# ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

# *Рассматриваемые вопросы*

1) Определение
2) Механический смысл второй производной
3) Формула Лейбница
4) Вторая производная функции, заданной параметрически
5) Дифференциалы высших порядков

# *1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$.

Производная от этой функции $f'(x)$ представляет собой функцию от $x$, которая может быть также дифференцируемой на $[a; b]$.

Производная от производной данной функции $f(x)$ называется ***производной второго порядка*** или ***второй производной***.

Производная от второй производной называется ***<u>производной третьего порядка</u>*** или ***<u>третьей производной</u>*** и т.д.

***<u>Производной</u>*** $n$ ***<u>-го порядка</u>*** от функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка.

Обозначение:

$$y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots,$$

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots$$

**ПРИМЕР**. Найти $y^{(4)}$ от функции

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 4x + 1.$$

**РЕШЕНИЕ.**

$$y' = 12x^3 + 15x^2 - 4;$$

$$y'' = 36x^2 + 30x;$$

$$y''' = 72x + 30;$$

$$y^{(4)} = 72.$$

В некоторых случаях удается установить закон образования $n$-й производной, и тогда необходимую производную находим, не определяя производных предшествующих порядков.

**ПРИМЕР**. Найти $y^{(n)}$ от функции $y = x^{\lambda}$.

**РЕШЕНИЕ**.

$$y' = \lambda x^{\lambda-1};$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2};$$

$$y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}.$$

Здесь можно заметить общий закон:

$$y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot\ldots\cdot\big(\lambda-(n-1)\big)x^{\lambda-n}.$$

Методом математической индукции покажем, что полученная формула справедлива для любого натурального числа $n$.

1) Верность формулы при $n=1$ уже проверена.
2) Пусть формула верна для некоторого $n=k$.
3) Тогда

$$y^{(k+1)} = \left(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot\ldots\cdot\big(\lambda-(k-1)\big)x^{\lambda-k}\right)' =$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot\ldots\cdot\big(\lambda-(k-1)\big)(\lambda-k)x^{\lambda-(k+1)}.$$

Итак, формула справедлива и при $n = k + 1$.
т.е. она верна для любого натурального числа.

Если $\lambda$ – натуральное число $(\lambda = m)$, то,
полагая $n = m$, получим

$$y^{(m)} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = m!,$$

т.е. производная $m$-го порядка является постоянным числом.

Следовательно, производные порядков

$$(m+1), (m+2) \quad \text{и т.д.}$$

будут равны нулю.

**ПРИМЕР**. Найти $y^{(n)}$ от функции $y = 3^{2x+5}$.

**РЕШЕНИЕ**. Последовательно находим

$$y' = 3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2;$$

$$y'' = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^2 \cdot 2^2;$$

$$y''' = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^3 \cdot 2^3.$$

Делаем предположение, что

$$y^{(n)} = 3^{2x+5} \cdot (\ln 3)^n \cdot 2^n.$$

С помощью метода математической индукции можно показать справедливость этой формулы для любого натурального $n$.

# 2. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть некоторое тело совершает прямолинейное движение и пройденным путь в зависимости от времени выражается формулой $s = f(t)$.

Тогда скорость тела в момент времени $t$

$$v = f'(t).$$

Если движение тела не является равномерным, т.е. скорость изменяется с течением времени, то за некоторый промежуток времени $\Delta t$ произойдет изменение скорости

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t).$$

Отношение приращения скорости $\Delta v$ к соответствующему промежутку времени $\Delta t$ называется ***средним ускорением***.

Тогда ускорение в данный момент $t$ :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

# 3. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА

Найдем производную $n$ -го порядка функции

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до $n$ -го порядка включительно, то справедливы следующие формулы:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$(u \cdot v)'' = (u' \cdot v + u \cdot v')' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v'';$$

$$(u \cdot v)''' = u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + u \cdot v''';$$

$$(u \cdot v)^{(4)} =$$

$$= u^{(4)} \cdot v + 4u''' \cdot v' + 6u'' \cdot v'' + 4u' \cdot v''' + u \cdot v^{(4)};$$

Проанализировав эти выражения, делаем предположение, что

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

С помощью метода математической индукции доказывается его справедливость.

Эта формула называется ***формулой Лейбница***.

# 4. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция $y$ от $x$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию, а также существуют вторые производные $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$.

Ранее было получено, что

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Эта производная является сложной функцией переменной $x$, а $t$ играет роль промежуточного аргумента и определяется как функция переменной $x$ из уравнения $x=\varphi(t)$.

Поэтому при нахождении второй производной применяем теорему о производной сложной функции:

$$y'_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}.$$

Далее к первому сомножителю – производной по $t$ – применяем правило дифференцирования дроби, а ко второму сомножителю применяем теорему о производной обратной функции, получаем

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \psi''(t)\cdot\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

**ПРИМЕР**. Функция $y$ от $x$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

## РЕШЕНИЕ.

$$x'_t = -a\sin t, \qquad x''_{tt} = -a\cos t,$$
$$y'_t = b\cos t, \qquad y''_{tt} = -b\sin t.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t;$$

$$y''_{xx} = \frac{(-b\sin t)(-a\sin t) - b\cos t(-a\cos t)}{(-a\sin t)^2} =$$

$$= -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

# 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y = f(x)$, где $x$ – независимая переменная, дифференцируема в точке $x$.

Тогда $dy = f'(x)dx.$

Дифференциал функции является некоторой функцией от $x$, так как первый множитель $f'(x)$ может зависеть от $x$; множитель $dx$, являющийся приращением независимой переменной $x$, не зависит от $x$.

Поэтому в рассматриваемом случае имеем

$$d(dy) = d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)'dx =$$

$$= f''(x)dx^2.$$

Аналогично, получаем

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Из последней формулы следует, что производная $n$-го порядка может быть представлена как отношение дифференциала порядка $n$ от функции к дифференциалу независимой переменной в степени $n$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Рассмотрим дифференциалы высших порядков сложной функции.

Пусть $y = f(x), \quad x = \varphi(t).$

В силу инвариантности формы дифференциала имеем $dy = f'(x)dx,$

но здесь $dx = \varphi'(t)dt$ зависит от независимой переменной $t.$

Применяя правило дифференцирования произведения, получаем

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) =$$

$$= d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Вычислим дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x\right) =$$

$$= d\left(f''(x)\right)dx^2 + f''(x)d\left(dx^2\right) +$$

$$+ d\left(f'(x)\right)d^2x + f'(x)d\left(d^2x\right) =$$

$$= f'''(x)dx^3 + f''(x)2dxd^2x +$$

$$+ f''(x)dx\, d^2x + f'(x)d^3x =$$

$$= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx\, d^2x + f'(x)d^3x.$$