# 1 母函数与幂级数

定义

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \\
G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

那么

$$
F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \Big) x^n \tag{1.2}
$$

这个式子非常非常的有用

比如令$F(x) = G(x) = \sum_{n=0} x^n$，那么$F^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k=0}^{n} \Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$。

需要注意里面的卷积下标一定从 0 开始（因为是卷积），外面的不一定，比如可以定理 $F(x) = \sum_{n=1} x^n$。

1. $\Big( \sum_{n=0} x^n \Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k=0}^{n} \Big) x^n$
2. $\Big( \sum_{n=0} a_n x^n \Big) \Big( \sum_{n=0} x^n \Big) = \sum_{n=0} \Big( \sum_{k=0}^{n} a_n \Big) x^n$
3. 

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} z^n \\
(1+x)^k &= \sum_{n=0} \binom{k}{n} x^n \\
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= \sum_{n=0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

所以就会有很多有意思的结论，比如 $1/\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$

# 2 一些site

1. https://mathmu.github.io/MTCAS/Doc.html （计算机代数）

## 3 Reference

9. 整数因子分解