2장. 수의체계

01. 10진수

02. 2진수

03. 8진수와 16진수

04. 진법 변환

05. 2진 정수 연산과 보수

06. 2진 부동소수점수의 표현

01 10 진수

❑ 10진수 표현법

- ❖ 기수가 10인 수
- ❖ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 사용

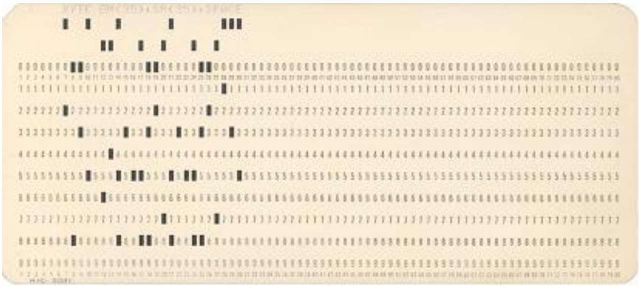
9345.35＝

진법을 나타내는 기본수를 기수(基數, radix)라 한다. **10**이 기수인 수를 **10**진법, **2**가 기수인 수를 **2**진법이라 한다.

❑ 2진수 표현법

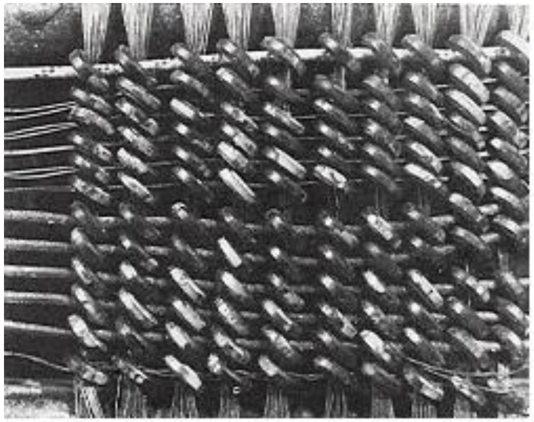
- 기수가 2인 수
- 0, 1 사용

$1010.1011_{(2)}$



Punch card

Core memory



종이 테이프

예제 2-1 2진수 $1000101.1011_{(2)}$ 을 10진수로 변환하여라.

풀이

$$
\begin{aligned}
1000101.1011_{(2)} &= 1\times 2^{6} + 1\times 2^{2} + 1\times 2^{0} + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} \\
&= 64 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 + 0.0625 \\
&= 69.6875_{(10)}
\end{aligned}
$$

End of Example

03 8진수와 16진수

❑ 8진수 표현법

- 0,1,2,3,4,5,6,7까지 여덟 개의 수로 표현, 기수가 8인 수

$$607.36_{(8)} = 6\times100_{(8)} + 0\times10_{(8)} + 7\times1_{(8)} + 3\times0.1_{(8)} + 6\times0.01_{(8)}$$
$$= 6\times8^2 + 0\times8^1 + 7\times8^0 + 3\times8^{-1} + 6\times8^{-2}$$

- 2진수 3자리는 8진수 1자리 : $2^3 = 8^1$

$$1010111010001 0.0111111_{(2)} = 10\ 101\ 110\ 100\ 010.011\ 111\ 1_{(2)}$$

❑ 8진수에 해당하는 2진수

8진수	0	1	2	3	4	5	6	7
2진수	000	001	010	011	100	101	110	111

03 8진수와 16진수

❑ 16진수 표현법

- 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F까지 16개의 기호로 표현, 기수: 16

$$
\begin{aligned}
6C7.3A_{(16)} &= 6\times16^{2}+C\times16^{1}+7\times16^{0}+3\times16^{-1}+A\times16^{-2}\\
&= 6\times256+12\times16+7\times1+3\times0.0625+10\times0.0039625\\
&= 1536+192+7+0.1875+0.0390625\\
&= 1735.2265625
\end{aligned}
$$

- 2진수 4자리는 16진수 1자리 : $2^4 = 16^1$

$$1010111010010.0111111_{(2)} = \quad 10\ \ 1011\ \ 1010\ \ 0010.0111\ \ 111_{(2)}$$

❑ 16진수에 해당하는 2진수

10진수	0	1	2	3	4	5	6	7
16진수	0	1	2	3	4	5	6	7
2진수	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

10진수	8	9	10	11	12	13	14	15
16진수	8	9						
2진수	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

예제 2-2 다음 8진수와 16진수를 10진수로 변환하여라.

(a) $475.26_{(8)}$ (b) $A91.CD_{(16)}$

풀이

$$
\begin{aligned}
\text{(a) } 475.26_{(8)} &= 4\times 8^{2}+7\times 8^{1}+5\times 8^{0}+2\times 8^{-1}+6\times 8^{-2} \\
&= 4\times 64+7\times 8+5\times 1+2\times 0.125+6\times 0.015625 \\
&= 256+56+5+0.25+0.09375 \\
&= 317.34375_{(10)}
\end{aligned}
$$

16진수	10진수
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

$$
\begin{aligned}
\text{(b) } A91.CD_{(16)} &= A\times 16^{2}+9\times 16^{1}+1\times 16^{0}+C\times 16^{-1}+D\times 16^{-2} \\
&= 10\times 256+9\times 16+1\times 1+12\times 0.0625+13\times 0.00390625 \\
&= 2560+144+1+0.75+0.05078125 \\
&= 2705.80078125_{(10)}
\end{aligned}
$$

End of Example

10진수-2진수 변환

- 정수부분과 소수부분으로 나누어 변환
- 정수부분은 2로 나누고, 소수부분은 2를 곱한다.
- 10진수 75.6875를 2진수로 변환하는 경우

$$75.6875_{(10)} = 1001011.1011_{(2)}$$

10진수-8진수 변환

- 10진수 75.6875를 8진수로 변환
- 8로 나누고, 곱한다.

8	75	나머지	→	8진수
8	9	… 3	→	3
8	1	… 1	→	13
	0	… 1	→	113
	몫			

8진수	←	정수	소수	
		0.	6875	
		X	8	
0.5	←	5.	5000	곱셈결과 정수를 적는다.
		X	8	
0.54	←	4.	0	소수부분이 0이 될 때까지 계산한다.

$$75.6875_{(10)} = 113.54_{(8)}$$

10진수-16진수 변환

- 10진수 75.6875를 16진수로 변환

16 | 75 나머지 → 16진수
16 | 4 ··· 11 → B
0 ··· 4 → 4B
몫

16진수 ← 정수 소수
0. 6875
X 16
0.B ← 11. 0000

곱셈결과 정수를 적는다.
소수부분이 0이 될 때까지 계산한다.

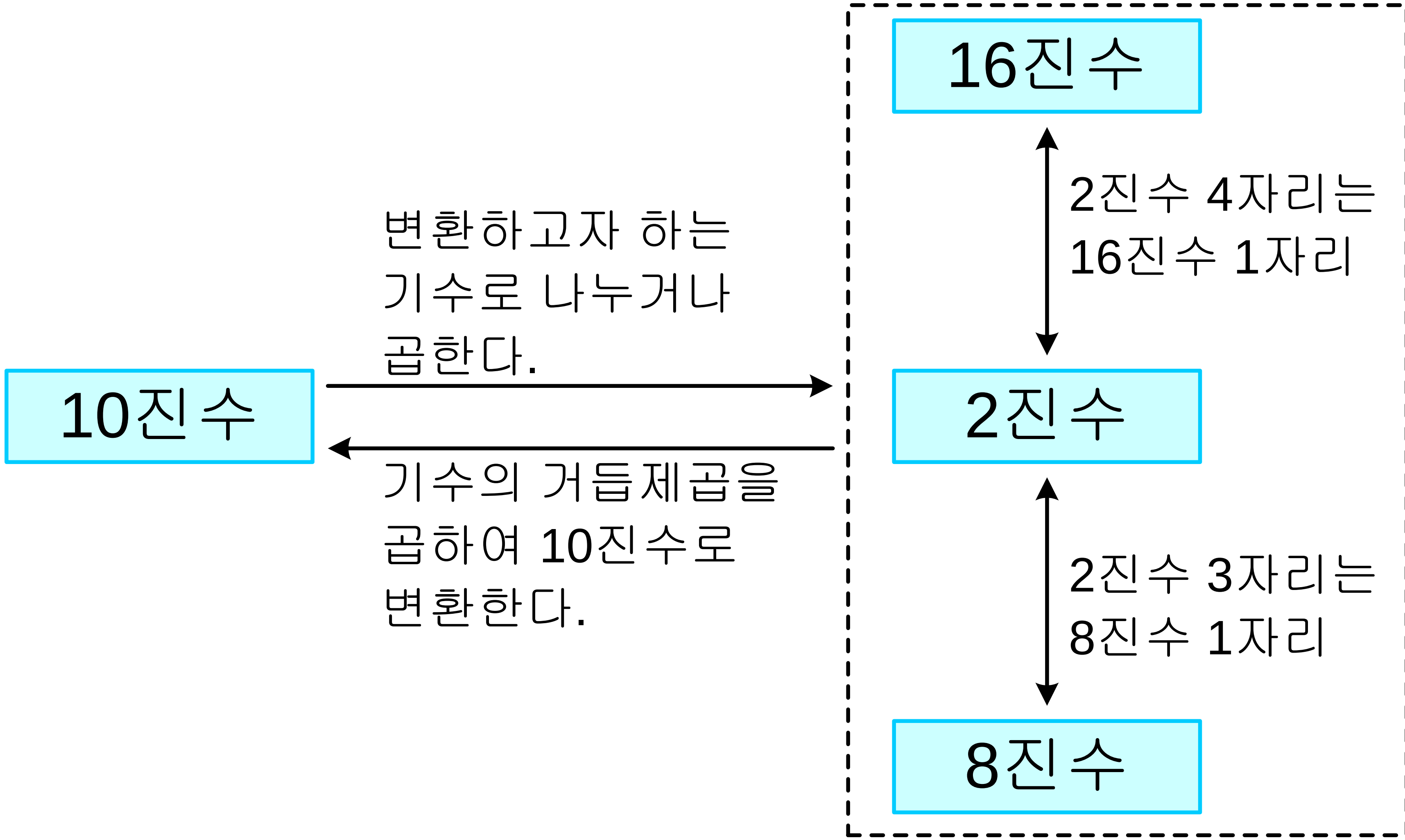
$$75.6875_{(10)} = 4B.B_{(16)}$$

2진수-8진수-16진수-10진수 상호 변환

10진수	2진수	8진수	16진수
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

04 진법 변환

2진수-8진수-16진수-10진수 상호 변환



❑ 상호변환 예

$$75.6875 = 1001011.1011_{(2)}$$
$$= 001\ \ 001\ \ 011.101\ \ 100_{(2)}$$
$$= \qquad\qquad\qquad\qquad {}_{(8)}$$

10진→2진→8진

2진수 3자리씩 묶음

$$75.6875 = 1001011.1011_{(2)}$$
$$= 0100\ \ 1011.1011_{(2)}$$
$$= \qquad\qquad\qquad\qquad {}_{(16)}$$

10진 → 2진 → 16진

2진수 4자리씩 묶음

❑ 상호변환 예(Cont'd)

$$9A3.50F3_{(16)} = 1001\ 1010\ \ 0011.0101\ \ 0000\ \ 1111\ \ 0011_{(2)}$$

16진수 1자리 = 2진수 4자리

$$101101.101_{(2)} = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$$
$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 = 45.625_{(10)}$$

각 자리에 기수의 거듭제곱을 곱하여 10진수로 변환

$$A3.D2_{(16)} = 10\times 16^1 + 3\times 16^0 + 13\times 16^{-1} + 2\times 16^{-2}$$
$$= 10\times 160 + 3\times 1 + 13\times 0.8125 + 2\times 0.0078125$$
$$= 160 + 3 + 0.8125 + 0.0078125$$
$$= 163.8203125_{(10)}$$

❑ 상호변환 예(Cont'd)

16진 → 2진 → 10진

$$A3.D2_{(16)} = 1010\ \ 0011.1101\ \ 0010_{(2)}$$

$$= 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$+ 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} + 0\times 2^{-5} + 0\times 2^{-6} + 1\times 2^{-7} + 0\times 2^{-8}$$

$$= 128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0 + 0.0625 + 0 + 0 + 0.0078125 + 0$$

$$= 163.8203125_{(10)}$$

예제 2-3 10진수 48.8125를 2진수, 8진수, 16진수로 변환하여라.

풀이

	몫		나머지	→	2진수
2	48		나머지	→	2진수
2	24	···	0	→	0
2	12	···	0	→	00
2	6	···	0	→	000
2	3	···	0	→	0000
2	1	···	1	→	10000
	0 (몫)	···	1	→	110000

2진수	←	정수	소수
		0.	8125
		×	2
0.1	←	1.	6250
		×	2
0.11	←	1.	2500
		×	2
0.110	←	0.	5000
		×	2
0.1101	←	1.	0

$$110000.1101_{(2)} = 110\ 000.\ 110\ 100_{(2)} = 60.64_{(8)}$$

$$= 0011\ 0000.1101_{(2)} = 30.D_{(16)}$$

End of Example

2진수 양의 정수 덧셈

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10 (자리올림 발생)

10진수	2진수
carry → 11 49 + 58 107	carry → 0110000 00110001 + 00111010 01101011

8진수	16진수
carry → 10 61 + 72 153	carry → 0 31 + 3A 6B

2진수 음의 정수 표현과 보수

- ❖ MSB (최상위비트)가 부호 역할
  - 양수(+) : 0   음수(-) : 1
- ❖ 2진수 음수를 표시하는 방법
  - 부호와 절대치(sign-magnitude)
  - 1의 보수(1's complement)
  - 2의 보수(2's complement)

05 2진수 정수 연산과 보수

❶ 부호와 절대치

- 부호비트만 양수와 음수를 나타내고 나머지 비트들은 같다.

❷ 1의 보수로 변환하는 방법

- 0 → 1, 1 → 0으로 변환

00000011 → 1의 보수 = 11111100

❸ 2의 보수로 변환하는 방법

- 1의 보수 + 1 = 2의 보수

00000011 → 2의 보수 = 1의 보수 + 1 = 11111100 + 1 = 11111101

01101100 → 2의 보수 = 1의 보수 + 1 = 10010011 + 1 = 10010100

05 2진수 정수 연산과 보수

- r진법 n자릿수 x의 **r-1의 보수** : $r^n - 1 - x$ **= 각 자리의 합이 *r*-1 이 되도록 하는 값**
- r진법 n자릿수 x의 **r의 보수** : $r^n - x$ **= *r*-1의 보수 + 1**
- 10진법
  - 567의 9의 보수 : $10^3 - 1 - 567 = 999 - 567 = 432$
  - 567의 10의 보수 : $10^3 - 567 = 1000 - 567 = 433$
- 10진법
  - 00000011의 1의 보수 : $2^8 - 1 - 00000011 = 11111111 - 00000011 = 11111100$
  - 00000011의 2의 보수 : $2^8 - 00000011 = 100000000 - 00000011 = 11111101$

05 2진수 정수 연산과 보수

- **양수를 보수로 바꾸면 음수**
- **음수를 보수로 바꾸면 양수**

양수 $\xrightleftharpoons[\text{보수}]{\text{보수}}$ 음수

➔보수끼리 더하면 0

- 어떤 수와 그 수의 1의 보수와의 합은 모든 bit가 1이 된다. (0을 의미)
- 어떤 수와 그 수의 2의 보수와의 합은 모든 bit가 0이 된다. (0을 의미)
  (자릿수를 벗어나는 비트는 제외)

```
  1001
+        (1의보수)
```

```
  1001
+        (2의보수)
```

05 2진수 정수 연산과 보수

❖ 부호와 절대치의 표현 (4bit)

	부호 비트	절대치			
0	0	0	0	0	+0
+	0	0	0	1	+1
+	0	0	1	0	+2
+	0	0	1	1	+3
+	0	1	0	0	+4
+	0	1	0	1	+5
+	0	1	1	0	+6
+	0	1	1	1	+7
0	1	0	0	0	-0
-	1	0	0	1	-1
-	1	0	1	0	-2
-	1	0	1	1	-3
-	1	1	0	0	-4
-	1	1	0	1	-5
-	1	1	1	0	-6
-	1	1	1	1	-7

절대치는 같고
부호만 다름

❖ 1의 보수 표현 (4bit)

부호 비트

0	0	0	0	0	+0
	0	0	0	1	+1
	0	0	1	0	+2
	0	0	1	1	+3
+	0	1	0	0	+4
	0	1	0	1	+5
	0	1	1	0	+6
	0	1	1	1	+7
	1	0	0	0	-7
	1	0	0	1	-6
	1	0	1	0	-5
-	1	0	1	1	-4
	1	1	0	0	-3
	1	1	0	1	-2
	1	1	1	0	-1
0	1	1	1	1	-0

0과 1을
서로 바꿈

1의 보수

부호 비트

1	1	1	1	-0
1	1	1	0	-1
1	1	0	1	-2
1	1	0	0	-3
1	0	1	1	-4
1	0	1	0	-5
1	0	0	1	-6
1	0	0	0	-7
0	1	1	1	+7
0	1	1	0	+6
0	1	0	1	+5
0	1	0	0	+4
0	0	1	1	+3
0	0	1	0	+2
0	0	0	1	+1
0	0	0	0	+0

05 2진수 정수 연산과 보수

❖ 2의 보수 표현 (4bit)

부호 비트

0	0	0	0	0	0
+	0	0	0	1	+1
+	0	0	1	0	+2
+	0	0	1	1	+3
+	0	1	0	0	+4
+	0	1	0	1	+5
+	0	1	1	0	+6
+	0	1	1	1	+7
-	1	0	0	0	-8
-	1	0	0	1	-7
-	1	0	1	0	-6
-	1	0	1	1	-5
-	1	1	0	0	-4
-	1	1	0	1	-3
-	1	1	1	0	-2
-	1	1	1	1	-1

1의 보수로 바꾼 후 1을 더함

2의 보수

부호 비트

0	0	0	0	0
1	1	1	1	-1
1	1	1	0	-2
1	1	0	1	-3
1	1	0	0	-4
1	0	1	1	-5
1	0	1	0	-6
1	0	0	1	-7
1	0	0	0	-8
0	1	1	1	+7
0	1	1	0	+6
0	1	0	1	+5
0	1	0	0	+4
0	0	1	1	+3
0	0	1	0	+2
0	0	0	1	+1

05 2진수 정수 연산과 보수

2진수의 표현 방법 3가지 (8bit)

2진수	8비트 크기이며, MSB가 부호비트임		
	부호와 절대치	1의 보수	2의 보수
00000000	+0	+0	+0
00000001	+1	+1	+1
00000010	+2	+2	+2
00000011	+3	+3	+3
…	…	…	…
01111100	+124	+124	+124
01111101	+125	+125	+125
01111110	+126	+126	+126
01111111	+127	+127	+127
10000000			
10000001			
10000010			
10000011			
…		…	…
11111100			
11111101			
11111110			
11111111		-0	

05 2진수 정수 연산과 보수

- 뺄셈 : 보수를 취하여 더하면 뺄셈을 수행 (Carry가 있으면 버림)

$$7928-879 = 7928+(-879) = 7928+(-0879)$$

자릿수 맞춤

$$\Rightarrow 7928+(10^4-0879) = 7928+9121 = 17049$$

$$\Rightarrow 17049 - 10^4 = 7049$$

n비트 2의 보수에 대한 10진수의 표현 범위

비트 수	2의 보수를 사용한 2진 정수의 표현 범위
n bit	$-2^{n-1} \sim +2^{n-1}-1$
4 bit	$-2^{4-1} \sim +2^{4-1}-1$ (-8 ~ +7)
8 bit	$-2^{8-1} \sim +2^{8-1}-1$ (-128 ~ +127)
16 bit	$-2^{16-1} \sim +2^{16-1}-1$ (-32,768 ~ +32,767)

05 2진수 정수 연산과 보수

부호 확장

❖ 부호 확장이란 늘어난 비트 수 만큼 부호를 늘려주는 방법

2진수 표현 방법에 따른 부호 확장

2진수 표현 방법	부호 확장 방법	예		
			8bit	16bit
부호와 크기	부호만 MSB에 복사하고, 나머지는 0으로 채움	양수	00101010	
		음수	10010111	
1의 보수	늘어난 길이만큼 부호와 같은 값으로 모두 채움	양수	00101010	
		음수	10010111	
2의 보수	늘어난 길이만큼 부호와 같은 값으로 모두 채움	양수	00101010	
		음수	10010111	

2의 보수로 표현된 음수를 10진수로 변환

(2의 보수 10101100을 10진수로 변환하는 경우)

두번째 방법

2의 보수로 바꾸어 10진수로 바꾼 다음 -부호를 붙인다.

$$10101100_{(2)} \Rightarrow 2\text{의 보수 } 01010100_{(2)}$$

$$= 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

$$= 0 + 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 0$$

$$= 84$$

- 부호를 붙이면 -84

5. 2의 보수 연산 (8bit)

X* – *Y

58–49 :

overflow

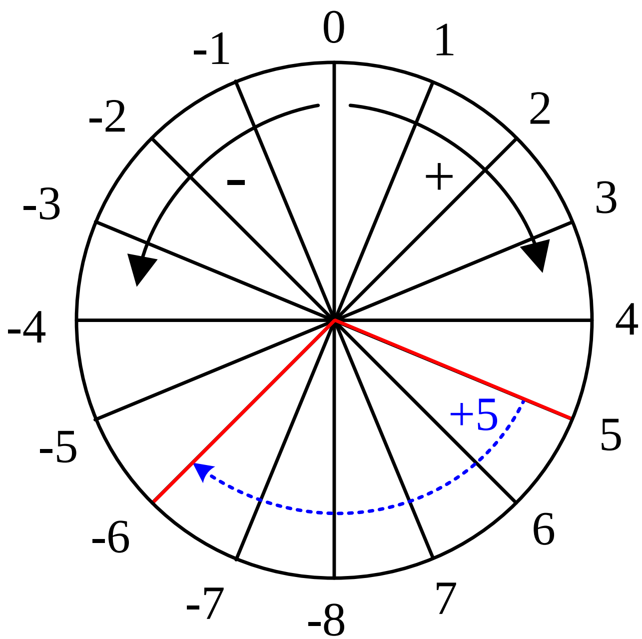
큰 양수 + 큰 양수
(98 + 74)

Carry ⟶ 1000010

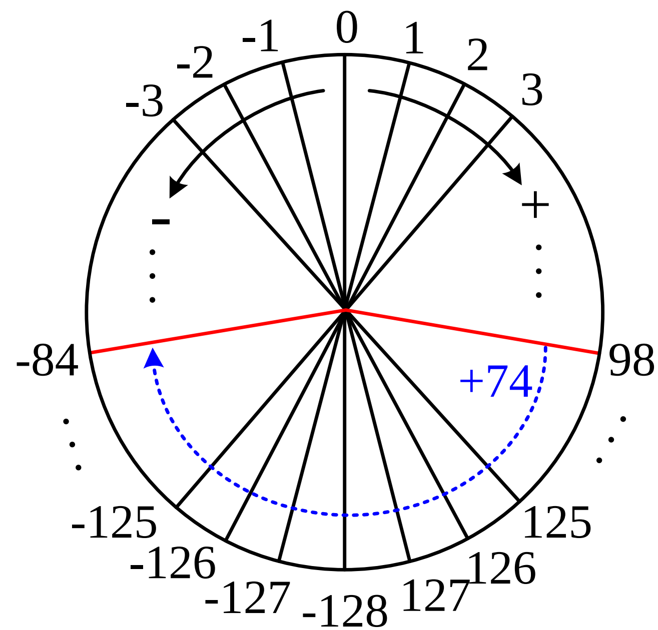
01100010
\+ 01001010

0 10101100

❑ 2진 정수의 2의 보수 개념도



5에서 +방향으로 5칸을 이동하면 -6이 된다.



98+74는 98에 +방향으로 74칸을 이동하면 -84가 된다.

예제 2-5 8비트 연산 98+74는 오버플로우가 발생하여 잘못 계산된 결과를 얻었다. 부호 확장을 통해서 올바른 결과를 얻을 수 있음을 설명하여라.

풀이

부호를 확장하여 연산하는 과정은 다음과 같다.

carry		00000000 1000010
98	=	00000000 01100010
+ 74	=	+ 00000000 01001010
172	=	0 00000000 10101100

직전 캐리와 최종 캐리(밑줄 친 부분)가 같으므로 정상적으로 계산된 것임을 알 수 있고, 그 결과는 $10101100_{(2)} = 128+32+8+4 = 172_{(10)}$이다.

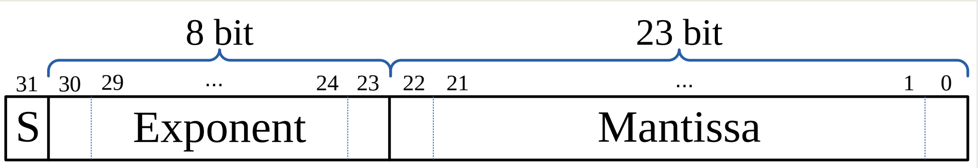
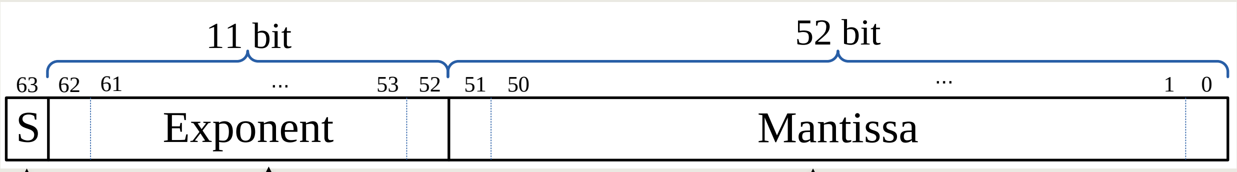
End of Example

06 2진 부동소수점수의 표현

- 컴퓨터의 부동소수점수는 IEEE 754표준을 따른다.
- **부호(sign), 지수(exponent), 가수(mantissa)**의 세 영역으로 표시
- 단일정밀도(single precision) 부동소수점수와 2배정밀도(double precision) 부동소수점수의 두 가지 표현 방법이 있다.

-1.23×10^2

단일정밀도 및 2배정밀도 부동소수점수의 비트 할당

구분	IEEE 754 표준 부동소수점수의 비트 할당	바이어스
단일정밀도 부동소수점수		127
2배정밀도 부동소수점수		1023

부호(sign) 지수(exponent) 가수(mantissa)

바이어스(bias) 정규화(normalization)

❑ 정규화(normalization) : 과학적 표기방법

❖ 2진수의 정규화

$$
\begin{aligned}
75.6875 &= 1001011.1011_{(2)} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{6} \\
&= 1.0010111011_{(2)} \times 2^{110_{(2)}}
\end{aligned}
$$

바이어스된 지수값
지수=127 : 0
지수>127 : 양의 지수
지수<127 : 음의 지수

❖ 바이어스(bias) : 지수의 양수, 음수를 나타내기 위한 방법

- IEEE 754 표준에서는 바이어스 127(단일정밀도) 또는 1023(2배정밀도)을 사용
- 표현 지수 = 바이어스 + 2진 지수 값

부호 : 1비트	지수(bias 127) : 8비트	가수(1.xxx) : 23비트
양수	127 + 6 (01111111 + 00000110)	1.을 생략한 가수 (1.0001011011)
0	10000101	00101110110000000000000

가수 앞에 "1."이 생략되어 있다.

06 2진 부동소수점수의 표현

❑ 10진수 –0.2를 단일정밀도 부동소수점으로 표현

- 2진수로 변환하고 정규화한다.

$$
\begin{aligned}
-0.2 &= -0.00110011001100110011001\ldots_{(2)} \\
&= -1.10011001100110011001\ldots_{(2)} \times 2^{-3} \\
&= -1.10011001100110011001\ldots \times 2^{-11_{(2)}}
\end{aligned}
$$

부호 : 1비트	지수(bias 127) : 8비트	가수(1.xxx) : 23비트
음수	127 - 3 (01111111 - 00000011)	1.을 생략한 가수 (1.10011001100110011001100)
1	01111100	10011001100110011001100

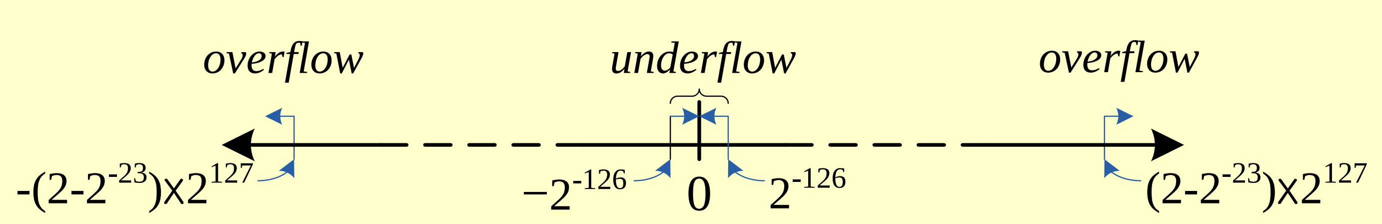
가수 앞에 “1.”이 생략되어 있다.

06 2진 부동소수점수의 표현

❑ 컴퓨터에서의 부동소수점수의 표현 범위

	단일정밀도 부동소수점수	2배정밀도 부동소수점수
비정규화된 2진수	$\sim\pm 2^{-149}$ to $\pm(1-2^{-23})\text{x}2^{126}$	$\sim\pm 2^{-1074}$ to $\pm(1-2^{-52})\text{x}2^{1022}$
정규화된 2진수	$\sim\pm 2^{-126}$ to $\pm(2-2^{-23})\text{x}2^{127}$	$\sim\pm 2^{-1022}$ to $\pm(2-2^{-52})\text{x}2^{1023}$
10진수	$\sim\pm 1.40\text{x}10^{45}$ to $\pm 3.40\text{x}10^{38}$	$\sim\pm 4.94\text{x}10^{-324}$ to $\pm 1.798\text{x}10^{308}$

단일정밀도 부동소수점수의 표현 범위



예제 2-6 $\frac{1}{256}$ 을 단일정밀도 부동소수점 방식으로 표현하여라.

풀이

$\frac{1}{256}$ 을 정규화된 방법으로 표현하면 $\frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} = 2^{-8} = 1.0 \times 2^{-8}$ 이다.

그러므로 $1.0_{(2)} \times 2^{-1000_{(2)}}$ 를 단일정밀도 부동소수점수로 표현하면 다음과 같다.

부호	지수(bias 127)	가수(1.×××$_{(2)}$)
양수	01111111(127) - 1000(8)	1.을 생략한 가수
0	01110111	00000000000000000000000

End of Example