6장. 논리식의 간략화

01 2변수 카르노 맵

❑ 개요

- ⦿ 불 대수를 이용한 간소화하는 방법은 복잡하고 검증도 어렵다.
- ⦿ 카르노 맵(1953년 Maurice Karnaugh가 소개) 을 이용하면 논리식을 쉽게 간소화할 수 있다.

❑ 2변수 카르노 맵 표현 방법

$A \backslash B$	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
A	$A\overline{B}$	AB

$A \backslash B$	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	m_0	m_1
A	m_2	m_3

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

$B \backslash A$	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	m_0	m_2
B	m_1	m_3

- ❖ **무관항(don't care)** : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 민텀(minterm)항.
- ❖ x 로 표시하거나 d로 표시한다.

01 2변수 카르노 맵

❑ 일반항과 무관항 표현

$A \backslash B$	0	1
0	1	
1		1

$$F(A,B) = \sum m(0,3)$$

$A \backslash B$	0	1
0	1	x
1		1

$$F(A,B) = \sum m(0,3) + \sum d(1)$$

- 출력이 1이거나 무관항만 표시한다.
- 출력 0을 표시하여도 되지만 일반적으로 생략한다.

❑ 카르노맵을 이용한 간소화 방법

① 출력이 같은 항을 1, 2, 4, 8, 16개로 그룹을 지어 묶을 수 있고,
② 바로 이웃한 항들끼리 묶을 수 있으며,
③ 반드시 직사각형이나 정사각형의 형태로 묶어야 하고,
④ 최대한 크게 묶는다.
⑤ 중복하여 묶어서 간소화된다면 중복하여 묶는다.
⑥ 무관항의 경우 간소화될 수 있으면 묶어 주고, 그렇지 않으면 묶지 않는다.

A \ B	0	1
0	1	1
1		

$F = \overline{A}$

불 대수의 법칙으로 풀면

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$$
$$= \overline{A}(\overline{B} + B) = \overline{A} \cdot 1 = \overline{A}$$

A=0이므로 $\overline{A}$
B=0 and 1이므로 제거
즉, 한 변수에서 서로 다른 값이 묶여지면 제거한다.

01 2변수 카르노 맵

❑ 간소화 예

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	

중복하여도 되므로
크게 묶는다.

$$F = \bar{A} + \bar{B}$$

불 대수의 법칙으로 풀면

$$F = \sum m(0,1,2) = \boxed{\bar{A}\,\bar{B}} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

❑ 3변수 카르노 맵 표현 방법

$A \backslash BC$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
A	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$AB \backslash C$	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
AB	$AB\overline{C}$	ABC
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$

$C \backslash AB$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
C	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

$AB \backslash C$	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

행과 열을 바꾸어도 상관없다.
설계자가 선호하는 방법을 선택하면 된다.

02 3변수 카르노 맵

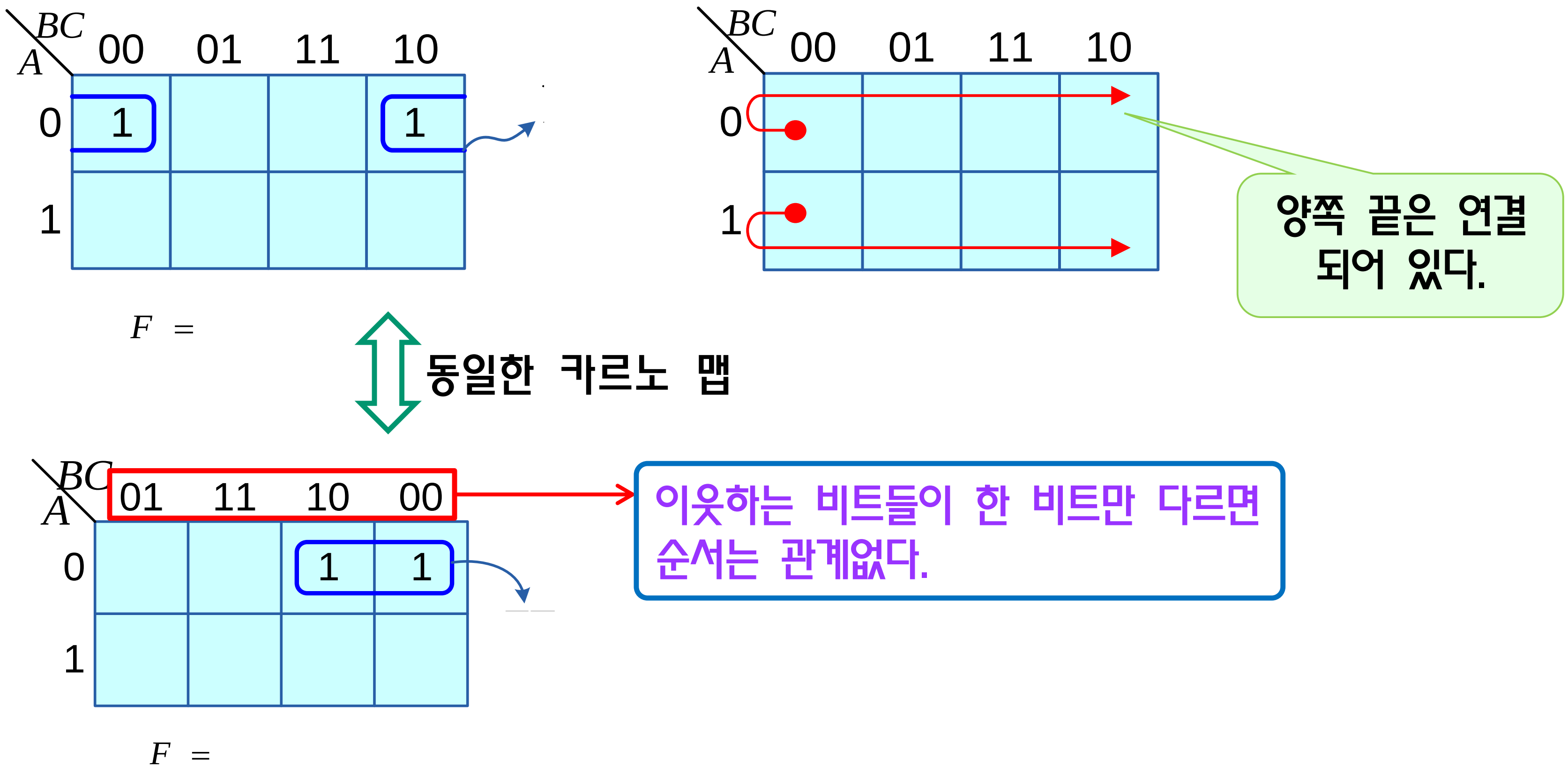
❑ 간소화 : $F(A,B,C) = \sum m(0,1,6,7)$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

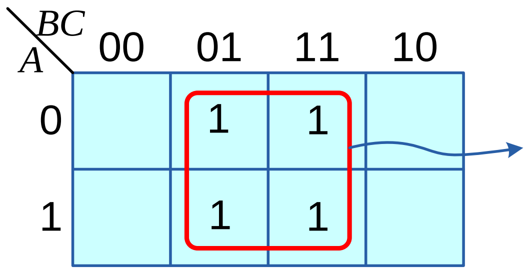
$F =$

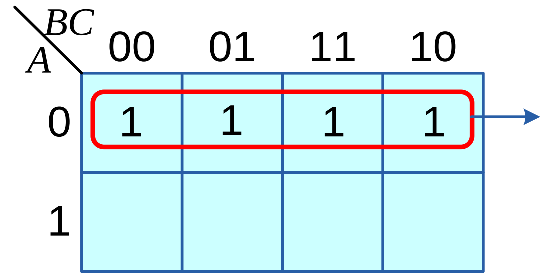
02 3변수 카르노 맵

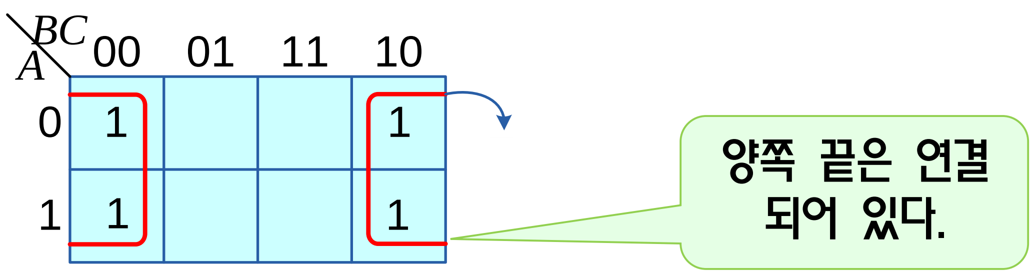
❑ 간소화 : 양쪽 끝 묶음



❑ 간소화 : 4개 항 묶음

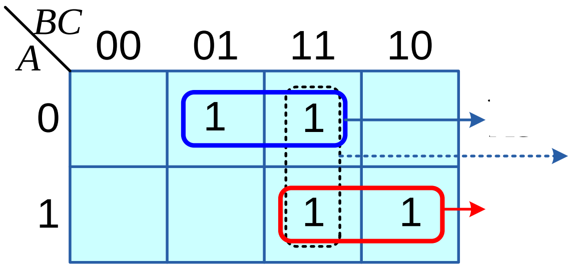

BC
A
00 01 11 10
0 1 1
1 1 1


BC
A
00 01 11 10
0 1 1 1 1
1


BC
A
00 01 11 10
0 1 1
1 1 1
양쪽 끝은 연결
되어 있다.

02 3변수 카르노 맵

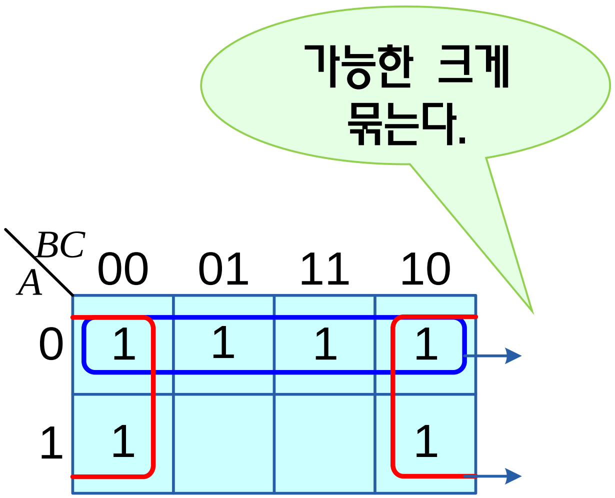
❑ 간소화 : 다른 묶음에 모두 포함되어 있는 경우는 묶지 않는다.



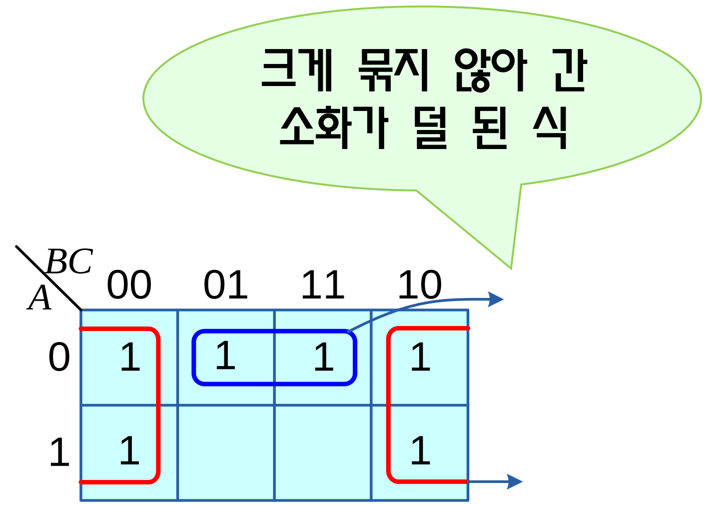
다른 묶음에 모두 포함되어 있으므로 중복하여 묶지 않는다.

02 3변수 카르노 맵

❑ 간소화 : 최대한 크게 묶는다.



$F \ =$

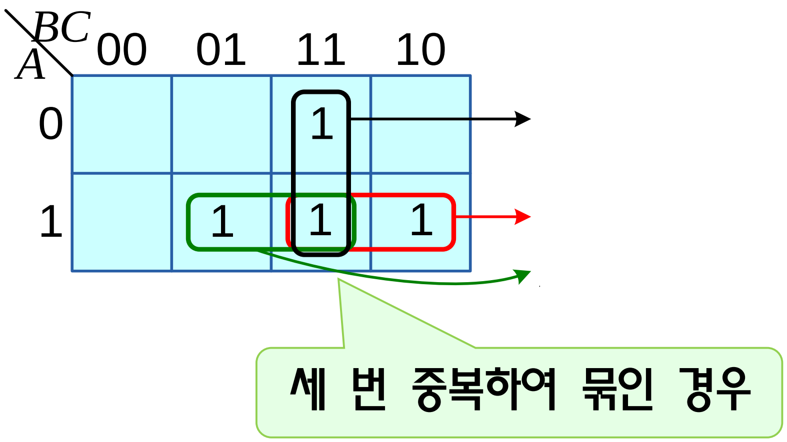


$F \ =$

❑ 간소화 : 세번 중복하여 묶는 경우

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \sum m(3,5,6,7) =$$



02 3변수 카르노 맵

❑ 간소화 : 모두 0이거나 모두 1인 경우

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
1				

모두 0이면 논리식은 $F=0$이다.

$F = 0$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

모두 1이면 논리식은 $F=1$이다.

$F = 1$

03 4변수 카르노 맵

❑ 4변수 카르노 맵 표현 방법

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

상하 좌우는 연결되어 있다.

Tip

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$F = 1$

예제 6-2 다음과 같은 다양한 4변수 카르노 맵에서 간소화된 논리식을 구하여라.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	1
11				
10				

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11	1			1
10				

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01				
11				
10	1			

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01	1		1	1
11	1		1	1
10	1			

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1			1
11	1			1
10				

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

$F =$

03 4변수 카르노 맵

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1		

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	
11	1	1	1	1
10	1		1	

$F =$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			1
11	1			1
10	1	1	1	1

$F =$

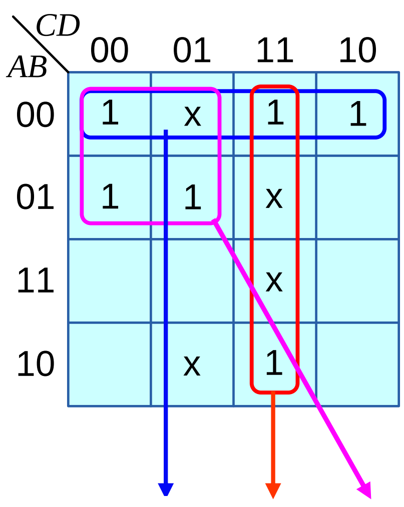
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	1
11	1			1
10	1		1	1

$F =$

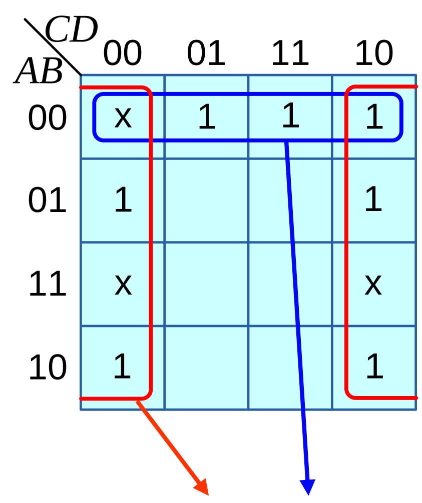
예제 6-3 다음 식과 같이 무관항이 있을 경우, 카르노 맵을 이용하여 간소화하여라.

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,4,5,11) + \sum d(1,7,9,15)$$

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1,2,3,4,6,8,10) + \sum d(0,12,14)$$



$F =$



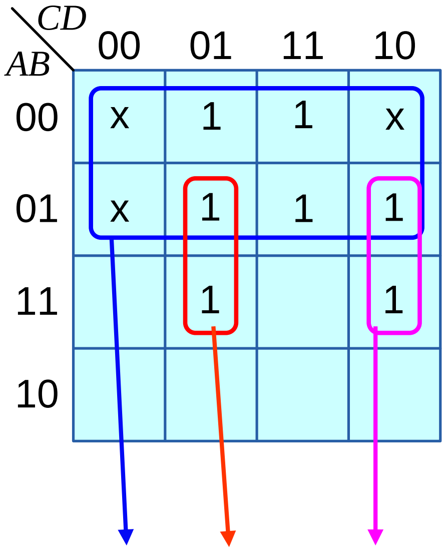
$F =$

End of Example

예제 6-4 다음 진리표로부터 카르노 맵을 작성하고 간소화하여라.

$ABCD$	F
0 0 0 0	x
0 0 0 1	1
0 0 1 0	x
0 0 1 1	1
0 1 0 0	x
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0

풀이



$F(A,B,C,D) =$

End of Example

❑ 카르노 맵에서 선택적으로 묶을 수 있는 경우

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$$F = \bar{A}B + A\bar{B} + AC$$

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$$F = \bar{A}B + A\bar{B} + BC$$

2가지 답이 가능한 경우

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11	1	1	1	1
10			1	

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}D + ACD$$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11	1	1	1	1
10			1	

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}D + \bar{B}CD$$

❖ 논리식에서 생략된 부분을 찾아서 최소항(Minterm)으로 변경

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= ABC + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} \\
&= ABC + \overline{A}B(\overline{C} + C) + \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C} + C) \\
&= ABC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC \\
&= \sum m(0,1,2,3,7)
\end{aligned}
$$

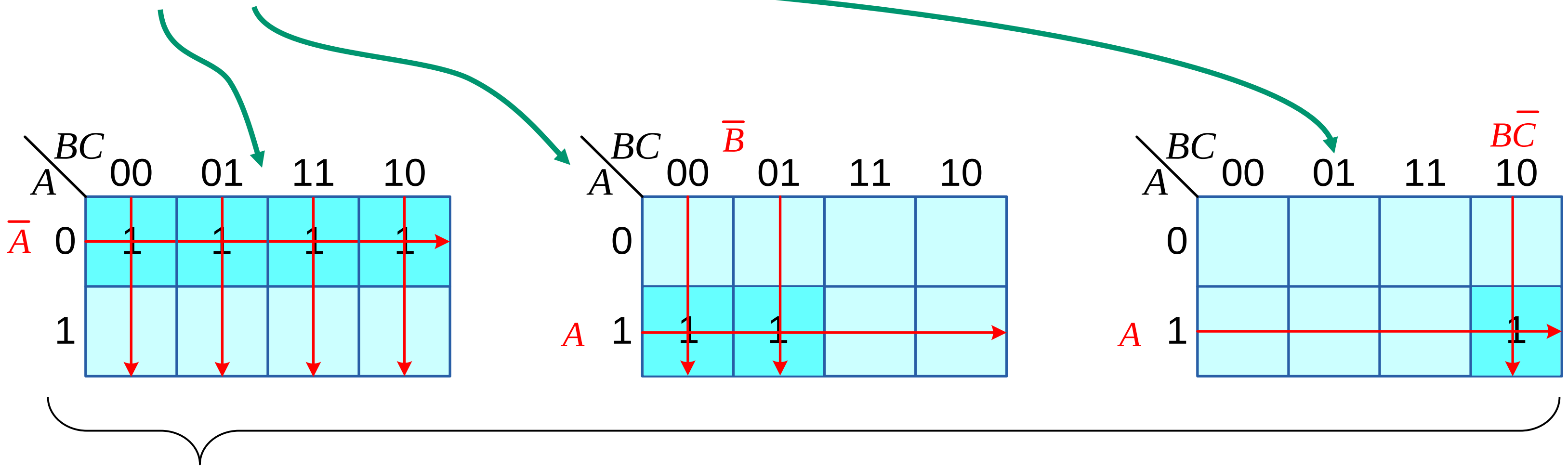
$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

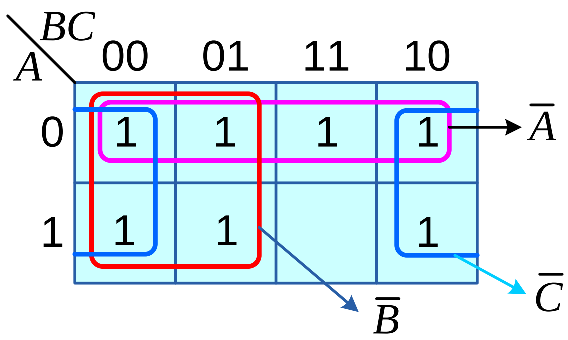
$$F = \overline{A} + BC$$

05 논리식의 카르노 맵 작성

❖ 최소항식으로 전개하지 않고 직접 카르노 맵을 이용하는 방법

$$F = \overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

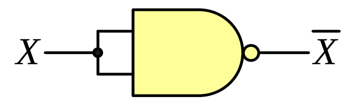


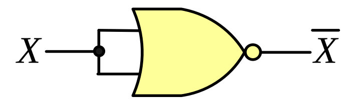


$$F = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

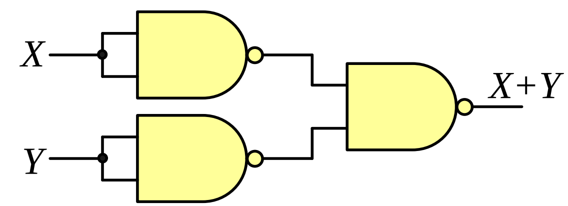
❑ Universal gate

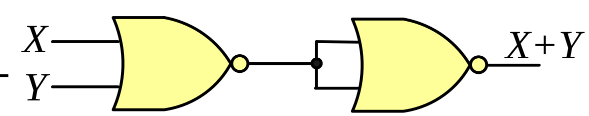
❑기본 게이트의 NAND, NOR 식

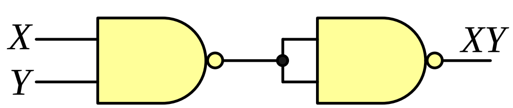


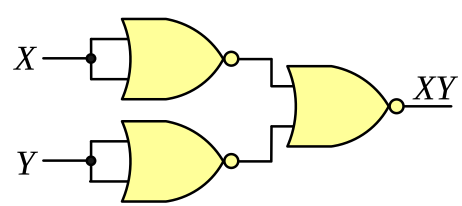


NOT	$\overline{X} = \overline{X+X} = \overline{X}\,\overline{X}$
AND	$XY = \overline{\overline{XY}} = \overline{\overline{X}+\overline{Y}}$
OR	$X+Y = \overline{\overline{X+Y}} = \overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}$
NAND	$\overline{XY} = \overline{\overline{\overline{XY}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{X}+\overline{Y}}}}$
NOR	$\overline{X+Y} = \overline{\overline{\overline{X+Y}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}}}$
XOR	$\overline{X}Y + X\overline{Y} = \overline{\overline{\overline{X}Y + X\overline{Y}}} = \overline{\overline{\overline{X}Y}\cdot\overline{X\overline{Y}}} = \overline{(X+\overline{Y})(\overline{X}+Y)}$ $= \overline{\overline{\overline{(X+\overline{Y})}+\overline{(\overline{X}+Y)}}}$

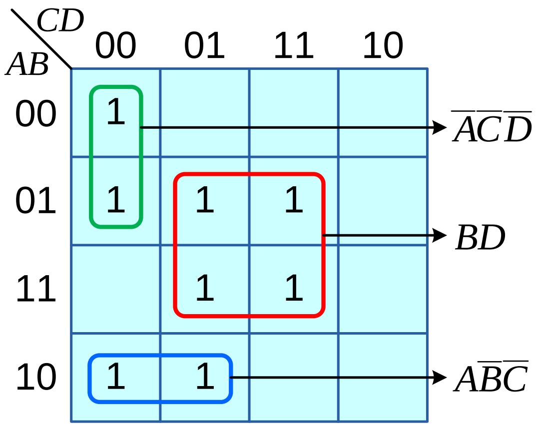


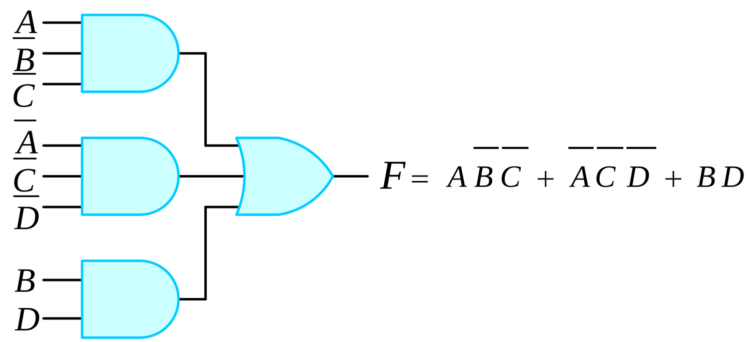






NAND 게이트만 이용한 회로



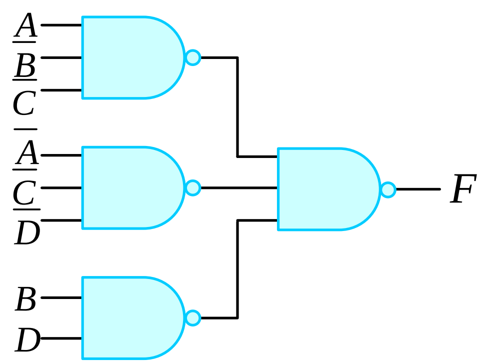


이 논리식을 이중부정을 하여 드모르간의 정리를 적용하여 변형

$$F = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + BD$$

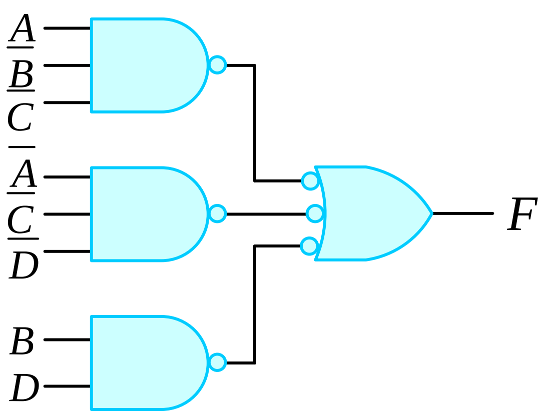
$$= \overline{\overline{A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + BD}}$$

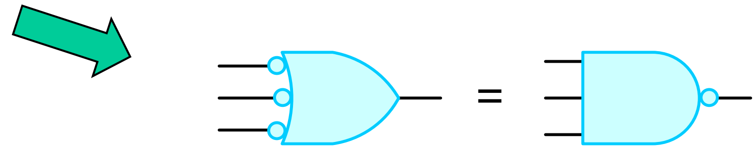
$$= \overline{\overline{A\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}\bar{C}\bar{D}} \cdot \overline{BD}}$$



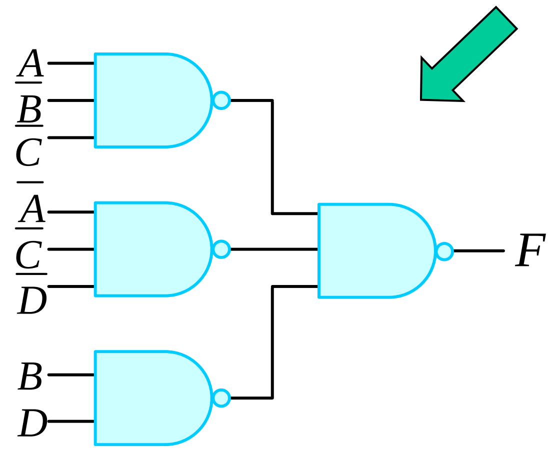
07 NAND와 NOR 게이트로의 변환

❑ 다른 방법 : AND 게이트 뒤에 OR 게이트가 있을 때 이중부정 적용





$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \overline{ABC}$$



07 NAND와 NOR 게이트로의 변환

예제 6-9 다음 논리식을 NAND 게이트만 사용하여 설계하라.

$$F = \overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C} + \overline{A}C + \overline{B}C$$

풀이

$$\begin{aligned} F &= \overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C} + \overline{A}C + \overline{B}C \\ &= \overline{\overline{\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C} + \overline{A}C + \overline{B}C}} \\ &= \overline{\overline{\overline{C}\,\overline{D}}\;\overline{AB\overline{C}}\;\overline{\overline{A}C}\;\overline{\overline{B}C}} \end{aligned}$$