Funkcjonały dwuliniowe i formy kwadratowe

1. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Udowodnić, że
$$h(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \frac{1}{2}\left(g(\mathbb{x}, \mathbb{y}) - g(\mathbb{y}, \mathbb{x})\right)$$
jest funkcjonałem antysymetrycznym.

2. Funkcjonał $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ma w bazie $\mathcal{B} = (\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3)$, gdzie
$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć macierz funkcjonału w bazie kanonicznej $\mathbb{R}^3$.

3. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym określonym wzorem
$$g(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3 - 4x_2y_1 + 4x_3y_2.$$
   a) Wykazać, że g nie jest symetryczny.
   b) Wykazać, że $h(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \frac{1}{2}\left(g(\mathbb{x}, \mathbb{y}) + g(\mathbb{y}, \mathbb{x})\right)$ jest symetryczny.
   c) Wyznaczyć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz funkcjonału h jest diagonalna.

4. Zbadać określoność podanych form kwadratowych:
   a) $f(\mathbb{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$
   b) $f(\mathbb{x}) = \mathbb{x}^T\mathbf{A}\mathbb{x}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. Zbadać określoność podanych macierzy:
   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
   b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
   c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. W zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ zbadać określoność formy $f(\mathbb{x}) = (m^2 - 1)x_1^2 + 2x_2^2 + 2mx_1x_2$

7. Wykazać, że jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą dodatnio określoną, to istnieje $\mathbf{A}^{-1}$, która też jest dodatnio określona.