$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \tag{0.1}$$

$G(x)$ 称为 $\{a_0, a_1 \cdots\}$ 的生成函数

整数拆分

用 $1, 5, 10, 25, 50$ 硬币凑够 n，那么

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdots (1 + x^{50} + x^{100} + \cdots) \tag{0.2}$$

其中方案数为 x^n 前面的系数，$G(x)$ 的封闭形式为

$$G(x) = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^5} \frac{1}{1-z^{10}} \frac{1}{1-z^{25}} \frac{1}{1-z^{50}} \tag{0.3}$$

比较显然的我们有

$$\begin{aligned} G(1) = G(1; x) = (1 + x + x^2 + \cdots) &= \frac{1}{1-x} \\ G(2) = G(1, 5; x) = G(1; x)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots) &= G(1)\frac{1}{1-x^5} \\ \cdots \\ G(5) = G(1, \cdots; x) = G(4)(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots) &= G(1, 5, 10, 25; x)\frac{1}{1-x^{50}} \end{aligned} \tag{0.4}$$

我们可以发现比如 $G(3) = G(2)(1 - x^{25})$ 中 x^n 的系数 $G_n(3) = G_n(2) - G_{n-25}(2)$，类似的

$$\begin{aligned} G_n(2) &= G_{n-5}(2) + G_n(1) \\ &\cdots \\ G_n(5) &= G_{n-50}(5) + G_n(4) \end{aligned} \tag{0.5}$$

如果硬币不止上面几种，而包含 $1, 2, 3 \cdots$，那么

$$G(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \cdots \tag{0.6}$$

$G(x)$ 中 x^n 前面的系数为方案数