Chapitre 4
Modulations numériques

Théorie de la communication

Les modulations numériques

- **La modulation:**
  - Adapter le signal à émettre au canal de transmission.
  - Opération qui consiste à modifier un ou plusieurs paramètres d'une onde porteuse

- **Les types de modulation:**
  - Modulation par Déplacement d'Amplitude MDA.
  - Modulation par Déplacement de Phase MDP.
  - Modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature MAQ.
  - Modulation par Déplacement de Fréquence MDF.

Principes de modulations numériques

- Le message à transmettre est issu d'une source binaire.
- Le signal modulant, est un signal éventuellement complexe

$$c(t) = \sum_k c_k.g(t - kT) = c_k(t) = a_k(t) + jb_k(t)$$

- avec $c_k = a_k + jb_k$, $g(t)$ une fonction de mise en forme qui qui existe sur $[0, T[$ et $t \in [kT, (k+1)T[$.
- Dans les modulations MDA, MDP et MAQ, la modulation transforme ce signal $c(t)$ en un signal modulé $m(t)$

Principes de modulations numériques

- Le signal modulé est:

$$m(t) = Re\left[\sum_k c_k(t)e^{j(\omega_p t+\varphi_p)}\right]$$

avec $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$, φ_p: fréquence et phase de la porteuse.

Le signal modulé s'écrit alors

$$m(t) = a(t)\cos(\omega_p t + \varphi_p) - b(t)\sin(\omega_p t + \varphi_p)$$

En posant

$$a(t) = \sum_k a_k(t) \text{ et } (b(t) = \sum_k b_k(t)$$

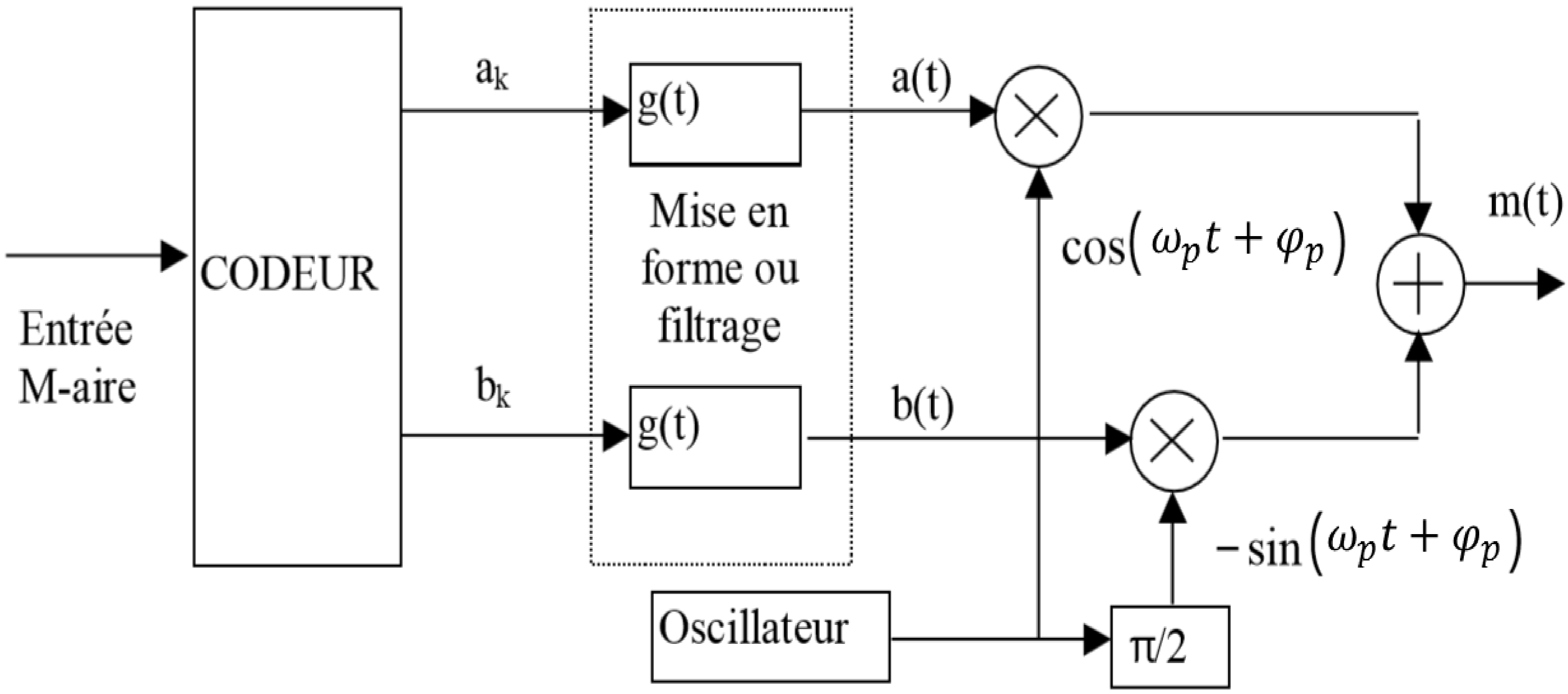
Principes de modulations numériques

- Le signal $a(t) = \sum_k a_k(t)$ module en amplitude la porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \varphi_p)$
- Le signal $b(t) = \sum_k b_k(t)$ module en amplitude la porteuse en quadrature $\sin(\omega_p t + \varphi_p)$
- Les deux signaux a(t) et b(t) sont aussi appelés "trains modulants" et s'écrivent

$$a(t) = \sum_k a_k . g(t - kT) \quad \text{et} \quad b(t) = \sum_k b_k . g(t - kT)$$

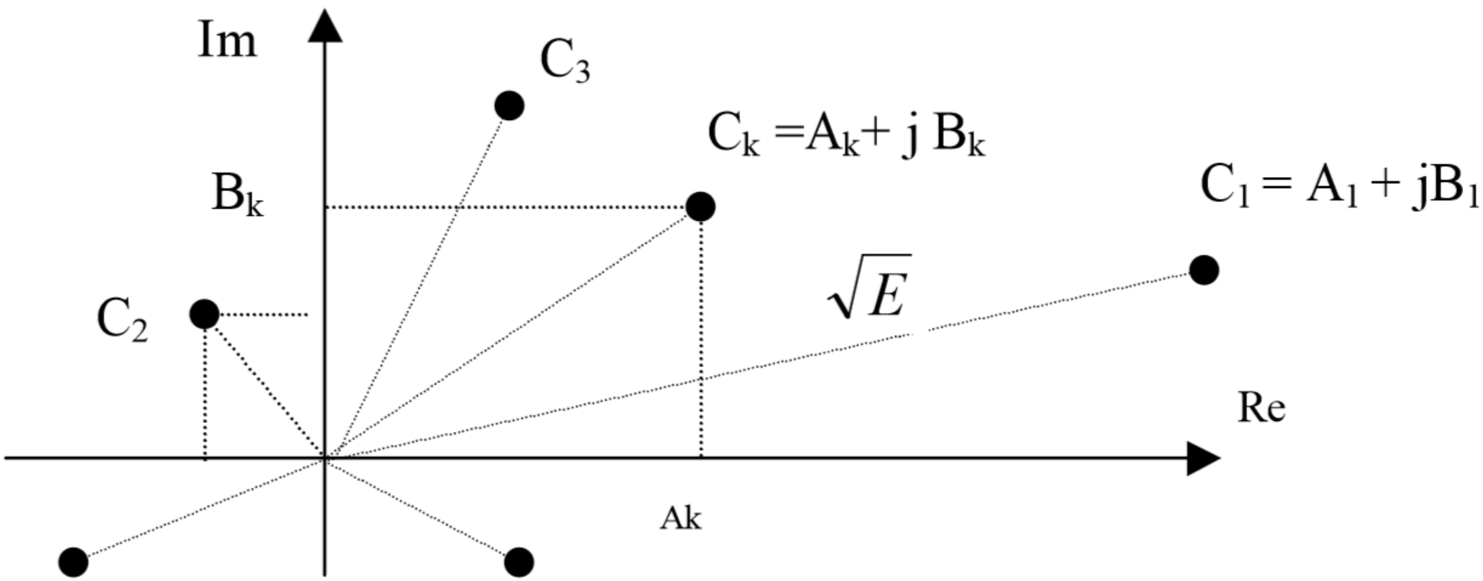
- Les symboles a_k et b_k prennent respectivement leurs valeurs dans l'alphabet $(A_1, A_2, \ldots A_M)$ et dans l'alphabet $(B_1, B_2, \ldots B_M)$.

Le schéma théorique du modulateur



Principes de modulations numériques

- Une représentation dans le plan complexe qui fait correspondre à chaque signal élémentaire un point $C_k = A_k + jB_k$ permet de différencier chaque type de modulation. L'ensemble de ces points associés aux symboles porte le nom de **constellation.**



Modulation par déplacement d'amplitude (MDA)

- La modulation ne s'effectue que sur la porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \varphi_p)$ et on a

$$m(t) = \sum_k a_k . g(t - kT) . \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

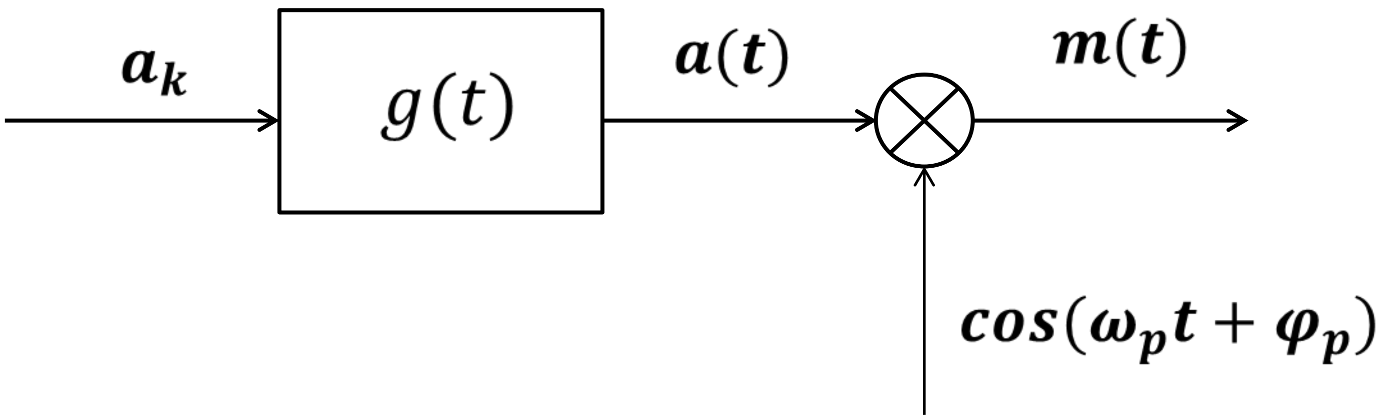
- Avec

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

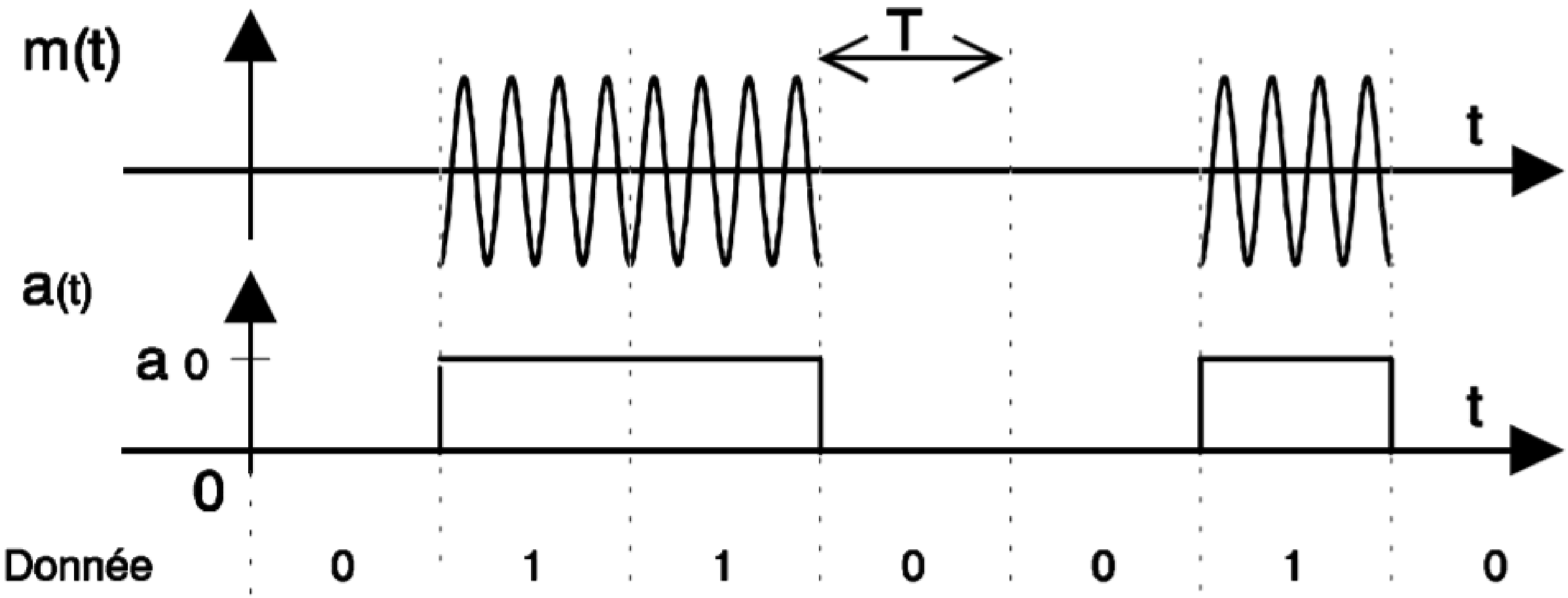
$a_k \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ il y a $M = 2^n$ amplitudes possible, pour n symboles à émettre

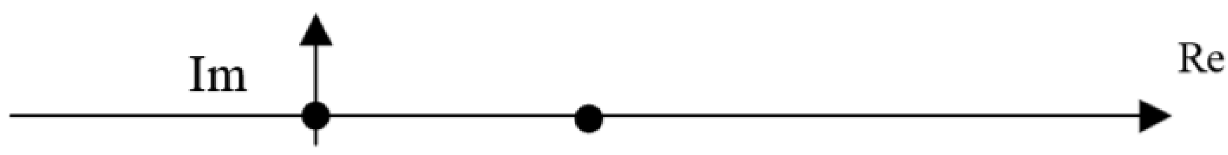
Modulation par déplacement d'amplitude (MDA): modulation binaire

- Tout ou rien: Un seul bit est transmis par période T et on a $\boldsymbol{a_k = (0, a_0)}$
- $m(t)$ prend un niveau 0 pour $a_k = 0$ et l'allure de la porteuse pour $a_k \neq 0$



Modulation par déplacement d'amplitude (MDA): modulation binaire





Constellation de la modulation d'amplitude par tout ou rien (OOK)

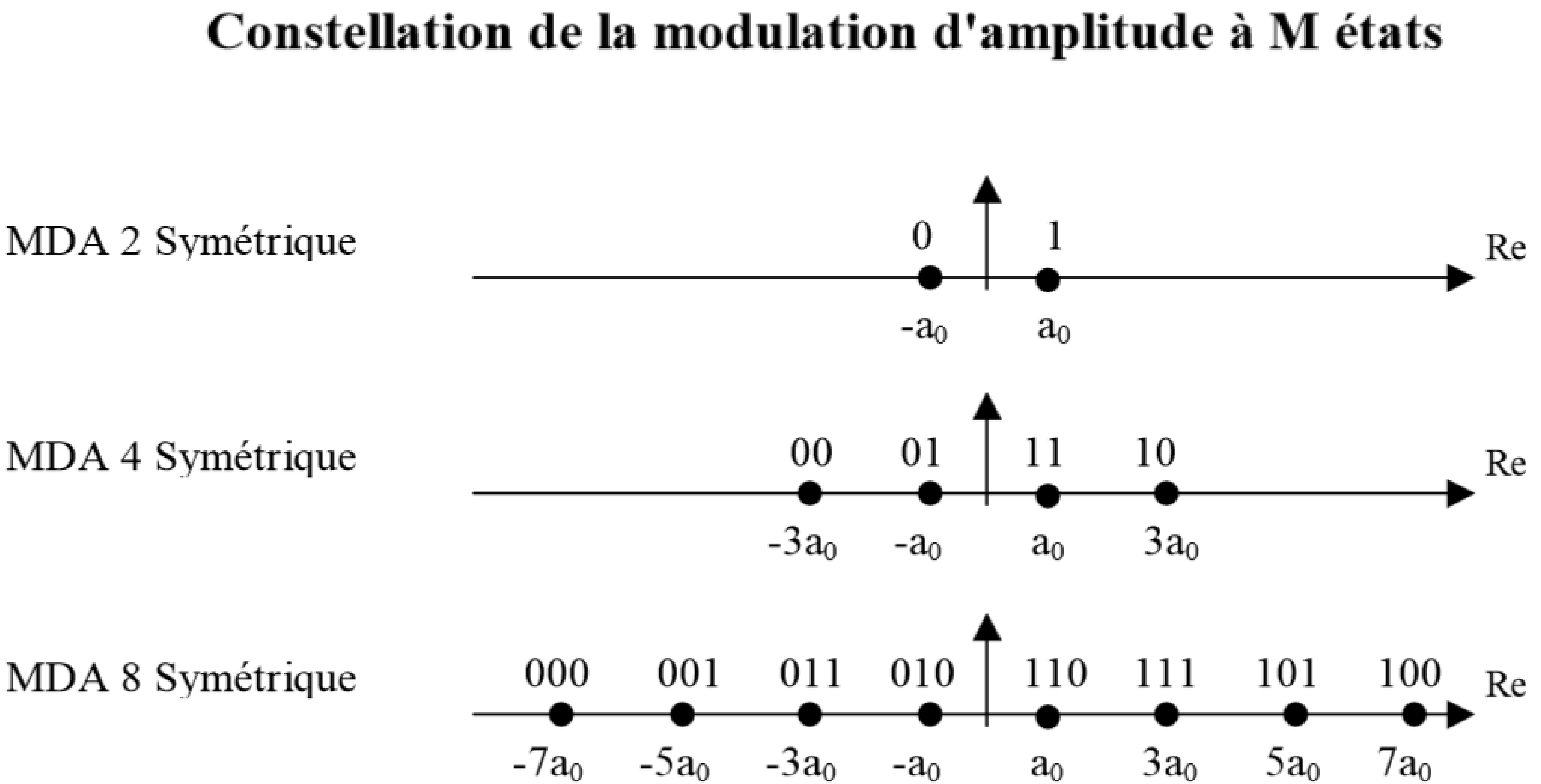
Modulation par déplacement d'amplitude (MDA): modulation à M états

- Dans ce cas on utilise plutôt la modulation symétrique.
- On a $M = 2^n$ amplitudes possibles du signal, mais ici les valeurs de l'alphabet sont

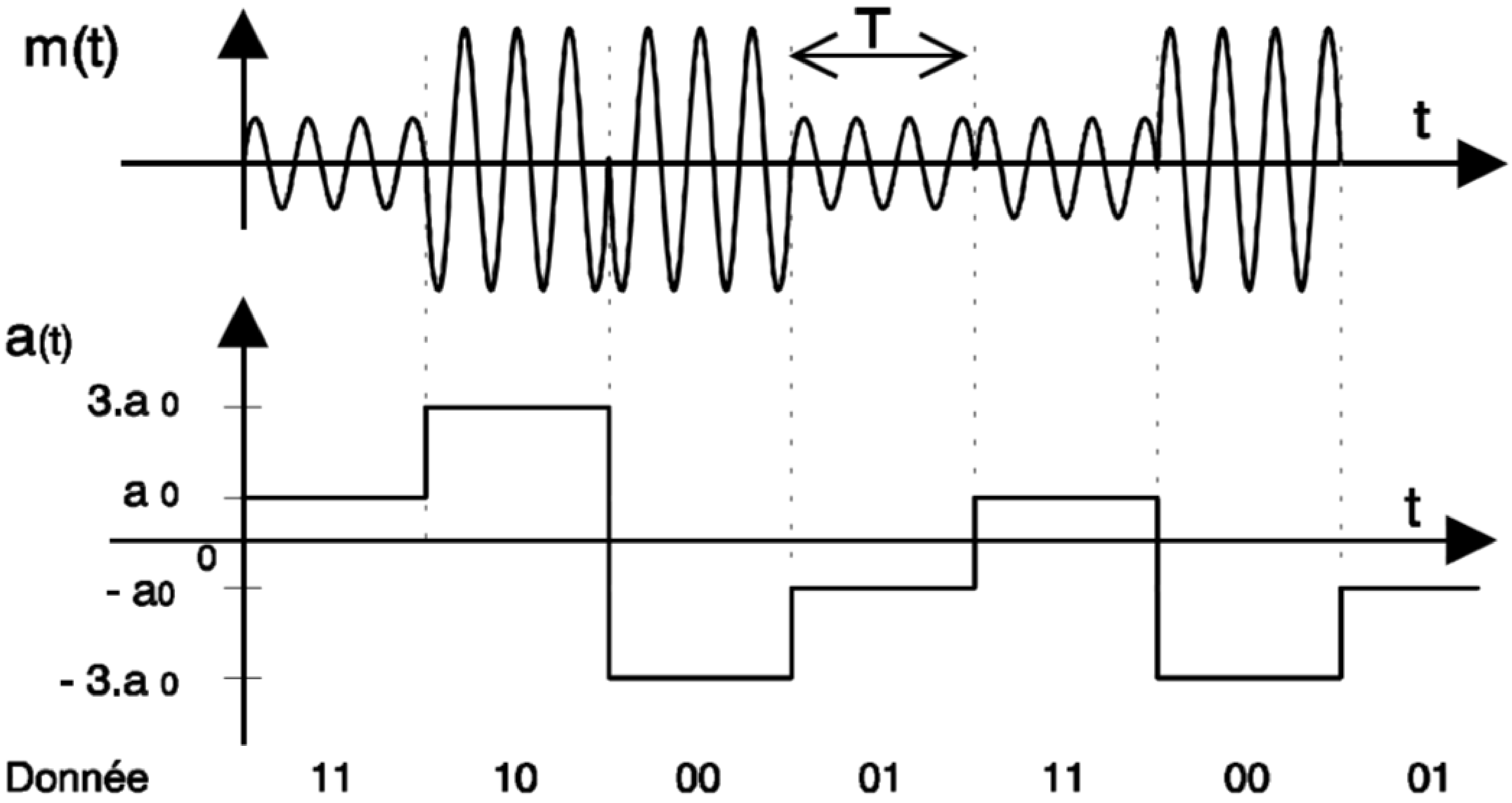
$$A_i = (2i - M + 1).a_0 \quad \text{avec} \quad i = 1,2,\ldots M.$$

n	M	Valeurs de l'alphabet
1	2	$-1a_0$, $1a_0$
2	4	$-3a_0$, $-1a_0$, $1a_0$, $3a_0$
3	8	$-7a_0$, $-5a_0$, $-3a_0$, $-1a_0$, $1a_0$, $3a_0$, $5a_0$, $7a_0$

Modulation par déplacement d'amplitude (MDA): modulation à M états



Exemple: Modulation MDA-4 symétrique



Modulation par déplacement de phase (MDP)

- On rappelle que

$$m(t) = Re\left[\sum_k c_k(t)e^{j(\omega_p t+\varphi_p)}\right]$$

- avec $c_k(t) = a_k(t) + jb_k(t)$ où

$$a_k(t) = a_k g(t - kT) \text{ et } b_k(t) = b_k g(t - kT)$$

$$c_k(t) = (a_k(t) + jb_k(t))\, g(t - kT)$$

- Et on a $g(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Modulation par déplacement de phase (MDP)

- Dans ce cas on a $c_k = a_k + jb_k = e^{j\varphi_k}$ répartis sur un cercle et par conséquent

$$a_k = \cos(\varphi_k) \qquad b_k = \sin(\varphi_k)$$

$$a_k(t) = \cos(\varphi_k).g(t - kT) \qquad b_k(t) = \sin(\varphi_k).g(t - kT)$$

- Pour améliorer les performances par rapport au bruit, on impose aux symboles d'être répartis régulièrement sur le cercle et on a

$$\varphi_k = \frac{\pi}{M} + k\frac{2\pi}{M} \qquad \text{lorsque } M > 2$$

$$\varphi_k = 0 \ \text{ ou } \ \pi \qquad \text{lorsque } M = 2.$$

Modulation par déplacement de phase (MDP)

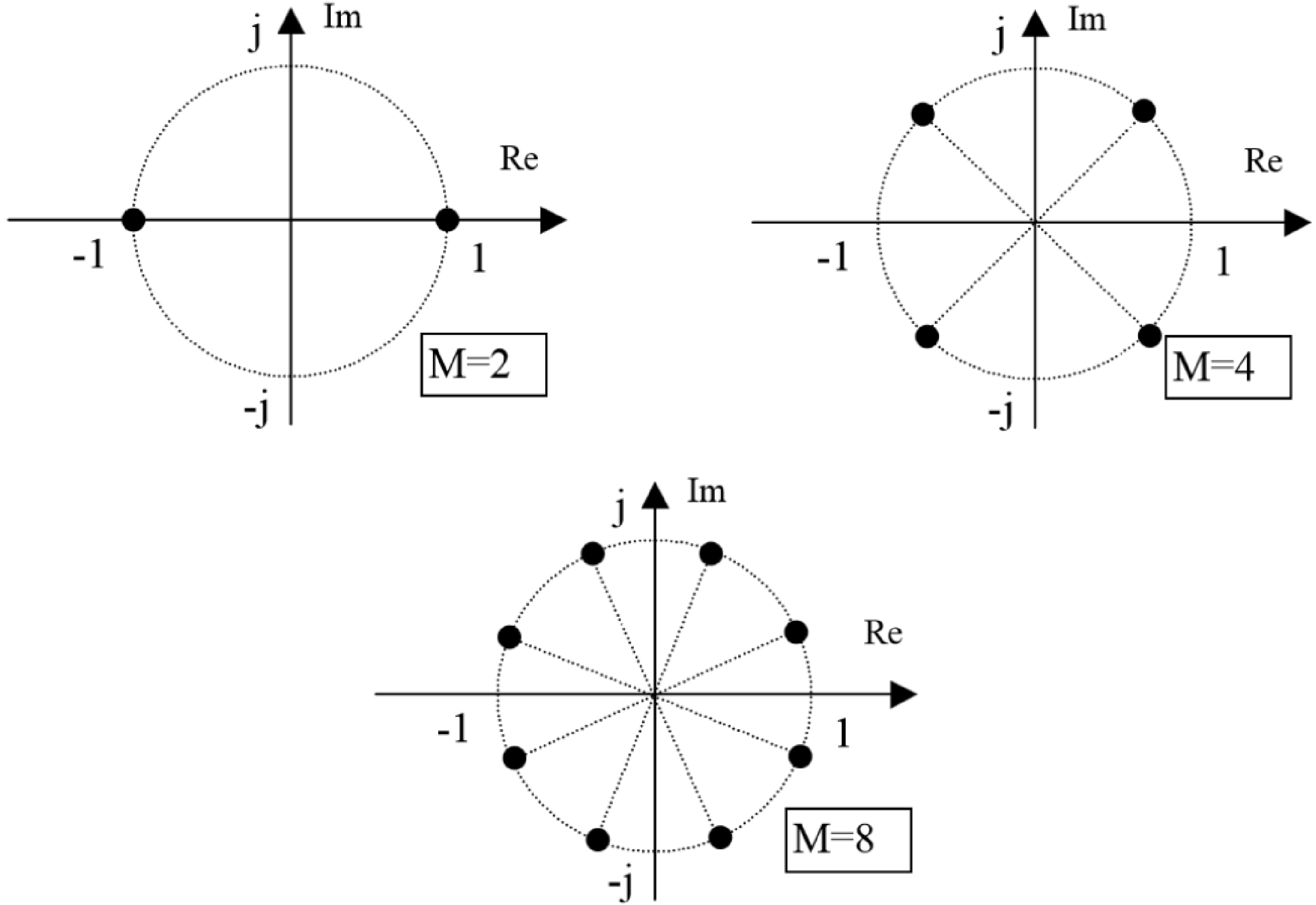
- Les symboles c_k prennent leurs valeurs dans un alphabet de $M > 2$ éléments $\{e^{j\varphi_k}\}$ $où\ k = 0,1, \dots M-1.$
- On peut aussi considérer que a_k et b_k prennent simultanément leurs valeurs dans l'alphabet $\{\cos(\phi_k)\} et \{\sin(\phi_k)\}$.
- Le signal modulé $m(t)$ devient

$$m(t) = Re\left[A_p e^{j(\omega_p t + \varphi_p + \varphi_k)}\right]$$

- On prendra $\varphi_p = 0$

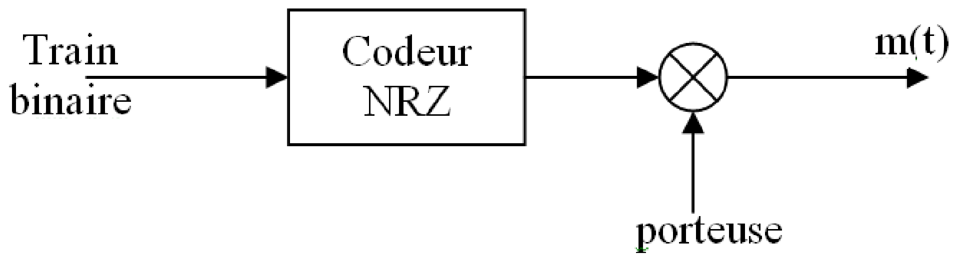
$$m(t) = A_p \sum_k g(t - kT) \cos\left(\omega_p t + \varphi_k\right)$$

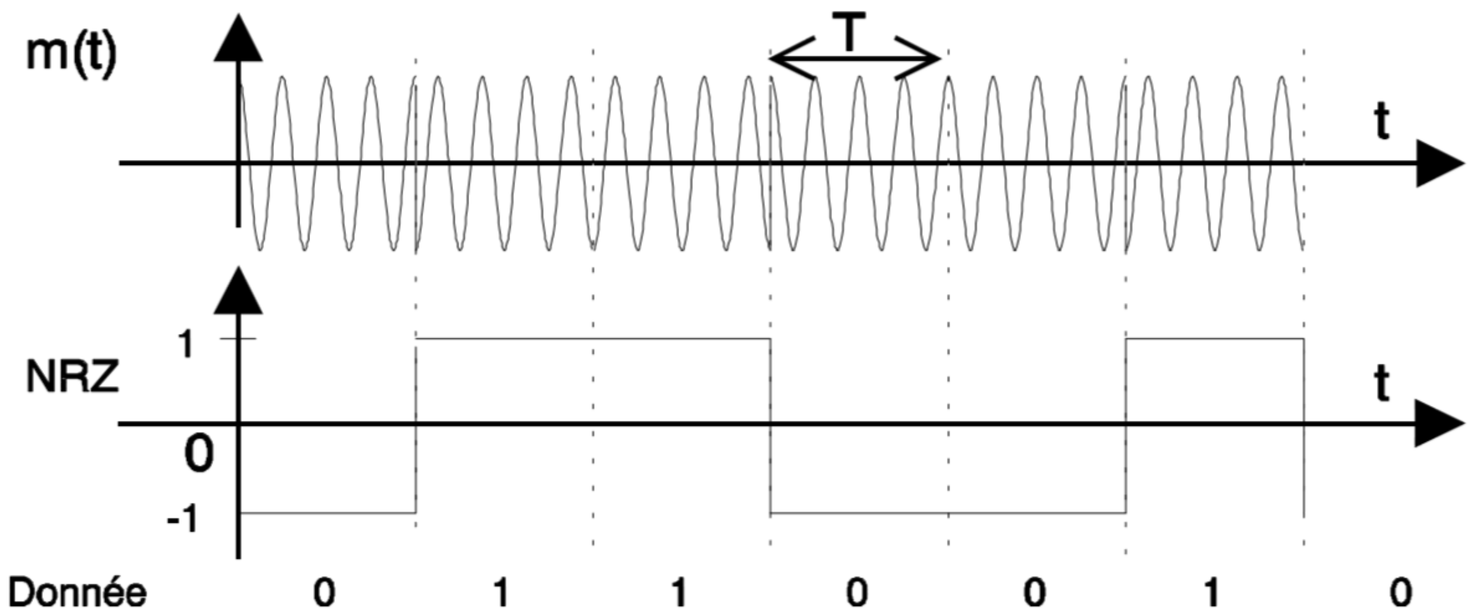
Modulation par déplacement de phase (MDP): Constellation



Modulation par déplacement de phase (MDP): Modulation binaire

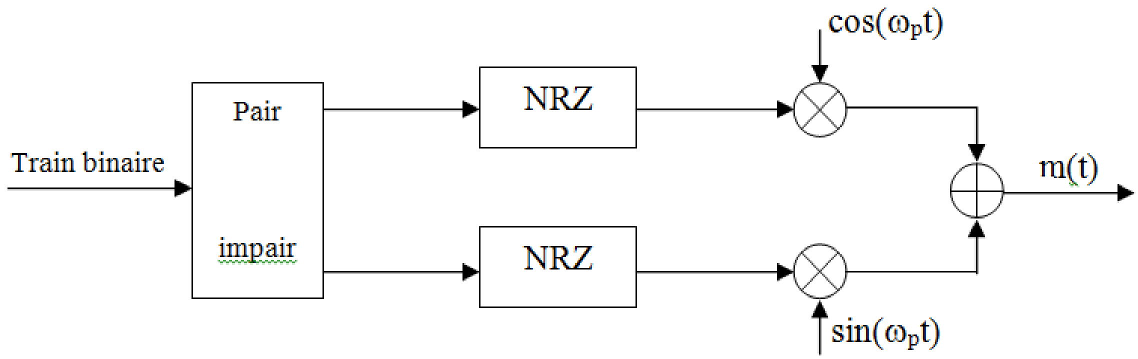
- La phase prend les valeurs 0 ou $\pi \Rightarrow m(t) = \pm A_p \cos(\omega_p t)$





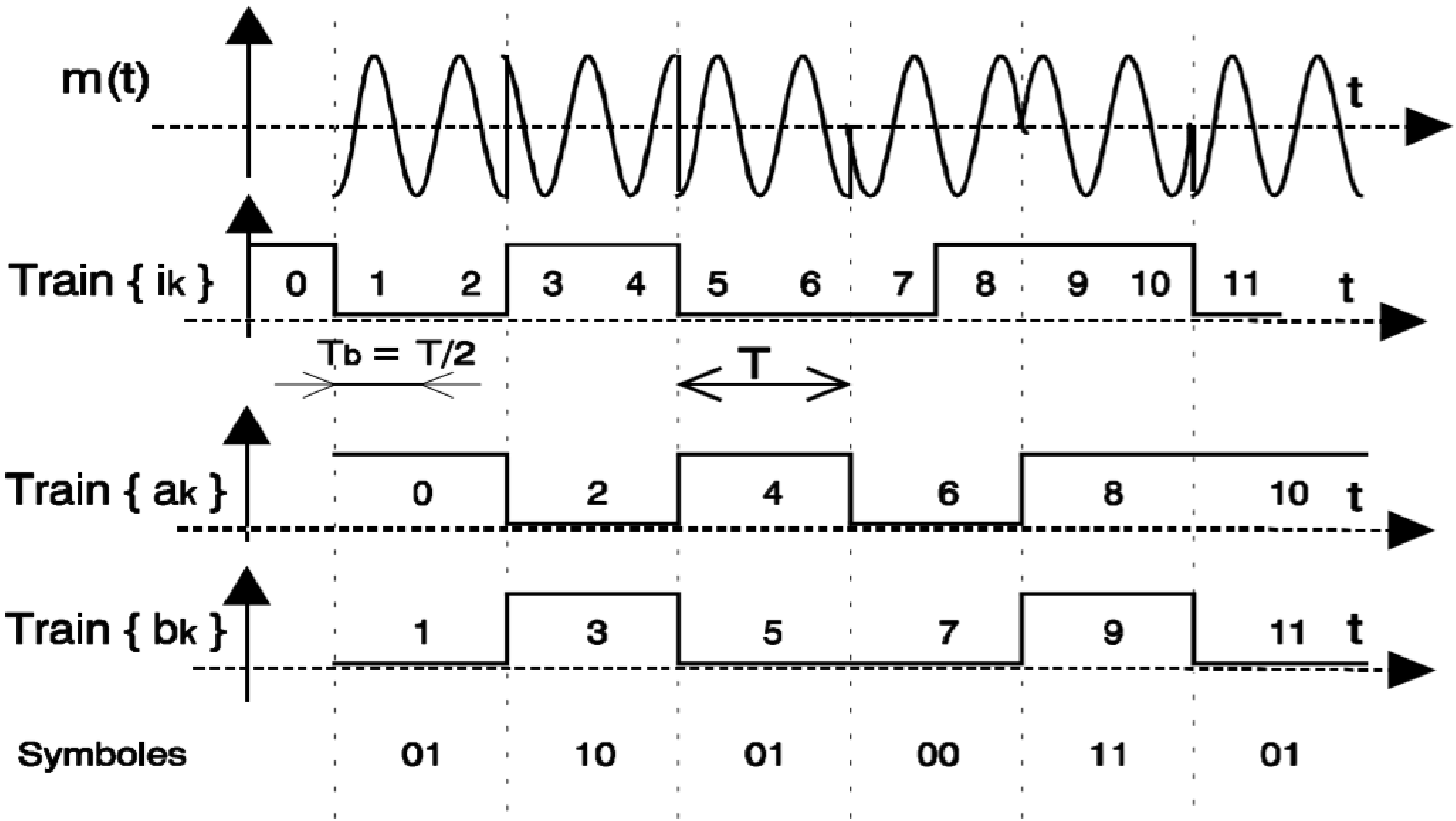
Exemple: Modulation MDP-4

- C'est une modulation d'amplitude à deux niveaux avec des phases $\varphi_k = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, ce qui correspond à n = 2 et M = 4.



Bit pair	Bit impair	Symbole	ϕ_k	a_k	b_k
0	0	00	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1	0	01	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1	1	11	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1	10	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemple: Modulation MDP-4



Modulation d'amplitude sur deux porteuses en quadrature (MAQ)

- MDA: constellation sur une droite
- MDP: constellation sur un cercle
- Un choix plus rationnel est alors une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan.

$$m(t) = a(t)\cos(\omega_p t + \varphi_p) - b(t)\sin(\omega_p t + \varphi_p)$$

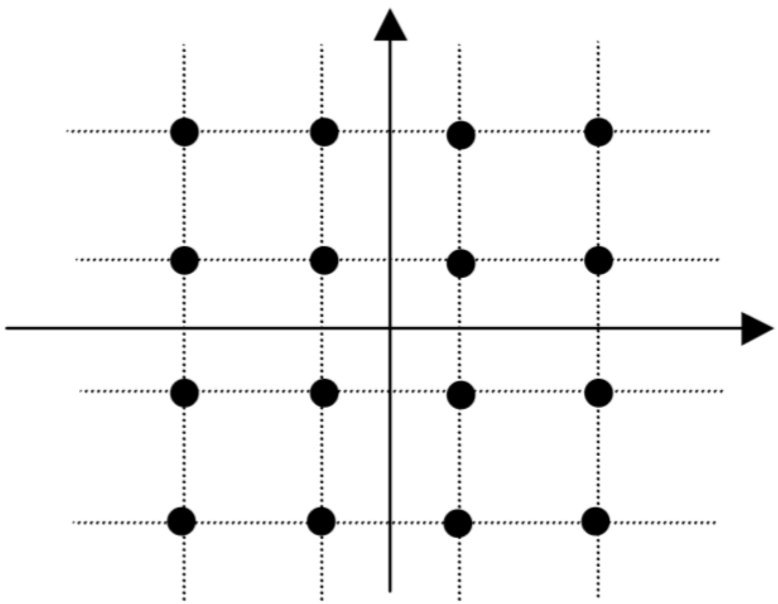
avec

$$a(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \quad et \quad b(t) = \sum_k b_k g(t - kT)$$

- Le signal $m(t)$ est donc la somme de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par les deux signaux $a(t)$ et $b(t)$.

Exemple MAQ-16

- Les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans un même alphabet à M éléments.
- La modulation MAQ-16, a_k et $b_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$



MAQ-16

Modulation FSK : Modulation par déplacement de fréquence MDF

L'expression, du signal modulé par déplacement de fréquence s'écrit :

$$m(t) = \cos(2\pi f_p t + \Phi(t))$$

C'est la dérivée de la phase qui est reliée de manière linéaire à la valeur des différents symboles. La fréquence instantanée f(t) du signal m(t) est la dérivée de la phase instantanée et a pour expression : $f(t) = f_p + \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}$.

Dans cette expression, $\frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}$ représente la déviation de fréquence par rapport à la fréquence centrale f_p. Si on note Δf la différence de la fréquence instantanée correspondant à l'émission de deux symboles adjacents, alors on peut écrire sur l'intervalle [kT, (k+1)T[:

$$\Phi(t) = \pi \Delta f a_k (t - kT) + \theta_k$$

On remarque, donc, que la phase varie linéairement en fonction du symbole émis. Et si on revient à l'expression du signal modulé par déplacement de fréquence, on obtient :

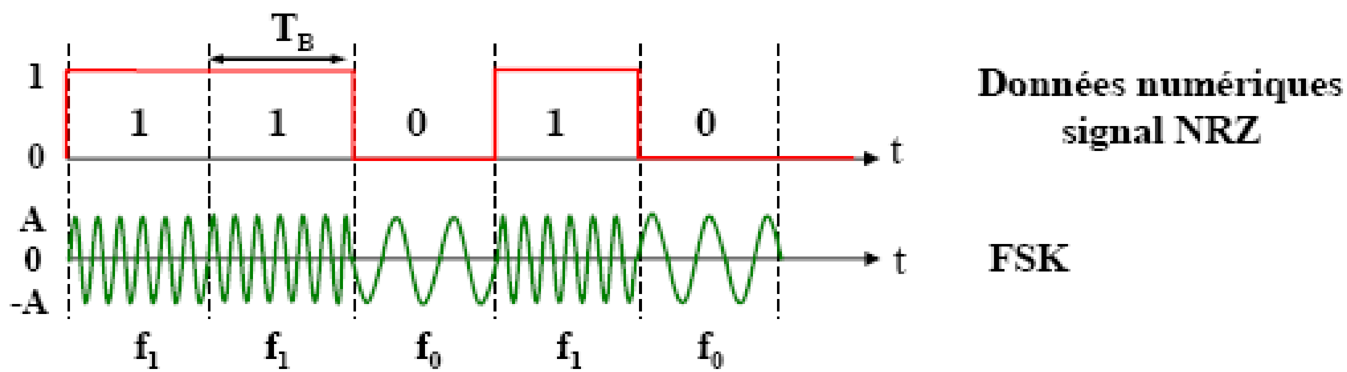
$$m(t) = \cos(2\pi(f_p + \frac{\Delta f}{2} a_k)t)$$

Modulation FSK : Modulation par déplacement de fréquence MDF

<u>Modulation FSK</u> **FSK : Frequency Shift Keying**

Aussi appelée modulation par déplacement de fréquence (MDF).

à un « 0 » on associe une fréquence $f_0 = f_p - \Delta f$ et à un « 1 » on associe la fréquence $f_1 = f_p + \Delta f$



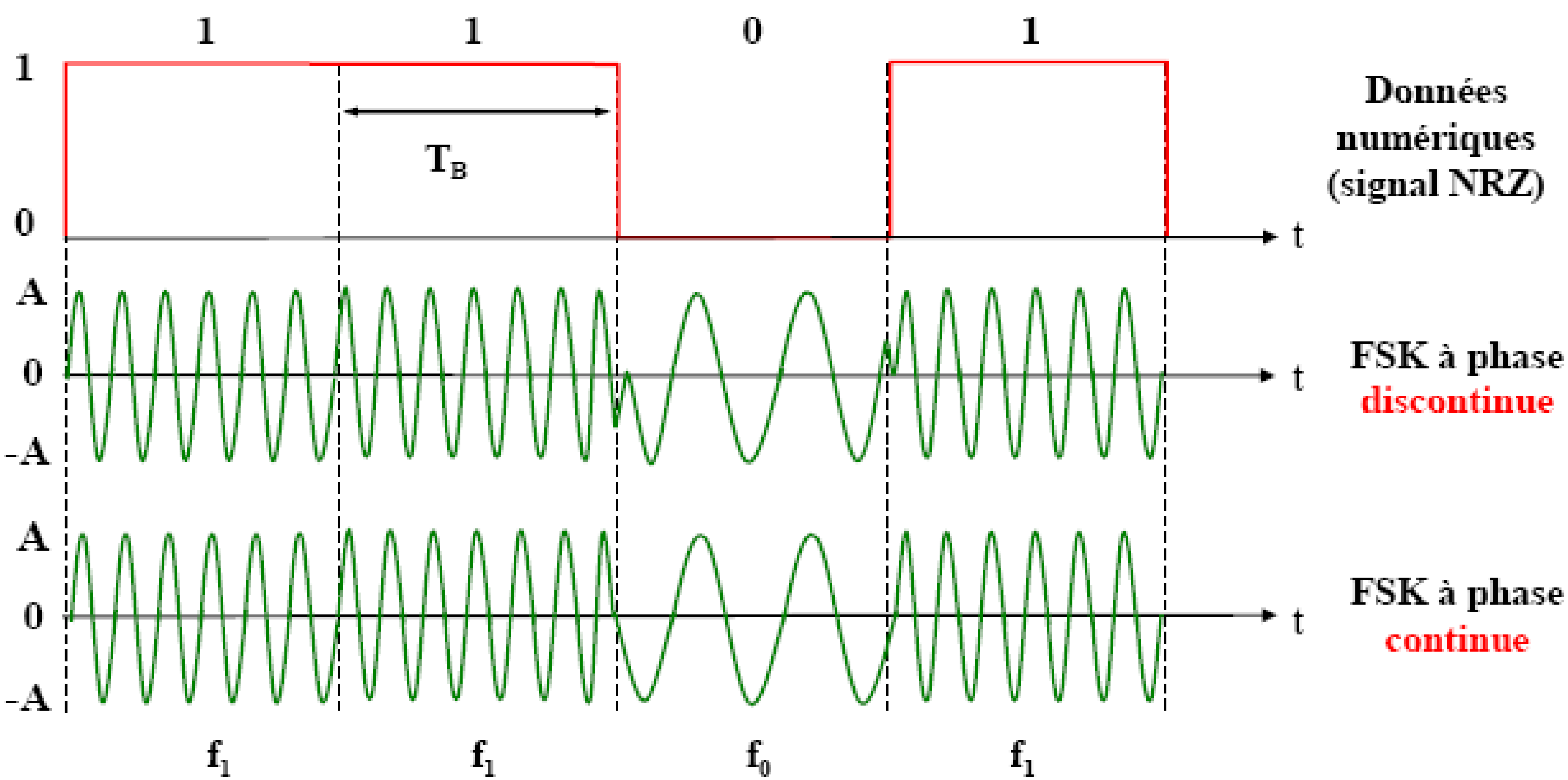
Une modulation FSK est définie par :

- f_p **fréquence centrale du spectre FSK** $f_p = \dfrac{f_1 + f_0}{2}$
- Δf **excursion en fréquence** $\Delta f = \dfrac{|f_1 - f_0|}{2}$
- f_B **débit binaire** $f_B = \dfrac{1}{T_B}$

Modulation FSK : Modulation par déplacement de fréquence MDF

On distingue deux types de FSK :

- FSK à phase discontinue
- FSK à phase continue



Fin