Valuation p-adique

Exercice 1 [01226] [Correction]
Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $v_p(n)$ l'exposant de la plus grande puissance de p divisant n.

(a) Montrer que $v_2(1\,000!) = 994$.

(b) Plus généralement, calculer $v_p(n!)$. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 2 [02370] [Correction]
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout entier $n > 0$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.

(a) Montrer

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

(b) Montrer que $\binom{2n}{n}$ divise $\prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$.

(c) Montrer que $\binom{2n}{n} \le (2n)^{\pi(2n)}$.

(d) Montrer que $\frac{x}{\ln x} = \mathrm{O}\big(\pi(x)\big)$ quand $x \to +\infty$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $v_2(1\,000!) = 500 + v_2(500!)$ car $1000! = 2^{500} \times 500! \times k$ avec k produit de nombres impairs.
$v_2(1\,000!) = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$.

(b) En isolant les multiples de p dans le produit décrivant $p!$, on obtient

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor !\right)$$

puis

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor n/p \rfloor}{p} \right\rfloor + v_p\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n/p \rfloor}{p} \right\rfloor !\right)$$

or

$$\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

avec $x = n/p^2$ donne

$$\left\lfloor \frac{\lfloor n/p \rfloor}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$$

puis finalement

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

avec

$$k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor.$$

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Pour k suffisamment grand $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$, la somme évoquée existe donc car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $\lfloor n/p \rfloor$ divisibles par p, $\lfloor n/p^2 \rfloor$ divisibles par p^2, etc... donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

(b) On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$,

$$v_p\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right)$$

or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) \le \operatorname{Card}\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \lfloor 2n/p^k \rfloor > 0\right\} \le \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor.$$

De plus les nombres premiers diviseurs de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont diviseurs d'un entier inférieur à $2n$ (lemme d'Euclide) et sont donc eux-mêmes inférieur à $2n$. Il en découle

$$\binom{2n}{n} \mid \prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$$

car toutes les puissances de nombres premiers intervenant dans la décomposition de $\binom{2n}{n}$ divisent $\prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$.
Notons qu'en fait ce produit désigne

$$\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, 2n).$$

(c) On a

$$\binom{2n}{n} \le \prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} \le \prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} p^{\frac{\ln(2n)}{\ln p}} \le \prod_{p \in \mathcal{P}; p \le 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}.$$

(d) En passant au logarithme :

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k \le \pi(2n)\ln(2n).$$

À l'aide d'une comparaison intégrale on obtient

$$\int_1^n \ln(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{(n+1)} \ln(t)\,dt$$

donc

$$n\ln n - n + 1 \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le (n+1)\ln(n+1) - n$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + \mathrm{O}(\ln n).$$
Par suite
$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k = 2n\ln(2n) - 2n - 2(n\ln n - n) + \mathrm{O}(\ln n)$$
puis
$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \ln(2)(2n).$$
On en déduit
$$\frac{2n}{\ln 2n} = \mathrm{O}(\pi(2n)).$$
Ajoutons
$$\frac{x}{\ln x} \sim \frac{2\lfloor x/2\rfloor}{\ln 2\lfloor x/2\rfloor}$$
par calculs et $\pi(x) \sim \pi(2\lfloor x/2\rfloor)$ car $\pi(x)$ et $\pi(2\lfloor x/2\rfloor)$ ne différent qu'au plus d'une unité et $\pi(x) \to +\infty$.
Finalement, une certaine satisfaction.