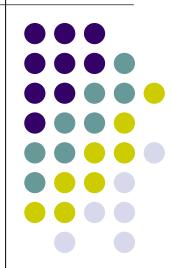
## ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

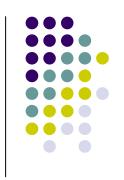






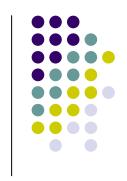
- 1) Определение
- 2) Механический смысл второй производной
- 3) Формула Лейбница
- 4) Вторая производная функции, заданной параметрически
- 5) Дифференциалы высших порядков

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ



Пусть функция y = f(x) дифференцируема на отрезке [a;b].

Производная от этой функции f'(x) представляет собой функцию от x, которая может быть также дифференцируемой на [a;b]. Производная от производной данной функции f(x) называется производной второго порядка или второй производной.



Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и т.д.

**Производной** n **-го порядка** от функции f(x) называется производная от производной (n-1) -го порядка.

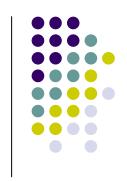
#### Обозначение:



$$y'', y''', y^{(4)}, ..., y^{(n)}, ...,$$

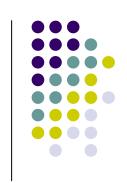
$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), ..., f^{(n)}(x), ...,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$$



### пример. Найти $y^{(4)}$ от функции

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 4x + 1.$$



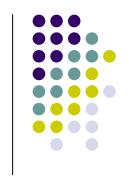
#### PEWEHNE.

$$y' = 12x^3 + 15x^2 - 4;$$

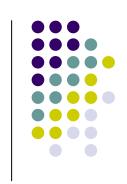
$$y'' = 36x^2 + 30x;$$

$$y''' = 72x + 30;$$

$$y^{(4)} = 72.$$



В некоторых случаях удается установить закон образования n-й производной, и тогда необходимую производную находим, не определяя производных предшествующих порядков.

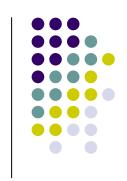


пример. Найти  $y^{(n)}$  от функции  $y = x^{\lambda}$ .

**PEWEHVE.** 
$$y' = \lambda x^{\lambda - 1}$$
;

$$y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda - 2};$$

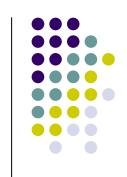
$$y''' = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^{\lambda - 3}.$$



Здесь можно заметить общий закон:

$$y^{(n)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdot \dots \cdot (\lambda - (n - 1))x^{\lambda - n}.$$

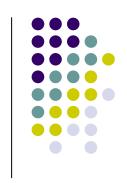
Методом математической индукции покажем, что полученная формула справедлива для любого натурального числа n.



- 1) Верность формулы при n = 1 уже проверена.
- 2) Пусть формула верна для некоторого n = k.
- 3) Тогда

$$y^{(k+1)} = \left(\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdot \dots \cdot \left(\lambda - (k-1)\right)x^{\lambda - k}\right)' =$$

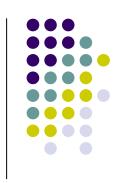
$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdot \dots \cdot (\lambda - (k - 1))(\lambda - k)x^{\lambda - (k + 1)}.$$



Итак, формула справедлива и при n = k + 1. т.е. она верна для любого натурального числа.

Если  $\lambda$  — натуральное число ( $\lambda = m$ ), то, полагая n = m, получим

$$y^{(m)} = m(m-1)(m-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = m!,$$



т.е. производная m-го порядка является постоянным числом.

Следовательно, производные порядков

$$(m+1), (m+2)$$
 и т.д.

будут равны нулю.

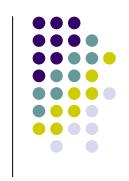
пример. Найти  $y^{(n)}$  от функции  $y = 3^{2x+5}$ .

#### РЕШЕНИЕ. Последовательно находим

$$y' = 3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2;$$

$$y'' = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^2 \cdot 2^2;$$

$$y''' = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^3 \cdot 2^3.$$

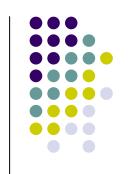


Делаем предположение, что

$$y^{(n)} = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^n \cdot 2^n.$$

С помощью метода математической индукции можно показать справедливость этой формулы для любого натурального n.

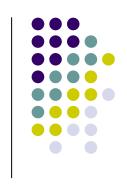
### 2. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ



Пусть некоторое тело совершает прямолинейное движение и пройденным путь в зависимости от времени выражается формулой s = f(t).

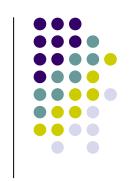
Тогда скорость тела в момент времени t

$$v = f'(t)$$
.



Если движение тела не является равномерным, т.е. скорость изменяется с течением времени, то за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  произойдет изменение скорости

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t).$$

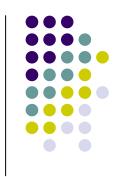


Отношение приращения скорости  $\Delta v$  к соответствующему промежутку времени  $\Delta t$  называется *средним ускорением*.

Тогда ускорение в данный момент t:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

### 3. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА



Найдем производную n -го порядка функции  $y = u(x) \cdot v(x)$ .

Если функции u(x) и v(x) имеют производные до n -го порядка включительно, то справедливы следующие формулы:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

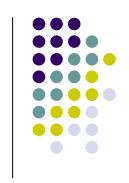


$$(u \cdot v)'' = (u' \cdot v + u \cdot v')' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v'';$$

$$(u \cdot v)''' = u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + u \cdot v''';$$

$$(u \cdot v)^{(4)} =$$

$$= u^{(4)} \cdot v + 4u''' \cdot v' + 6u'' \cdot v'' + 4u' \cdot v''' + u \cdot v^{(4)};$$



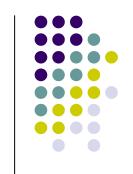
Проанализировав эти выражения, делаем предположение, что

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

С помощью метода математической индукции доказывается его справедливость.

Эта формула называется формулой Лейбница.

### 4. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ



Пусть функция у от х задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

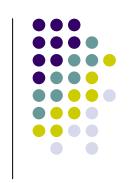
Будем считать, что функция  $x = \varphi(t)$  имеет обратную функцию, а также существуют вторые производные  $\varphi''(t)$ ,  $\psi''(t)$ .



Ранее было получено, что

$$y'_{x} = \frac{y'_{t}}{x'_{t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

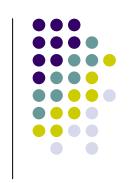
Эта производная является сложной функцией переменной x, а t играет роль промежуточного аргумента и определяется



как функция переменной x из уравнения  $x = \varphi(t)$ .

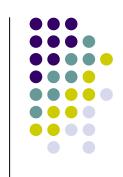
Поэтому при нахождении второй производной применяем теорему о производной сложной функции:

$$y'_{x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'_{t}}{x'_{t}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'_{t}}{x'_{t}} \right) \cdot \frac{dt}{dx}.$$



Далее к первому сомножителю — производной по t — применяем правило дифференцирования дроби, а ко второму сомножителю применяем теорему о производной обратной функции, получаем

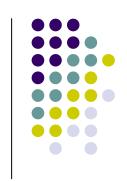
$$y_{xx}'' = \frac{y_{tt}'' \cdot x_t' - y_t' \cdot x_{tt}''}{(x_t')^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_{tt}'' \cdot x_t' - y_t' \cdot x_{tt}''}{(x_t')^3}$$



ИЛИ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} =$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi''(t)\cdot\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$



**пример**. Функция *у* от *х* задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Найти 
$$\frac{dy}{dx}$$
,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

#### PEWEHNE.

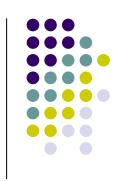
$$x'_{t} = -a \sin t$$
,  $x''_{tt} = -a \cos t$ ,  $y''_{t} = b \cos t$ ,  $y''_{tt} = -b \sin t$ .

$$y'_{x} = \frac{y'_{t}}{x'_{t}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t;$$

$$y''_{xx} = \frac{(-b\sin t)(-a\sin t) - b\cos t(-a\cos t)}{(-a\sin t)^2} =$$

$$= -\frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 t}.$$

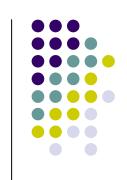
### 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ



Пусть функция y = f(x), где x – независимая переменная, дифференцируема в точке x.

Тогда dy = f'(x)dx.

Дифференциал функции является некоторой функцией от x, так как первый множитель f'(x) может зависеть от x; множитель dx, являющийся приращением независимой переменной x, не зависит от x.



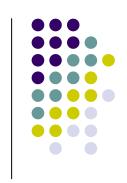
#### Поэтому в рассматриваемом случае имеем

$$d(dy) = d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx =$$

$$= f''(x)dx^2.$$

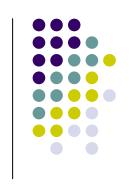
Аналогично, получаем

$$d^{n}y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^{n}$$
.



Из последней формулы следует, что производная n-го порядка может быть представлена как отношение дифференциала порядка n от функции к дифференциалу независимой переменной в степени n:

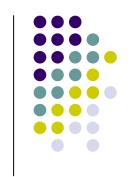
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$



Рассмотрим дифференциалы высших порядков сложной функции.

Пусть 
$$y = f(x)$$
,  $x = \varphi(t)$ .

В силу инвариантности формы дифференциала имеем dy = f'(x)dx, но здесь  $dx = \varphi'(t)dt$  зависит от независимой переменной t.

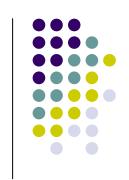


# Применяя правило дифференцирования произведения, получаем

$$d^{2}y = d(dy) = d(f'(x)dx) =$$

$$= d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)dx^{2} + f'(x)d^{2}x.$$

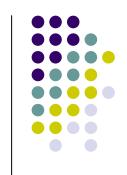


#### Вычислим дифференциал третьего порядка:

$$d^{3}y = d(d^{2}y) = d(f''(x)dx^{2} + f'(x)d^{2}x) =$$

$$= d(f''(x))dx^{2} + f''(x)d(dx^{2}) +$$

$$+ d(f'(x))d^{2}x + f'(x)d(d^{2}x) =$$



$$= f'''(x)dx^{3} + f''(x)2dxd^{2}x +$$

$$+ f''(x)dx d^{2}x + f'(x)d^{3}x =$$

$$= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx d^2x + f'(x)d^3x.$$