

6장. 논리식의 간략화

- 01. 2변수 카르노 맵
- 02. 3변수 카르노 맵
- 03. 4변수 카르노 맵
- 04. 선택적 카르노 맵
- 05. 논리식의 카르노 맵 작성
- 07. NAND와 NOR 게이트로의 변환

01 2변수 카르노 맵



□ 개요

- ◎ 불 대수를 이용한 간소화하는 방법은 복잡하고 검증도 어렵다.
- ◎ 카르노 맵(1953년 Maurice Karnaugh가 소개) 을 이용하면 논리식을 쉽게 간소화할 수 있다.

□ 2변수 카르노 맵 표현 방법

$A \backslash B$	\bar{B}	B
	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
\bar{A}		
A		

$A \backslash B$	\bar{B}	B
	m_0	m_1
\bar{A}		
A		

$A \backslash B$	0	1
	0	1
0		
1		

$B \backslash A$	\bar{A}	A
	m_0	m_2
\bar{B}		
B		

- ❖ 무관항(don't care) : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 민텀(minterm)항.
- ❖ x 로 표시하거나 d로 표시한다.



□ 일반항과 무관항 표현

A \ B	0	1
0	1	
1		1

$$F(A, B) = \sum m(0, 3)$$

A \ B	0	1
0	1	x
1		1

$$F(A, B) = \sum m(0, 3) + \sum d(1)$$

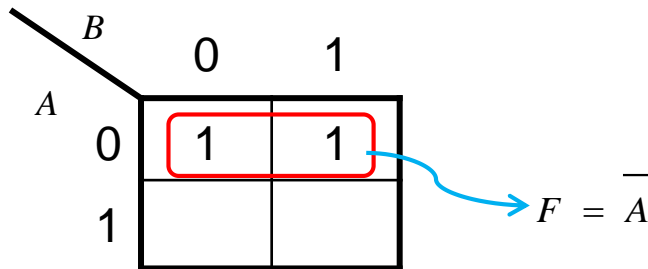
- 출력이 1이거나 무관항만 표시한다.
- 출력 0을 표시하여도 되지만 일반적으로 생략한다.

01 2변수 카르노 맵



□ 카르노맵을 이용한 간소화 방법

- ① **출력이 같은 항을 1, 2, 4, 8, 16**개로 그룹을 지어 묶을 수 있고,
- ② 바로 **이웃한** 항들끼리 묶을 수 있으며,
- ③ 반드시 **직사각형**이나 **정사각형**의 형태로 묶어야 하고,
- ④ 최대한 **크게** 묶는다.
- ⑤ **중복**하여 묶어서 간소화된다면 중복하여 묶는다.
- ⑥ 무관항의 경우 간소화될 수 있으면 묶어 주고, 그렇지 않으면 묶지 않는다.



불 대수의 법칙으로 풀면

$$\begin{aligned} F &= \overline{A} \overline{B} + \overline{A} B \\ &= \overline{A} (\overline{B} + B) = \overline{A} \cdot 1 = \overline{A} \end{aligned}$$

$A=0$ 이므로 \overline{A}

$B=0$ and 1 이므로 제거

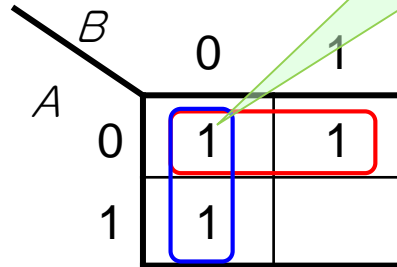
즉, 한 변수에서 서로 다른 값이 묶여지면 제거한다.

01 2변수 카르노 맵



□ 간소화 예

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



중복하여도 되므로
크게 묶는다.

불 대수의 법칙으로 풀면

$$F = \sum m(0, 1, 2) = \boxed{\bar{A}\bar{B}} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$F = \bar{A} + \bar{B}$$

02 3변수 카르노 맵



□ 3변수 카르노 맵 표현 방법

$A \backslash BC$	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
\overline{A}	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
A	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$AB \backslash C$	\overline{C}	C
$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
AB	$AB\overline{C}$	ABC
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$

$C \backslash AB$	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
\overline{C}	$\overline{C}\overline{A}\overline{B}$	$\overline{C}\overline{A}B$	$\overline{C}A\overline{B}$	$\overline{C}AB$
C	$C\overline{A}\overline{B}$	$C\overline{A}B$	$CA\overline{B}$	CAB

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

$AB \backslash C$	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

행과 열을 바꾸어도 상관없다.
설계자가 선호하는 방법을 선택하면 된다.

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : $F(A, B, C) = \sum m(0, 1, 6, 7)$

$\begin{array}{c} BC \\ \swarrow \searrow \\ A \end{array}$	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

$F =$

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 양쪽 끝 묶음

$\backslash BC$	00	01	11	10
A 0	1			1
1				

$F =$

$\backslash BC$	00	01	11	10
A 0				
1				

양쪽 끝은 연결
되어 있다.



동일한 카르노 맵

$\backslash BC$	01	11	10	00
A 0			1	1
1				

$F =$

이웃하는 비트들이 한 비트만 다르면
순서는 관계없다.

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 4개 항 묶음

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0		1	1	
1		1	1	

Diagram showing a 2x4 Karnaugh map for 3 variables (A, B, C). The map has four 1s in the middle columns (BC=01 and BC=11) for both A=0 and A=1. A red box highlights these four 1s, and a blue arrow points to the right, indicating a group of four terms.

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0	1	1	1	1
1				

Diagram showing a 2x4 Karnaugh map for 3 variables (A, B, C). The map has four 1s in the top row (A=0) for all BC values (00, 01, 11, 10). A red box highlights these four 1s, and a blue arrow points to the right, indicating a group of four terms.

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0	1			1
1	1			1

Diagram showing a 2x4 Karnaugh map for 3 variables (A, B, C). The map has four 1s in the first and last columns (BC=00 and BC=10) for both A=0 and A=1. Red boxes highlight the 1s in the first and last columns. A blue arrow points from the first column to the last column, indicating a wrap-around connection.

양쪽 끝은 연결
되어 있다.

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 다른 묶음에 모두 포함되어 있는 경우는 묶지 않는다.

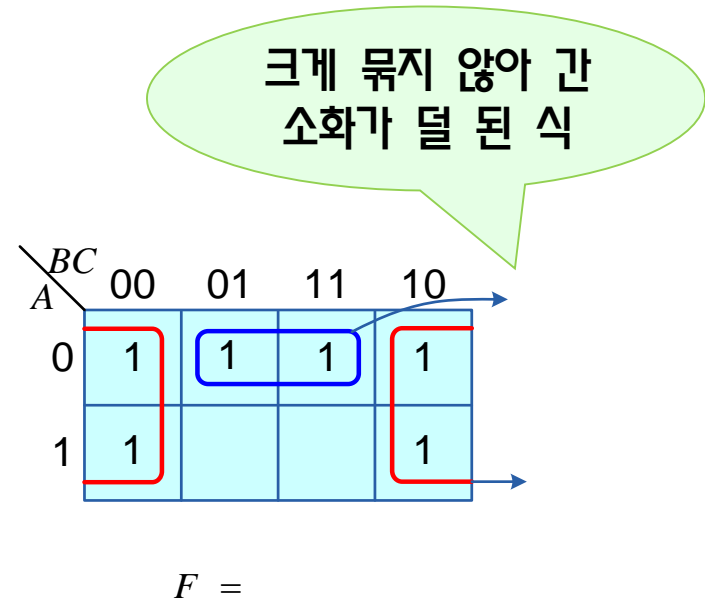
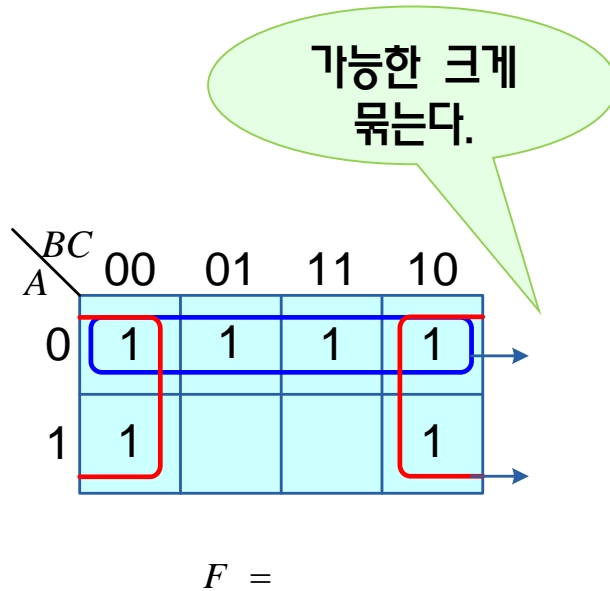
$\begin{matrix} BC \\ A \end{matrix}$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

다른 묶음에 모두 포함되어 있으므로 중복하여 묶지 않는다.

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 최대한 크게 묶는다.



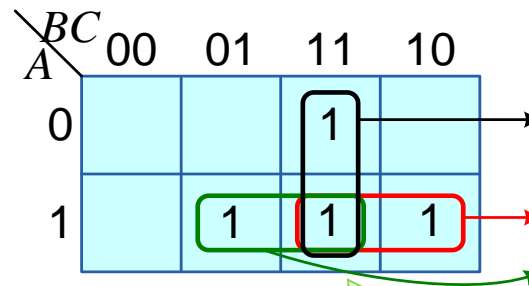
02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 세번 중복하여 묶는 경우

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \sum m(3, 5, 6, 7) =$$



세 번 중복하여 묶는 경우

02 3변수 카르노 맵



□ 간소화 : 모두 0이거나 모두 1인 경우

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0				
1				

모두 0이면 논리식은
 $F=0$ 이다.

$$F = 0$$

$\backslash BC$	00	01	11	10
A				
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

모두 1이면 논리식은
 $F=1$ 이다.

$$F = 1$$

03 4변수 카르노 맵



□ 4변수 카르노 맵 표현 방법

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$
01	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
11	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$
10	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

상하 좌우는 연결되어 있다.

Tip

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$F = 1$

03 4변수 카르노 맵



예제 6-2 다음과 같은 다양한 4변수 카르노 맵에서 간소화된 논리식을 구하여라.

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00				
01			1	1
11				
10				

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00				
01				
11	1			1
10				

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1			
01				
11				
10	1			

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1			
01	1		1	1
11	1		1	1
10	1			

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00				
01	1			1
11	1			1
10				

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

$F =$

03 4변수 카르노 맵



$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1		
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1		

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01	1		1	
11	1	1	1	1
10	1		1	

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01	1			1
11	1			1
10	1	1	1	1

$F =$

$\backslash CD$	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01			1	1
11	1			1
10	1		1	1

$F =$

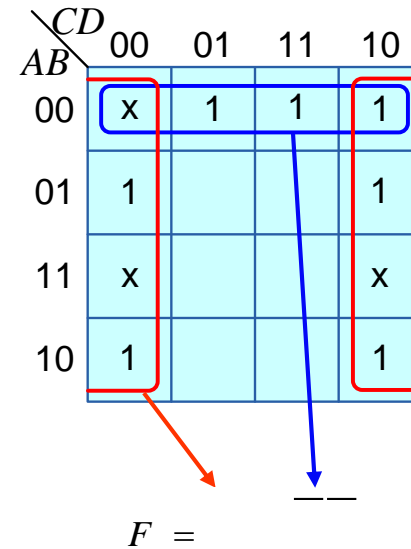
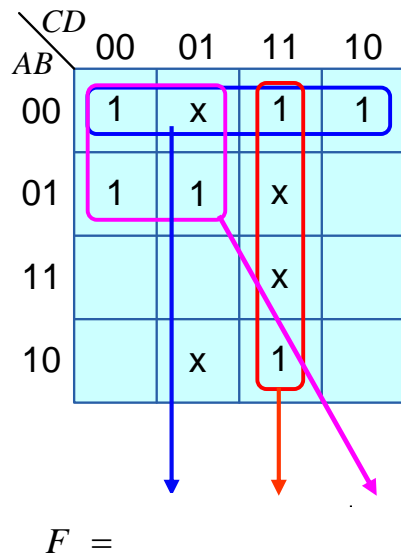
03 4변수 카르노 맵



예제 6-3 다음 식과 같이 무관항이 있을 경우, 카르노 맵을 이용하여 간소화하여라.

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 4, 5, 11) + \sum d(1, 7, 9, 15)$$

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10) + \sum d(0, 12, 14)$$



End of Example

03 4변수 카르노 맵



예제 6-4 다음 진리표로부터 카르노 맵을 작성하고 간소화하여라.

A B C D	F
0 0 0 0	x
0 0 0 1	1
0 0 1 0	x
0 0 1 1	1
0 1 0 0	x
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0

풀이

CD \ AB	00	01	11	10
00	x	1	1	x
01	x	1	1	1
11		1		1
10				

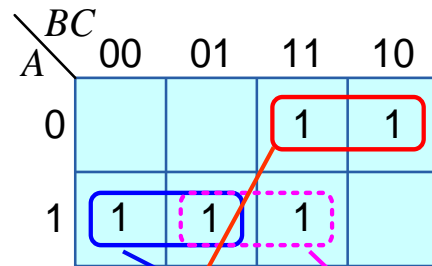
$$F(A, B, C, D) =$$

End of Example

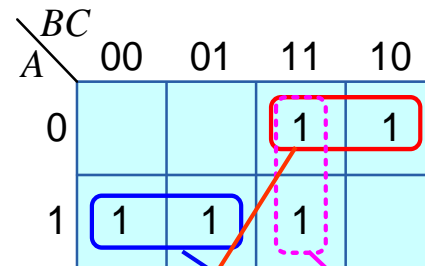
04 선택적 카르노 맵



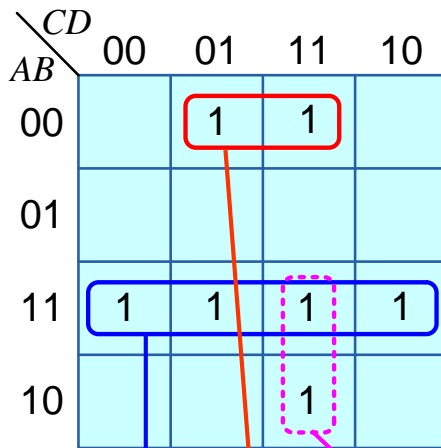
□ 카르노 맵에서 선택적으로 묶을 수 있는 경우



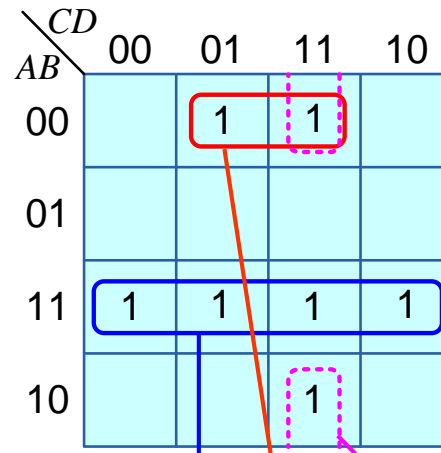
$$F = \overline{A}B + A\overline{B} + AC$$



$$F = \overline{A}B + A\overline{B} + BC$$



$$F = AB + \overline{A}\overline{B}D + ACD$$



$$F = AB + \overline{A}\overline{B}D + \overline{B}CD$$

2가지 답이 가능한 경우

05 논리식의 카르노 맵 작성



- ❖ 논리식에서 생략된 부분을 찾아서 최소항(Minterm)으로 변경

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= ABC + \overline{A}B + \overline{\overline{A}}\overline{B} \\ &= ABC + \overline{A}B(\overline{C} + C) + \overline{\overline{A}}\overline{B}(\overline{C} + C) \\ &= ABC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{\overline{A}}\overline{B}\overline{C} + \overline{\overline{A}}\overline{B}C \\ &= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\ &= \sum m(0, 1, 2, 3, 7) \end{aligned}$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

$$F = \overline{A} + BC$$

05 논리식의 카르노 맵 작성



❖ 최소항식으로 전개하지 않고 직접 카르노 맵을 이용하는 방법

$$F = \overline{A} + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B}\overline{C}$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
\overline{A} 0	1	1	1	1
1				

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
A 1	1	1		

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
A 1				1

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1		1

\overline{A} (points to row 0)
 \overline{B} (points to column 00)
 \overline{C} (points to column 10)

$$F = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$



□ A set of **universal gates** = 모든 진리표를 나타낼 수 있는 게이트 집합

예: { AND, OR, NOT }으로 모든 진리표(=논리 회로, 진리함수)를 표현 가능

= **functionally complete**

□ Universal gates 집합의 예:

{ AND, OR, NOT }

{ AND, NOT }

{ OR, NOT }

{ NAND } -- minimal

{ NOR } -- minimal

{ AND, OR } 는 universal ?

07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



□ 기본 게이트의 NAND, NOR 식

NOT	$\overline{A} = \overline{A + A} = \overline{A \cdot A}$
AND	$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A + B}} = A + B$
OR	$\overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B$
NAND	$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A + B}} = A + B$
NOR	$\overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B$
XOR	$\overline{A}B + A\overline{B} = \overline{\overline{\overline{A}B + A\overline{B}}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot B} = \overline{(A + B)(A + B)}$ $= \overline{(A + B)} + \overline{(A + B)}$



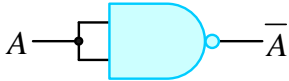
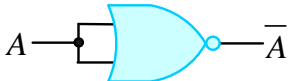
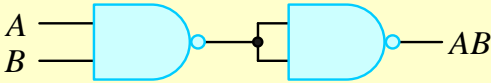
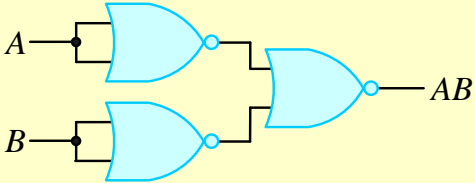
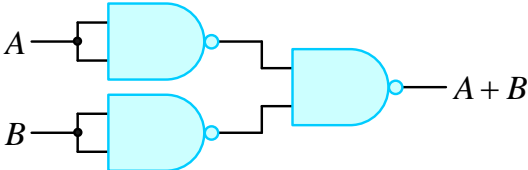
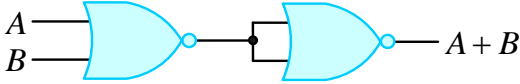
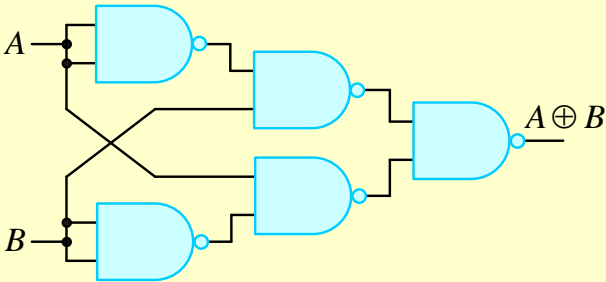
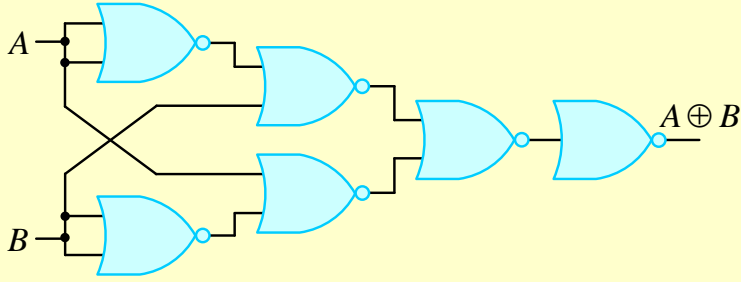
universal gate

NAND와 NOR 게이트는 만능 게이트라고도 불린다. 이 두 게이트는 다른 어떤 종류의 게이트라도 구성할 수 있기 때문이다.

07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



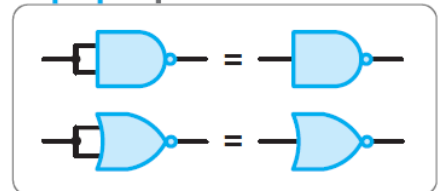
□ 기본 게이트의 NAND, NOR 회로

기본 게이트	NAND 게이트로 표현	NOR 게이트로 표현
NOT		
AND		
OR		
XOR		

07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



기본 게이트	NAND 게이트로 표현	NOR 게이트로 표현
NAND		
NOR		

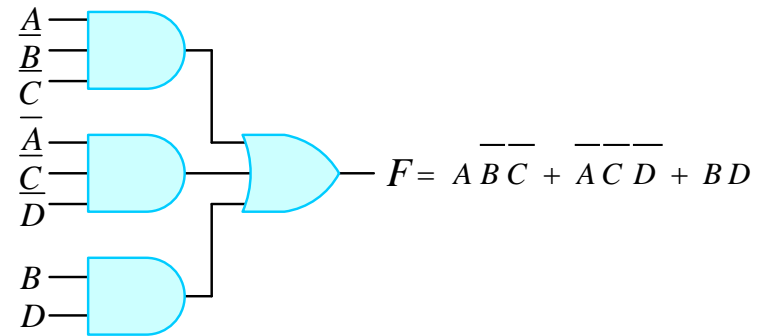


07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



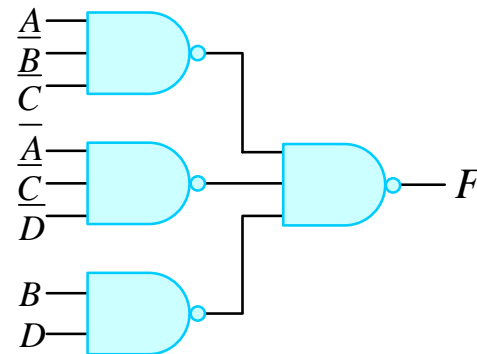
NAND 게이트만 이용한 회로

CD \ AB	00	01	11	10	
00	1				$\overline{A}\overline{C}\overline{D}$
01	1	1	1		BD
11		1	1		
10	1	1			$A\overline{B}\overline{C}$



이 논리식을 이중부정을 하여 드모르간의 정리를 적용하여 변형

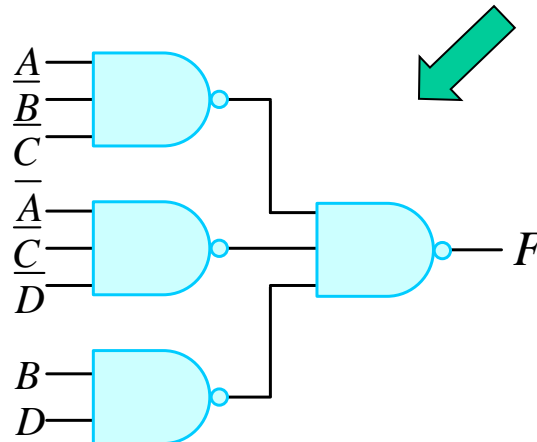
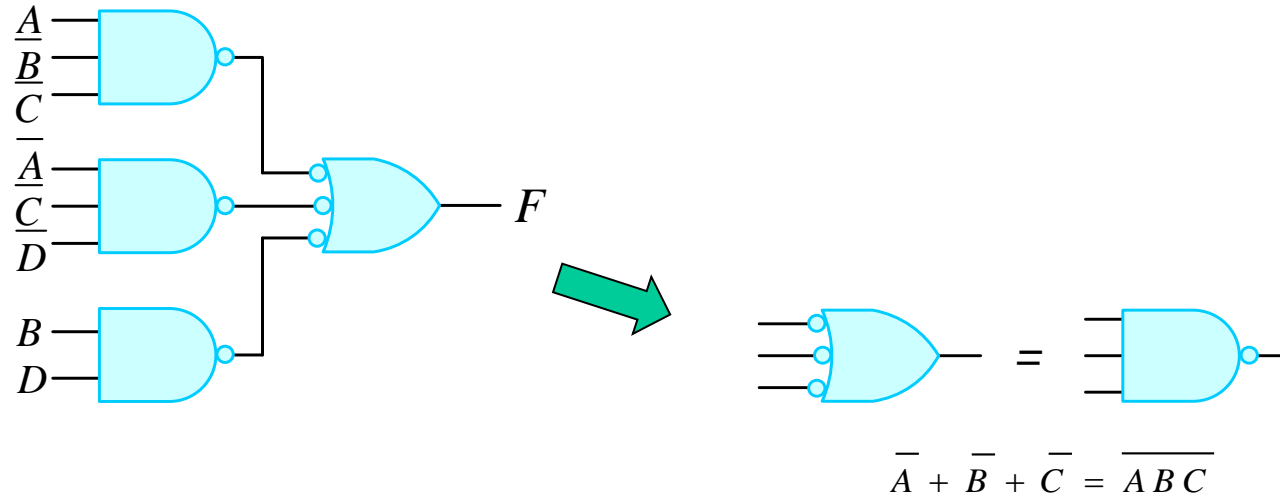
$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}\overline{D} + BD \\
 &= \overline{\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} + \overline{\overline{A}\overline{C}\overline{D}} + \overline{BD}} \\
 &= \overline{ABC \cdot ACD \cdot BD}
 \end{aligned}$$



07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



□ 다른 방법 : AND 게이트 뒤에 OR 게이트가 있을 때 이중부정 적용



07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



예제 6-9 다음 논리식을 NAND 게이트만 사용하여 설계하라.

$$F = \overline{C}\overline{D} + AB\overline{C} + \overline{A}C + \overline{B}C$$

풀이

07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



NOR 게이트만 이용한 회로

CD \ AB	00	01	11	10	
00	1	0	0	0	$B + \bar{C}$
01	1	1	1	0	$A + B + \bar{D}$
11	0	1	1	0	$\bar{C} + D$
10	1	1	0	0	$\bar{A} + \bar{B} + D$

0을 묶으면

$$\bar{F} = \bar{B}C + C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$$

부정을 하고 풀면 POS식이 된다.

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{\bar{B}C + C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}} \\
 &= \overline{\bar{B}C} \cdot \overline{C\bar{D}} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}D} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{D}} \\
 &= (B + \bar{C})(\bar{C} + D)(A + B + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + D)
 \end{aligned}$$

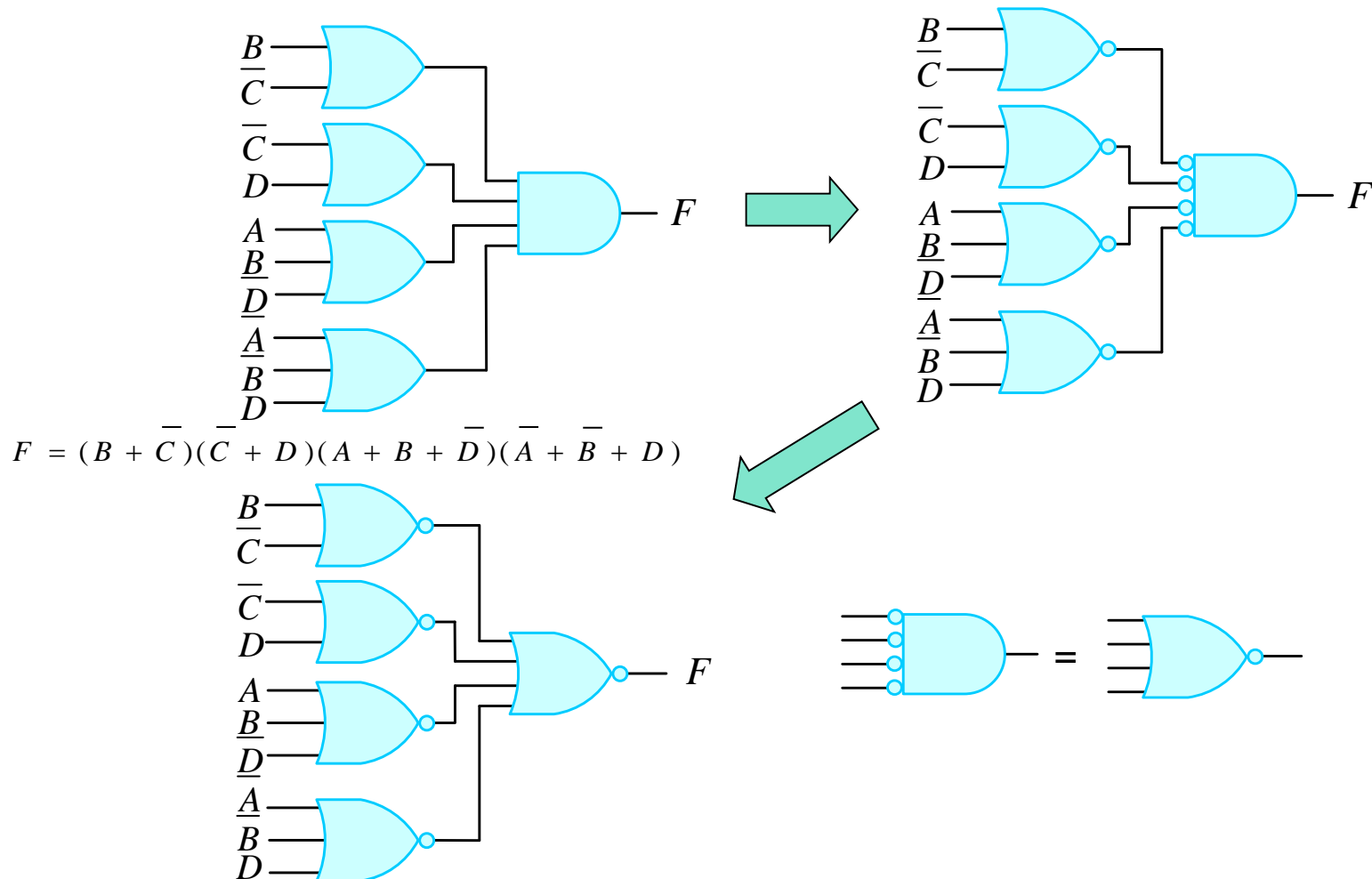
다시 2중 부정을 하여 나타내면 NOR회로로 직접 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{\overline{(B + \bar{C})(\bar{C} + D)(A + B + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + D)}} \\
 &= \overline{(B + \bar{C}) + (\bar{C} + D) + (A + B + \bar{D}) + (\bar{A} + \bar{B} + D)}
 \end{aligned}$$

07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



또는 OR 게이트 뒤에 NOT(bubble)을 2개 붙여서 나타내면



07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



예제 6-10 다음 진리표를 만족하는 논리회로를 NOR 게이트만으로 설계하여라.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

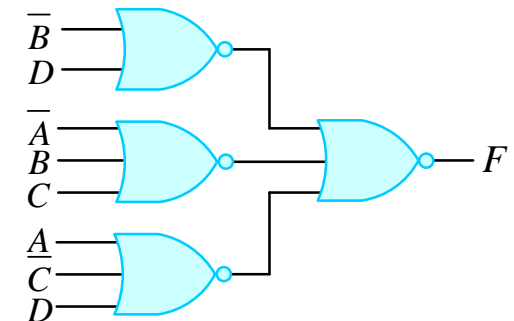
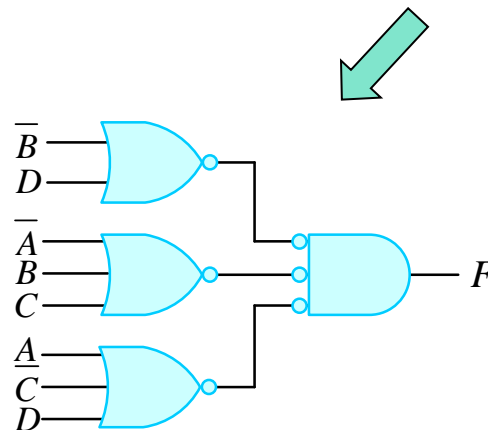
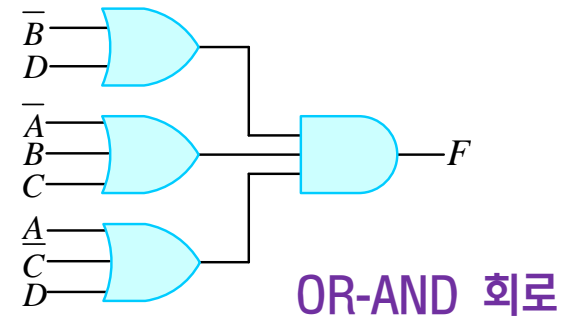
07 NAND와 NOR 게이트로의 변환



풀이 0을 묶어서 POS식으로 나타내면 $F = (\overline{B} + D)(\overline{A} + B + C)(A + \overline{C} + D)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

$\rightarrow A + \overline{C} + D$ (blue box around 0 at AB=10, CD=00)
 $\rightarrow \overline{B} + D$ (magenta box around 0s at CD=01, 11)
 $\rightarrow \overline{A} + B + C$ (red box around 0s at AB=00, 10)



End of Example