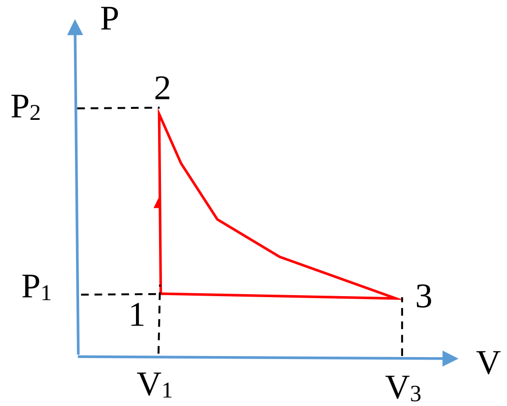
CC_training (Correction)

Exercice 1 : Cycle de Lenoir

1.1

Tracé du cycle :



1.2

On note W le travail échangé par le gaz au cours d'un cycle et Q_{12} la chaleur fournie au système au cours de la transformation 1 → 2. Le rendement η du cycle de Lenoir s'écrit :

$$\eta = -\frac{W}{Q_{12}}$$

Le premier principe de la thermodynamique donne :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

Où (sachant que $Q_{23} = 0$ car adiabatique) :

$$Q = Q_{12} + Q_{31}$$

Avec l'adiabatique on écrit (3ème relation de Laplace) :

$$P_2^{\frac{1}{\gamma}-1} \times T_2 = P_3^{\frac{1}{\gamma}-1} \times T_3$$

Ainsi :

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}}$$

<u>Pour l'isochore 1 → 2 (voir votre cours !) :</u>

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

Sachant que :

$$P_1V_1 = nRT_1$$

Et :

$$P_2V_1 = nRT_2$$

Il vient :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Soit :

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Pour l'isobare 3 → 1 :

$$Q_{31} = \Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_1 - T_3)$$

On sait également que $P_1 = P_3$.

Avec l'équation sur le rendement, nous devons calculer :

$$\frac{Q_{31}}{Q_{12}} = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_1 - T_3).\frac{\gamma - 1}{nR(T_2 - T_1)} = \gamma\frac{(T_1 - T_3)}{(T_2 - T_1)}$$

Aussi, le rendement est égal à :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 - \gamma\frac{(T_3 - T_1)}{(T_2 - T_1)}$$

Or, d'après ce que l'on a obtenu avant :

$$\Gamma = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

En divisant le quotient par T_1 (numérateur et dénominateur) :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{((T_3/T_1) - 1)}{((T_2/T_1) - 1)}$$

Que l'on écrit :

$$\eta = 1 - \gamma\frac{(1 - (T_3/T_1))}{(1 - \Gamma)}$$

Or, sachant que $P_1 = P_3$:

$$P_1V_1 = nRT_1$$

Et :

$$P_1V_3 = nRT_3$$

En divisant les deux expressions, on obtient facilement (sachant que $V_1 = V_2$) :

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_1}{T_3}$$

Mais d'après la 1ère relation de Laplace :

$$P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma$$

On a :

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma = \frac{P_3}{P_2}$$

Soit :

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$

Avec $P_3 = P_1$:

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{1}{\Gamma}\right)^{1/\gamma}$$

Soit enfin, d'après ce que l'on a vu précédemment :

$$\frac{V_3}{V_2} = \Gamma^{1/\gamma} = \frac{T_3}{T_1}$$

Le rendement du cycle de Lenoir peut alors s'écrire :

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(1 - \Gamma^{1/\gamma}\right)}{(1 - \Gamma)}$$

Exercice 2 : Traduction mathématique du premier principe

2.1

dU(T,V) est une DTE, on peut alors écrire mathématiquement :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$$

2.2

Si on détermine ΔU sur un chemin quasi-statique (car U est une fonction d'état) :

$$dU(T,V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = \delta W + \delta Q = c_V dT + (l - P) dV$$

D'après la question 2.1, on obtient par analogie :

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial (l - P)}{\partial T}\right)_V$$

2.3

De même,

$$dH(T,P) = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP = \delta W + \delta Q = c_p dT + (h + V) dP$$

Soit par analogie :

$$\left(\frac{\partial c_P}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial (h + V)}{\partial T}\right)_P$$

Exercice 3 : Représentation de Clapeyron : isotherme et adiabatique (question de cours)

La réponse à cette question est présente directement dans le document du cours fourni pour cette unité d'enseignement.