

1 Estimateur du nombre de boules dans une urne

On considère une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n . On ne connaît pas n et on souhaite l'estimer. Pour cela, on procède à m tirages avec remise.

1. Donner un estimateur simple de n .
2. Calculer l'estimateur par maximum de vraisemblance de n .
3. Montrer que le biais de cet estimateur est

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m.$$

Que vaut-il quand $m = 1$? Quand $m \rightarrow +\infty$?

2 Estimation de densité

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 .

1. Étant donné un échantillon de $n \in \mathbb{N}^*$ observations de X , calculer l'estimateur par maximum de vraisemblance de μ et σ .
2. Supposons maintenant que μ est la réalisation d'une variable aléatoire réelle M qui suit une loi normale de moyenne m et de variance τ^2 . Calculer l'estimateur de Bayes de μ .
3. Décomposer l'estimateur de Bayes de μ en la somme d'un terme fonction de la moyenne empirique de l'échantillon et un terme dépendant de la moyenne a priori. Que se passe-t-il quand n augmente ?