물의 비율에 따른 물병던지기의 성공률

1. 탐구 동기

한때 인터넷 매체에서 물병던지기가 유행한 뒤 여전히 학교 교실에서는 물병던지기를 하는 학생들을 볼 수 있다. 그때마다 자연스럽게 떠오르는 의문은 "물을 얼만큼 채워야 성공률이 높을까?", "물병이 어떤 운동을 하는 걸까?", "물병 속 물의 역할은 무엇이지?"이다. 그러나 물병과 물의 운동이 개별적으로 보여지는 이런 운동은 분석하기 어려워 보였다. 이런 상태에서 트래커라는 영상 분석 프로그램을 알게 되었는데, 이는 사용법도 간단하고 의문을 해결하기에 충분할 것 같다는 생각에 탐구를 시작하게 되었다.

2. 탐구 목적

물리학의 목적은 본래 물체의 운동을 알아가는 것에 있다. 그런 목적을 달성하기 위해 다양한 수학적인 기술들과 컴퓨터 프로그램들이 사용된다. 그런 프로그램 중 기초적인 것으로서 고등학생이 다루기에 적합한 프로그램으로 트래커(Tracker)가 있는데, 이는 영상 속 물체의 운동을 분석하는 프로그램이다. 이번 탐구에서는 트래커를 사용해 물병의 움직임을 분석함으로써 물체의 운동에 대한 직관적, 정량적 이해와 분석 프로그램을 다루는 능력을 기르고자 한다.

3. 배경 이론

질량중심 : 물체의 모든 질량이 한 점에 모여 있고, 외력이 모두 그 점에 작용하는 것처럼 움직이는 특별한 점이다. 이는 물체의 모든 위치를 그 위치의 질량을 가중으로 하여 평균 낸 것으로 무게중심 $\mathbf{r_{cm}}$은 아래와 같이 표현할 수 있다. 지구 표면에서의 경우 무게중심과 질량중심은 동치이다. 증명은 생략

$$\mathbf{r_{cm}} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r_i} = \frac{1}{M}\int r\,\mathrm{d}m$$

각위치 : 어떤 물체가 회전축으로부터 특정 동경과 이루는 각을 각위치 θ한다.

각변위 : 각변위는 각위치의 변화량으로 회전축에 대해 처음 각위치를 θ_p, 나중 각위치를 θ_q라 할 때, 각변위 $\Delta\theta$는 아래와 같이 정의된다.

$$\Delta\theta \equiv \theta_q - \theta_p$$

각속도 : 각속도는 물체가 회전하는 속도를 나타내는 물리량으로 각속도 $\boldsymbol{\omega}$는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

각가속도 : 각가속도는 물체의 각속도의 변화율로 각가속도 $\boldsymbol{\alpha}$는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

돌림힘 : 돌림힘은 물체의 각가속도를 변화시키는 요인으로 회전축을 시점으로, 힘이 작용하는 지점을 종점으로 하는 위치벡터를 $\mathbf{r}$, 그 지점에 작용하는 힘을 $\mathbf{F}$라 할때, 돌림힘 $\boldsymbol{\tau}$는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

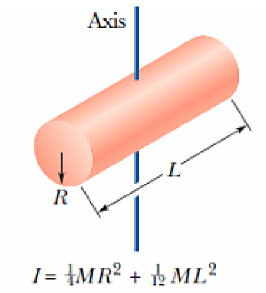
관성모멘트 : 관성모멘트는 물체의 회전을 방해하는 정도로 물체를 질점들의 집합으로 봤을때, 어떤 질점이 회전축으로부터 떨어진 거리를 r_i, 그 질점의 질량을 m_i라 하면 관성모멘트 I는 아래와 같이 정의된다.

$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2$$

물체의 질량이 연속적으로 분포한 연속체의 경우 아래와 같이 관성모멘트를 계산한다.

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m$$

관성모멘트의 계산 : 일반적으로 다음을 회전축을 갖는 질량 M이 고루 분포된 원통형 물체의 관성모멘트는 아래와 같은 식으로서 계산된다. 증명은 생략



평행축 정리 : I_{cm}을 질량중심을 지나는 관성모멘트라 하고, 그 축에 거리 d만큼 평행이동된 축으로부터 계산되는 새로운 관성모멘트 I라 하자. 물체의 질량이 M이라 할 때 아래와 같은 식으로 계산된다. 증명은 생략

$$I = I_{cm} + Md^2$$

각운동량 : 각운동량은 회전하는 물체가 갖는 운동량으로 아래와 같이 정의되고, 정의로부터 나머지 식들이 유도된다. 증명은 생략

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = I\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

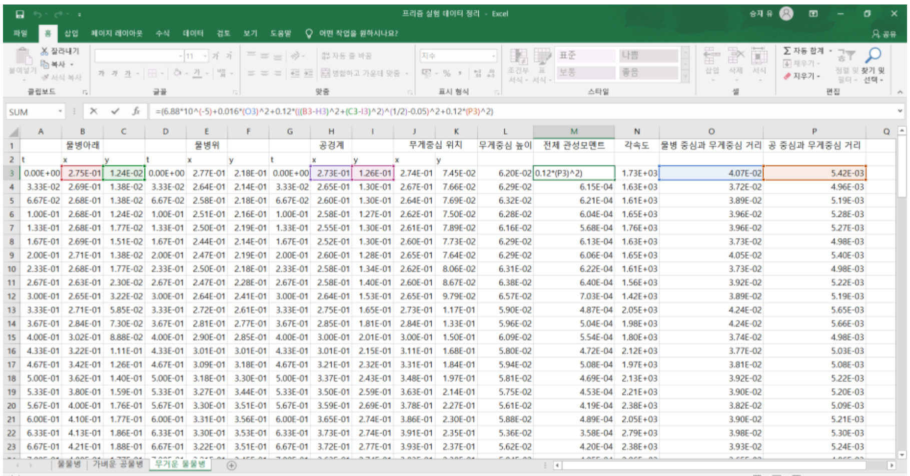
각운동량 보존법칙 : 각운동량 부분의 2번째 식으로부터 $\boldsymbol{\tau} = 0$이면, 각운동량이 상수가 된다는 것을 알 수 있다. 물병던지기의 경우 질량중심, 즉 무게중심을 기준으로 회전하므로 $\boldsymbol{\tau} = 0$이다. 이로부터 물병던지기의 과정에서 각운동량이 보존된다는 것을 알 수 있다. 이로부터 관성모멘트를 구하면 그의 역수를 각속도로써 취급할 수 있다.

4. 탐구 과정

본 탐구는 크게 3가지의 단계로 쪼갤 수 있다. 첫번째로 먼저 물병던지기를 시행하는 것을 영상으로 찍어 물병과 그 속 물의 움직임에 대한 직관적인 이해를 한다. 두번째 단계는 보다 정확한 분석을 위해 물병 속 물의 움직임을 물병 속 공 두개의 움직임으로 치환하여서 물의 높이가 성공률에 미치는 영향을 간접적으로 알아보는 것이다. 세번째 단계는 지금까지의 탐구를 바탕으로 성공률이 높은 물의 높이를 수학적인 방법을 동원하여 결론을 내보는 것이다.

0) 물병과 다루는 프로그램에 대한 정보 및 분석 방법에 대한 구체적인 계획

물병의 종류는 그 종류 자체로는 중요하지 않으나 실험의 정확성을 위해 한 종류의 물병으로 통일한다. 물병의 질량은 0.016kg, 물병의 높이는 0.21m이다. 사용하는 프로그램은 앞에서도 언급했듯이 트래커로 분석할 영상 속에서 장면 하나하나 영상속에 점을 찍어 그 위치정보를 표로 추출하여 사용한다. 그래프와 관련해서는 SciDAVis라는 프로그램을 사용할 것인데, 사용법은 다른 통계 프로그램과 유사하지만 결과물이 깔끔해서 채택하였다. 분석 방법에 관해서는 트래커로 추출한 각 장면에서의 물병의 위 끝 아래 끝의 위치정보 등을 엑셀을 이용하여 표로 정리하고, 엑셀의 함수를 이용해 그 정보들의 연산으로 시간에 따른 무게중심, 관성모멘트 등을 구해낸다. 그 모습은[a] 아래와 같다.



=(6.88*10^(-5)+0.016*(O3)^2+0.12*(((B3-H3)^2+(C3-I3)^2)^(1/2)-0.05)^2+0.12*(P3)^2)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
	물병아래			물병위			공경계		무게중심 위치		무게중심 높이	전체 관성모멘트	각속도	물병 중심과 무게중심 거리	공 중심과 무게중심 거리
t	x	y	t	x	y	t	x	y	x	y					
0.00E+00	2.75E-01	1.24E-02	0.00E+00	2.77E-01	2.18E-01	0.00E+00	2.73E-01	1.26E-01	2.74E-01	7.45E-02	6.20E-02	0.12*(P3)^2)	1.73E+03	4.07E-02	5.42E-03
3.33E-02	2.69E-01	1.38E-02	3.33E-02	2.64E-01	2.14E-01	3.33E-02	2.65E-01	1.30E-01	2.67E-01	7.66E-02	6.29E-02	6.15E-04	1.63E+03	3.72E-02	4.96E-03
6.67E-02	2.68E-01	1.38E-02	6.67E-02	2.58E-01	2.18E-01	6.67E-02	2.60E-01	1.30E-01	2.64E-01	7.69E-02	6.32E-02	6.21E-04	1.61E+03	3.89E-02	5.19E-03
1.00E-01	2.68E-01	1.24E-02	1.00E-01	2.51E-01	2.16E-01	1.00E-01	2.58E-01	1.27E-01	2.62E-01	7.50E-02	6.28E-02	6.04E-04	1.65E+03	3.96E-02	5.28E-03
1.33E-01	2.68E-01	1.77E-02	1.33E-01	2.50E-01	2.19E-01	1.33E-01	2.55E-01	1.30E-01	2.61E-01	7.89E-02	6.16E-02	5.68E-04	1.76E+03	3.96E-02	5.27E-03
1.67E-01	2.69E-01	1.51E-02	1.67E-01	2.44E-01	2.14E-01	1.67E-01	2.52E-01	1.30E-01	2.60E-01	7.73E-02	6.29E-02	6.13E-04	1.63E+03	3.73E-02	4.98E-03
2.00E-01	2.71E-01	1.38E-02	2.00E-01	2.47E-01	2.19E-01	2.00E-01	2.60E-01	1.28E-01	2.65E-01	7.64E-02	6.29E-02	6.06E-04	1.65E+03	4.05E-02	5.40E-03
2.33E-01	2.68E-01	1.77E-02	2.33E-01	2.50E-01	2.18E-01	2.33E-01	2.58E-01	1.34E-01	2.62E-01	8.06E-02	6.31E-02	6.22E-04	1.61E+03	3.73E-02	4.98E-03
2.67E-01	2.63E-01	2.30E-02	2.67E-01	2.47E-01	2.28E-01	2.67E-01	2.58E-01	1.40E-01	2.60E-01	8.67E-02	6.38E-02	6.40E-04	1.56E+03	3.92E-02	5.22E-03
3.00E-01	2.65E-01	3.22E-02	3.00E-01	2.64E-01	2.41E-01	3.00E-01	2.64E-01	1.53E-01	2.65E-01	9.79E-02	6.57E-02	7.03E-04	1.42E+03	3.89E-02	5.19E-03
3.33E-01	2.71E-01	5.85E-02	3.33E-01	2.72E-01	2.61E-01	3.33E-01	2.75E-01	1.65E-01	2.73E-01	1.17E-01	5.90E-02	4.87E-04	2.05E+03	4.24E-02	5.65E-03
3.67E-01	2.84E-01	7.30E-02	3.67E-01	2.81E-01	2.77E-01	3.67E-01	2.85E-01	1.81E-01	2.84E-01	1.33E-01	5.96E-02	5.04E-04	1.98E+03	4.24E-02	5.66E-03
4.00E-01	3.02E-01	8.88E-02	4.00E-01	2.90E-01	2.85E-01	4.00E-01	3.00E-01	2.01E-01	3.00E-01	1.50E-01	6.09E-02	5.54E-04	1.80E+03	3.74E-02	4.98E-03
4.33E-01	3.22E-01	1.11E-01	4.33E-01	3.01E-01	3.01E-01	4.33E-01	3.01E-01	2.15E-01	3.11E-01	1.68E-01	5.80E-02	4.72E-04	2.12E+03	3.77E-02	5.03E-03
4.67E-01	3.42E-01	1.26E-01	4.67E-01	3.09E-01	3.18E-01	4.67E-01	3.21E-01	2.32E-01	3.31E-01	1.84E-01	5.94E-02	5.08E-04	1.97E+03	3.81E-02	5.08E-03
5.00E-01	3.62E-01	1.40E-01	5.00E-01	3.18E-01	3.30E-01	5.00E-01	3.37E-01	2.43E-01	3.48E-01	1.97E-01	5.81E-02	4.69E-04	2.13E+03	3.92E-02	5.22E-03
5.33E-01	3.80E-01	1.59E-01	5.33E-01	3.27E-01	3.44E-01	5.33E-01	3.50E-01	2.59E-01	3.63E-01	2.14E-01	5.75E-02	4.53E-04	2.21E+03	3.90E-02	5.20E-03
5.67E-01	4.00E-01	1.76E-01	5.67E-01	3.30E-01	3.51E-01	5.67E-01	3.59E-01	2.69E-01	3.78E-01	2.27E-01	5.61E-02	4.19E-04	2.38E+03	3.82E-02	5.09E-03
6.00E-01	4.10E-01	1.77E-01	6.00E-01	3.31E-01	3.56E-01	6.00E-01	3.65E-01	2.74E-01	3.86E-01	2.30E-01	5.88E-02	4.89E-04	2.05E+03	3.90E-02	5.21E-03
6.33E-01	4.13E-01	1.86E-01	6.33E-01	3.30E-01	3.53E-01	6.33E-01	3.73E-01	2.74E-01	3.91E-01	2.35E-01	5.36E-02	3.58E-04	2.79E+03	3.98E-02	5.30E-03
6.67E-01	4.21E-01	1.88E-01	6.67E-01	3.22E-01	3.51E-01	6.67E-01	3.72E-01	2.77E-01	3.93E-01	2.37E-01	5.62E-02	4.20E-04	2.38E+03	3.93E-02	5.24E-03

a) 수집한 데이터를 엑셀로 정리해서 계산한 모습

1) 물병던지기를 직관적으로 이해하기

적절한 양의 물 - 물병던지기에 대한 직관적 이해를 위한 것이므로 물병던지기가 성공하기만 한다면 물의 양은 중요한 고려사항이 아니다. 따라서 물의 양은 보통 많이 하는 40%정도를 채택한다. - 이 든 물병으로 물병던지기를 시행하여 그 모습을 영상으로 남긴다. 정확한 분석을 위해 물에는 색소를 타고, 뒤 배경은 일정한 간격으로 칸이 나눠져 있는 종이로 한다.

2) 물병의 물을 두 개의 공으로 치환하여 관찰하기

물병 속 물의 양을 변경하면 물의 가동범위와 질량이 달라지므로 회전하는 동안 무게중심의 변화 양상과 그에 따른 관성모멘트의 변화 양상 또한 달라진다. – 물의 양이 충분히 적거나 많으면 무게중심의 변화가 적고 그에 따라 관성모멘트의 변화도 적다. 물의 양이 50% 근처에 있으면 무게중심의 변화가 많고 그에 따라 관성모멘트의 변화도 많다. – 이에 따라 무게중심의 변화의 정도에 따른 결과를 정확하게 관찰하기 위해 – 사용하는 영상분석 프로그램으로 무게중심을 찾기에는 유체보다는 고체를 사용하는 것이 정확한 분석에 용이하다. - 물 대신 물병에 공을 넣어 물병던지기를 시행한다. – 공은 안에 추를 넣어 신문지로 감싼 것을 사용하고, 무게 별로 구분하기 위해 색 테이프로 감싼다. 공은 2종류를 각각 2개씩 만드는데, 빨간 공은 0.06g이고, 지름은 0.05m이다. 파란 공은 0.031g이고, 지름은 0.05m로 동일하다. 그렇게 만든 공은 각각 종류마다 하나의 물병에 하나의 공은 바닥에 접착제로 고정, 나머지 하나는 물병 안에서 자유롭게 운동할 수 있도록 한다. – 그렇게 만든 2개의 물병으로 각각 물병던지기를 시행한 것을 영상분석 프로그램으로 분석하여 무게중심에 따른 운동의 차이를 관찰한다.

3) 수학적 모델링

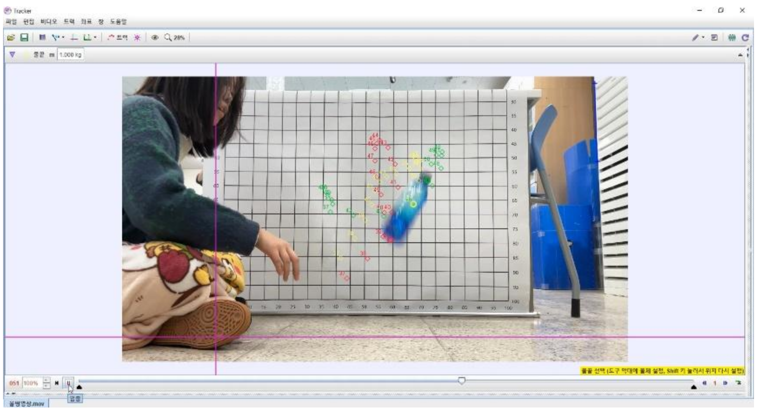
물병에 대한 정보와 지금까지의 관찰을 바탕으로 성공률에 미치는 중요한 요인을 중

점으로 물병을 수학적으로 모델링 하여 물의 비율에 따른 성공률을 예측해보고 이를 실제 간략한 실험, 경험적인 결론 들과 비교해본다.

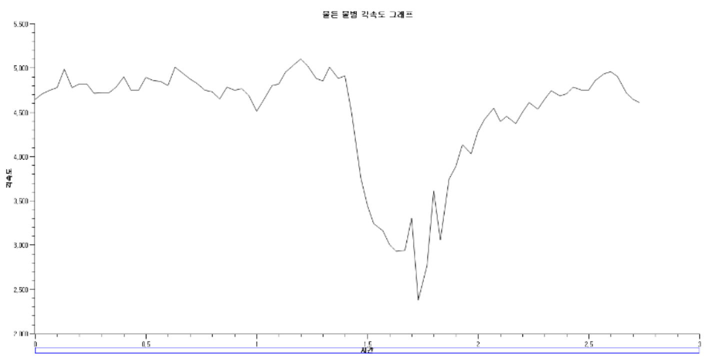
5. 탐구 결과

1) 물병던지기를 직관적으로 이해하기

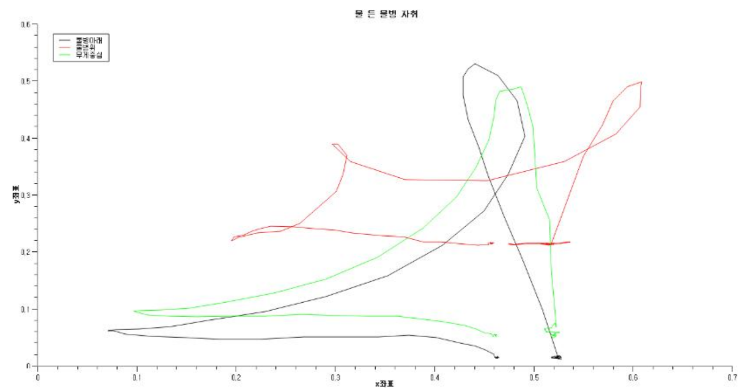
관찰 결과 물병 속 물은 공중에서 330도 정도 회전했을 때 가장 많이 물병속에서 분포되고 이로부터 무게중심이 초기보다 높은 곳에 위치하게[b] 된다. 각운동량 보존 법칙에 의해 이때 각속도가 크게 감소하게 되고[c] 이로부터 안정적인 착지가 가능한 것으로 보인다. 물병의 자취 그래프[d] 또한 그려서 운동에 대한 이해를 돕는다. 이로부터 물병던지기에서 각속도의 감소가 중요하고, 그와 직접 관련이 있는 관성모멘트가 중요한 요소라는 것을 유추할 수 있다.



b) 330도일 때 물이 많이 분포한 모습



c) 330도 정도에서 각속도가 급격히 감소한 모습



d) 물병의 자취 그래프 – 빨간 선은 물병 위 끝, 검정 선은 물병 아래 끝, 초록 선은 물병의 무게중심

2) 물병의 물을 두 개의 공으로 치환하여 관찰하기

무게중심의 변화의 관점에서 물병던지기를 생각해볼 수 있었다. 물병 속 물은 기본적으로 회전하는 동안 아래에 질량이 몰려있고, 위로는 약간의 물만이 이동하여 질량중심이 변화한다. 이때 물이 물병 속 가장 넓게 분포했을 때 위와 아래의 밀도가 동일한게 아닌, 위의 밀도가 비교적 작은 것은 자명하다. 그에 반해 공은 위 아래로 분포되었을때 질량중심은 정확히 그 가운데로 공을 물로 대체하기 위해선 비교적 물이 들었을때의 예상되는 무게보다 가볍게 하는 것이 좋아보인다. 따라서 비교적 가벼운 무게의 공을 채택하였는데 이로부터 보여지는 무게중심의 변화 양상과[e] 각속도의 변화 양상은 유사할 것으로 예측된다. 따라서 파란 공 물병은 20% 근처의 물의 비율을 갖는 물벼으로, 빨간 공은 40% 근처의 물의 비율을 갖는 물병으로 취급하여 결과를 받아들일 수 있다. – 20% 물병은 0.13kg정도의 물의 무게를 갖는다. 물의 움직임이 비교적 자유롭고 질량이 낮아 기본적으로 무게중심이 높고 무게중심의 변화도 클 것으로 예측할 수 있다. 40% 물병은 0.26kg정도의 물의 무게를 갖는다. 물의 움직임 또한 자유롭고 질량이 비교적 높아 기본적으로 무게중심이 낮고 무게중심의 변화도 클 것으로 예측할 수 있다. 따라서 파란 공은 20%, 빨간 공은 40%로 생각하는 것은 충분히 가능하다. – 각속도의 최댓값에 대한 최솟값의 비율(백분율)은 파란 공은 18% 정도이고, 빨간 공은 15% 정도였다. 물병던지기를 시작할 때 비슷한 각속도로 던지려고 하는 것을 생각하면, 빨간 공의 각속도는 최소인 지점에서의 값이 실제로 더 작을 것이다. 분석할 영상을 촬영하기 위해 물병던지기를 시행할땨의 경험적인 사실로는 빨간 공 물병이 성공비율이 더 높기도 하였다. 각속도의 감소율이 더 크자 물병던지기에 더 안정감이 생기고 성공률이 높아진 것이라고 예측할 수 있다. 수학적으로 보다 명확한 결론을 내려보자.

e) 무게중심의 높이 비율의 변화 양상 그래프 - 빨간색 그래프는 빨간 공, 파란색 그래프는 파란 공 –

3) 수학적 모델링

구할 것은 물의 비율에 따른 최대 관성모멘트와 최소 관성 모멘트의 비율 – 이는 최대 각속도와 최소 각속도의 비율과 같다. – 이다. 먼저 최소 관성모멘트 I_{min}는 물의 비율을 n, 물의 무게를 m, 물의 높이를 h, 물병의 무게를 M, 물병의 높이를 H, 무게중심의 높이를 h_{com}라 할 때 다음과 같이 나타나고 이는 모두 n에 대한 일변수 함수로서 취급할 수 있다.

$$I_{min} = \frac{1}{4} \times (0.05)^2 \times M + \frac{1}{12} \times M \times H + M \times \left(\frac{H}{2} - h_{com}\right)^2 + \frac{1}{4} \times (0.05)^2 \times m + \frac{1}{12} \times m \times h + m \times \left(\frac{h}{2} - h_{com}\right)^2 = f(n)$$

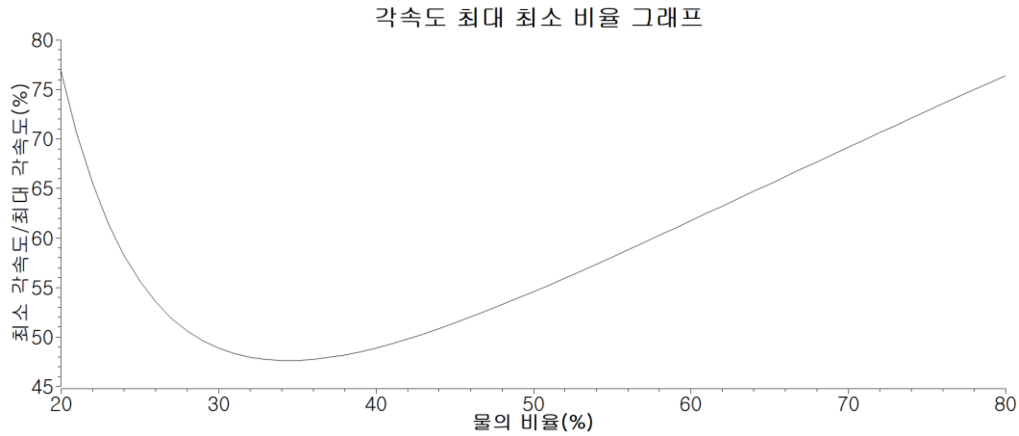
최대 관성모멘트는 자명하게 물이 최대로 분포했을 때 이고 물이 완전히 분포하는게 아니라는 것을 고려하면 최대 관성모멘트일 때 물의 높이는 $\frac{4}{5}H$로 균일하게 분포했다고 볼 수 있다 따라서 다음과 같이 최대 관성모멘트 I_{max}를 나타낼 수 있다.

$$I_{max} = \frac{1}{4} \times (0.05)^2 \times M + \frac{1}{12} \times M \times H + M \times \left(\frac{H}{2} - h_{com}\right)^2 + \frac{1}{4} \times (0.05)^2 \times m + \frac{1}{12} \times m \times \frac{4}{5}H + m \times \left(\frac{2}{5}H - h_{com}\right)^2 = \mathrm{g(n)}$$

따라서 우리가 구하려는 최대 각속도에 대한 최소 각속도의 비율(%)은 다음과 같은 n에 대한 일변수 함수로서 표현할 수 있다.

$$\mathrm{h(n)} = \frac{\frac{1}{g(n)}}{\frac{1}{f(n)}} \times 100 = \frac{f(n)}{g(n)} \times 100$$

n이 20 ~ 80으로 변할 때 h(n)의 그래프를 그리면 아래와 같다.



h(n)은 n = 35일 때 최소가 되고, 30 ~ 40일 때 비교적 작은 모습을 보인다. 이로부터 물의 비율이 30 ~ 40%일 때 성공률이 높을 것이라는 결론을 도출할 수 있다. 이는 간략한 추가 실험 – 30%, 40%, 50%의 물병을 각각 30번씩 던져 성공률을 기록하는 실험으로, 30%의 물병은 46.66%의 성공률을, 40%의 물병은 22.22%의 성공률을, 50%의 물병은 10%의 성공률을 기록했다. – 의 결과와 비슷하고, 일반적으로 알려진 성공률이 높은 물의 비율인 30~40%와도 맞는 결과이다.

6. 결론 및 제언

본 탐구로 물병던지기의 성공률에 큰 영향을 미치는 변수는 각속도의 감소율이라는 것을 알 수 있었고, 30~40%의 물의 비율을 갖는 물병이 비교적 높은 감소율을 보이는 경향을 확인했다. 하지만 공이 든 물병으로 물이 든 물병의 움직임을 대체하여 생각하는 것은 정확한 분석이 되지 못하며, 각속도의 감소와 성공률의 연관성에 뚜렷한 경향성이 보이기에 가능했던 것이다. 그럼에도 여전히 정확하지 못해, 유체의 운동을 기술하는 수학적 테크닉을 학습한 뒤 물이 가장 많이 퍼졌을때의 물의 무게중심을 설정하면 더 신뢰성 높은 탐구가 가능할 것으로 보인다. 또한 수학적 모델링 과정에서 최대 관성모멘트를 구하기 위해 물이 가장 많이 퍼졌을 때의 무게중심을 근사하였는데, 이 또한 유체의 운동에 대한 기술 능력이 있다면 더 정확한 탐구가 될 수 있을 것이라고 생각한다.