METODA MONTE CARLO
Simulace ruletních systémů

Abstrakt

Tento dokument popisuje řešení úlohy simulace ruletních herních systémů metodou Monte Carlo. Cílem simulace bylo určit pro jednotlivé ruletní systémy hodnoty ukazatelů jako je maximální částka získaná hrou, počet kol, po která se hráč udrží ve hře a pravděpodobnost zdvojnásobení vkladu. Na základě získaných výsledků bylo provedeno vyhodnocení jednotlivých strategií a diskutovány jejich silné a slabé stránky.

Úvod

Ruleta

"Ruleta je hazardní hra, jejíž název je odvozen z francouzského slova roulette, které znamená malé kolo. Základ rulety tvoří otáčivé zařízení, které se skládá ze dvou soustředných kol. Větší z nich je nehybné, menší se otáčí a je rozděleno na 37 (u francouzské rulety) nebo na 38 obarvených a očíslovaných dílů (u americké rulety). Během hry posílá krupiér kuličku po vnějším kole proti směru rotace menšího kola. Po chvilce kulička zpomalí a přejde do menšího kola, kde se usadí v jedné z třiceti sedmi částí. (…) Polovina čísel má červenou a druhá polovina černou barvu. Jedinou výjimku tvoří číslo nula, to má zelenou barvu (u francouzské rulety). U americké rulety je navíc ještě přidán osmatřicátý díl, kterým je zelená dvojitá nula." (Wikipedia)

Sázky a výplatní poměry

Ruleta umožňuje hráčům široké možnosti sázek. Pro účely této práce zmíníme pouze *rovné sázky*:

- Sázka na barvu (červená nebo černá)
- Sudá nebo lichá čísla
- Nízká nebo vysoká čísla (1-18 nebo 19-36)

Společnou vlastností těchto sázek je výplatní poměr 1: 1, tedy spolu se vsazenou částkou je v případě výhry vyplacen její 1-násobek. Pravděpodobnost výhry u všech rovných sázek je

- 0,486 v případě francouzské rulety
- 0,474 v případě americké rulety

Výhoda kasina nad hráčem je způsobená přítomností nuly a případně dvojité nuly. Nazývá se *house edge.* V případě, že padne 0 nebo 00, hráč přichází o vklad jako v případě prohrané sázky. V některých kasinech jsou při padnutí nuly sázky zmrazeny a o jejich osudu rozhodne další kolo (*spin*). V takovém případě je výhoda kasina poloviční. Zde však tuto variantu uvažovat nebudeme.

Ruletní systémy

V ruletě se tradují různé postupy, které si kladou za cíl zvýšit pravděpodobnost výhry. Některé z nich umožňují teoreticky vyhrát neomezeně vysokou částku, v praxi však naráží na dvě překážky:

1. omezená výše kapitálu hráče – hráč už nemá dostatek prostředků na další sázku
2. maximální výše sázky určená kasinem – je nižší, než předepsaná výše sázky

Poté, co hráč narazí na jednu z těchto překážek, není možné ve strategii dále pokračovat.
S ohledem na tyto překážky můžeme sestavit následující ukazatele úspěšnosti strategie:

- (a) počet kol (spinů), po která se hráč hrající podle dané strategie udrží ve hře (tedy než nastane 1. nebo 2.)
- (b) maximální částka, kterou lze danou strategií dosáhnout (opět než nastane 1. nebo 2.)
- (c) pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu při použití jednotlivých strategií

V této práci budou prozkoumány hodnoty těchto ukazatelů pro nejčastěji používané ruletní systémy. Společnou vlastností těchto systémů je, že využívají rovných sázek. Vzhledem ke shodné pravděpodobnosti výhry libovolné z nich není důležité, který druh rovných sázek si zvolíme. V popisu těchto strategií používáme jednotkovou výši sázek, v praxi pak jednotku představuje minimální výše sázky, kterou může být například 10 nebo 100 korun.

Martingale

Nejznámější a jedna z nejzrádnějších strategií. Po každé prohrané sázce zdvojnásobujeme výši sázky, při výhře vsázíme opět od počáteční výše sázky. Výše sázky roste se sérií proher exponenciálně, proto při delší sérii velmi rychle narazíme na 1. nebo 2.

Labouchere

V této strategii používáme předpřipravenou posloupnost čísel od 1 do 6. Výše sázky je pak vypočítána jako součet prvního a posledního čísla posloupnosti. V případě prohry zařadíme na konec posloupnosti výši poslední sázky, naopak v případě výhry škrtneme první a poslední číslo posloupnosti. Výši následující sázky vypočítáme opět jako součet prvního a posledního čísla v posloupnosti.

Fibonacci

Výši sázek v této strategii určují čísla Fibonacciho posloupnosti. Řada začíná číslem 1, další čísla jsou vypočítána jako součet dvou předchozích. Začíná se vsazením jednotky – prvního prvku posloupnosti. V případě prohry vsázíme částku o výši následujícího prvku Fibonacciho posloupnosti, pokud vyhrajeme, vracíme se v posloupnosti o dva prvky zpět.

D'Alembert

Začíná se sázkou jednotky. V případě prohry vsázíme v následujícím kole o jednotku vice, v případě výhry o jednotku méně. Pokud vyhrajeme hned v prvním kole, následující sázkou je opět jednotka

Antimartingale

Analogie systému Martingale. Výši sázky však zdvojnásobujeme při výhře a vracíme na minimální hodnotu při prohře. Vsázíme tedy na dlouhou sérii výher.

Simulace

Popsané strategie byly simulovány s ohledem na proměnné parametry

- vstupní kapitál – částka, kterou máme pro danou hru k dispozici
- maximální výše sázky určená kasinem

$$s - nová\ výše\ sázky$$
$$s_p - předchozí\ sázka$$
$$s_0 - počáteční\ sázka\ (jednotka)$$
$$l_i - prvky\ Labouchere\ posloupnosti$$
$$l_p - poslední\ prvek\ Labouchere\ posloupnosti$$
$$f_i - prvky\ Fibonacciho\ posloupnosti$$
$$f_p - v\ předchozí\ sázce\ použitý\ prvek\ Fibonacciho\ posloupnosti$$

	Výše počáteční sázky	**Při prohře**	**Při výhře**
Martingale	$s_0 = 1$	$s = 2s_p$	$s = s_0$
Labouchere	$s_0 = l_1 + l_6 = 7$	$l_{p+1} \coloneqq s_p$ $s = l_1 + l_{p+1}$	$odstraníme\ l_0\ a\ l_p$ $s = l_2 + l_{p-1}$ $l_i \coloneqq l_{i+1}$
Fibonacci	$s_0 = f_1 = 1$	$s = f_{p+1}$	$s = \min\{f_{p-2}, f_1\}$
D'Alembert	$s_0 = 1$	$s = s_p + 1$	$s = \min\{s_p - 1, s_0\}$
Antimartingale	$s_0 = 1$	$s = s_0$	$s = 2s_p$

Obr. 1: Herní strategie na ruletě

Popis implementace

Pro implementaci modelu rulety byl použit programovací jazyk Python. Zdrojové kódy jsou k dispozici na

https://github.com/chachalaca/MonteCarloRoulette

Dále bude stručně popsána funkčnost jednotlivých součástí.

main.py

Vstupní bod programu. Funkce `run_simulations()` spouští simulace pro dané kombinace rulet (Am, Fr), strategií, počtu simulací a pro dané hodnoty proměnných parametrů. Jsou sbírány hodnoty ukazatelů a), b), c) a ty jsou posléze ukládány k dalšímu statistickému zpracování. Funkce `make_visualizations()` slouží k vytvoření grafů z uložených dat proběhlých simulací. Hodnoty ukazatelů a), b) a c) pro všechny kombinace strategií a rulet vypisuje funkce `print_stats()`.

Roulette a její potomci *Roulette (*Roulette.py)

Definují druhy rulety s jejich parametry jako je maximální a minimální sázka (`max_bet, min_bet`). Každá ruleta implementuje metodu `bet_on_color()`, která představuje provedení rovné sázky na dané ruletě. Vracena je vyhraná částka + výše sázky, případně 0 pro prohru. Pro generování uniformního rozdělení je použita funkce `randint()` z balíčku `random`. Python v jádru používá generator náhodných čísel Mersenne Twister, což zajišťuje velmi vysokou kvalitu získaných pseudonáhodných čísel.

Strategy a její potomci

Tyto třídy zapouzdřují jednotlivé herní systémy. Každá z nich implementuje dvě metody:

`play()` – hra podle strategie do okamžiku 1) nebo 2). Vracena jsou data o výši sázek a kapitálu po každém spinu rulety. Na jejich základě jsou pak vypočítány ukazatele a) a b).

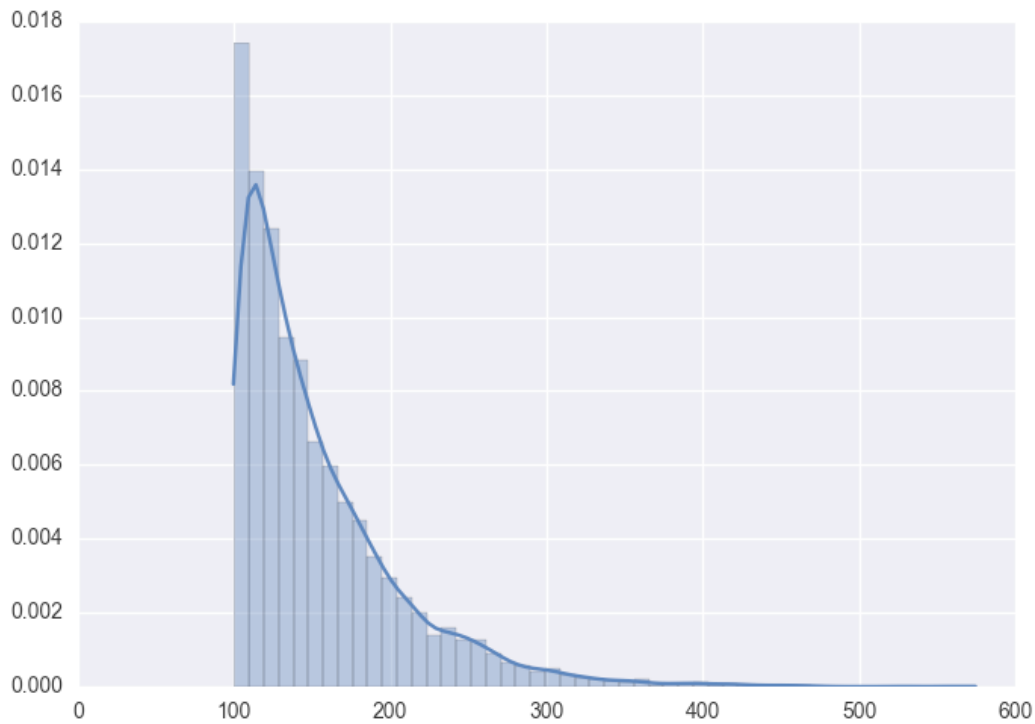
`play_for()` – hra podle strategie do okamžiku získání částky dané parametrem `goal`. V implicitním případě, že dříve nastane 1) se uplatní strategie *all in* – hráč vsadí vše, co má, i když to je méně, než strategie nařizuje. V případě 2) se výše sázky krátí podle limitu kasina. Pokud je však volitelným parametrem `all_in` předána hodnota `false`, hra je v předchozích dvou případech ukončena jako neúspěšná. Metoda vrací logickou hodnotu `true/false` v závislosti na tom, zda se podařilo částky dosáhnout. To se stane, pokud výše kapitálu klesne pod úroveň výše minimální sázky/jednotky.

Výsledky

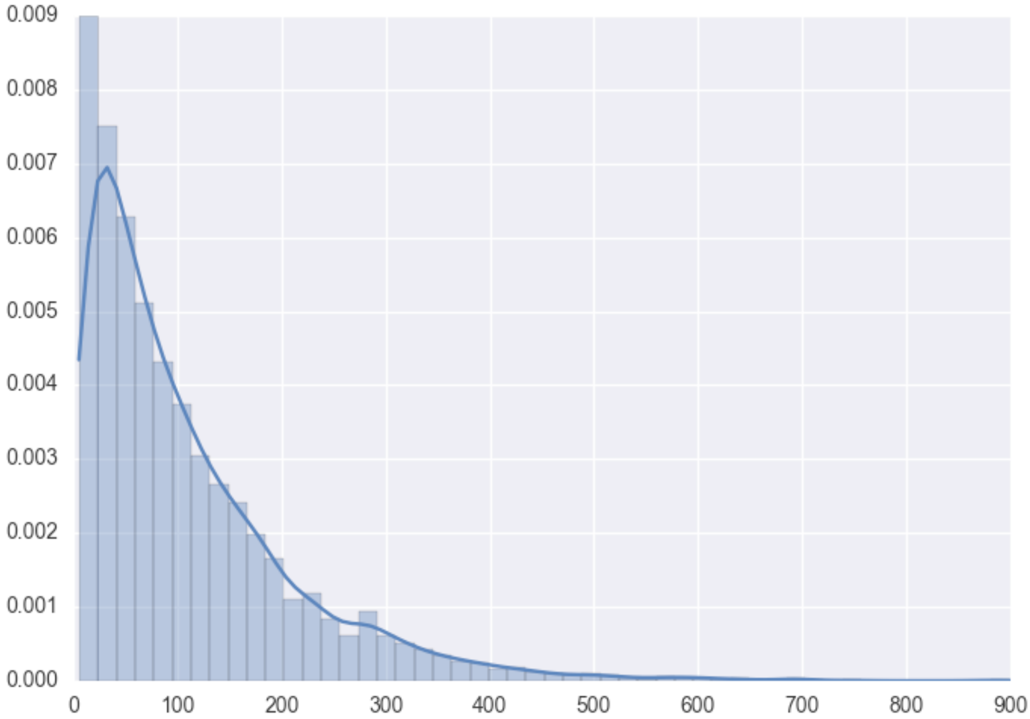
Bylo zkoumáno rozdělení hodnot ukazatelů a), b) a hodnota pravděpodobnosti c). Následující normalizované histogramy zobrazují rozdělení hodnot ukazatelů pro jednotlivé druhy rulety a strategie. V grafu je rovněž vyneseno rozdělení nafitované z dat za pomocí metody Kernel density estimation.

Pokud není uvedeno jinak, získané hodnoty ukazatelů byly získány pro následující hodnoty proměnných parametrů:

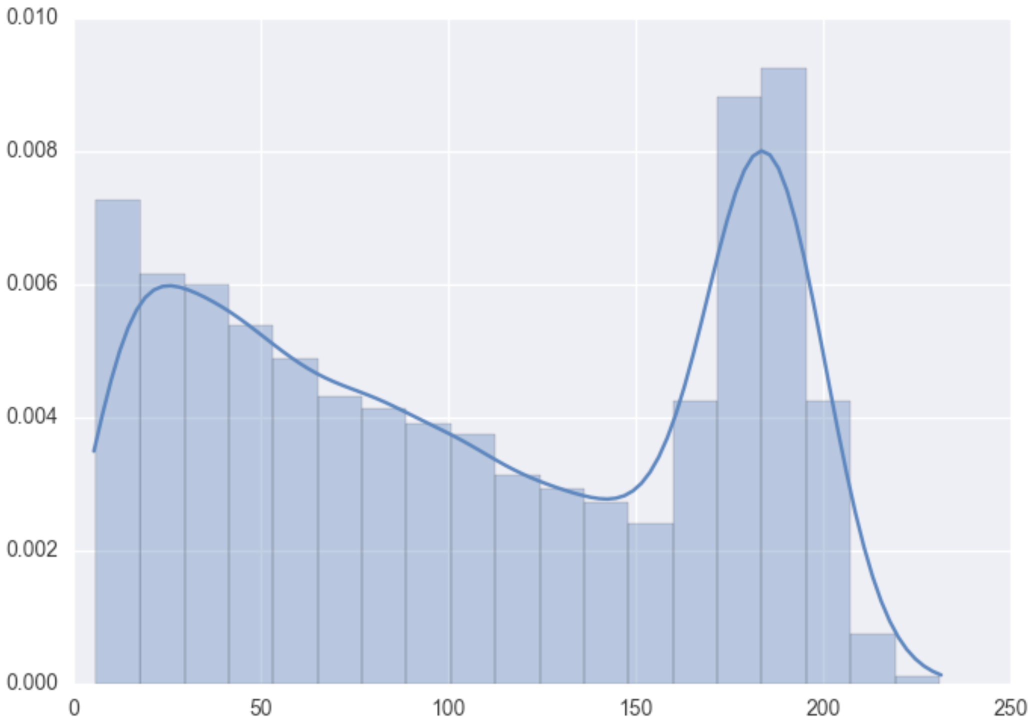
- vstupní kapitál: 100
- maximální výše sázky: 50



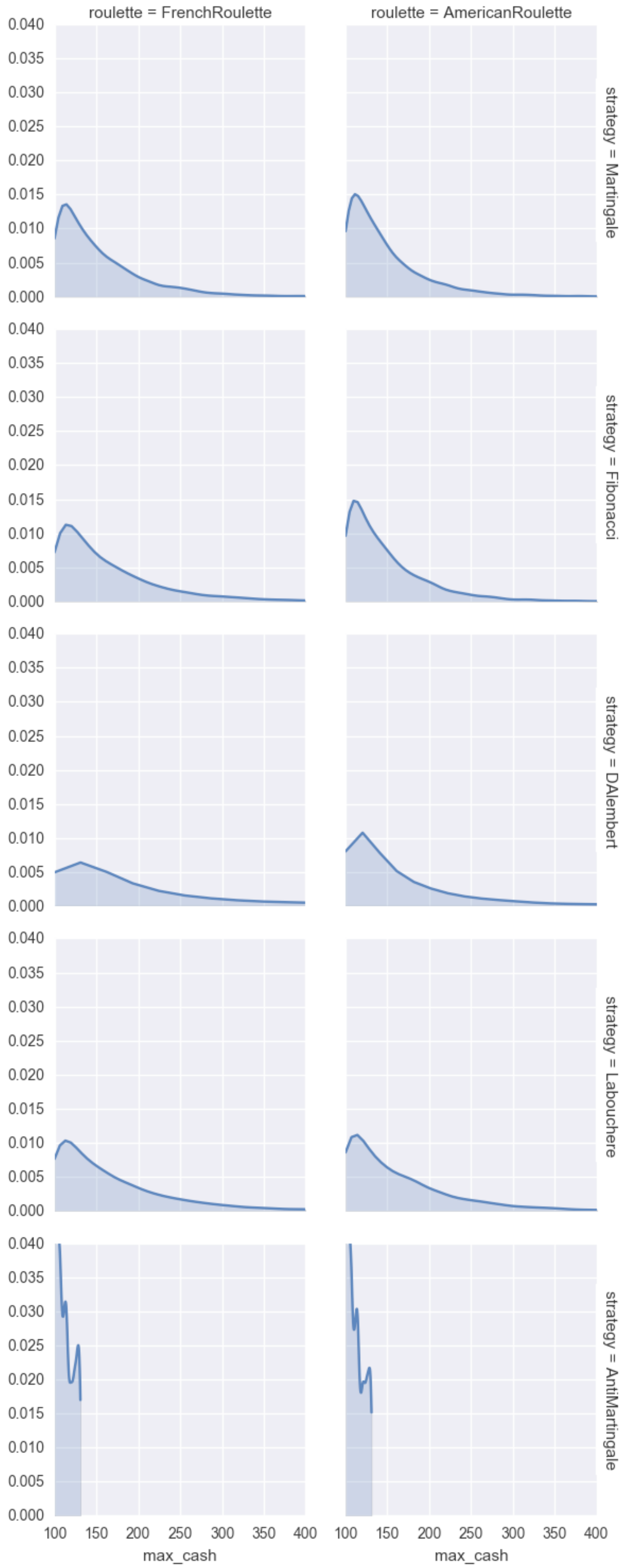
↑ Obr. 2: Francouzská ruleta, Martingale, maximální výše kapitálu (b).
$E = 153{,}24;\ \sigma^2 = 2\,802$
Pro porovnání stejné ukazatele u americké rulety:
$E = 147{,}02;\ \sigma^2 = 2\,220$



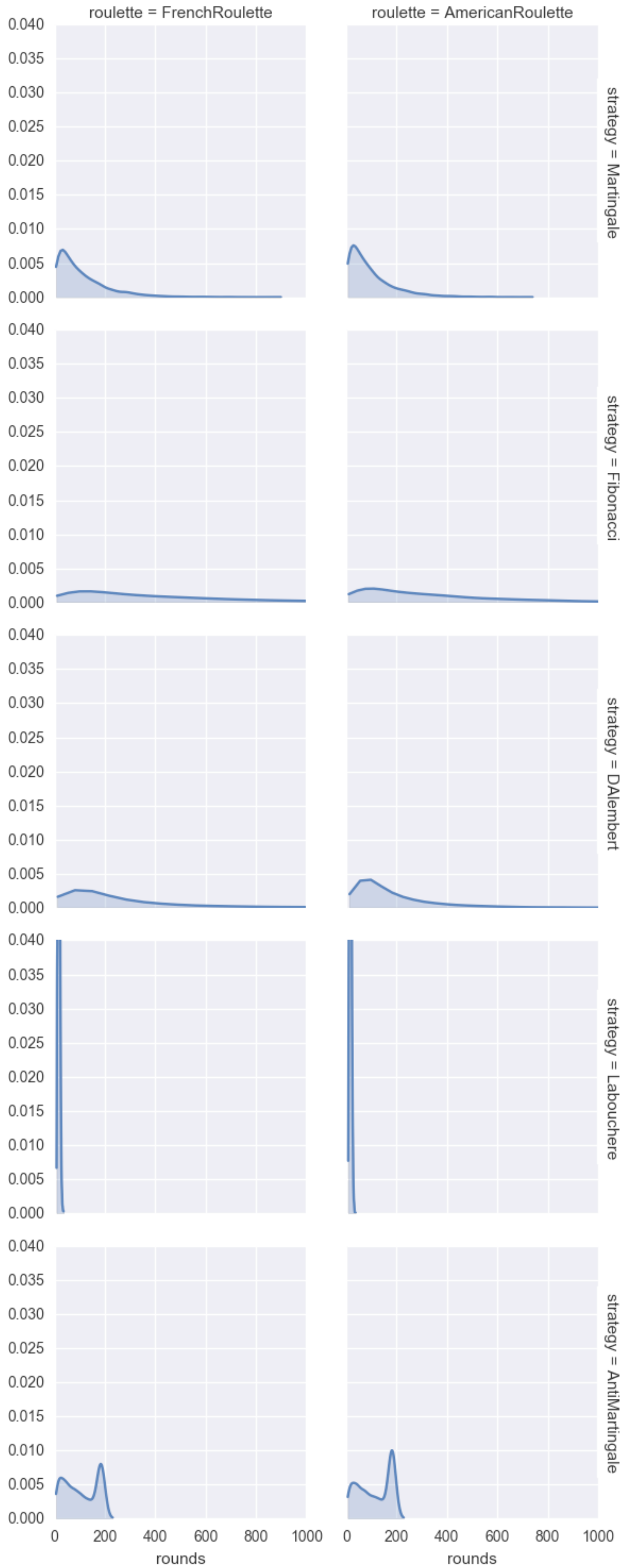
↑ Obr. 3: Francouzská ruleta, Martingale, počet kol (a)
$E = 109{,}49;\ \sigma^2 = 10\ 676$
Pro porovnání stejné ukazatele u americké rulety:
$E = 99{,}15;\ \sigma^2 = 8\ 778$



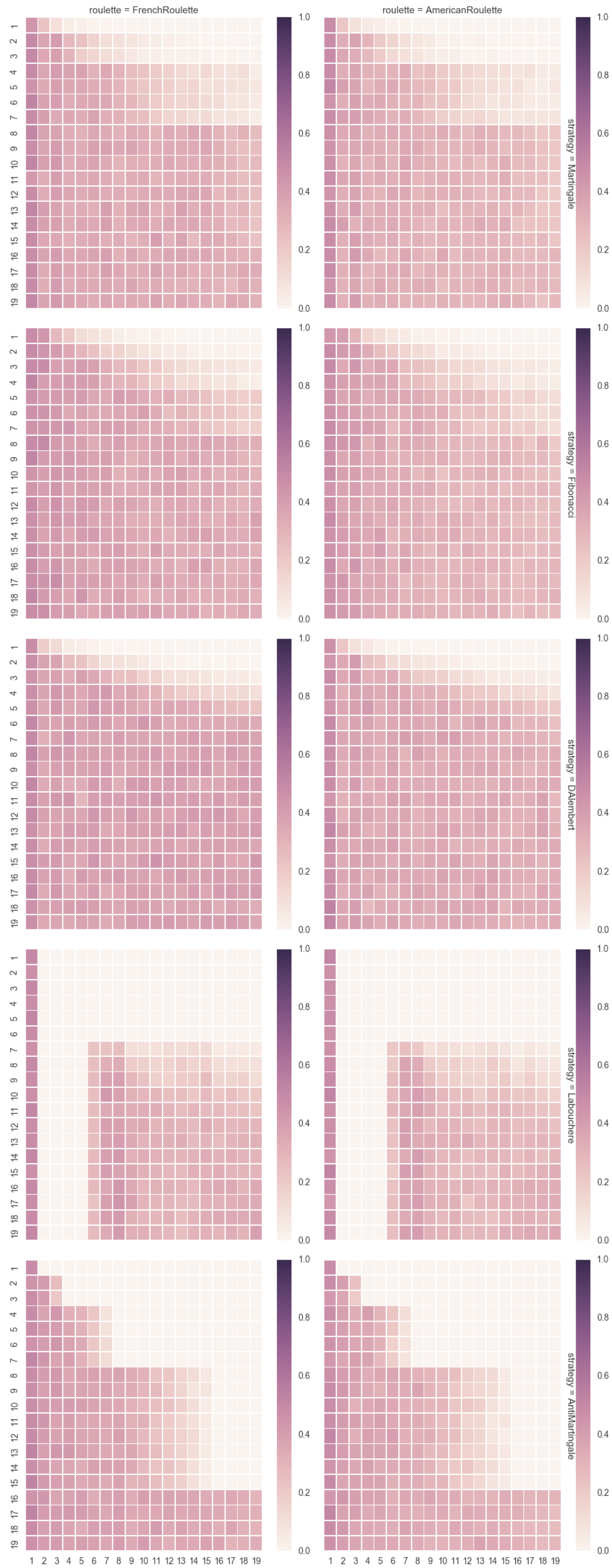
↑ Obr. 4: Francouzská ruleta, Anti-Martingale, počet kol (a)



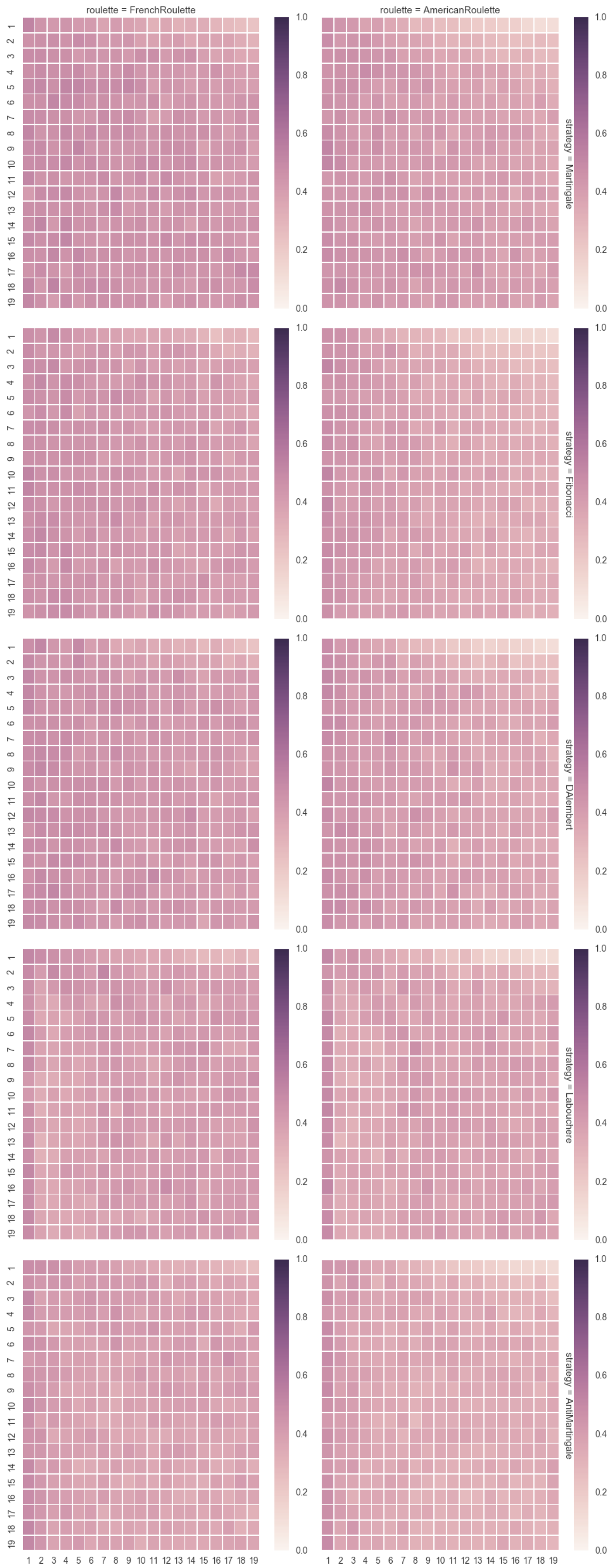
↑ Obr. 5: Odhad rozdělení ukazatele počet kol (a) pomocí KDE



↑ Obr. 6: Odhad rozdělení ukazatele maximální výše kapitálu (b) pomocí KDE



↑ Obr. 7: Pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu
osa x: maximální výše sázky, **osa y**: výše kapitálu



↑ Obr. 8: Pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu, hra “all in”
osa x: maximální výše sázky, **osa y**: výše kapitálu

Výsledky

Zde jsou uvedeny výsledné střední hodnoty ukazatelů pro simulaci se 100 000 hrami. V závorce jsou uvedeny hodnoty rozptylu.

- Francouzská ruleta
  - Martingale
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 153.237323732 (2802.07339042)
    - počet kol ve hře (a)
      - 109.490949095 (10676.1607092)
    - pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
      - 0.401240124012
  - Labouchere
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 167.882588259 (4846.01701756)
    - počet kol ve hře (a)
      - 17.400140014 (19.3475387343)
    - pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
      - 0.430243024302
  - D'Alembert
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 219.707270727 (35683.7521934)
    - počet kol ve hře (a)
      - 322.441244124 (198003.983521)
    - pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
      - 0.342334233423
  - Anti-Martingale
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 112.557855786 (95.1903470775)
    - počet kol ve hře (a)
      - 106.281128113 (4252.54592948)
    - pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
      - 0.376837683768
  - Fibonacci
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 163.838783878 (4222.26323829)
    - počet kol ve hře (a)
      - 453.299429943 (197968.09276)
    - pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
      - 0.359535953595
- Americká ruleta
  - Martingale
    - maximální kapitál ve hře (b)
      - 147.01660166 (2219.50207462)

počet kol ve hře (a)
99.1501150115 (8778.05157289)
pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
0.318831883188

Labouchere
maximální kapitál ve hře (b)
163.138413841 (4349.95083861)
počet kol ve hře (a)
17.1184118412 (18.899870025)
pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
0.40304030403

D'Alembert
maximální kapitál ve hře (b)
169.587658766 (9522.62275398)
počet kol ve hře (a)
204.061106111 (54187.5685233)
pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
0.223522352235

Anti-Martingale
maximální kapitál ve hře (b)
111.712071207 (94.3338386844)
počet kol ve hře (a)
113.137313731 (4193.61840867)
pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
0.293229322932

Fibonacci
maximální kapitál ve hře (b)
148.469346935 (2399.46458194)
počet kol ve hře (a)
366.842084208 (125242.160581)
pravděpodobnost zdvojnásobení kapitálu (c)
0.23302330233

Shrnutí

Z výsledků je patrné, že s použitím herních systémů se vliv *house edge* prohlubuje. To lze demonstrovat nejlépe na výsledcích pravděpodobnosti zdvojnásobení kapitálu. Zatímco v případě jedné rovné sázky na ruletě je pravděpodobnost výhry (zdvojnásobení) 0,486, tak v případě francouzské rulety pravděpodobnost v závislosti na zvolené strategii kolísá mezi přibližně 34-43%, u americké rulety je to dokonce mezi přibližně 22-40%.

Rozdělení hodnot ukazatelů vykazovala obecně nižší rozptyl u americké rulety. Střední hodnoty ukaztelů a) a b) však podobně jako c) ukazovaly v její neprospěch. Francouzská ruleta umožňuje pro dané hodnoty parametrů dosažení vyšší maximální výše kapitálu a setrvání ve hře po delší počet kol.

Na případě grafů pravděpodobností zdvojnásobení kapitálu v závislosti na parametrech jako je výše kapitálu a maximální výše sázky daná kasinem se ukazuje, že tyto parametry mají vliv, pokud hru ukončujeme v momentu, kdy předepsaná výše sázky přesáhne výši jednoho z těchto dvou parametrů. Pokud pokračujeme dále způsobem “all in”, kdy následující sázku snížíme přesně na výši dostupného kapitálu, vliv parametrů přestává být zřetelný.

Nyní porovnáme jednotlivé herní systémy. Co se týče počtu kol ve hře (a), tuto hodnotu jednoznačně maximalizuje systém Fibonacci. Na opačném konci spektra je systém Labouchere. Pokud sledujeme maximální dosažený kapitál během hry (b), tak nejlépe si v tomto ohledu vede system D’Alembert. Nejnižším maximálním dosaženým kapitálem se vyznačuje system Anti-Martingale. Ve třetím sledovaném ukazateli – pravděpodobnosti zdvojnásobení kapitálu vede systém Labouchere, nejhorší je pak systém D’Alembert.

	počet kol ve hře (a)	maximální kapitál (b)	p. zdvojnásobení (c)	Σ
Martingale	4	4	2	10
Labouchere	5	2	1	8
D’Alembert	2	1	5	8
Anti-Martingale	3	5	3	11
Fibonacci	1	3	4	8