

차원의 저주란,

*데이터 학습을 위해 **차원이 증가**하면서 학습데이터 수가 차원의 수보다 적어져 **성능이 저하되는 현상**.

*차원이 증가할 수록 개별 차원 내 학습할 데이터 수가 **적어지는(sparse) 현상 발생**

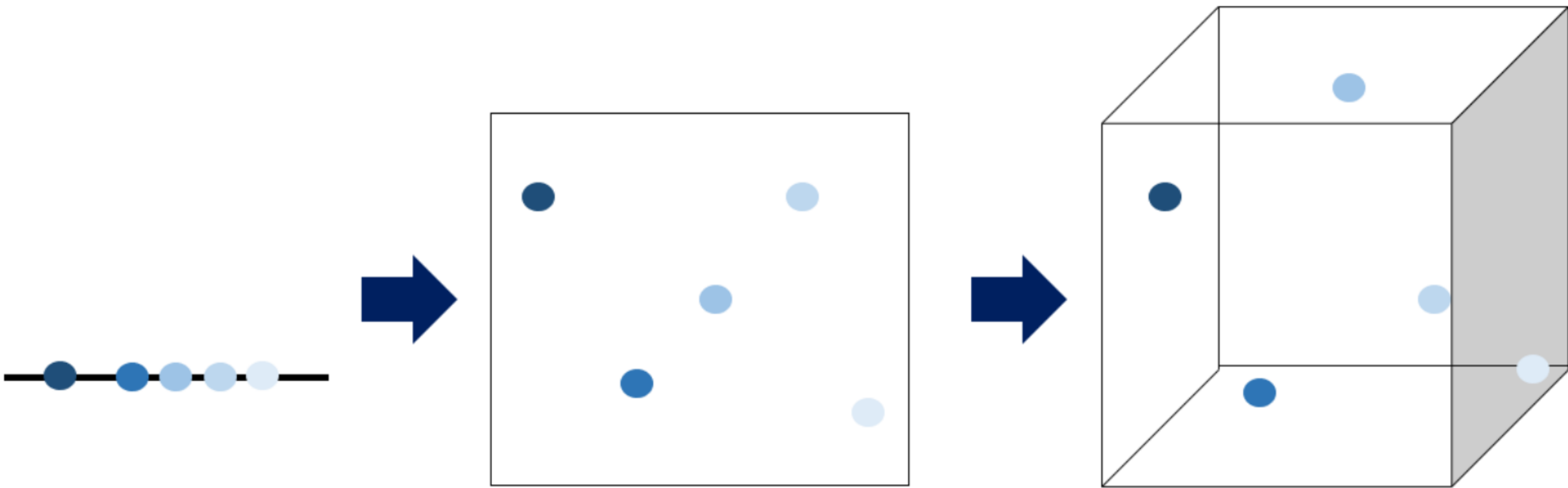
*해결책: 차원을 줄이거나(축소시키거나) 데이터를 많이 획득

즉, 간단히 말해서

차원이 증가함에 따라(=변수의 수 증가) 모델의 성능이 안 좋아지는 현상을 의미합니다.

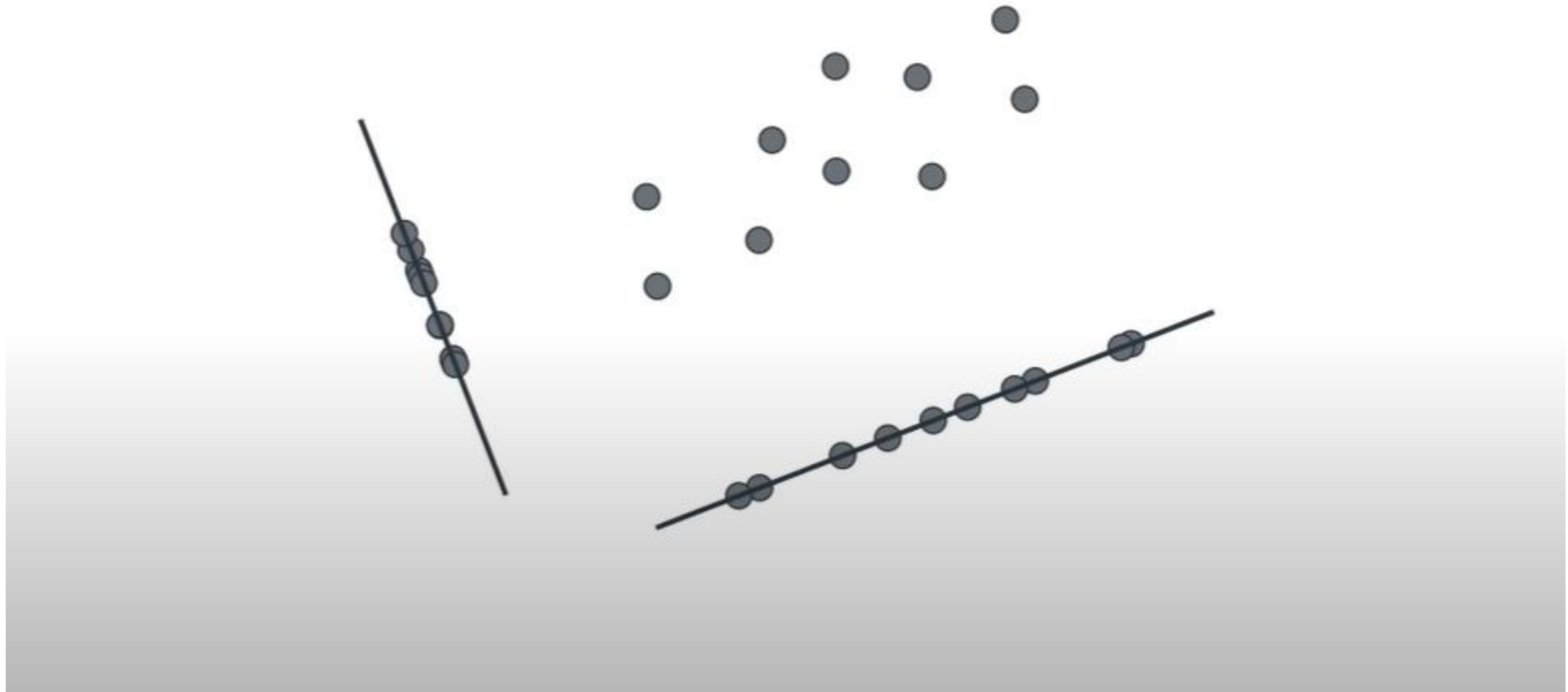
무조건 변수의 수가 증가한다고 해서 차원의 저주 문제가 있는 것이 아니라, **관측치 수보다 변수의 수가 많아지면** 발생합니다. (예를들어, 관측치 개수는 200개인데, 변수는 7000개)

왜 이런 현상이 발생할까요?

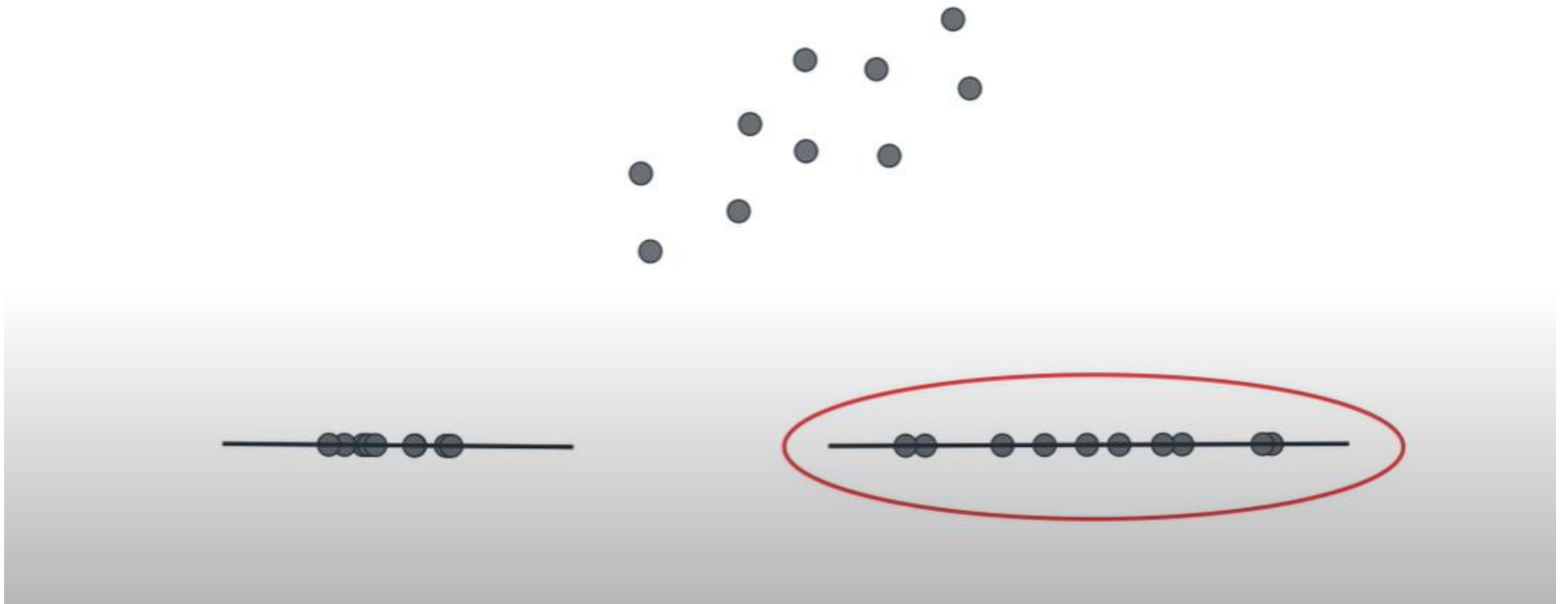


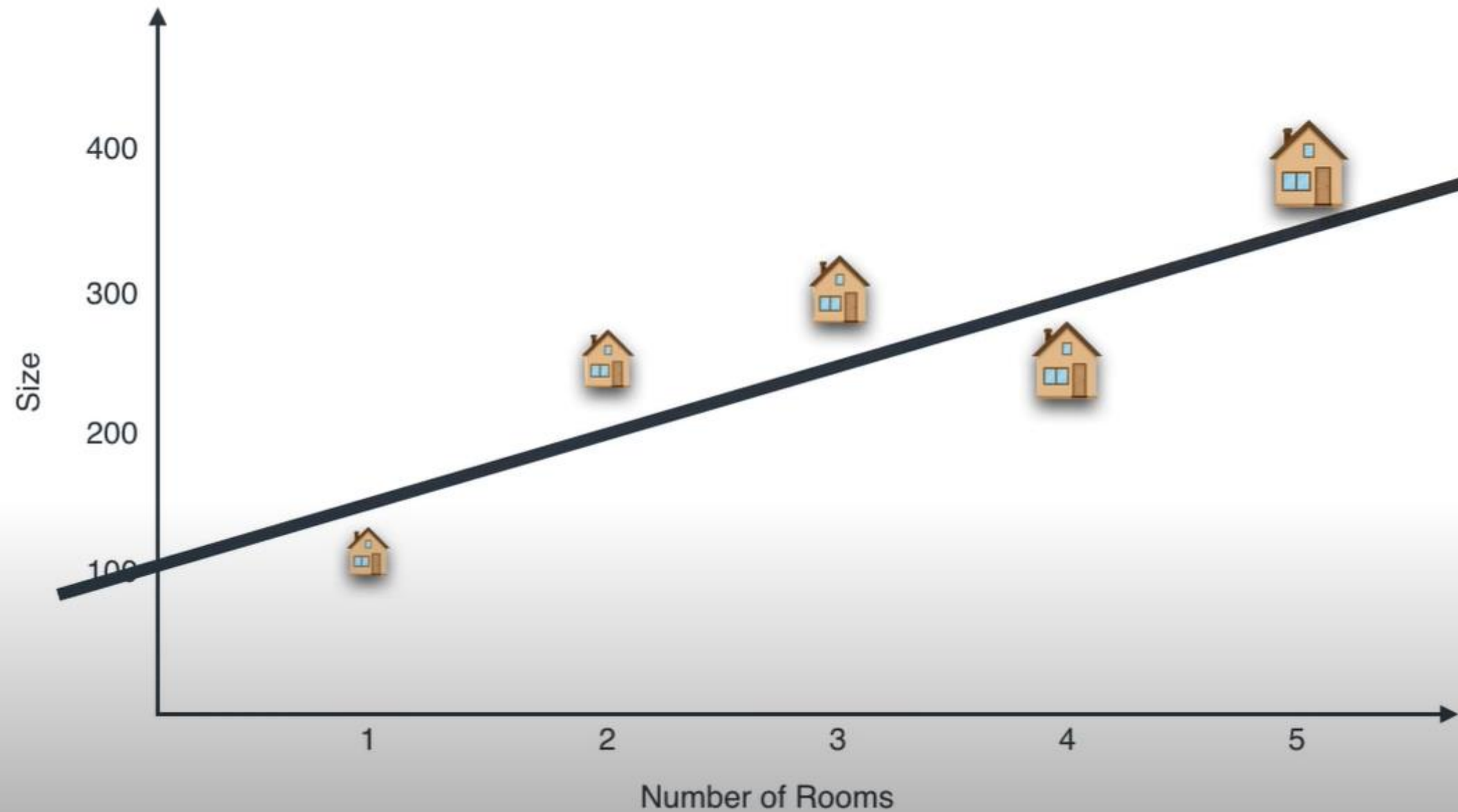
Made by: ta-daa

Dimensionality Reduction



Dimensionality Reduction



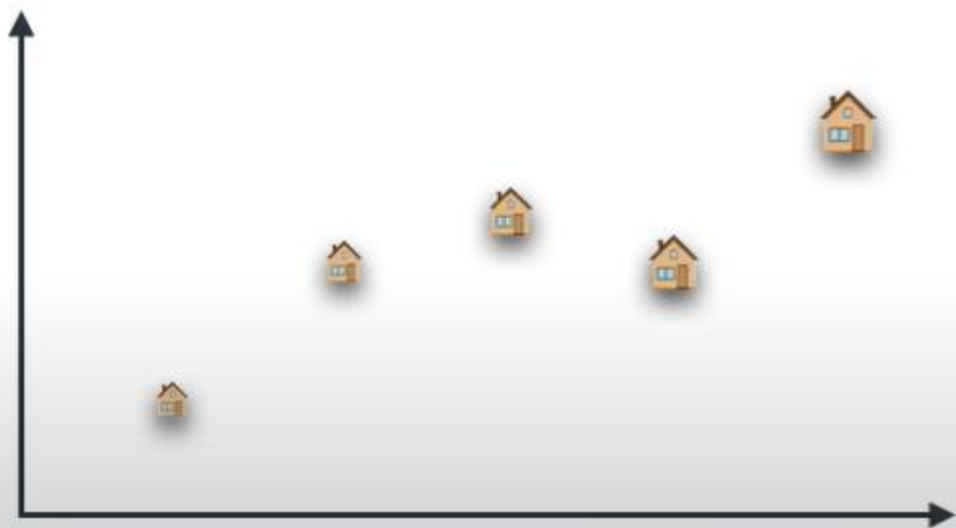




Size feature

2 dimensions

size
number of rooms



1 dimension

size feature



Housing Data

5 dimensions

Size

Number of rooms

Number of bathrooms

Schools around

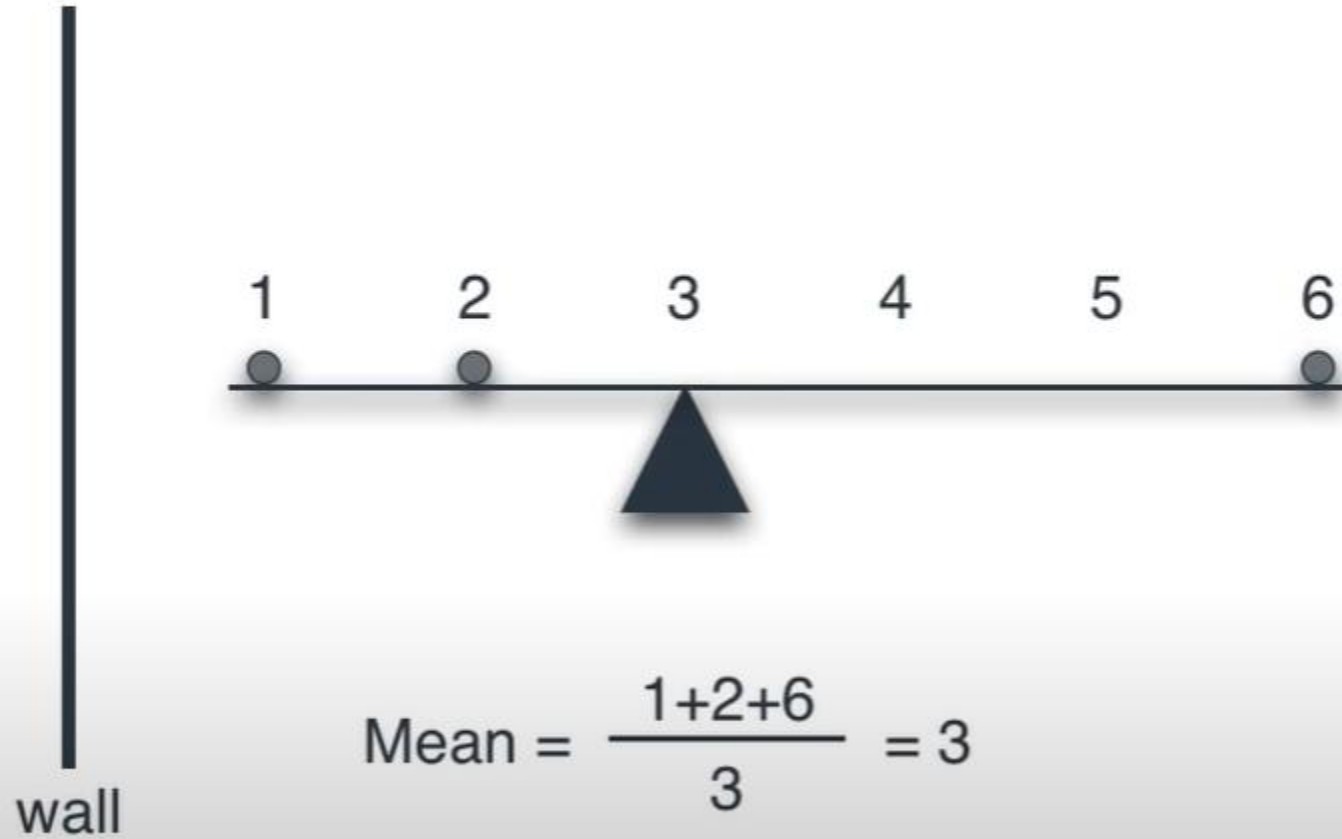
Crime rate

2 dimensions

Size feature

Location feature

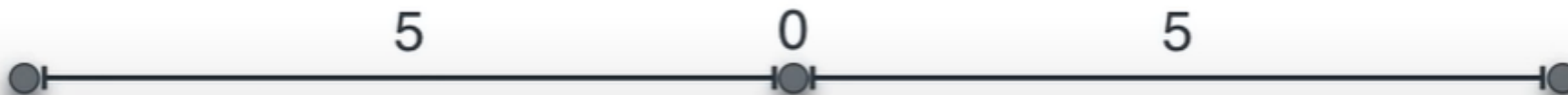
Mean



Variance



$$\text{Variance} = \frac{1^2 + 0^2 + 1^2}{3} = 2/3$$



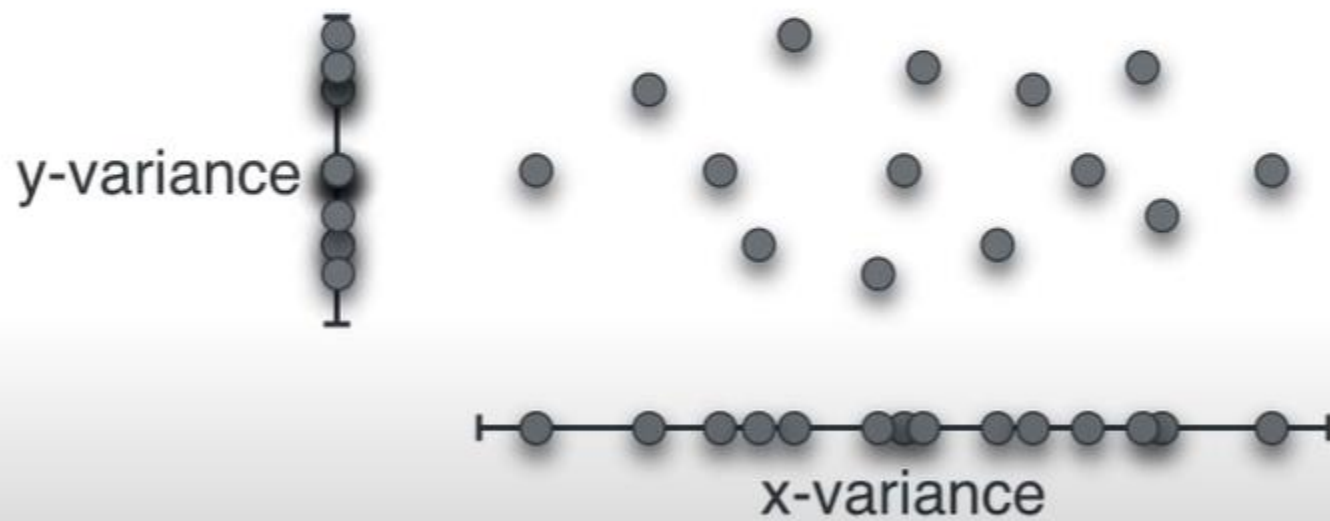
$$\text{Variance} = \frac{5^2 + 0^2 + 5^2}{3} = 50/3$$

Mean

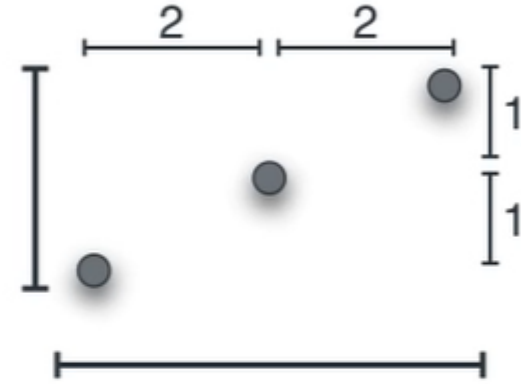
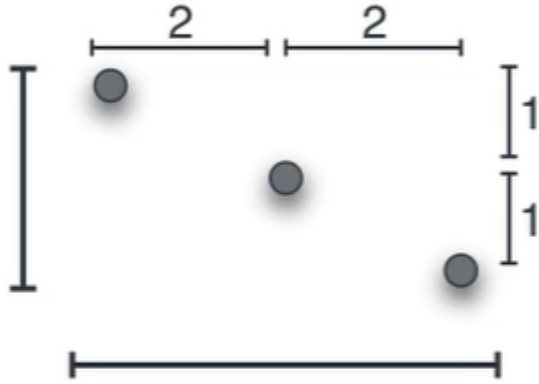


$$\text{Variance} = \frac{2^2 + 1^2 + 3^2}{3} = 14/3$$

Variance?



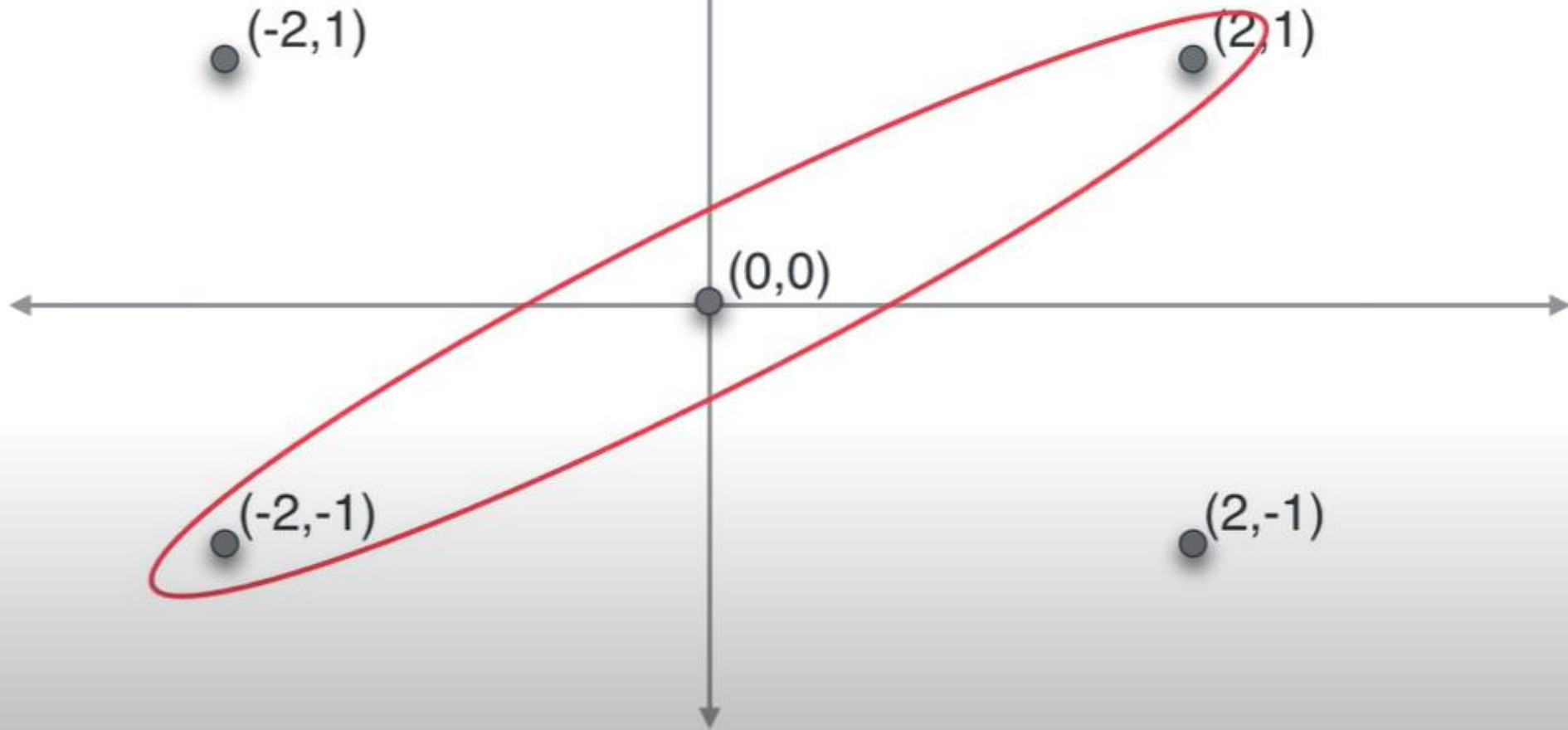
Variance?



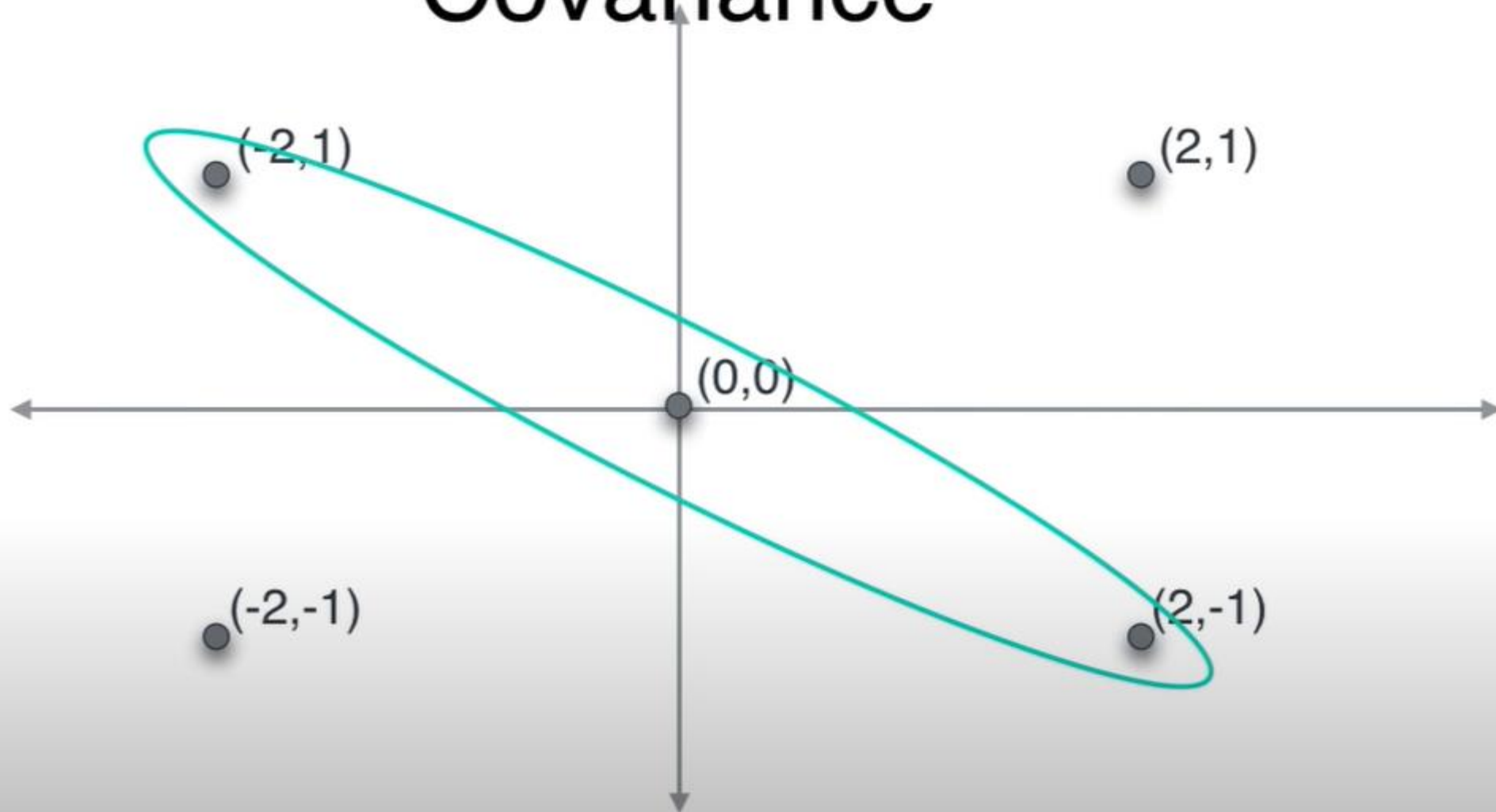
$$\text{x-variance} = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2}{3} = 8/3$$

$$\text{y-variance} = \frac{1^2 + 0^2 + 1^2}{3} = 2/3$$

Covariance



Covariance



Covariance

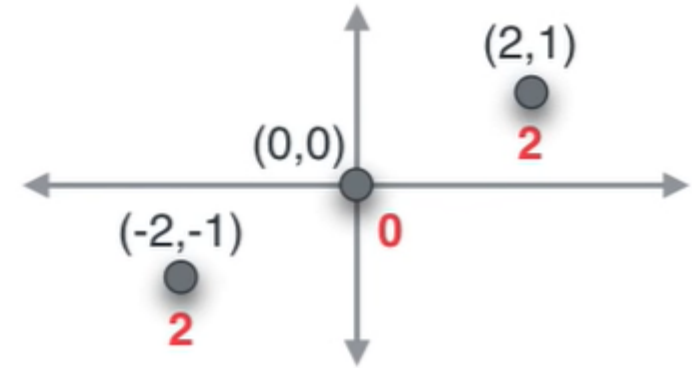
Product
of
coordinates



Covariance



$$\text{covariance} = \frac{(-2) + 0 + (-2)}{3} = -4/3$$



$$\text{covariance} = \frac{2 + 0 + 2}{3} = 4/3$$

Covariance



$$\text{covariance} = \frac{-2 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + -2}{9} = 0$$

Covariance



negative
covariance



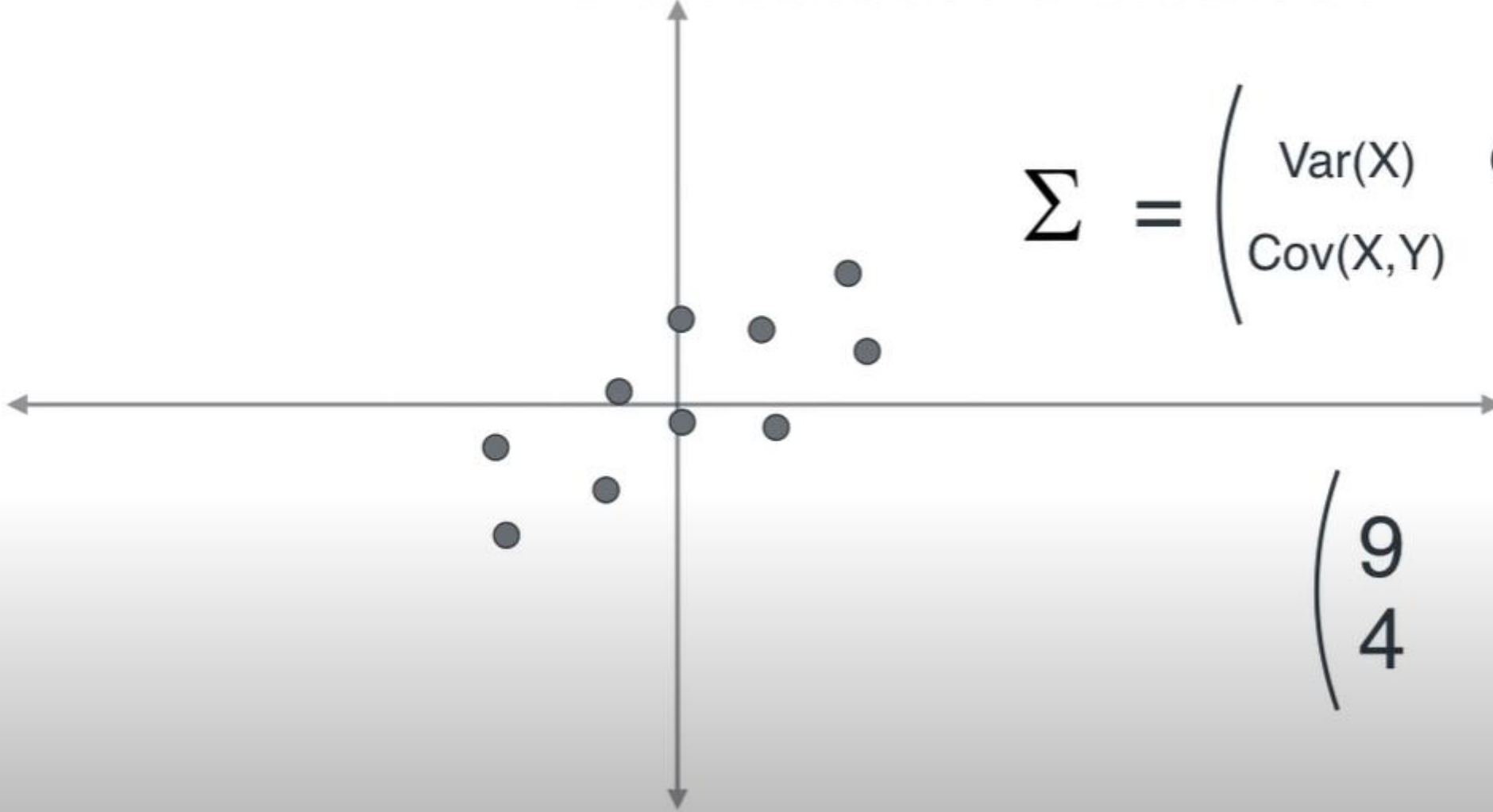
covariance zero
(or very small)



positive
covariance

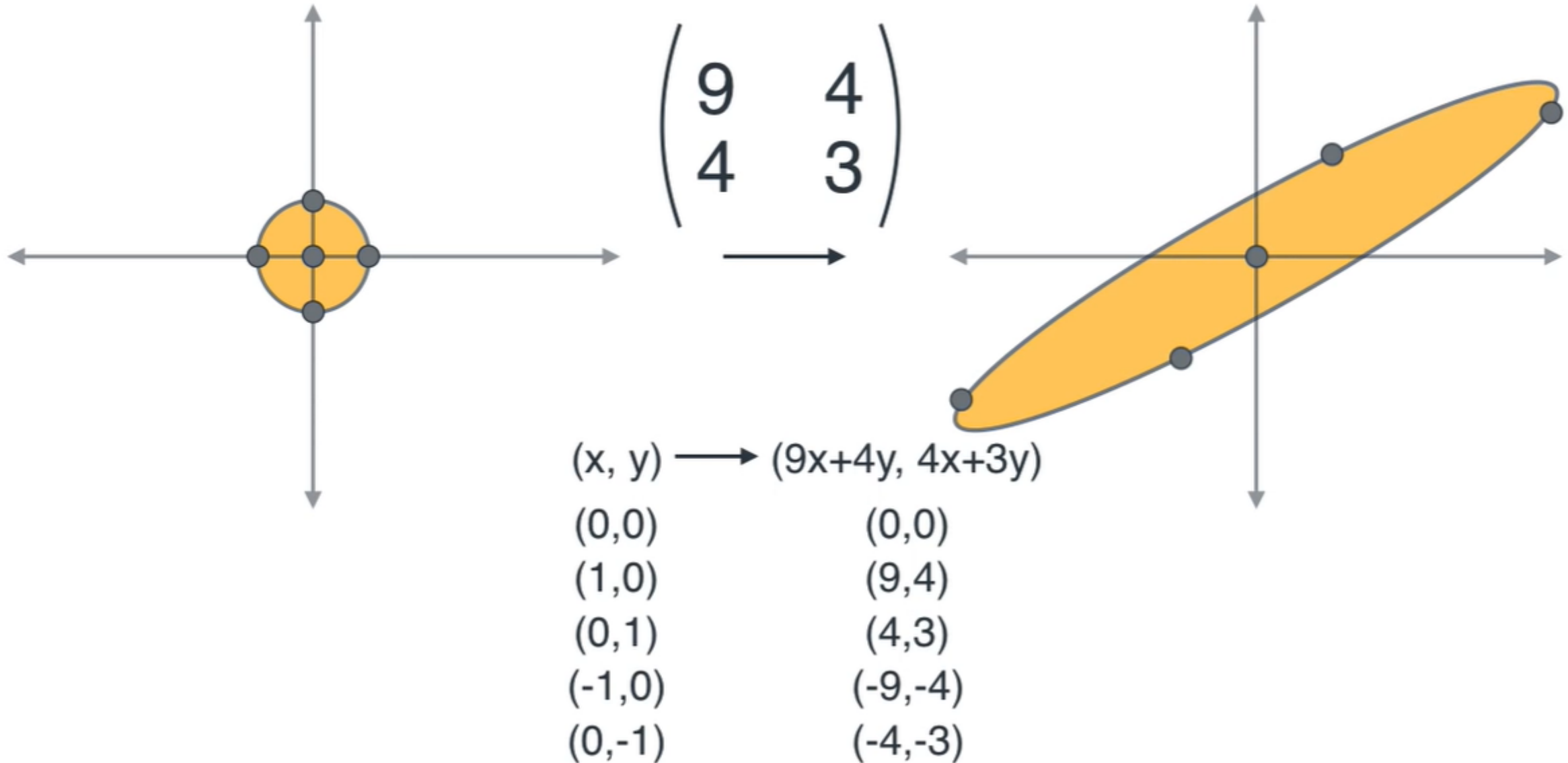
Covariance matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

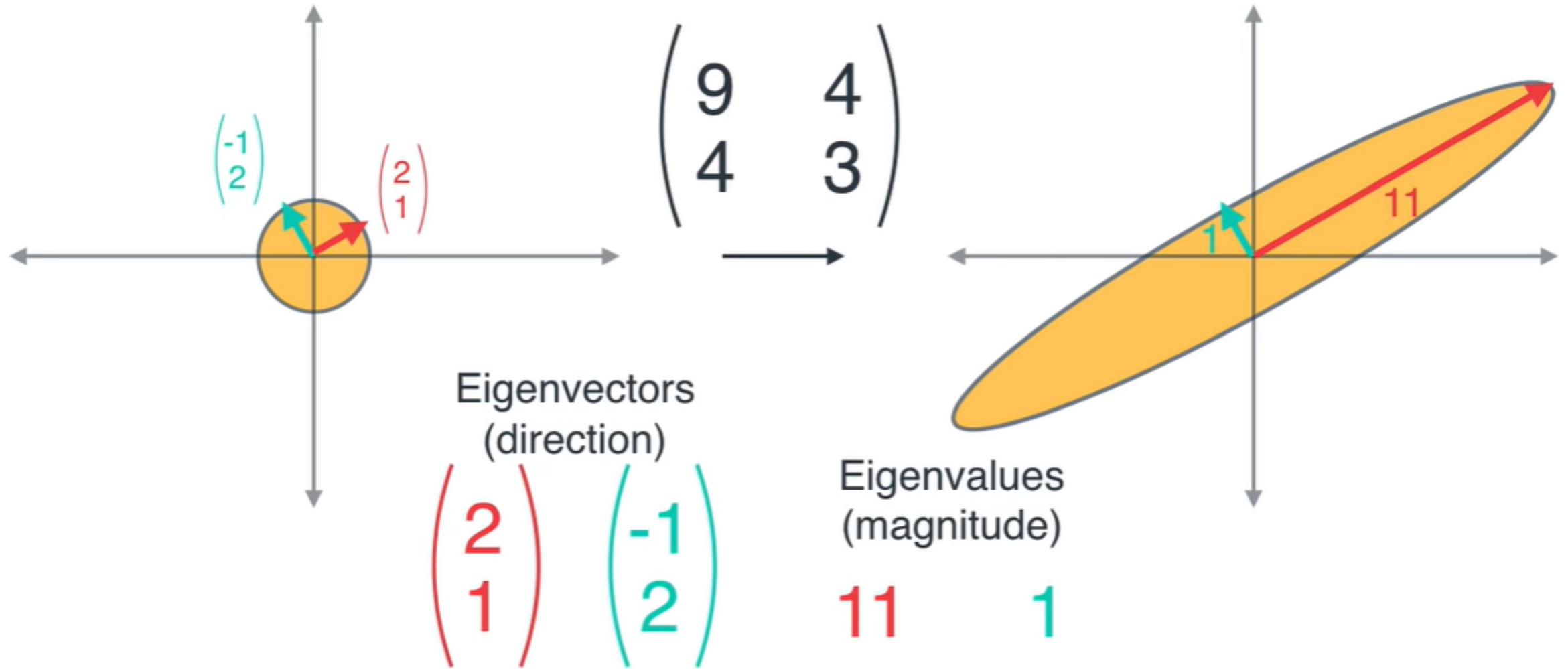


$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

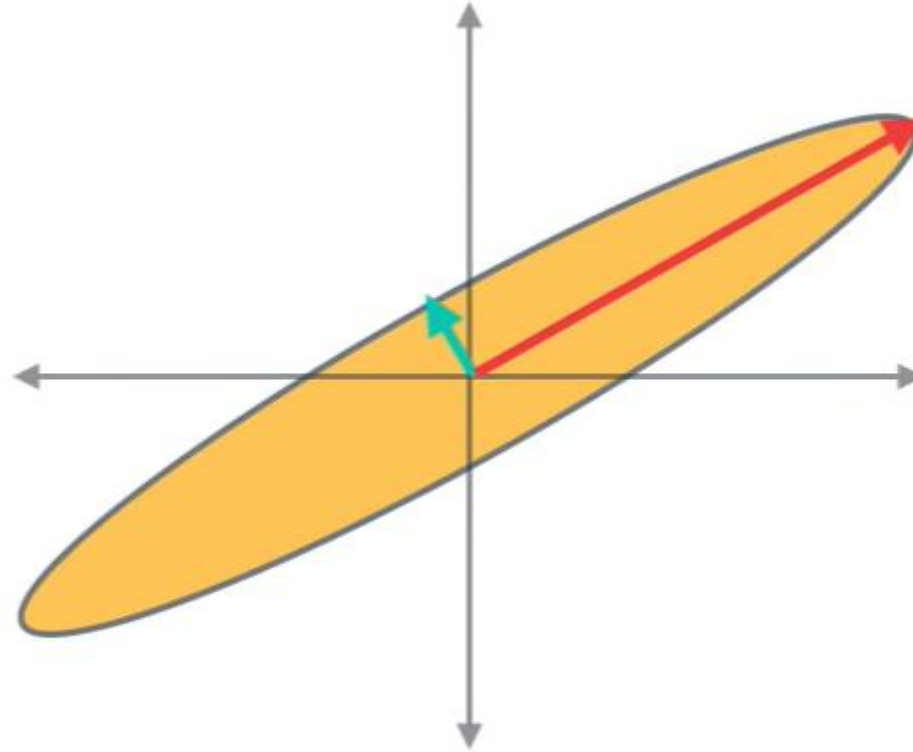
Linear Transformations



Linear Transformations



Linear Transformations



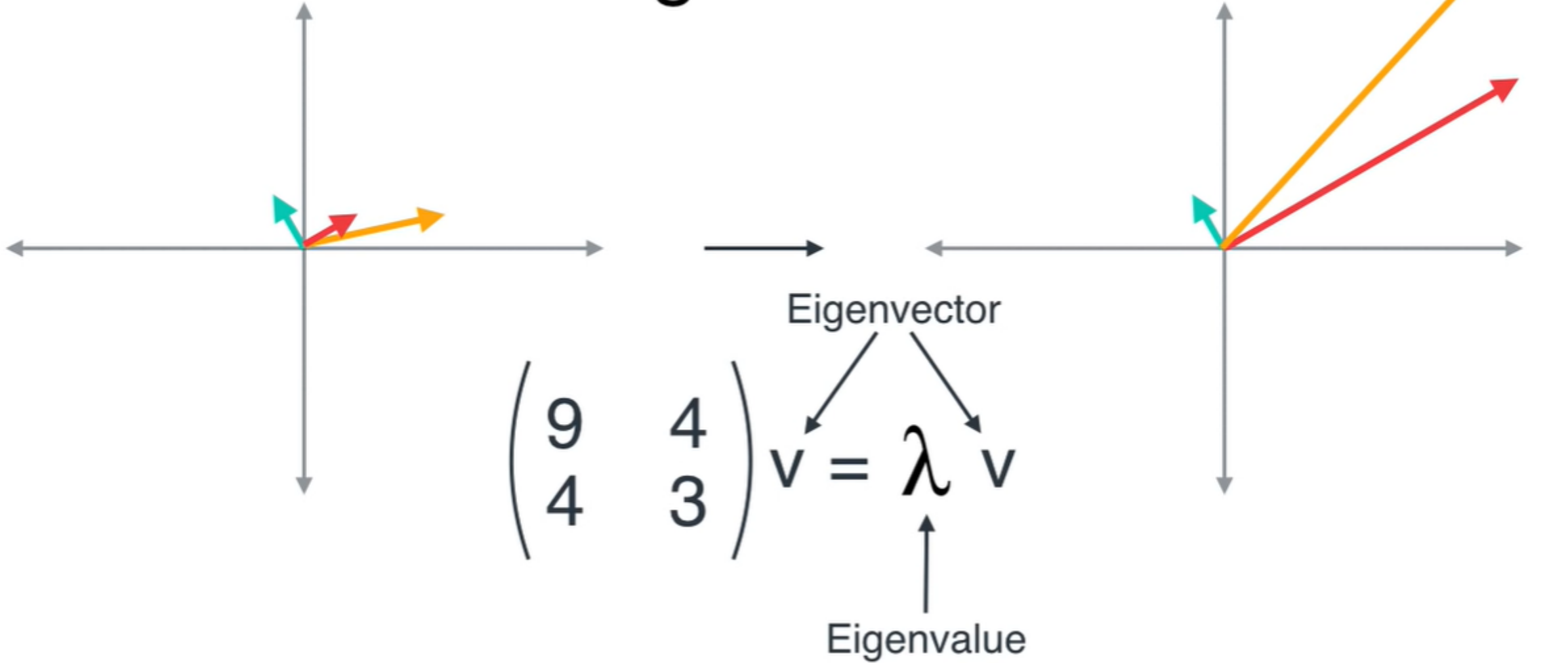
Eigenvectors
(direction)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues
(magnitude)

$$11 \quad 1$$

Eigenstuff



Eigenvalues

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Characteristic Polynomial

$$\begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-9)(x-3) - (-4)(-4) = x^2 - 12x + 11 \\ = (x-11)(x-1)$$

Eigenvalues **11** and **1**

Eigenvalues

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Characteristic Polynomial

$$\begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-9)(x-3) - (-4)(-4) = x^2 - 12x + 11 \\ = (x-11)(x-1)$$

Eigenvalues **11** and **1**

Eigenvalue

고유값

자료행렬을 요약하는 수치로서, 특성치라고도 한다. 각 고유값은 그에 대응하는 고유벡터가 있다. A 는 $m \times n$ 행렬이고, \vec{x} 는 \mathbb{R}^n 의 영벡터가 아닌 벡터이다. 스칼라 λ 에 대하여 $A\vec{x}$ 가 \vec{x} 의 스칼라 λ 배, 즉 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 일 때, λ 를 A 의 고유값(eigenvalue of A)이라 하고, \vec{x} ($\vec{x} \neq \vec{0}$)를 λ 에 대응하는 A 의 고유 벡터(eigenvector of A)라 한다.

예를 들어, 벡터 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 는 $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{x}$ 이므로 고유치 $\lambda = 3$ 에 대응하는 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ 의 고유 벡터이다. A 가 실수의 $n \times n$ 대칭행렬이면 A 의 고유값은 실수이다. A 는 $n \times n$ 행렬일 때 A 의 고유값이 λ 이기 위한 필요충분조건은 $\det(A - \lambda I) = 0$ 이다. $\det(A - \lambda I)$ 는 n 차 다항식이 된다. 이때 $\det(A - \lambda I) = 0$ 을 행렬 A 의 특성방정식(characteristic equation of A)라고 한다.

$n \times n$ 행렬 A 가 서로 다른 고유값을 가지면 A 는 대각화가 가능한 행렬이다. 대각행렬과 닮은 행렬을 “대각화 가능 행렬(diagonalizable matrix)”이라 한다. $n \times n$ 행렬 A 가 대각행렬 D 와 닮았을 때 A 는 ‘대각화 가능하다(bedagonalizable)’라고 하고 A 를 대각화 가능 행렬이라 한다. $n \times n$ 행렬 A 가 대각화 가능 행렬이기 위한 필요충분 조건은 A 가 n 개의 일차독립인 고유벡터를 갖는 것이다.

행렬 A 의 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 에 대응하는 고유벡터가 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ 일 때 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ 는 일차독립이다. SVD(Singular Value Decomposition, 특이값 분해), Pseudo-Inverse, 선형연립방정식의 풀이, PCA(Principal component analysis, 주성분분석) 등의 주요 응용이 eigenvalue, eigenvector를 그 밑바탕에 깔고 있다.

Eigenvalues

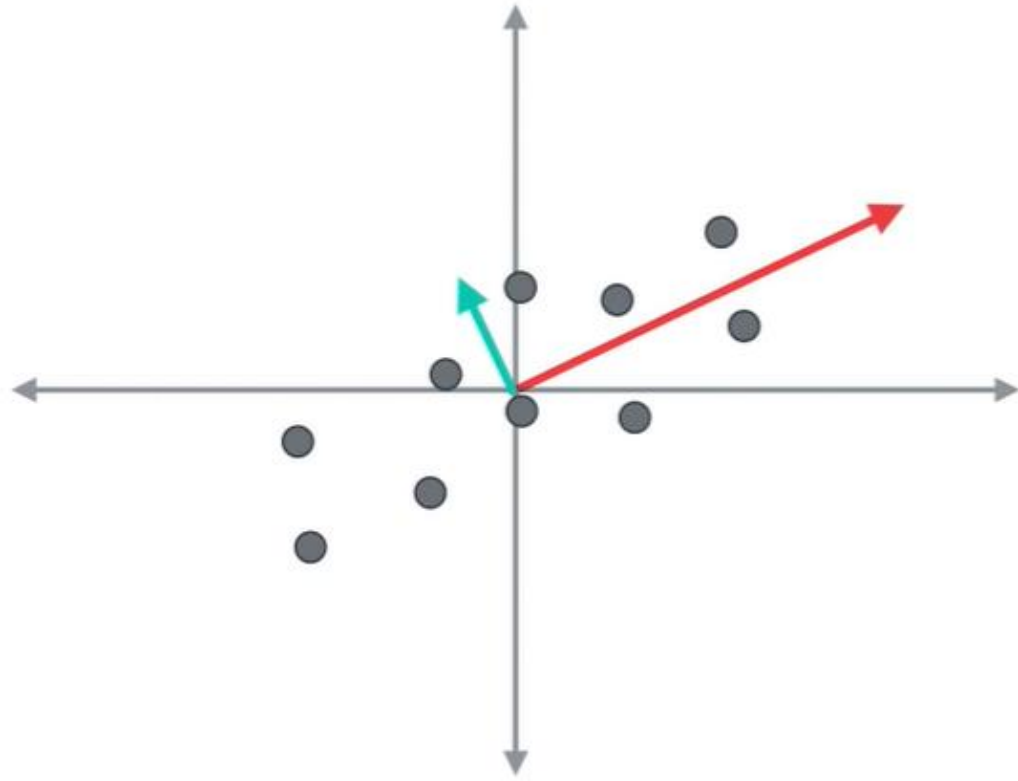
$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Characteristic Polynomial

$$\begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-9)(x-3) - (-4)(-4) = x^2 - 12x + 11 \\ = (x-11)(x-1)$$

Eigenvalues **11** and **1**

Principal Component Analysis (PCA)



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$11$$

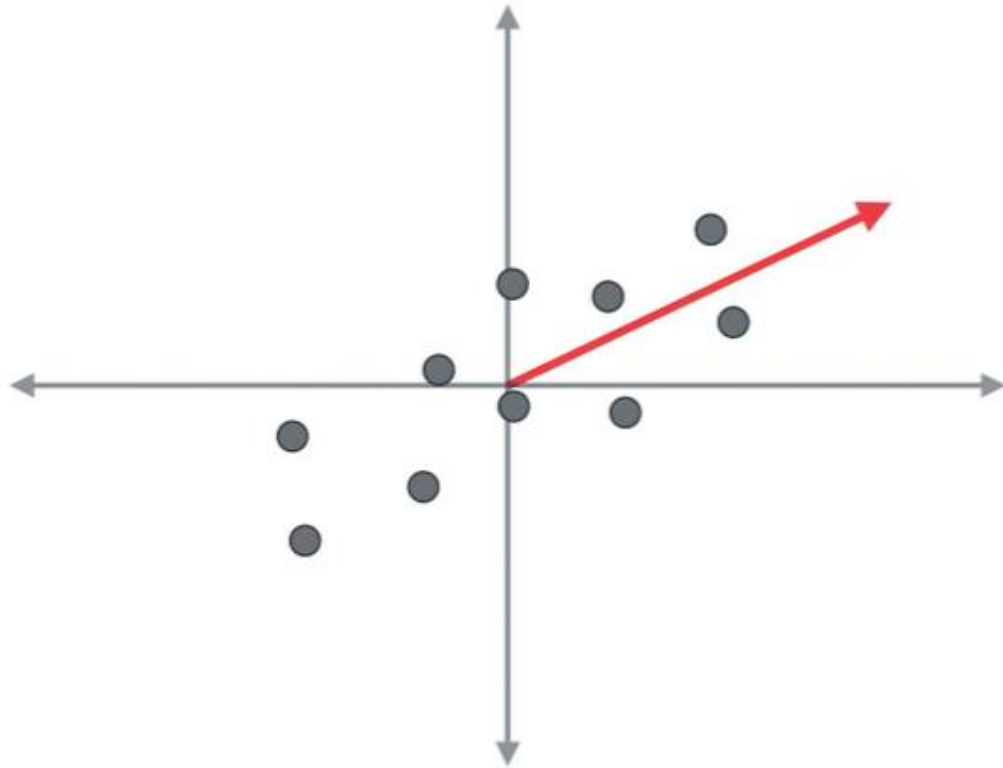
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1$$

Eigenvectors
(direction)

Eigenvalues
(magnitude)

Principal Component Analysis (PCA)



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

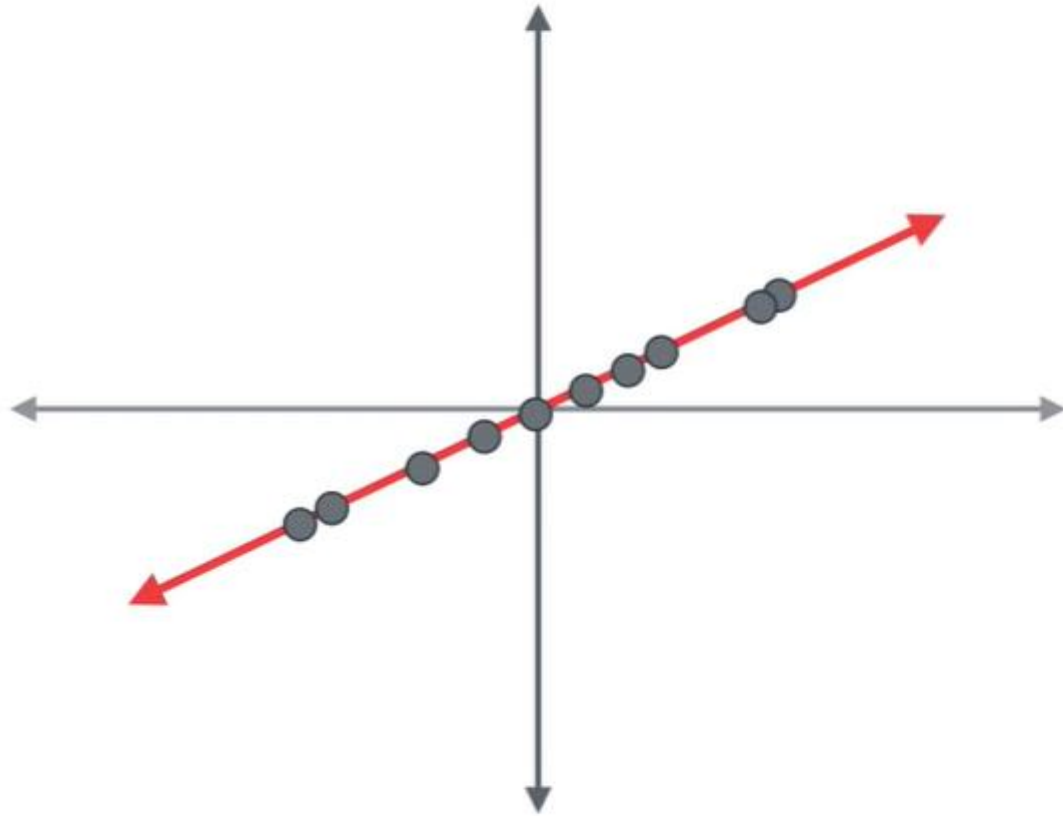
Eigenvectors
(direction)

$$11$$

Eigenvalues
(magnitude)



Principal Component Analysis (PCA)



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

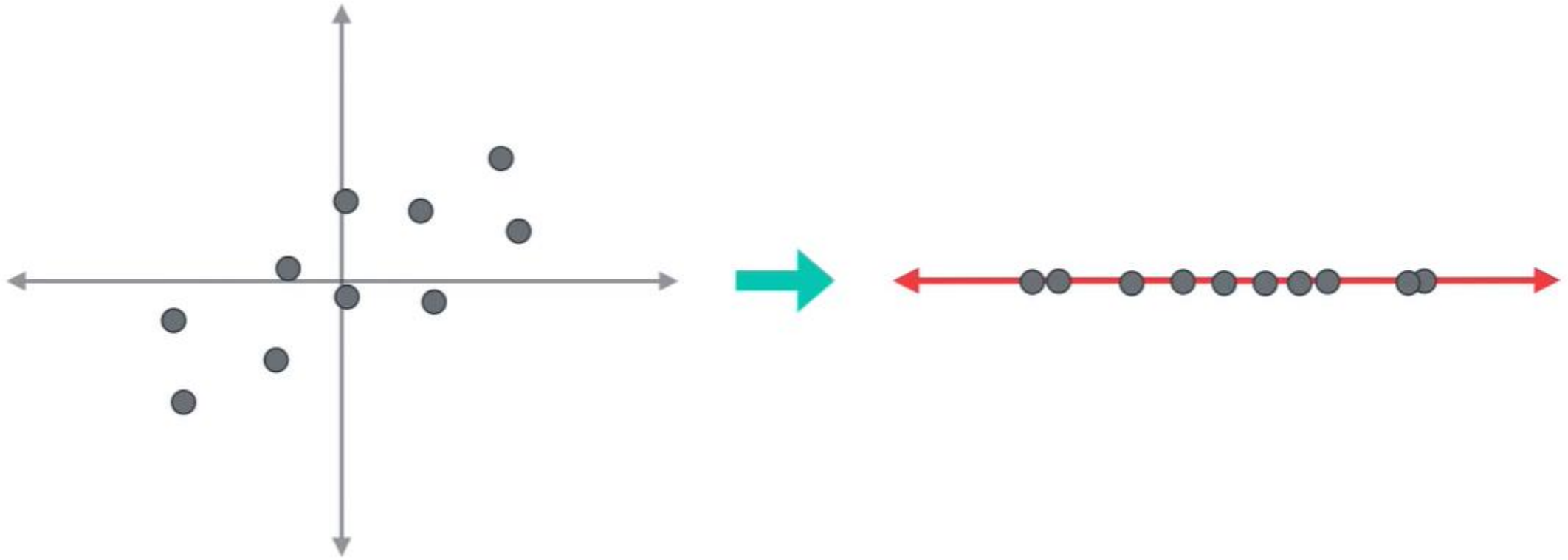
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors
(direction)

$$11$$

Eigenvalues
(magnitude)

Principal Component Analysis (PCA)



PCA

Large Table

| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |
|----|----|----|----|----|
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |
| * | * | * | * | * |

Covariance matrix

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Eigenstuff

V_1 λ_1
 V_2 λ_2

Big

Small

Small Table

| W1 | W2 |
|----|----|
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |
| * | * |

