JOURNAL OF ALGEBRA 48, 96–112 (1977)

Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes

J. DIXMIER

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Communicated by A. W. Goldie

Received August 16, 1976

1. INTRODUCTION

1.1. Dans tout cet article, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0 non dénombrable (sauf en 1.7), et $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie de dimension finie sur k. On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, $G(\mathfrak{g}) = G$ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, Prim $U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ muni de la topologie de Jacobson.

1.2. Soient $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$. Alors $I \cap U(\mathfrak{k})$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{k})$ ([9, 3.3.4]. On note $V(I, \mathfrak{k})$ la partie fermée irréductible de Prim $U(\mathfrak{k})$ correspondant à $I \cap U(\mathfrak{k})$, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{k})$ contenant $I \cap U(\mathfrak{k})$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathfrak{k}$, donc dans Prim $U(\mathfrak{k})$, et $V(I, \mathfrak{k})$ est G-invariant.

Supposons $\mathfrak{k}$ résoluble et I primitif. Alors $V(I, \mathfrak{k})$ est l'adhérence d'une G-orbite [8, théorème] qu'on note $\omega(I, \mathfrak{k})$(cette G-orbite est unique, car chaque G-orbite dans Prim $U(\mathfrak{k})$ est localement fermée d'après [1, 16.3]).

1.3. On a énoncé dans [5, 1.5] une conjecture, qui est l'analogue pour les algèbres enveloppantes d'un théorème de Mackey pour les représentations induites des groupes (cf. [5, 5.4, 5.5; 3, p. 988], pour des vérifications partielles). On va établir le résultat suivant, assez proche de la conjecture générale:

THÉORÈME A. *Soient $\mathfrak{k}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$, $R \in \omega(I, \mathfrak{k})$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{st}(R, \mathfrak{g})$. Il existe un idéal primitif Q de $U(\mathfrak{h})$ tel que $Q \cap U(\mathfrak{k}) = R$ et* $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) = I$.

Rappelons les notations utilisées: $\mathfrak{st}\,(R, \mathfrak{g})$ est l'ensemble des $y \in \mathfrak{g}$ tels que $[y, R] \subset R$; et ind $(Q, \mathfrak{g})$ est le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $U(\mathfrak{g})Q$ (cette notion est liée à celle de représentation induite (cf. [9, 5.1.7, 5.3.1]).

1.4. Soient V une variété algébrique affine irréductible sur k, et V_1, V_2,... des parties de V de réunion V. Comme k est non dénombrable, on sait

ISSN 0021-8693

qu'il existe un entier r tel que V_r soit dense dans V. Nous allons généraliser ce fait aux algèbres enveloppantes:

THÉORÈME B. *Soient I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$, $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ contenant I. Soient $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots$ des parties de $\mathscr{P}$ telles que $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \cdots$. Il existe un entier r tel que $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P = I$.*

1.5. Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$. Considérons les propriétés suivantes:

(a) I est primitif;

(b) l'intersection des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I est distincte de I;

(c) le centre de l'anneau des fractions de $U(\mathfrak{g})/I$ est réduit à k.

On sait que (b) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (c) [9, pp. 141–142]. Pour $\mathfrak{g}$ résoluble, les trois propriétés sont équivalentes [9, pp. 141–142], et l'on conjecture qu'il en est de même en général. Nous ne savons toujours pas prouver cette conjecture. Mais considérons la propriété suivante:

(b′) il existe une suite d'idéaux bilatères $I_1, I_2, \ldots$ de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I, telle que tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I contienne l'un des I_r.

Il est facile de prouver directement que (b) $\Rightarrow$ (b′). En fait, on va établir le résultat suivant:

THÉORÈME C. *Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$. Les conditions* (a), (b′), (c) *sont équivalentes.*

1.6. Les démonstrations des théorèmes A, B, C sont très liées. Au Chap. 2, nous établirons l'implication (c) $\Rightarrow$ (b′) du théorème C (rappelons que (a) $\Rightarrow$ (c) est déjà connu). Notons A_n (resp. B_n) l'assertion que le théorème A (resp. B) est vrai quand $\dim \mathfrak{g} \leqslant n$. Les assertions A_0, B_0 sont triviales. On prouvera (grâce notamment aux implications (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′)), que:

$$B_{n-1} \Rightarrow A_n \qquad \text{(Sect. 4)},$$
$$B_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n \Rightarrow B_n \qquad \text{(Sect. 6)}.$$

Les théorèmes A et B seront ainsi établis. Montrons dès maintenant comment on en déduit (b′) $\Rightarrow$ (a) dans le théorème C. Soient $I_1, I_2, \ldots$ avec la propriété (b′). Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ contenant I. Soit $\mathscr{P}_r$ l'ensemble des $P \in \mathscr{P}$ tels que $P \supset I_r$. Si $I \notin \mathscr{P}$, on a $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \cup \cdots$. D'après le théorème B, il existe r tel que $I = \bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P \supset I_r$, ce qui est absurde. Donc $I \in \mathscr{P}$.

1.7. Supposons provisoirement k dénombrable (mais toujours algébriquement clos de caractéristique 0). Alors le théorème B devient inexact: il suffit de prendre $\mathfrak{g}$ de dimension 1 (de sorte que $U(\mathfrak{g})$ s'identifie à $k[X]$), $I = 0$, et pour $\mathscr{P}_n$ les parties de $\mathscr{P}$ réduites à un élément ($\mathscr{P}$ est dénombrable dans ce cas). Le même exemple prouve que l'implication (b′) $\Rightarrow$ (a) du théorème C devient aussi inexacte. Par contre, les démonstrations de (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′) restent valables.

Il est probable que le théorème A reste valable.

1.8. Soient I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$, et E l'espace des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})/I$, muni de la topologie de Jacobson. Le théorème B signifie, comme on le voit facilement, que E est un espace de Baire. Rappelons que l'espace des idéaux primitifs d'une C^*-algèbre, donc en particulier l'espace dual d'un groupe localement compact, sont aussi des espaces de Baire.

1.9. Soient E un espace hilbertien, G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ la complexification de son algèbre de Lie, π une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G dans E, π_∞ la représentation correspondante de $U(\mathfrak{g})$ dans l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour π. On sait que Ker π_∞ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ lorsque G est semi-simple [12, p. 227] ou résoluble [10]. On déduira du Théorème C que cela reste vrai pour G quelconque (7.2). On prouvera même un résultat plus général relatif au cas où E est un espace de Banach.

2. Démonstration de (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′) dans le théorème C

2.1. Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ qui vérifie la condition (c) de 1.5. Soient $A = U(\mathfrak{g})/I$, et $a, b \in A$. Si $axb = bxa$ pour tout $x \in A$, a et b sont linéairement dépendants sur k. Cela résulte de [14, théorème 1]. (Je dois cette référence à P. M. Cohn. A. Joseph m'a fait remarquer que cela résulte aussi du théorème de Faith–Utumi. Enfin, A. W. Goldie m'a communiqué une démonstration directe.)

2.2. Lemme. *Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ qui vérifie la condition* (c) *de* 1.5. *Soient $A = U(\mathfrak{g})/I$, V un $\mathfrak{g}$-module semi-simple de dimension finie, H un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A)$, *$\mathscr{J}$ un ensemble d'idéaux bilatères de A d'intersection* 0. *Pour tout $J \in \mathscr{J}$, soit θ_J l'application canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A/J)$. *Il existe $J \in \mathscr{J}$ tel que $\theta_J \mid H$ soit injective.*

(On considère A comme un $\mathfrak{g}$-module grâce à la représentation adjointe.)

Soit $n = \dim H$. Le lemme est trivial pour $n \leqslant 1$. Supposons $n > 1$ et le lemme démontré pour $\dim H < n$.

(a) Dans cette partie de la démonstration, on suppose V simple.

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de H. Raisonnant par l'absurde, supposons que, pour tout $J \in \mathscr{J}$, il existe $(\lambda_{1J}, \ldots, \lambda_{nJ}) \in k^n - \{0\}$ tel que

$$(\lambda_{1J}\varphi_1 + \cdots + \lambda_{nJ}\varphi_n)(V) \subset J.$$

Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $\mathscr{J}_i$ l'ensemble des $J \in \mathscr{J}$ tels que $\lambda_{iJ} \neq 0$. On a $\mathscr{J} = \mathscr{J}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{J}_n$, donc les $\bigcap_{J \in \mathscr{J}_i} J$ ont pour intersection 0. Par suite, l'un des $\bigcap_{J \in \mathscr{J}_i} J$ est nul. On supposera par exemple $\bigcap_{J \in \mathscr{J}_1} J = 0$.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, soit ψ_i le k-homomorphisme de $V \otimes_k V$ dans A défini par

$$\psi_i(v \otimes v') = \varphi_i(v)\,\varphi_n(v') - \varphi_n(v)\,\varphi_i(v')$$

pour $v, v' \in V$. On vérifie sans peine que ψ_i est un $\mathfrak{g}$-homomorphisme.

Pour $v, v' \in V$ et $J \in \mathscr{J}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda_{1J}\psi_1 + \cdots + \lambda_{n-1,J}\psi_{n-1})(v \otimes v') \\ = (\lambda_{1J}\varphi_1 + \cdots + \lambda_{nJ}\varphi_n)(v)\,\varphi_n(v') - \varphi_n(v)(\lambda_{1J}\varphi_1 + \cdots + \lambda_{nJ}\varphi_n)(v') \in J\end{aligned}$$

donc

$$(\lambda_{1J}\psi_1 + \cdots + \lambda_{n-1,J}\psi_{n-1})(V \otimes V') \subset J.$$

Let $\mathfrak{g}$-module $V \otimes V'$ est semi-simple de dimension finie. Pour tout $J \in \mathscr{J}_1$, on a $\lambda_{1J} \neq 0$, donc les images de $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V \otimes V, A/J)$ sont linéairement dépendantes sur k. D'après l'hypothèse de récurrence, $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sont linéairement dépendants sur k. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in k^{n-1} - \{0\}$ tel que $\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\psi_{n-1} = 0$. Quels que soient $v, v' \in V$, on a

$$(\lambda_1\varphi_1(v) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v))\,\varphi_n(v') = \varphi_n(v)(\lambda_1\varphi_1(v') + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v')). \quad (1)$$

Soient $x \in \mathfrak{g}$, y son image canonique dans A. Remplaçant v par $x \cdot v$ dans (1), il vient

$$\begin{aligned}y(\lambda_1\varphi_1(v) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v))\,\varphi_n(v') - (\lambda_1\varphi_1(v) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v))\,y\varphi_n(v') \\ = y\varphi_n(v)(\lambda_1\varphi_1(v') + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v')) - \varphi_n(v)\,y(\lambda_1\varphi_1(v') + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v'))\end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (1),

$$(\lambda_1\varphi_1(v) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v))\,y\varphi_n(v') = \varphi_n(v)\,y(\lambda_1\varphi_1(v') + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v')). \; (2)$$

De proche en proche, on voit que (2) reste valable pour tout $y \in A$.

Faisons $v' = v$. D'après la condition (c) et 2.1, il existe $(\lambda_v, \mu_v) \in k^2 - \{0\}$ tel que

$$\lambda_v(\lambda_1\varphi_1(v) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(v)) + \mu_v\varphi_n(v) = 0.$$

Si $\mu_v = 0$, on a $\lambda_v \neq 0$. Dans tous les cas, $(\lambda_v\lambda_1, ..., \lambda_v\lambda_{n-1}, \mu_v) \in k^n - \{0\}$. Fixant $v \in V - \{0\}$, on voit que

$$\mathrm{Ker}(\lambda_v\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_v\lambda_{n-1}\varphi_{n-1} + \mu_v\varphi_n) \neq 0$$

donc $\lambda_v\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_v\lambda_{n-1}\varphi_{n-1} + \mu_v\varphi_n = 0$ puisque V est simple. Cela contredit l'hypothèse que $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de H.

(b) Le lemme est donc établi pour V simple et $\dim H \leqslant n$.

Supposons V semi-simple et $\dim H = n$. Soit $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ où $V_1, ..., V_p$ sont des $\mathfrak{g}$-modules simples. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, A) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_p, A).$$

Soit H_r la projection de H sur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_r, A)$. Soit $\mathcal{T}_r$ l'ensemble des $J \in \mathcal{J}$ tels que l'application canonique $H_r \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_r, A/J)$ soit non injective. D'après la partie (a) de la démonstration, on a $\bigcap_{J\in\mathcal{T}_r} J \neq 0$. Par suite, $\bigcap_{r=1}^{p} (\bigcap_{J\in\mathcal{T}_r} J) \neq 0$, de sorte que $\mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_p \neq \mathcal{J}$. Soit $J \in \mathcal{J}$ tel que $J \notin \mathcal{T}_1, ..., J \notin \mathcal{T}_p$. Alors l'application canonique $H_r \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_r, A/J)$ est injective pour $r = 1, ..., p$. Si $h \in H - \{0\}$, il existe $r \in \{1, ..., p\}$ tel que $h \mid V_r \neq 0$. Alors l'image de $h \mid V_r$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_r, A/J)$ est non nulle. A fortiori, $\theta_J(h) \neq 0$. Donc l'application $\theta_J \mid H$ est injective.

2.3. Lemme. *Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ qui vérifie la condition* (c) *de* 1.5. *Soit $A = U(\mathfrak{g})/I$. Il existe des idéaux bilatères non nuls $I_1, I_2, ...$ de A tels que tout idéal bilatère non nul de A contienne l'un des I_r (autrement dit, l'implication* (c) $\Rightarrow$ (b′) *est vraie).*

Soit B la somme des sous-$\mathfrak{g}$-modules simples (nécessairement de dimension finie) de A. On a $B = B_1 \oplus B_2 \oplus ...$, où chaque B_i est un $\mathfrak{g}$-module isotypique, somme directe de $\mathfrak{g}$-modules simples $B_{i1}, B_{i2}, ...$.

Soit L un idéal bilatère non nul de A. Il est somme de sous-$\mathfrak{g}$-modules de dimension finie, donc il contient un sous-$\mathfrak{g}$-module simple. Par suite, il existe i et n tels que $L \cap (B_{i1} + \cdots + B_{in}) \neq 0$.

Soit $\mathcal{T}_{i,n}$ l'ensemble des idéaux bilatères M de A tels que $M \cap (B_{i1} + \cdots + B_{in}) \neq 0$. Il suffit de prouver que $\bigcap_{M\in\mathcal{T}_{in}} M \neq 0$. Supposons $\bigcap_{M\in\mathcal{T}_{in}} M = 0$. Soit $V = B_{i1}$. Soit H l'ensemble des $\mathfrak{g}$-homomorphismes de V dans $B_{i1} + \cdots + B_{in}$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A)$. Appliquons le lemme 2.2 avec $\mathcal{J} = \mathcal{T}_{in}$. D'après ce lemme (dont nous utilisons les notations), il existe $M_0 \in \mathcal{T}_{in}$ tel que $\theta_{M_0} \mid H$ soit injective. Par définition de $\mathcal{T}_{in}$, on a $M_0 \cap (B_{i1} + \cdots + B_{in}) \neq 0$, donc il existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, A)$ tel que $h \neq 0$ et $h(V) \subset M_0$. Alors $\theta_{M_0}(h) = 0$, ce qui est absurde.

3. Quelques lemmes

3.1. Lemme. *Soient* $\mathfrak{k}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, π *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans un espace* A_π. *On suppose que* $\pi \mid \mathfrak{k}$ *possède une sous-représentation simple* σ *dans un espace* A_σ, *tel que* A_σ *engendre le* $\mathfrak{g}$*-module* A_π. *Soit* $\mathfrak{h} = \mathfrak{st}(\sigma, \mathfrak{g})$. *Il existe une représentation* ρ *de* $\mathfrak{h}$ *telle que* $\rho \mid \mathfrak{k}$ *soit un multiple de* σ, *et telle que* $\operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{g})$ *soit équivalente à* π.

(Rappelons (cf. [5]) que $\mathfrak{st}(\sigma, \mathfrak{g})$ est l'ensemble des $y \in \mathfrak{g}$ tels qu'il existe $s \in \operatorname{End}_k A_\sigma$ vérifiant $\sigma([y, x]) = [s, \sigma(x)]$ pour tout $x \in \mathfrak{k}$. On a $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{st}(\sigma, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{st}(\operatorname{Ker} \sigma)$.)

La démonstration est presque la même que celle de [5, 5.3.]. Soit $B \supset A_\sigma$ la somme des sous-$\mathfrak{k}$-modules de A_π isomorphes au $\mathfrak{k}$-module A_σ. Comme dans [5, 5.3], on voit que $\pi(\mathfrak{h})(B) \subset B$. Ainsi, il existe une représentation ρ de $\mathfrak{h}$ dans B telle que ρ soit une sous-représentation de $\pi \mid \mathfrak{h}$. Il est clair que $\rho \mid \mathfrak{k}$ est un multiple de σ. Soient $\pi' = \operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{g})$ et $A_{\pi'}$ l'espace de π'.

D'après [9, 5.1.3], il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme φ de $A_{\pi'}$ dans A_π qui se réduit à l'identité sur B. Comme A_σ engendre le $\mathfrak{g}$-module A_π, φ est surjectif. Soit $T = \operatorname{Ker} \varphi$, qui est un sous-$\mathfrak{g}$-module de $A_{\pi'}$. Si $T \neq 0$, on a $T \cap B \neq 0$ [9, 5.3.5]. Cela est absurde puisque $\varphi \mid B = \mathrm{id}_B$. Donce $T = 0$ et φ est un isomorphisme. Ainsi, π est équivalente à $\operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{g})$.

3.2. Lemme. *Soient* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, I *un idéal premier de* $U(\mathfrak{g})$, J *un idéal bilatère de* $U(\mathfrak{h})$ *tel que* $I = \operatorname{ind}(J, \mathfrak{g})$, *et* $J_1, \ldots, J_n$ *les idéaux premiers minimaux de* $U(\mathfrak{h})$ *contenant* J. *Alors il existe* $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tel que* $I = \operatorname{ind}(J_m, \mathfrak{g})$.

Soit B un $\mathfrak{h}$-module d'annulateur J. Soit $A = \operatorname{ind}(B, \mathfrak{g})$. L'annulateur de A est I. Il existe des entiers $i_1, \ldots, i_r$ tels que $J_{i_r} J_{i_{r-1}} \cdots J_{i_1} \subset J$. Posons

$$B_0 = B,\ B_1 = J_{i_1} B_0,\ B_2 = J_{i_2} B_1, \ldots, B_{r-1} = J_{i_{r-1}} B_{r-2},\ B_r = J_{i_r} B_{r-1}.$$

Alors $B_0, \ldots, B_r$ sont des sous-$\mathfrak{h}$-modules de B tels que

$$B = B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_{r-1} \supset B_r = 0,$$

et J_{i_s} annule B_{s-1}/B_s. Soit $A_s = \operatorname{ind}(B_s, \mathfrak{g})$. On a

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_{r-1} \supset A_r = 0,$$

et $A_{s-1}/A_s = \operatorname{ind}(B_{s-1}/B_s, \mathfrak{g})$. Soit I_s l'annulateur de A_{s-1}/A_s. On a $I_s \supset I$ pour tout s, et $I_r I_{r-1} \cdots I_1 \subset I$, donc il existe un $t \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $I_t = I$. Soit K l'annulateur de B_{t-1}/B_t. On a $K \supset J_{i_t} \supset J$, donc

$$I = I_t = \operatorname{ind}(K, \mathfrak{g}) \supset \operatorname{ind}(J_{i_t}, \mathfrak{g}) \supset \operatorname{ind}(J, \mathfrak{g}) = I,$$

d'où $I = \operatorname{ind}(J_{i_t}, \mathfrak{g})$.

3.3. Lemme. *Soient* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, (J_λ) *une famille d'idéaux bilatères de* $U(\mathfrak{h})$, $J = \bigcap_\lambda J_\lambda$, $I_\lambda = \operatorname{ind}(J_\lambda, \mathfrak{g})$, $I = \operatorname{ind}(J, \mathfrak{g})$. *Alors* $I = \bigcap_\lambda I_\lambda$.

Il existe une base (x_μ) du $U(\mathfrak{h})$-module à droite $U(\mathfrak{g})$. On a $U(\mathfrak{g})\, J_\lambda = \sum_\mu x_\mu J_\lambda$, et de même $U(\mathfrak{g})\, J = \sum_\mu x_\mu J$. Donc $U(\mathfrak{g})\, J = \bigcap_\lambda U(\mathfrak{g})\, J_\lambda$. Il est clair que $I \subset I_\lambda$ pour tout λ, donc $I \subset \bigcap_\lambda I_\lambda$. D'autre part, $\bigcap_\lambda I_\lambda$ est contenue dans $\bigcap_\lambda U(\mathfrak{g})\, J_\lambda$, donc dans $U(\mathfrak{g})J$, donc dans I (cf. aussi [2, 3.8]).

3.4. Lemme. *Soient* $\mathfrak{k}, I, R$ *comme dans le théorème* A, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{k}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, P *un idéal bilatère de* $U(\mathfrak{p})$ *tel que* $P \supset R$ *et* $\operatorname{ind}(P, \mathfrak{g}) = I$. *Alors* $P \cap U(\mathfrak{k}) = R$.

Grâce à 3.2, on se ramène au cas où P est premier. Posons $P \cap U(\mathfrak{k}) = S$. Alors S est un idéal premier de $U(\mathfrak{k})$ [9, 3.3.4] contenant R. Soit $S' = \bigcap_{g \in G} g(S)$. Comme $S \supset R$, on a $S' \supset I \cap U(\mathfrak{k})$. D'autre part, $U(\mathfrak{g})\, S'$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $U(\mathfrak{g})P$ donc dans I. Par suite, $S' = (U(\mathfrak{g})\, S') \cap U(\mathfrak{k}) \subset I \cap U(\mathfrak{k})$. On a donc prouvé que $S' = I \cap U(\mathfrak{k})$.

Soit T l'intersection des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{k})$ appartenant à $V(I, \mathfrak{k}) - \omega(I, \mathfrak{k})$. Alors T est un idéal bilatère G-invariant de $U(\mathfrak{k})$ qui contient strictement $I \cap U(\mathfrak{k})$. Si R_1 est un idéal primitif de $U(\mathfrak{k})$ contenant strictement R, les algèbres $U(\mathfrak{k})/R_1$ et $U(\mathfrak{k})/R$ sont non isomorphes (par exemple, la longueur maximale des chaines d'idéaux premiers, qui est finie d'après [9, 3.5.12], est différente pour ces deux algèbres); donc $R_1 \notin \omega(I, \mathfrak{k})$ et par suite $R_1 \supset T$.

Supposons $S \neq R$. D'après ce qui précède, tout idéal primitif de $U(\mathfrak{k})$ contenant S contient T. Comme S est premier, on a $S \supset T$, donc $I \cap U(\mathfrak{k}) = S' \supset T$, ce qui est absurde.

3.5. Lemme. *Soient* $\mathfrak{k}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, I *un idéal premier de* $U(\mathfrak{g})$, $K = I \cap U(\mathfrak{k})$, $M = U(\mathfrak{g})/I$, $N = U(\mathfrak{k})/K$, T *une partie oréenne de* N. *Alors* T *est une partie oréenne de* M.

La démonstration de [8, lemme 3(i) et (ii)], est applicable telle quelle. (Remarquer que p. 20, l.2 du bas, il suffit de savoir que $t_1'' \in T$; le fait que $t_2'' \in T$ n'est pas utilisé.)

3.6. Soient $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$, $K = I \cap U(\mathfrak{k})$, $M = U(\mathfrak{g})/I$, $N = U(\mathfrak{k})/K$, ϵ la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ dans N. Soit $f \in N - \{0\}$ un vecteur propre pour $\epsilon(\mathfrak{k})$. Alors f est non diviseur de zéro dans N [4, 1.2]. On vérifie sans peine que $\{1, f, f^2, \ldots\}$ est une partie oréenne de N. D'après 3.5, c'est une partie oréenne de M. On peut donc former la k-algèbre $M_{\{1, f, f^2, \ldots\}}$, qu'on notera M_f. Alors N_f s'identifie à une sous-algèbre de M_f.

3.7. Lemme. *Soient* $\mathfrak{k}, I, K, M, N, \epsilon$ *comme en* 3.6, *et supposons* $\mathfrak{k}$ *résoluble. Il existe* $f \in N - \{0\}$, *vecteur propre pour* $\epsilon(\mathfrak{k})$, *et une famille* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *d'éléments de* M, *tels que* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *soit une base du* N_f*-module à droite* M_f.

On raisonne comme dans [5, 4.5, 5.4, 6.2]. Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{N}^r$, notons x_λ la classe de $x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda}$ modulo I. On munit $\mathbf{N}^r$ d'une structure d'ordre comme dans [5, 4.3]; alors $\mathbf{N}^r$ est isomorphe à $\mathbf{N}$ comme ensemble ordonné. On pose

$$M_\lambda = \sum_{\lambda' \leqslant \lambda} x_{\lambda'} N, \qquad M_\lambda^- = \sum_{\lambda' < \lambda} x_{\lambda'} N.$$

Soit $\mathfrak{a}_\lambda$ l'annulateur du N-module à droite M_λ / M_λ^-. D'après [5, 4.4 et 4.5(iv)], l'intersection $\mathfrak{a}$ des $\mathfrak{a}_\lambda$ non nuls est non nulle. Comme $\mathfrak{k}$ est résoluble, il existe $f \in \mathfrak{a} - \{0\}$, vecteur propre pour $\epsilon(\mathfrak{k})$ [9, 4.4.1]. Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{N}^r$ tels que $\mathfrak{a}_\lambda = 0$. Soient $L_\lambda = \sum_{\lambda' \leqslant \lambda} x_{\lambda'} N_f$, $L_\lambda^- = \sum_{\lambda' < \lambda} x_{\lambda'} N_f$. Si $\lambda \notin \Lambda$, on a $f \in \mathfrak{a}_\lambda$, donc $x_\lambda f \in M_\lambda^-$, $x_\lambda \in \sum_{\lambda' < \lambda} x_{\lambda'} N f^{-1} \subset L_\lambda^-$, d'où $L_\lambda = L_\lambda^-$. Supposons $\lambda \in \Lambda$. Soient $n \in N$, $m \in \mathbf{N}$ tels que $x_\lambda n f^{-m} \in L_\lambda^-$. Alors il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que $x_\lambda n f^{m'} \in M_\lambda^-$, d'où $n f^{m'} = 0$ et $n = 0$. Ainsi, L_λ / L_λ^- est isomorphe au N_f-module à droite N_f, avec pour base l'image canonique de x_λ dans L_λ / L_λ^-. De proche en proche, on voit que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base du N_f-module à droite M_f.

4. Démonstration de $B_{n-1} \Rightarrow A_n$

Dans ce chapitre, on suppose B_{n-1} vrai, et $\dim \mathfrak{g} = n$.

4.1. Lemme. *Soient $\mathfrak{k}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$, $K = I \cap U(\mathfrak{k})$, $M = U(\mathfrak{g})/I$, $N = U(\mathfrak{k})/K$, $R \in \omega(I, \mathfrak{k})$(on considère R comme un idéal de N) et $\mathfrak{w}$ un idéal à gauche maximal de N tel que R soit le plus grand idéal bilatère de N contenu dans $\mathfrak{w}$. Alors le plus grand idéal bilatère de M contenu dans $M\mathfrak{w}$ est* 0, *et $M\mathfrak{w} \cap N = \mathfrak{w}$.*

C'est évident si $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. On supposera donc $\dim \mathfrak{k} < n$.

Soient $I_1, I_2, \ldots$ des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I, tels que tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I contienne l'un des I_r(1.5 et 2.3). Pour tout $r = 1, 2, \ldots$, choisissons $m_r \in (I_r/I) - \{0\}$. Introduisons f et $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ avec les propriétés de 3.7, et écrivons

$$m_r = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda f^{-\nu(\lambda, r)} \alpha(\lambda, r) \qquad (\nu(\lambda, r) \in \mathbf{N}, \ \alpha(\lambda, r) \in N).$$

Pour chaque r, il existe $\lambda_r \in \Lambda$ tel que $\alpha(\lambda, r) \neq 0$; posons

$$\nu(\lambda_r, r) = \nu_r, \qquad \alpha(\lambda_r, r) = \alpha_r \in N - \{0\}.$$

La partie fermée $V(I, \mathfrak{k}) - \omega(I, \mathfrak{k})$ de Prim $U(\mathfrak{k})$ correspond à un idéal semi-premier S de $U(\mathfrak{k})$, tel que $S \supset K$ et $S \neq K$; nous identifions S à un idéal non nul de N. D'après B_{n-1}, il existe un idéal primitif T de N tel que $S \not\subset T$ (donc $T \in \omega(I, \mathfrak{k})$), $f \notin T$, et $\alpha_r \notin T$ pour tout r.

Soit $\mathfrak{t}$ un idéal à gauche maximal de N tel que T soit le plus grand idéal bilatère de N contenu dans $\mathfrak{t}$. Soit W le N-module à gauche $N/\mathfrak{t}$, dont l'annulateur est T. Soit ξ l'image canonique de 1 dans W. Pour chaque $r = 1, 2,\ldots$, on a $\alpha_r(W) \neq 0$. Comme $W = N\xi$, il existe $\beta_r \in N$ tel que $\alpha_r\beta_r\xi \neq 0$. D'après [5, 4.2], l'endomorphisme de l'espace vectoriel W défini par f est bijectif. Pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, on a donc $f^\nu\alpha_r\beta_r\xi \neq 0$, c'est-à-dire $f^\nu\alpha_r\beta_r \notin \mathfrak{t}$. Supposons $I_r/I \subset M\mathfrak{t}$. Alors

$$m_r\beta_r \in I_r/I \subset M\mathfrak{t} \subset \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda N_f\mathfrak{t}$$

donc $f^{-\nu_r}\alpha_r\beta_r \in N_f\mathfrak{t}$. Par suite, il existe $\nu \in \mathbf{N}$ tel que $f^\nu\alpha_r\beta_r \in N\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Cela contredit le résultat obtenu plus haut. Donc $I_r/I \not\subset M\mathfrak{t}$, et cela pour tout r. Compte tenu du choix de $I_1, I_2,\ldots$ on voit que le plus grand idéal bilatère de M contenu dans $M\mathfrak{t}$ est 0.

Puisque $T \in \omega(I, \mathfrak{k})$, il existe un élément de G transformant T en R. Alors $\mathfrak{t}$ est transformé par G d'un idéal à gauche maximal $\mathfrak{w}$ de N tel que R soit le plus grand idéal bilatère de N contenu dans $\mathfrak{w}$. D'après l'alinéa précédent, le plus grand idéal bilatère de M contenu dans $M\mathfrak{w}$ est 0. En particulier, $M\mathfrak{w} \neq M$, donc $M\mathfrak{w} \cap N \neq N$, donc $M\mathfrak{w} \cap N = \mathfrak{w}$ puisque $\mathfrak{w}$ est maximal.

4.2. Soient $\mathfrak{k}$, I, R, $\mathfrak{h}$ comme dans l'énoncé du théorème A. Il s'agit de construire Q. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{w}(I, \mathfrak{k}) = \{R\}$, donc $I \cap U(\mathfrak{k}) = R$, et l'on peut prendre $Q = I$. On supposera donc $\dim \mathfrak{h} < n$.

Introduisons les notations de 4.1. Soient $\mathfrak{w}_1$ l'image réciproque de $\mathfrak{w}$ dans $U(\mathfrak{k})$, et $\mathfrak{m}_1 = I + U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{w}_1$. Alors : (1) $\mathfrak{w}_1$ est un idéal à gauche maximal de $U(\mathfrak{k})$; (2) le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{k})$ contenu dans $\mathfrak{w}_1$ est R; (3) $\mathfrak{m}_1 \cap U(\mathfrak{k}) = \mathfrak{w}_1$; (4) le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $\mathfrak{m}_1$ est I.

Soit π la représentation naturelle de $U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_1$. On a $\operatorname{Ker} \pi = I$. Puisque $U(\mathfrak{k})/\mathfrak{m}_1 \cap U(\mathfrak{k}) = U(\mathfrak{k})/\mathfrak{w}_1$, $\pi \mid \mathfrak{k}$ possède une sous-représentation simple σ de noyau R. Soit $\mathfrak{h}' = \mathfrak{st}(\sigma, \mathfrak{g})$. L'image de 1 dans $U(\mathfrak{k})/\mathfrak{w}_1$ engendre le $U(\mathfrak{g})$-module $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_1$. D'après 3.1, il existe un idéal bilatère J' de $U(\mathfrak{h}')$ tel que $J' \cap U(\mathfrak{k}) = R$ et $\operatorname{ind}(J', \mathfrak{g}) = I$. Soit $J_1 = \operatorname{ind}(J', \mathfrak{h})$. On a $\operatorname{ind}(J_1, \mathfrak{g}) = \operatorname{ind}(\operatorname{ind}(J', \mathfrak{h}), \mathfrak{g}) = \operatorname{ind}(J', \mathfrak{g}) = I$. Comme $[\mathfrak{h}, R] \subset R$, $U(\mathfrak{h})\, R$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{h})$ contenu dans $U(\mathfrak{h})\, J'$, donc dans J_1. Par suite, $J_1 \supset R$. D'après 3.2, il existe un idéal premier J de $U(\mathfrak{h})$ tel que $\operatorname{ind}(J, \mathfrak{g}) = \operatorname{ind}(J_1, \mathfrak{g}) = I$ et $J \supset J_1 \supset R$.

Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ contenant J. Soient $I_1, I_2,\ldots$ des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I, tels que tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenant strictement I contienne l'un des I_r(1.5 et 2.3). Pour tout $r = 1, 2,\ldots$, soit $\mathcal{Q}_r$ l'ensemble des $Q \in \mathcal{Q}$ tels que $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) \supset I_r$. Soit $\mathcal{Q}_0$ l'ensemble des $Q \in \mathcal{Q}$ tels que $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) = I$. On a $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 \cup \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \cdots$. D'après B_{n-1}, il existe r tel que $\bigcap_{Q\in\mathcal{Q}_r} Q = J$. Si $r \geqslant 1$, on en déduit (3.3) que $I = \bigcap_{Q\in\mathcal{Q}_r} \operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) \supset I_r$, ce qui est absurde. Donc $r = 0$. Soit $Q \in \mathcal{Q}_0$. On a $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) = I$, et $Q \supset J \supset R$ donc $Q \cap U(\mathfrak{k}) = R$ d'après 3.4.

4.3. *Remarque.* Soient $\mathfrak{k}$, I, R, comme dans l'énoncé du théorème A. Soient de plus σ une représentation simple de $U(\mathfrak{k})$ de noyau R, et $\mathfrak{h}' = \mathfrak{st}(\sigma, \mathfrak{g})$. Alors le raisonnement qui précède, avec des changements minimes, prouve qu'il existe un idéal primitif Q' de $U(\mathfrak{h}')$ tel que $Q' \cap U(\mathfrak{k}) = R$ et $\operatorname{ind}(Q', \mathfrak{g}) = I$.

5. Quelques lemmes

5.1. Lemme. *On suppose $\mathfrak{g}$ réductive. Soient I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$, $L = I \cap Z(\mathfrak{g})$, $B = Z(\mathfrak{g})/L$, k_1 le corps des fractions de B, k' une clôture algébrique de k_1. Il existe un idéal primitif I' de $U(\mathfrak{g} \otimes k')$ tel que $I' \cap U(\mathfrak{g}) = I$.*

(Ce lemme est plus ou moins prouvé dans [7], par application des idées de Gabriel-Nouazé. Sauf notation contraire, les produits tensoriels sont pris sur k.)

Soit $A = U(\mathfrak{g})/I$. Si $a \in A$ et $b \in B - \{0\}$ sont tels que $ab = 0$, on a $aAb = 0$, donc $a = 0$ puisque I est premier. Ainsi, les éléments de $B - \{0\}$ sont non diviseurs de zéro dans A, et $B - \{0\}$ est une partie oréenne de A. On peut former les algèbres localisées $A_{B-\{0\}} = A_1$ et $B_{B-\{0\}} = k_1$. Alors k_1 est un sous-corps de A_1, et A_1 peut être considéré comme une k_1-algèbre. On sait, et il est facile de voir [9, 4.1.5] que A_1 s'identifie canoniquement à $A \otimes_B k_1$. D'autre part, puisque 0 est un idéal premier de A, 0 est un idéal premier de A_1 [9, 3.6.15].

La k_1-algèbre $A_1 = A \otimes_B k_1$ est quotient de la k_1-algèbre $U(\mathfrak{g}) \otimes k_1 = U(\mathfrak{g} \otimes k_1)$ par un certain idéal H_1. Cet idéal est premier. Comme $\mathfrak{g}$ est réductive, le centre de A est B (même raisonnement que dans [9, 4.2.5]), donc le centre de $A_1 = U(\mathfrak{g} \otimes k_1)/H_1$ est k_1. D'autre part, on a $H_1 \cap U(\mathfrak{g}) = I$.

Soit $H' = H_1 \otimes_{k_1} k'$. On a

$$U(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g} \otimes k_1) \subset U(\mathfrak{g} \otimes k')$$

et $U(\mathfrak{g} \otimes k')/H' = (U(\mathfrak{g} \otimes k_1)/H_1) \otimes_{k_1} k' = A_1 \otimes_{k_1} k'$. Donc le centre de $U(\mathfrak{g} \otimes k')/H'$ est k'.

D'après [9, 3.4.2], il existe un idéal premier $I' \supset H'$ de $U(\mathfrak{g} \otimes k')$ tel que $I' \cap U(\mathfrak{g} \otimes k_1) = H_1$, donc $I' \cap U(\mathfrak{g}) = I$. Comme le centre de $U(\mathfrak{g} \otimes k')/H'$ est k', le centre de $U(\mathfrak{g} \otimes k')/I'$ est encore k' (même raisonnement que dans [9, 4.2.5]). Par suite, I' est primitif: cela est prouvé dans [7] quand $\mathfrak{g}$ est semi-simple et que le degré de transcendance de k' sur $\mathbf{Q}$ est au plus égal à la puissance du continu; le cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple et k' quelconque s'en déduit comme dans [2, 2.21]; le cas où $\mathfrak{g}$ est réductive est alors immédiat.

5.2. Lemme. *On suppose $\mathfrak{g}$ réductive. Le théorème B est vrai pour $\mathfrak{g}$.*

Soient I, $\mathscr{P}$, $(\mathscr{P}_n)$ comme dans le théorème B. Soient L, B, k_1, k', I' comme dans le lemme 5.1.

Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On choisit une base de R, d'où un ensemble de racines positives et une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soient $M(\lambda)$ le module de Verma correspondant, $\sigma(\lambda)$ la forme de Shapovalov sur $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ le quotient de $M(\lambda)$ par le noyau de $\sigma(\lambda)$, c'est-à-dire l'unique quotient simple de $M(\lambda)$(cf. par exemple [13, pp. 5–7], $\rho(\lambda)$ la représentation de $U(\mathfrak{g})$ dans $M(\lambda)$. (Ces notions, classiques pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, s'étendent facilement au cas réductif.)

Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes k'$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \otimes k'$, de sorte que R s'identifie au système de racines de $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Pour tout $\lambda' \in \mathfrak{h}'^*$, définissons $M(\lambda')$, $\sigma(\lambda')$, $L(\lambda')$, $\rho(\lambda')$ par analogie avec ce qui précède.

Fixons $\lambda' \in \mathfrak{h}'^*$ tel que I' soit l'annulateur de $L(\lambda')$ [11, théorème 1]. Choisissons une base de Chevalley dans $\mathfrak{g}$, d'où une base de Birkhoff–Witt dans $U(\mathfrak{n}_-)$, d'où une base β de $M(\lambda')$.

En considérant une base de $\mathfrak{h}$, on voit que $\lambda'(\mathfrak{h})$ est contenu dans une extension de degré fini k_2 de k_1. Soit F la fermeture intégrale de B dans k_2. En considérant à nouveau une base de $\mathfrak{h}$, on voit maintenant que $\lambda'(\mathfrak{h})$ est contenu dans une algèbre C de la forme F_b, où b est un élément non nul de B. L'algèbre C est une k-algèbre intègre de type fini. Soit $\hat{C}$ l'ensemble des homomorphismes de C dans k, qui est une variété irréductible sur k.

Pour tout $u \in U(\mathfrak{g})$, la matrice de $\rho(\lambda')(u)$ par rapport à β est formée d'éléments de C. Il existe donc un $U(\mathfrak{g} \otimes C)$-module M tel que $M(\lambda')$ s'identifie au $U(\mathfrak{g}')$-module $M \otimes_C k'$. D'autre part, d'après la définition de $\sigma(\lambda')$, les valeurs de $\sigma(\lambda')$ sur $\beta \times \beta$ appartiennent à C, donc $\sigma(\lambda')$ se déduit par extension des scalaires d'une forme σ sur $M \times M$ à valeurs dans C.

Pour tout $\varphi \in \hat{C}$, $\varphi \circ \lambda' \mid \mathfrak{h}$ est un élément de $\mathfrak{h}^*$ que nous noterons λ_φ. Considérons k comme un C-module grace à φ. Alors $M \otimes_C k$ s'identifie canoniquement à $M(\lambda_\varphi)$, et $\sigma(\lambda_\varphi)$ se déduit de σ par "extension" des scalaires.

Soit $u \in U(\mathfrak{g})$. On a

$$\begin{aligned} u \in I \Leftrightarrow u \in I' \Leftrightarrow u \cdot L(\lambda') = 0 \Leftrightarrow \sigma(\lambda')(u \cdot M(\lambda'), M(\lambda')) = 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(u \cdot M, M) = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $\varphi \in \hat{C}$, soit I_φ l'annulateur de $L(\lambda_\varphi)$. On a

$$u \in I \Rightarrow \sigma_\varphi(u \cdot M(\lambda_\varphi), M(\lambda_\varphi)) = 0$$

d'après ce qui précède

$$\Leftrightarrow u \cdot L(\lambda_\varphi) = 0 \Leftrightarrow u \in I_\varphi ;$$

donc $I_\varphi \in \mathscr{P}$. Soit $\hat{C}_n$ l'ensemble des $\varphi \in \hat{C}$ tels que $I_\varphi \in \mathscr{P}_n$. On a $\hat{C} = \hat{C}_1 \cup \hat{C}_2 \cup \cdots$. Comme k est non dénombrable, il existe un entier r possédant la propriété suivante: si $c \in C$ et si $\varphi(c) = 0$ pour tout $\varphi \in \hat{C}_r$, on a $c = 0$ (cf. par exemple [2, 3.11]). Montrons que $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P = I$. Soient $u \in \bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P$, et $m, m' \in M$.

Pour tout $\varphi \in \hat{C}_r$, on a $u \in I_\varphi$, donc $\varphi(\sigma(u \cdot m, m')) = \sigma_\varphi(u \cdot (m \otimes 1), m' \otimes 1) = 0$; donc $\sigma(u \cdot m, m') = 0$. Ainsi, $\sigma(u \cdot M, M) = 0$ d'où $u \in I$.

5.3. LEMME. *Soient* $\mathfrak{k}$ *un idéal commutatif de* $\mathfrak{g}$, I *un idéal premier de* $U(\mathfrak{g})$, $K = I \cap U(\mathfrak{k})$, $M = U(\mathfrak{g})/I$, $N = U(\mathfrak{k})/K$, Ω *l'ensemble des adhérences des* G*-orbites contenues dans* $V(I, \mathfrak{k})$, Ω' *une partie de* Ω *telle que* $\bigcup_{\omega \in \Omega'} \omega$ *ne soit pas maigre dans* $V(I, \mathfrak{k})$. *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *soit* Q_ω *l'idéal premier correspondant de* N.

(i) *Pour tout* $\omega \in \Omega$, $P_\omega = MQ_\omega$ *est l'idéal bilatère de* M *engendré par* Q_ω.

(ii) *Soit* P_ω' *la racine de* P_ω. *On a* $\bigcap_{\omega \in \Omega'} P_\omega' = 0$.

(iii) *Il existe une partie* Ω'' *de* Ω' *et un entier* q *possédant les propriétés suivantes*: (a) $\bigcup_{\omega \in \Omega''} \omega$ *n'est pas maigre dans* $V(I, \mathfrak{k})$; (b) *pour tout* $\omega \in \Omega''$, *le nombre des idéaux premiers minimaux de* M *contenant* P_ω *est* q.

(Rappelons qu'une partie de $V(I, \mathfrak{k})$ est *maigre* si elle est contenue dans la réunion d'une suite de parties fermées distinctes de $V(I, \mathfrak{k})$.)

(a) L'ensemble P_ω est un idéal à gauche de M, stable pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ dans M (car Q_ω est G-invariant), d'où (i).

(b) Il existe un entier $n(\omega)$ tel que $P_\omega'^{n(\omega)} \subset P_\omega$. Soit Ω'_n l'ensemble des $\omega \in \Omega'$ tels que $n(\omega) = n$. Alors $\Omega' = \Omega'_1 \cup \Omega'_2 \cup \cdots$. Il existe un n tel que $\bigcup_{\omega \in \Omega'_n} \omega$ ne soit pas maigre dans $V(I, \mathfrak{k})$. Remplaçant Ω' par Ω'_n, on peut supposer désormais que $n(\omega) = n$ pour tout $\omega \in \Omega'$.

(c) Soient f et $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ comme en 3.7. En diminuant Ω', on peut supposer que $f \notin Q_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$. Si $x \in \bigcap_{\omega \in \Omega'} (Q_\omega)_f$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $xf^p \in N$, d'où

$$xf^p \in \bigcap_{\omega \in \Omega'} ((Q_\omega)_f \cap N) = \bigcap_{\omega \in \Omega'} Q_\omega = 0,$$

d'où $x = 0$; ainsi, $\bigcap_{\omega \in \Omega'} (Q_\omega)_f = 0$. Or

$$(P_\omega)_f = M_f(Q_\omega)_f = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda N_f(Q_\omega)_f = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda (Q_\omega)_f$$

d'où $\bigcap_{\omega \in \Omega'} (P_\omega)_f = 0$. Alors

$$\left(\bigcap_{\omega \in \Omega'} P'_\omega\right)^n \subset \bigcap_{\omega \in \Omega'} (P'_\omega)^n \subset \bigcap_{\omega \in \Omega'} P_\omega \subset \bigcap_{\omega \in \Omega'} (P_\omega)_f = 0$$

et par suite $\bigcap_{\omega \in \Omega'} P'_\omega = 0$ puisque I est premier.

(d) L'assertion (iii) se démontre comme le (b) ci-dessus.

6. DÉMONSTRATION DE $B_{n-1} \Rightarrow B_n$

6.1. Dans ce chapitre, on suppose B_{n-1} vrai, donc A_n vrai, et dim $\mathfrak{g} = n$. Soient I, $\mathscr{P}$, $(\mathscr{P}_j)$ comme dans le théorème B.

6.2. Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Dans 6.2, on suppose que $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg, que $\mathfrak{c}$ est central dans $\mathfrak{g}$, que $I \cap \mathfrak{c} = 0$ et $I \cap U(\mathfrak{c}) \neq 0$. Etablissons le théorème B dans ce cas.

On a dim $\mathfrak{c} = 1$. Soit $z \in \mathfrak{c} - \{0\}$. L'idéal $I \cap U(\mathfrak{c})$ de $U(\mathfrak{c})$ est premier non nul, et ne contient pas $\mathfrak{c}$. Donc, en multipliant z par un scalaire, on peut supposer que $z - 1 \in I$. L'idéal $(z - 1)\, U(\mathfrak{n})$ est maximal dans $U(\mathfrak{n})$, donc $I \cap U(\mathfrak{n}) = (z - 1)\, U(\mathfrak{n})$. Posons $A = U(\mathfrak{n})/(z - 1)\, U(\mathfrak{n})$; c'est une algèbre de Weyl.

Soit $f \in \mathfrak{n}^*$ tel que $f(z) = 1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $f([x, \mathfrak{n}]) = 0$ (c'est-à-dire $[x, \operatorname{Ker} f] \subset \operatorname{Ker} f$). Alors $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{c}$, et $\mathfrak{g}' + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ [6, lemme 1]. Soit $\mathfrak{s}$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{n}$ qui laissent stable $\operatorname{Ker} f$ et s'annulent sur $\mathfrak{c}$ (donc définissent des dérivations de A). D'après [9, 4.6.9] il existe un homomorphisme φ de $\mathfrak{s}$ dans A tel que, pour tout $s \in \mathfrak{s}$, la dérivation de A définie par s soit égale à $\mathrm{ad}_A \varphi(s)$. D'autre part, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ définit un homomorphisme de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{s}$. Il existe donc un homorphisme θ de $\mathfrak{g}'$ dans A tel que, pour tout $x \in \mathfrak{g}'$, $\theta(x)$ et l'image $\bar{x}$ de x dans $U(\mathfrak{g})/I$ définissent la même dérivation de A.

Alors $x \mapsto \bar{x} - \theta(x)$ est un homomorphisme η de $\mathfrak{g}'$ dans $U(\mathfrak{g})/I$. L'algèbre $U(\mathfrak{g})/I$ est engendré par A et $\eta(\mathfrak{g}')$, et A commute à $\eta(\mathfrak{g}')$. Donc, si W désigne la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})/I$ engendrée par $\eta(\mathfrak{g}')$, l'algèbre $U(\mathfrak{g})/I$ s'identifie à l'algèbre $W \otimes A$ [9, 4.6.7].

Si dim $\mathfrak{n} = 1$, on a $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$, donc le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent et par suite égal à $\mathfrak{n}$, donc $\mathfrak{g}$ est réductive et le théorème B résulte de 5.2.

Supposons dim $\mathfrak{n} > 1$. Alors dim $\mathfrak{g}' <$ dim $\mathfrak{g}$ donc B_{n-1} s'applique à $\mathfrak{g}'$. Or W est un quotient de $U(\mathfrak{g}')$, et l'algèbre W est première puisque $W \otimes A$ est première. Soit $\mathscr{Q}$ l'ensemble des idéaux primitifs de W. Si $Q \in \mathscr{Q}$, $Q \otimes A$ est un idéal primitif de $W \otimes A = U(\mathfrak{g})/I$, donc son image réciproque $\lambda(Q)$ dans $U(\mathfrak{g})$ appartient à $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{Q}_j$ l'ensemble des $Q \in \mathscr{Q}$ tels que $\lambda(Q) \in \mathscr{P}_j$. Alors $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}_1 \cup \mathscr{Q}_2 \cup \cdots$. D'après B_{n-1}, il existe r tel que $\bigcap_{Q \in \mathscr{Q}_r} Q = 0$. Alors $\bigcap_{Q \in \mathscr{Q}_r} \lambda(Q) = I$ et a fortiori $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P = I$.

6.3. Distinguons dans la suite trois cas. S'il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal commutatif $\mathfrak{k}$ de dimension $\geqslant 2$ (*premier cas*), nous fixerons alors un tel $\mathfrak{k}$. Si tout idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ est de dimension $\leqslant 1$, le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ est nul ou est une algèbre de Heisenberg [9, 4.6.2]; si $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg (*deuxième cas*), nous noterons $\mathfrak{k}$ le centre de $\mathfrak{n}$, qui est de dimension 1. Si $\mathfrak{n} = 0$ (*troisième cas*), $\mathfrak{g}$ est semi-simple et le théorème B résulte de 5.2.

Limitons-nous désormais aux deux premiers cas, et posons $V = V(I, \mathfrak{k})$. On identifie V à une partie fermée irréductible de $\mathfrak{k}^*$. On raisonne par récurrence sur dim V.

6.4. Supposons dim $V = 0$, donc V réduit à un point $f \in \mathfrak{k}^*$. Dans le premier cas de 6.3, on a $\mathfrak{k}' = I \cap \mathfrak{k} \neq 0$. L'hypothèse B_{n-1} s'applique à $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}'$ et $I/\mathfrak{k}'\, U(\mathfrak{g})$, d'où le théorème B pour $\mathfrak{g}$ et I. Plaçons-nous dans le deuxième cas de 6.3. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}] \neq 0$, le seul point G-invariant de $\mathfrak{k}^*$ est 0, donc $f = 0$. On a encore $I \cap \mathfrak{k} \neq 0$ et l'on termine comme ci-dessus. Supposons $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}] = 0$. Puisque $V \neq \mathfrak{k}^*$, on a $I \cap U(\mathfrak{k}) \neq 0$. Si $I \cap \mathfrak{k} \neq 0$, on termine encore comme ci-dessus. Si $I \cap \mathfrak{k} = 0$, le théorème B est vrai pour $\mathfrak{g}$ et I d'après 6.2.

Supposons désormais $d = \dim V > 0$, et le théorème B démontré quand $\dim V < d$.

6.5. Dans 6.5, on suppose que V est l'adhérence d'une G-orbite ω. Soient $f \in \omega$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{st}\,(f, \mathfrak{g})$. Comme $d > 0$, on a $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

Soient $\mathscr{P}'$ l'ensemble des $P \in \mathscr{P}$ tels que $V(P, \mathfrak{k}) = V$, et $\mathscr{P}'' = \mathscr{P} - \mathscr{P}'$. Soit L l'idéal de $U(\mathfrak{k})$ correspondant à la sous-variété fermée $V - \omega$. Alors L contient strictement $I \cap U(\mathfrak{k})$. Pour tout $P \in \mathscr{P}''$, on a $P \supset L$; donc $\bigcap_{P \in \mathscr{P}''} P$ contient strictement I. Or

$$I = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} P = \Big(\bigcap_{P \in \mathscr{P}'} P\Big) \cap \Big(\bigcap_{P \in \mathscr{P}''} P\Big).$$

Comme I est premier, on en déduit que $I = \bigcap_{P \in \mathscr{P}'} P$.

Si $P \in \mathscr{P}'$, il existe un idéal primitif Q_P de $U(\mathfrak{h})$ contenant $\operatorname{Ker} f$ (il s'agit du noyau de f dans $U(\mathfrak{k})$), et tel que $\operatorname{ind}(Q_P, \mathfrak{g}) = P$ (d'après A_n). Soit $J = \bigcap_{P \in \mathscr{P}'} Q_P$. Alors, d'après 3.3,

$$\operatorname{ind}(J, \mathfrak{g}) = \textstyle\bigcap_{P \in \mathscr{P}'} \operatorname{ind}(Q_P, \mathfrak{g}) = \bigcap_{P \in \mathscr{P}'} P = I.$$

D'après 3.2, il existe un idéal premier J' de $U(\mathfrak{h})$ contenant J tel que $\operatorname{ind}(J', \mathfrak{g}) = I$. Pour tout $P \in \mathscr{P}'$, on a $Q_P \cap U(\mathfrak{k}) = \operatorname{Ker} f$. Donc $J \cap U(\mathfrak{k}) = \operatorname{Ker} f$, et par suite $J' \cap U(\mathfrak{k}) = \operatorname{Ker} f$.

Soit $\mathscr{Q}$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ contenant J'. Si $Q \in \mathscr{Q}$, on a $Q \cap U(\mathfrak{k}) = \operatorname{Ker} f$. Soit ρ une représentation irréductible de $U(\mathfrak{h})$ de noyau Q. Comme $Q \cap U(\mathfrak{k}) = \operatorname{Ker} f$, la restriction de ρ à $U(\mathfrak{k})$ est un multiple de f. D'après le critère de Blattner [9, 5.3.6], $\operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{g})$ est irréductible, donc $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g})$ est primitif. D'autre part, $Q \supset J'$, donc $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) \supset \operatorname{ind}(J', \mathfrak{g}) = I$. On voit donc que $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{Q}_j$ l'ensemble des $Q \in \mathscr{Q}$ tels que $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) \in \mathscr{P}_j$. D'après B_{n-1}, applicable puisque $\dim \mathfrak{h} \leqslant n - 1$, il existe r tel que $\bigcap_{Q \in \mathscr{Q}_r} Q = J'$. D'après 3.3, $\bigcap_{Q \in \mathscr{Q}_r} \operatorname{ind}(Q, \mathfrak{g}) = \operatorname{ind}(J', \mathfrak{g}) = I$. A fortiori, $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_r} P = I$.

6.6. Dans 6.6, on suppose que V n'est pas l'adhérence d'une G-orbite. On applique le lemme 5.3, avec les mêmes notations et $\Omega' = \Omega$ (V est non maigre car k est non dénombrable). Pour $\omega \in \Omega''$, soient $P_{\omega 1}, \ldots, P_{\omega q}$ les images réciproques dans $U(\mathfrak{g})$ des idéaux premiers minimaux de M contenant P_ω. Soit $\mathscr{P}_{\omega i}$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ contenant $P_{\omega i}$. Soit $\mathscr{P}_{\omega i j} = \mathscr{P}_{\omega i} \cap \mathscr{P}_j$.

On a $\mathscr{P}_{\omega i} = \mathscr{P}_{\omega i1} \cup \mathscr{P}_{\omega i2} \cup \cdots$. Comme V n'est pas l'adhérence d'une G-orbite, on a $\dim \omega < \dim V$ pour tout $\omega \in \Omega$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier $r(\omega, i)$ tel que $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega i r(\omega,i)}} P = P_{\omega i}$. Soit $\Omega_{s_1 \dots s_q}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega''$ tels que $r(\omega, 1) = s_1, \dots, r(\omega, q) = s_q$. On a $\Omega'' = \bigcup_{s_1 \dots s_q} \Omega_{s_1 \dots s_q}$. Il existe $(s_1, \dots, s_q)$ tel que $\Omega_{s_1 \dots s_q}$ soit non maigre dans V. Si $\omega \in \Omega_{s_1 \dots s_q}$, on a

$$\bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega 1 s_1}} P \cap \cdots \cap \bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega q s_q}} P = P_{\omega 1} \cap \cdots \cap P_{\omega q}$$

donc, d'après 5.3(ii) appliqué avec $\Omega' = \Omega_{s_1 \dots s_q}$,

$$\bigcap_{\omega \in \Omega_{s_1 \dots s_q}} \left(\bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega 1 s_1}} P \cap \cdots \cap \bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega q s_q}} P \right) = I.$$

Comme I est premier, on a par exemple

$$\bigcap_{\omega \in \Omega_{s_1 \dots s_q}} \bigcap_{P \in \mathscr{P}_{\omega 1 s_1}} P = I$$

et a fortiori $\bigcap_{P \in \mathscr{P}_{s_1}} P = I$.

7. Application aux représentations des groupes de Lie

7.1. Soient G un groups de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ la complexification de son algèbre de Lie. Le groupe G opère dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe, donc dans $U(\mathfrak{g})$, et tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ est stable pour G. Soit I un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$. Considérons la condition suivante:

Si $a, b \in U(\mathfrak{g})$ sont tels que $g(a)\, b \equiv g(b) a$ mod. I pour tout $g \in G$, alors a et b sont proportionnels modulo I.

Si cette condition est vérifiée, tout élément central dans Fract $(U(\mathfrak{g})/I)$ est scalaire, donc I est primitif d'après le théorème C.

7.2. Théorème. *Soient E un espace de Banach complexe, G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ la complexification de son algèbre de Lie, π une représentation continue de G dans E. On suppose que l'ensemble des combinaisons linéaires des $\pi(g)$, où g parcourt G, est fortement dense dans l'ensemble des endomorphismes continus de E (c'est le cas si E est hilbertien et π unitaire topologiquement irréductible). Soient $E_\infty \subset E$ l'espace des vecteurs indéfiniment dérivables pour π, π_∞ la représentation de $U(\mathfrak{g})$ dans E_∞ associée à π. Alors* Ker π_∞ *est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$.*

Soient a, $b \in U(\mathfrak{g})$ tels que $g(a)\, b \equiv g(b) a$ mod. Ker π_∞ pour tout $g \in G$. D'après 7.1, il suffit de prouver que $\pi_\infty(a)$ et $\pi_\infty(b)$ sont proportionnels. Supposons le contraire. Il existe $\xi_0 \in E$ tel que $\pi_\infty(a)\ \xi_0$ et $\pi_\infty(b)\ \xi_0$ soient non proportionnels.

Soit A l'algèbre des combinaisons linéaires formelles finies d'éléments de G à coefficients complexes. La représentation π se prolonge en une représentation de A dans E, qu'on notera encore π. L'espace E_∞ est stable pour $\pi(A)$.

Pour tout $g \in G$, on a

$$\pi_\infty(a)\,\pi(g)\,\pi_\infty(b) = \pi(g)\,\pi_\infty(g^{-1}(a)b) = \pi(g)\,\pi_\infty(g^{-1}(b)a) = \pi_\infty(b)\,\pi(g)\,\pi_\infty(a)$$

donc, pour tout $h \in A$,

$$\pi_\infty(a)\,\pi(h)\,\pi_\infty(b) = \pi_\infty(b)\,\pi(h)\,\pi_\infty(a). \tag{3}$$

Soit $\eta \in E_\infty$. D'après l'hypothèse du théorème, il existe $h_1, h_2, \ldots \in A$ tels que

$$\pi(h_n)\,\pi_\infty(a)\,\xi_0 \to \eta, \qquad \pi(h_n)\,\pi_\infty(b)\,\xi_0 \to 0.$$

Soit E' l'ensemble des vecteurs de Gårding dans le dual E^* de E pour la représentation contragrédiente de π. Il existe une représentation ρ de l'algèbre opposée à $U(\mathfrak{g})$ dans E' telle que $\langle \pi_\infty(u)\,\xi, \xi' \rangle = \langle \xi, \rho(u)\,\xi' \rangle$ pour $u \in U(\mathfrak{g})$, $\xi \in E_\infty$, $\xi' \in E'$ [15, p. 256]. Soit $\zeta \in E'$. On a

$$\langle \pi_\infty(b)\,\pi(h_n)\,\pi_\infty(a)\,\xi_0, \zeta \rangle = \langle \pi(h_n)\,\pi_\infty(a)\,\xi_0, \rho(b)\zeta \rangle \to \langle \eta, \rho(b)\zeta \rangle$$

et de même

$$\langle \pi_\infty(a)\,\pi(h_n)\,\pi_\infty(b)\,\xi_0, \zeta \rangle \to 0.$$

Compte tenu de (3), on voit que $\langle \eta, \rho(b)\zeta \rangle = 0$, donc $\langle \pi_\infty(b)\,\eta, \zeta \rangle = 0$.

Comme E' est faiblement dense dans E^*, on en conclut que $\pi_\infty(b)\,\eta = 0$, d'où $\pi_\infty(b) = 0$, ce qui est absurde.

Bibliographie

1. W. Borho, P. Gabriel, et R. Rentschler, "Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren," Lecture Notes in Mathematics, n° 357, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1973.
2. W. Borho et J. C. Jantzen, Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra, *Inventiones Math.* **39** (1977), 1–53.
3. N. Conze et M. Vergne, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 985–988.
4. J. Dixmier, Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles, *J. Math. Pures Appl.* **45** (1966), 1–66.
5. J. Dixmier, Sur les représentations induites des algèbres de Lie, *J. Math. Pures Appl.* **50** (1971), 1–24.
6. J. Dixmier, Polarisations dans les algèbres de Lie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **4** (1971), 321–336.
7. J. Dixmier, Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 1628–1630.
8. J. Dixmier, Sur les idéaux génériques dans les algèbres enveloppantes, *Bull. Sci. Math.* **96** (1972), 17–26.
9. J. Dixmier, "Algèbres enveloppantes," Gauthier-Villars, Paris, 1974.

10. J. DIXMIER, Sur le noyau infinitésimal d'une représentation unitaire d'un groupe résoluble, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262** (1966), 483–486.
11. M. DUFLO, Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, *Ann. Math.* **105** (1977), 107–120.
12. HARISH-CHANDRA, Représentations of a semisimple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), 185–243.
13. J. C. JANTZEN, Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete Kontravariante Formen, Bonner Mathematische Schriften, 1973.
14. W. S. MARTINDALE, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* **12** (1969), 576-584.
15. G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups," Vol. I, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.