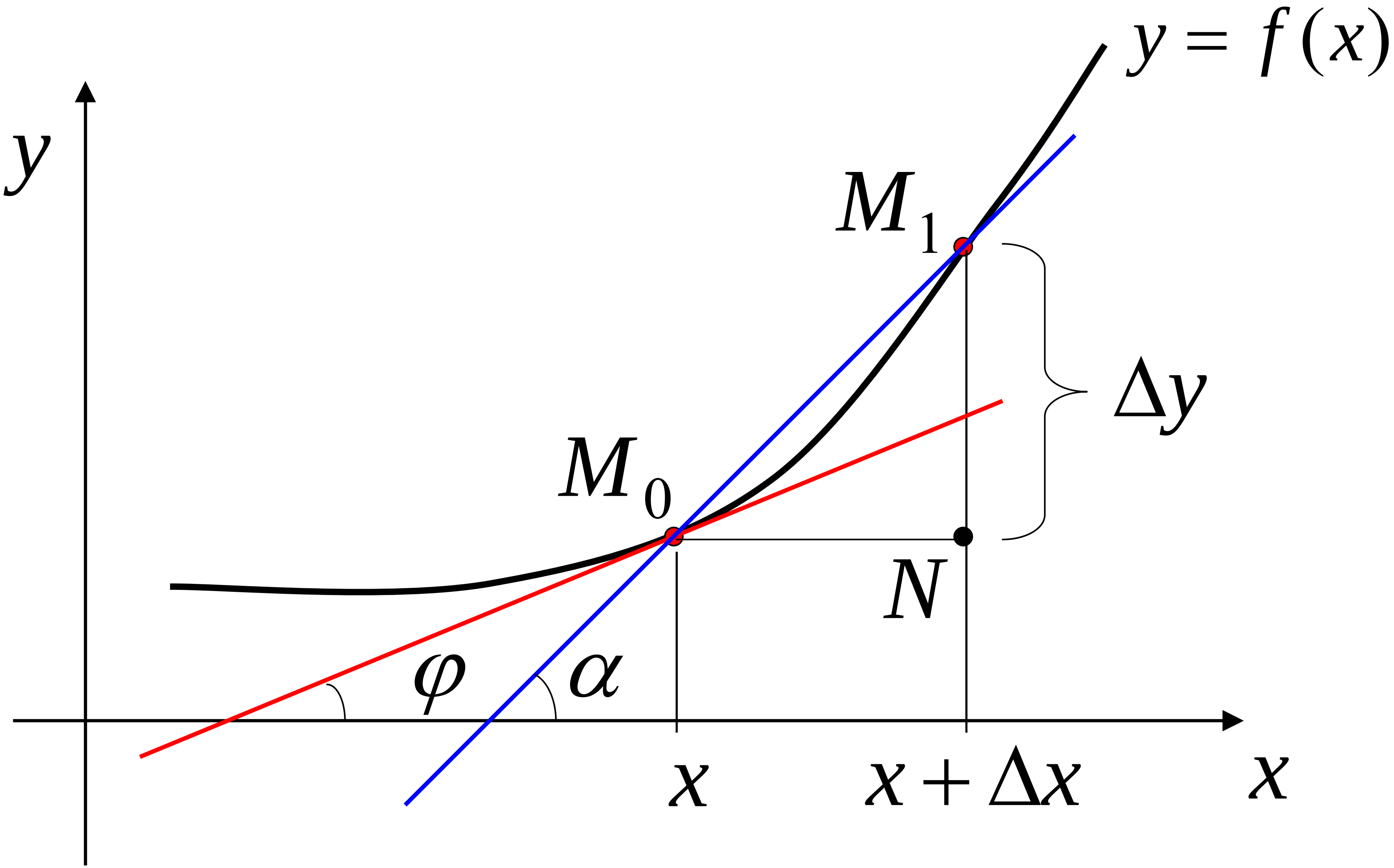
остается постоянным и называется скоростью равномерного движения. Эта скорость не зависит ни от $t,$ ни от $\Delta t.$

При неравномерном движении отношение $\Delta s / \Delta t$ называется средней скоростью движения $v_{\text{ср}}$ (она зависит от t и Δt). Скоростью точки в данный момент или мгновенной скоростью называют предел

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача о касательной.

Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1, когда точка M_1 стремится по кривой к точке M_0.



$y = f(x)$
y
M_1
Δy
M_0
N
φ
α
x
$x + \Delta x$
x

Решим задачу о проведении касательной к кривой в точке M_0.

Для этого надо найти угловой коэффициент касательной в точке M_0: $\operatorname{tg}\varphi$.

$$M_0N = \Delta x, \quad NM_1 = \Delta y \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Заметим, что для данного фиксированного значения аргумента $x = x_0$ из множества X производная есть определенное число.

Если же производная существует на всем множестве X, то она является функцией от x.

Для обозначения производной употребляют различные символы:

Лейбниц $\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx};$

Лагранж $y', \quad f'(x_0);$

Коши $Dy, \quad Df.$

Процесс вычисления производной функции называется ***дифференцированием*** этой функции.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке.

3. Геометрический, физический, экономический смыслы производной

- Геометрический смысл:

производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона к положительному направлению оси Ox) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$.

- Физический смысл:

если функция $s = f(t)$ определяет путь, пройденный материальной точкой за время t, то $f'(t)$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t.

- Экономический смысл:

Пусть Q – объем произведенной продукции и $C = f(Q)$ – ее себестоимость.

Отношение $C_{\text{ср}} = \dfrac{C}{Q} = \dfrac{f(Q)}{Q}$ определяет

среднюю себестоимость на единицу продукции, а формула $C_{\text{пр}} = f'(Q)$ – предельную себестоимость.

4. Односторонние производные

- Правая производная функции

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- Левая производная функции

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Имеет место следующее утверждение:

Если $f'_-(x_0) = f'_+(x_0),$ то функция дифференцируема в точке x_0 и

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

5. Дифференцируемость и непрерывность

Теорема.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке $x = x_0$, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$,

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x] = 0,$$

что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Обратное утверждение не верно.

Из непрерывности функции в точке не следует дифференцируемость в этой точке.

6. Правила дифференцирования

- $\boxed{(c \cdot u)' = c \cdot u'} \qquad (u = u(x)).$

Доказательство. $\quad y = c \cdot u;$

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = c(u + \Delta u) - cu = c\Delta u;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

- $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$ $\quad \big(u = u(x), \quad v = v(x)\big).$

Доказательство. $\quad y = u \pm v;$

$$\Delta y = \big((u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)\big) - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

- $$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \qquad \big(u = u(x), \quad v = v(x)\big).$$

Доказательство. $$y = u \cdot v;$$

$$\Delta y = \big((u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)\big) - u \cdot v = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot u' + u \cdot v' + 0.$$

- $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

Доказательство. $$y = \frac{u}{v};$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v \cdot v}.$$

Следствие.

Если числитель дроби – постоянная величина, то

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{0 \cdot v - c \cdot v'}{v^2} = -c\,\frac{v'}{v^2}.$$

7. Таблица производных

1) $y = c \qquad y' = 0$

2) $y = x \qquad y' = 1$

3) $y = x^{\alpha} \qquad y' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $y = a^x$ $\qquad y' = a^x \ln a$

$y = e^x$ $\qquad y' = e^x$

5) $y = \log_a x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$y = \ln x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x}$

6) $y = \sin x$ $\qquad y' = \cos x$

7) $y = \cos x$ $\qquad y' = -\sin x$

8) $y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9) $y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10) $y = \arcsin x \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $y = \arccos x \qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $y = \operatorname{arctg} x \qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $y = \operatorname{arcctg} x \qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

8. Уравнения касательной и нормали к кривой

Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 – это прямая,
во-первых, проходящая через эту точку, и,
во-вторых, имеющая угловой коэффициент
$f'(x_0)$.

Раз это прямая с заданным угловым коэффициентом, то ее уравнение имеет вид:

$$y = f'(x_0)\cdot x + b. \qquad (*)$$

А так как эта прямая проходит через данную точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению:

$$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b,$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0,$$

Подставляя это значение в уравнение (*) , получаем уравнение касательной к кривой в данной точке:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, перпендикулярная к касательной в точке касания.

Ее уравнение имеет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

ПРИМЕР. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой 0.

Имеем $y' = 2x - 3.$

$$x_0 = 0, \quad f(x_0) = 2, \quad f'(x_0) = -3.$$

Поэтому, искомые

уравнение касательной

$$y = 2 - 3(x - 0) = -3x + 2;$$

уравнение нормали

$$y = \frac{1}{3}x + 2.$$

9. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

Теорема.

Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке u, то сложная функция дифференцируема в точке x и

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Возможна и более сложная зависимость – с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных: $y = y(x)$, где $x = x(u)$, а $u = u(v)$ и $v = v(t)$:

$$y'_t(t) = y'_x(x) \cdot x'_u(u) \cdot u'_v(v) \cdot v'(t).$$

ПРИМЕР.

$$y = \ln \sin x.$$

$$y = \ln u, \qquad u = \sin x.$$

$$y'_u = (\ln u)' = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sin x}, \quad u'_x = (\sin x)' = \cos x.$$

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

10. Производная обратной функции

Теорема. Если монотонная функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и в точке x этого отрезка имеет производную $f'(x)$, отличную от нуля, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ в соответствующей точке y имеет производную $\varphi'(y)$, причем

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \left(x'_y = \frac{1}{y'_x} \right).$$

11. Дифференцирование неявных функций

Функция y от аргумента x называется ***неявной***, если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

не разрешенным относительно y.

Чтобы найти производную y' неявной функции y, определяемой уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

нужно продифференцировать по x обе части этого равенства, считая, что y есть функция от x, затем полученное уравнение решить относительно искомой производной.

ПРИМЕР. Найти производную y'_x функции, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Дифференцируем по x и учитываем, что $y=y(x)$:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

12. Производная функции, заданной параметрически

Функциональная зависимость между переменными x и y часто задается системой вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Здесь аргумент x и функция y заданы как функции некоторой переменной t.
Это и есть параметрический способ задания функции, при этом t называется параметром.

Имеем параметрически заданную функцию

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Предположим, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \gamma(x)$.

Предположим, что x – независимая переменная, тогда y можно рассматривать как сложную функцию переменной x, а t будет промежуточным аргументом.

Тогда $$y'_x = y'_t \cdot t'_x,$$

а по теореме о производной обратной функции получаем $t'_x = 1/x'_t.$

Т.о. $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

ПРИМЕР. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

$$y'_t = 3b\sin^2 t \cdot \cos t, \qquad x'_t = 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t),$$

$$y'_x = -\frac{3b\sin^2 t \cdot \cos t}{3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\,.$$

13. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмической производной функции

$y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют ***логарифмическим дифференцированием***.

В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной.

Например, при нахождении производной функции

$$y = u^{v},$$

где $$u = u(x), \qquad v = v(x).$$

$$\ln y = \ln\left(u^{v}\right) = v \cdot \ln(u) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \left(v \cdot \ln(u)\right)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \quad \Rightarrow$$

$$y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) = u^{v}\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right).$$