Université Moulay Ismaïl
FACULTÉ DES SCIENCES DE MEKNÈS
Sciences Mathématiques fondamentales

(SMF)

Filière Sciences Mathématiques Appliquées

Département de Mathématiques et Informatique

Thèse

Résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Présenté par :

- **Chadi chahid**
- **Hajar Oukassou**

Encadré par :

Pr. Mohamed Zitane

Composition de jury :

- **Pr. Badr Lahmi**
- **Pr. Mohamed Zitane**

Année Universitaire : 2020/2021

Dédicace

. Nous dédions, chacun de nous deux, ce travail à nos parents. Jamais nous ne saurions nous exprimer quant aux sacrifices et aux dévouements qu'ils ont consacré à notre éducation et à nos études. Les mots restent, vraiment, faible pour annoncer notre gratitude hautement profonde. les étudiants du semestre six, avec lesquels nous avons partagé des moments agréables et inoubliables, trouvent ici, de même, l'expression de notre reconnaissance.

Remerciements

. Nous tenons à remercier énormément notre professeur : **Mohamed Zitane** pour toutes les orientations et les conseils qu'il nous a prodigué depuis le début de cette humble recherche. Nous le prions encore une fois de trouver dans ces quelques lignes l'expression d'une profonde gratitude pour son assistance inquisitrice à visée pédagogique sensible à la moindre défaillance dans chaque passage que nous lui soumettions.

Nous remercions également tous les enseignants de cette formation de licence et tout le personnel administratif de la faculté des sciences de Meknès. Enfin nous tenons à remercier toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Merci infiniment à toutes et à tous

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La Transformation de Laplace est, avec la transformation de Fourier, l'une des plus imposantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuse questions de physique mathématiques, de calcul des probabilités, d'automatique,... etc, mais elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de pierve-Simans la place (1749 - 1827) qui avait commencé ses travaux des les années 1770. En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plus part des fonctions, des suites, dos sommes partielles et restes de séries usuelles sous for me intégrale, afin d'en obtenir des développement.

Les equation différentielles ont récemment attiré une attention considérable, en raison de ses nombreuses applications dans divers domaines comme la physique, la biologie, l'économie... La solution d'équations différentielles est très complexe et certaines méthodes analytiques sont présentées, comme la populaire méthode de transformation de Laplace qui est Très utilisée pour déterminer la solution exacte des equations différentielle linéaire où la transformée de Laplace s'effectue en calculant la Transformée de chacun des membres de l'équation. puis la résolution de l'équation algébrique résultante. et en fin résolvant le problème inverse.

Dans ce mémoire, nous allons voir comment utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les equations différentielles linéaires a Coefficients constants.

CHAPITRE 1

TRANSFORMATION DE LAPLACE

1.1 Fonctions causales :

Definition 1.1.1

Une fonction causale f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, presque partout définie et mesurable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall t \in]-\infty, 0[, f(t) = 0$$

Remarque 1.1.1

Dans le cas où f est seulement définie sur $\mathbb{R}_+$, on peut la considérer comme causale en la prolongeant par 0 sur $\mathbb{R}_-$.

Definition 1.1.2

L'ensemble des fonctions causales qui sont localement Lebesgue-sommables sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel que l'on note $\mathcal{L}_+$

Exemple :

La fonction échelon unité définit par :

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ sit}<0 \\ 1 \text{ sit } \geq 0 \end{cases}$$

Remarque 1.1.2

Si g est une fonction définie sur R alors la fonction f définie par $f(t) = g(t)U(t)$ est une fonction causale.

1.2 Intégrale de Laplace

Lorsque s est un nombre complexe et f une fonction causale. On définit l'intégrale de Laplace par :

$$I(f,s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Exemple :

- Si $F(t)=1\forall t\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\}=f(s)&=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1\ \mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}\\&=-\frac{1}{s}\left[e^{-(x+jy)t}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{s}\left\{\lim_{t\to\infty} e^{-xt}e^{-jyt}-1\right\}\\&=\frac{1}{s}\quad \text{si } x>0\end{aligned}$$

donc on a :

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}\text{ pour } s\in\mathbb{C}\mid \mathcal{R}](s)=x>0$$

- Si $F(t)=t\forall t\geqslant 0$

$$\mathcal{L}\{t\}=f(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}t\ \mathrm{d}t$$

En intégrant par parties,
on obtient :

$$\begin{cases} u=t\\ v'=e^{-st}\end{cases}\qquad \begin{cases} u'=1\\ v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st}t\ \mathrm{d}t&=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\ \mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{s}\left\{\lim_{t\to\infty} te^{-(x+jy)t}-0\right\}+\frac{1}{s}\left(\frac{-1}{s}\right)\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}\\&=\frac{-1}{s^2}(0-1)=\frac{1}{s^2}\qquad \text{si } x>0\end{aligned}$$

donc on a :

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}\text{ pour } s\in\mathbb{C}\mid \mathcal{R}](s)=x>0$$

1.3 Convergence de l'intégrale de Laplace

On s'intéresse à l'existence au sens de Lebesgue, et la convergence en tant qui intégrale impropre.

1.3.1 Abscisse de convergence absolue de Laplace

Proposition 1.3.1

Pour toute fonction f de $\mathcal{L}_+$, il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_a(f)$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x<\zeta_a(f)\Rightarrow I(|f|,x)=+\infty,\quad x>\zeta_a(f)\Rightarrow I(|f|,x)<+\infty$$

Definition 1.3.1

Le nombre $\zeta_a(f)$ défini par la proposition précédente est appelé :
"l'abscisse de convergence absolue de Laplace de f "

Lemme 1.3.1

Lemme 1.1 Si x_0 est un réel tel que $I(|f|, x_0)$ soit convergente, alors :

$$x > x_0 \Rightarrow I(|f|, x) < \infty$$

Démonstration du lemme :

$\diamond$ C'est évident d'après le théorème de convergence dominée puisque $x > x_0$ implique l'inégalité : $|f(t)| \exp(-xt) \leq |f(t)| \exp(-x_0 t)$, lorsque $f(t)$ est défini, donc pour presque tout t tel que $t \geq 0$.$\diamond$

Démonstration de la proposition :

$\diamond$ On pose : $\Theta(f) = \{x \in \mathbb{R} \backslash I(|f|, x) < +\infty\}$. On peut distinguer trois cas qui s'excluent mutuellement : - Cas 1 : $\Theta(f) = \emptyset$ - Cas 2 : $\Theta(f) = \mathbb{R}$ Q Cas 3 : C'est le cas où, $\Theta(f)$ n'étant ni vide ni égal à $\mathbb{R}$, le lemme 1.1 implique que la borne inférieure $\zeta_a(f)$ de $\Theta(f)$ est un nombre réel.

Alors, soit $x > \zeta_a(f)$, il existe un réel x_0 inférieur à x et appartenant à $\Theta(f)$. Le lemme 1.3.1 affirme alors que $x \in \Theta(f)$. Cela démontre la proposition. $\diamond$

Remarque 1.3.1

Cette proposition ne dit pas ce qui se passe pour $x = \zeta_a(f)$.

1.3.2 Abscisse de convergence (ou de semi-convergence)

Proposition 1.3.2

Pour toute fonction de $\mathcal{L}_+$, il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_c(f)$ tel que :

$$x < \zeta_c(f) \Rightarrow I(f, x) \textbf{ est divergente}$$

$$x > \zeta_c(f) \Rightarrow I(f, x) \textbf{ est convergente}$$

le nombre est appelé $\zeta_c(f)$ l'abscisse de convergence de Laplace de f.

Lemme 1.3.2

Si x_0 est un réel tel que $I(f, x_0)$ soit convergente, alors :

$$x > x_0 \Rightarrow I(f, x) \text{ est convergente}$$

Démonstration de ce lemme :

Soient une fonction g continument dérivable sur $[a, b]$ et une fonction h Lebesgue intégrable sur $[a, b]$. On considère la fonction absolument continue H définie sur cet intervalle par une "intégrale indéfinie "de h : $H(u) = \int_a^u h(t)dt$, par exemple, ce qui implique que la fonction

H est presque partout dérivable et de dérivée égale presque partout à h sur $[a, b]$. Alors, on a l'égalité suivante généralisant l'intégration par parties :

$$\int_a^b g'(u)H(u)du = g(b)H(b) - g(a)H(a) - \int_a^b g(u)h(u)du$$

Sur $[0, A]$, avec $g(u) = e^{(-(x-x_0)u)}, h(t) = f(t)e^{(-x_0 t)}, H(u) = \int_0^u h(t)dt$, cette formule nous donne :

$$\begin{aligned} &-\int_0^A (x-x_0)\exp\left[-(x-x_0)u\right]H(u)du = \\ &\exp\left[-(x-x_0)A\right]H(A) - \int_0^A \exp\left[-(x-x_0)u\right]f(u)\exp\left(-x_0u\right)du = \\ &\exp\left[-(x-x_0)A\right]H(A) - \int_0^A f(u)\exp(-xu)du \quad (1.3) \end{aligned}$$

On fait tendre A vers $+\infty$. L'hypothèse de convergence de $I(f, x_0)$ implique que H est bornée et, puisque $x > x_0$, le produit $\exp\left[-(x-x_0)A\right]H(A)$ tend vers 0. Par ailleurs, l' intégrale du premier membre de cette égalité (1.3) porte sur une fonction majorée en valeur absolue par la fonction sommable sur $\mathbb{R}_+$: $u \mapsto (x-x_0)\exp\left[-(x-x_0)u\right]\sup|H(u)|$ Par le théorème de convergence dominée, cette intégrale sur $[0, A]$ admet donc une limite finie lorsque A vers $+\infty$. Concluons que la dernière intégrale de l'égalité (1.3) admet une limite finie, ce qui achève de démontrer le lemme 1.3.2.$\diamond$

1.4 Transformation de Laplace

Dans la proposition qui précèdent, la variable x était réelle. En fait, les résultats obtenus peuvent s'exprimer à l'aide de la variable complexe s.

Proposition 1.4.1

Proposition 1.4 Si le nombre complexe s vérifie $x = \Re e(s) > \zeta_a(f)$, (resp. $x = \Re e(s) > \zeta_c(f)$), alors l'intégrale $I(f, s)$ est convergente (resp. est semiconvergente).

Démonstration :

$\diamond$ Dans le cas de l'absolue convergence, la propriété est évidente en vertu de l'égalité $|f(t)||\exp[-(x+iy)t]| = |f(t)|\exp(-xt)$. Dans le cas de la convergence, on utilise encore l'égalité (1.3) : Supposons $x = \Re e(s) > \zeta_c(f)$. Soit alors un réel x_0 qui vérifie $\zeta_c(f) < x_0 < x$. On utilise (1.3) avec $g(u) = \exp\left[-(s-x_0)u\right]$ et $h(u) = \exp\left(-x_0u\right)f(u)$.
On obtient ainsi :

$$\int_0^A \exp(-su)f(u)du = \int_0^A g(u)h(u)du = g(A)H(A) - \int_0^A g'(u)H(u)du$$

ou encore :

$$\int_0^A \exp(-su)f(u)du = e^{-(s-x_0)A}H(A) + (s-x_0)\int_0^A H(u)e^{-(s-x_0)u}du$$

Par hypothèse, $|H|$ est majorée et, comme la partie réelle de $-(s-x_0)$ est strictement négative, le second membre de l'égalité précédente admet une limite finie (type de raisonnement déjà utilisé). Cela termine la démonstration. $\diamond$

Definition 1.4.1

On définit et on note $\mathcal{L}_{\mathrm{d}}$ le sous espace de $\mathcal{L}_{+}$ contenant toutes les fonctions f telles que $\zeta_c(f) < +\infty$

Definition 1.4.2

Soit f un élément de $\mathcal{L}_d$. Soit la fonction, notée $\mathcal{L}(f)$, définie dans le demi-plan ouvert $\Pi_{\zeta_c(f)} = \{s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > \zeta_c(f)\}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

Cette fonction est appelée la transformée de Laplace de f .
L'application qui associe à f sa transformée $\mathcal{L}(f)$ est dite "transformation de Laplace".

1.4.1 Table de transformé usuelle

De même qu'il existe des tables de primitives usuelles, des tables de développements limités usuels, il existe des tables de transformées de Fourier et des tables de transformées de Laplace de fonctions usuelles.

	$f(t)$	$F(s)$
P1	1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
P2	t	$\frac{1}{s^2}$
P3	t^n (n entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
P4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
P5	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
P6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
P7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
P8	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

P9	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
P10	$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
P11	$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
P12	$t^n,\ n\in\mathbb{R},\ n>-1$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
P13	$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
P14	$\delta(t)$	1
P15	$\delta(t-a)$	e^{-as}
P16	$\dfrac{df}{dt}=f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
P17	$\dfrac{d^2f}{dt^2}=f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
P18	$\dfrac{d^nf}{dt^n}=f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
P19	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
P20	$t^nf(t)$	$(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
P21	$g(t)\,u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$

1.5 les propriétés de la transformations de Laplace

1.5.1 Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{L}_d$ et α, β deux scalaires alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_d$

$$\mathcal{L}(\{\alpha f + \beta g\}) = \alpha \mathcal{L}(\{f\}) + \beta \mathcal{L}(\{g\})$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} \mathrm{d}t \\
&= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) \mathrm{d}t + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) \mathrm{d}t \\
&= c_1 \mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} + c_2 \mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\} \\
&= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)
\end{aligned}$$

Exemple :
Trouvons :

$$\mathcal{L}\left\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\right\}$$

Par la propriété de linéarité, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\right\} &= 4\mathcal{L}\left\{4e^{5t}\right\} + 6\mathcal{L}\left\{t^3\right\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\} + 2\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\
&= 4\frac{1}{s-5} + 6\frac{3!}{s^4} - 3\frac{4}{s^2+16} + 2\frac{s}{s^2+16} \\
&= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4} \quad \forall s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > 5
\end{aligned}$$

1.5.2 Translation

Soit f_a la translatée, d'indice a de la fonction f, supposée dans $\mathcal{L}_\mathrm{d}$. Cette fonction est définie par $f_a(t) = f(t-a)$ et, si l'on suppose que $a > 0$, la translatée reste causale.
Une translation sur la variable d'intégration amène, si $x > \zeta_c(f)$, la relation :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_a(t) \exp(-xt) dt &= \int_{-a}^{+\infty} f(t) \exp(-x(t+a)) dt \\
&= \exp(-ax) \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\zeta_c(f_a) = \zeta_c(f)$ et que cette relation, étant valable pour des x complexes.

Exemples :

- Comme $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = f(s) = \frac{s}{s^2+4}$, on a :

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 2t\right\} = f(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

- Calculons $\mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\sin \omega t\right\} =$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\sin \omega t\right\} &= \frac{\omega}{(s-j\omega)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-2js\omega-\omega^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{s^2-2js\omega} = \frac{\omega}{s(s-2j\omega)} = \frac{\omega(s+2j\omega)}{s\left(s^2+4\omega^2\right)}
\end{aligned}$$

De là, nous déduisons :

$$\mathcal{L}\left\{\cos \omega t.\sin \omega t + j\sin^2 \omega t\right\} = \frac{\omega}{s^2+4\omega^2} + j\frac{2\omega^2}{s\left(s^2+4\omega^2\right)}$$

donc :

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t \cdot \sin \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin 2\omega t}{2}\right\} = \frac{\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

ce qui est normal puisque :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 2\omega t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 2\omega t\} = \frac{1}{2}\frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

mais on a aussi :

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2 \omega t\right\} = \frac{2\omega^2}{s\left(s^2 + 4\omega^2\right)}$$

On peut aussi déduire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos^2 \omega t\right\} &= \mathcal{L}\left\{1 - \sin^2 \omega t\right\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2\omega^2}{s\left(s^2 + 4\omega^2\right)} \\ &= \frac{s^2 + 2\omega^2}{s\left(s^2 + 4\omega^2\right)}\end{aligned}$$

Proposition 1.5.1

La translatée d'indice $a > 0$ d'une fonction de $\mathcal{L}_d$ est encore dans $\mathcal{L}_d$;
les abscisses de convergence restent les mêmes et on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > \zeta_c(f) \Rightarrow \mathcal{L}\left(f_a\right)(s) = \exp(-as)\mathcal{L}(f)(s)$$

1.5.3 Dilatation

rappelons que la dilatée d'indice k réel non nul de la fonction f, notée $f_{[k]}$, est définie par $f_{[k]}(t) = f(kt)$. Si $k > 0$, cette fonction reste causale. Si, en outre, on suppose que $x > k\zeta_c(f)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_{[k]}(t)\exp(-xt)dt = 1/k\int_0^{+\infty} f(u)\exp(-ux/k)du$$

De cette relation, il en résulte facilement : $\zeta_c\left(f_{[k]}\right) = k\zeta_c(f)$ et, en remplaçant, dans la relation précédente, x par un complexe s, on obtient :

Proposition 1.5.2

La dilatée d'indice $k > 0$ d'une fonction de $\mathcal{L}_d$ est encore dans $\mathcal{L}_d$; les abscisses de convergence vérifient $\zeta_c\left(f_{[k]}\right) = k\zeta_c(f)$ et on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > k\zeta_c(f) \Rightarrow \mathcal{L}\left(f_{[k]}\right)(s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{k}\right)$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$, on a :

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{4}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3}\frac{9}{s^2 + 9} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

1.5.4 Transformation d'une dérive

Notons pour commencer que, si une fonction de $\mathcal{L}_\mathrm{d}$ est dérivable, sa dérivée n'est pas nécessairement dans $\mathcal{L}_\mathrm{d}$.

On suppose à présent, de façon générale, que f est dans $\mathcal{L}_\mathrm{d}$ et qu'elle est absolument continue sur tout intervalle compact de $[0,+\infty[$. Il en résulte qu'elle est continue sur $[0,+\infty[$, presque partout dérivable sur cet intervalle et que sa dérivée est une fonction causale. On peut, sur $[0,A]$, utiliser l'intégration par parties :

$$\int_0^A f'(t)\exp(-st)dt = \int_0^A \exp(-st)df(t) =$$
$$f(A)\exp(-sA) - f(0+) + s\int_0^A f(t)\exp(-st)dt$$

On suppose que $\zeta_c(f') \neq +\infty$ et on note $a = \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f'))$. Alors, si en outre $\Re e(s) > a$, les deux intégrales de la relation précédente admettent des limites finies lorsque $A \to +\infty$. Il en résulte que, par différence, $f(A)\exp(-sA)$ admet également une limite. Puisque l'intégrale de $f(t)\exp(-st)$ est convergente, cette limite est nécessairement nulle.

Proposition 1.5.3

Si la fonction f, elément de $\mathcal{L}_\mathrm{d}$ est absolument continue sur tout intervalle compact de $[0,+\infty[$ et si la dérivée est aussi dans $\mathcal{L}_\mathrm{d}$, alors la transformée de la dérivée vérifie : $\Re e(s) > \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f')) \Rightarrow \mathcal{L}(f')(s) = -f(0+) + s\mathcal{L}(f)(s)$ (1.7) Dans le cas où la fonction est deux fois dérivable et, sous réserve de pouvoir transporter les hypothèses précédentes au niveau de cette nouvelle situation, on peut énoncer :

Exemple :
Si $F(t) = \cos 3t$, alors $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F'(t)\} &= \mathcal{L}\{-3\sin 3t\}\\ &= -3\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{-9}{s^2+9}\end{aligned}$$

ce qui vaut bien :

$$\begin{aligned}sf(s) - F(0) &= s\frac{s}{s^2+9} - 1\\ &= \frac{s^2 - s^2 - 9}{s^2+9} = \frac{-9}{s^2+9}\end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1

Soit f une fonction de $\mathcal{L}_d$ dérivable sur $[0,+\infty]$ à dérivée absolument continue sur cet intervalle et telle que les fonctions f' et f'' soient dans l'espace $\mathcal{L}_d$. Alors, les limites $f(0+)$ et $f'(0+)$ existent et la relation précédente implique la relation :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f'), \zeta_c(f'')) \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0+)$$

Il en résulte :

$$\Re e(s) > \sup\left(\zeta_c(f, f', f'')\right) \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

1.5.5 Transformation d'une primitive

Corollaire 1.5.2

Si $I(f, x_0)$ est convergente et si $x_0 \geq 0$, alors il existe une constante C telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \left|\int_0^t f(u)du\right| \leq C\exp(x_0 t)$$

Démonstration - Le resultat est trivial pour $x_0 = 0$. Dans le cas ou $x_0 > 0$, I' egalité (1.3) précédente, dans laquelle on prend $x = 0$ et $A = t$, nous fournit :

$$\int_0^t f(t)du = -x_0\int_0^t H(u)\exp(x_0 u)\,du + \exp(x_0 t)\,H(t)$$

Par I'hypothèse de convergence de $I(f, x_0)$, la fonction $|H|$ est majorée pat une constante K. On peut donc majorer le second membre de la formule prcédente par :

$$K\int_0^t x_0\exp(x_0 u)\,du + K\exp(x_0 t)$$

Cette majorante est égale a $K[2\exp(x_0 t) - 1]$, ce qui termine la preuve. 0 II faut noter l'importance de l'hypothese $x_0 \geq 0$. En effet, si on considere la fonction f telle que $f(t) = \exp(-2t)$, dont I'abscisse de convergence est -2, on peut choisir dans ce qui précède $x_0 = -1$ et le corollaire amenerait a ferire l'inegalité : $\int_0^1 \exp(-2u)du \leq C\exp(-t)$, ce qui s'écrit encore $1 - \exp(-2t) \leq 2C\exp(-t)$, conduisant ainsi a une contradiction quand on fait tendre ℓ vers $+\infty$

Si f est un élément de $\mathcal{L}_{\mathrm{d}}$, on peut considérer la fonction I_f définie par $I_f(t) = \int_0^t f(u)du$. C'est une fonction absolument continue et, d'après le corollaire 1.5.2, on sait que pour tout x_0 tel que $x_0 > 0$ et $x_0 > \zeta_c(f)$, on a $\left|\int_0^t f(u)du\right| \leq C\exp(x_0 t)$. Cette dernière majoration pouvant s'écrire : $|I_f(t)\exp(-x_0 t)| \leq C$, il en résulte que l'intégrale de Laplace de I_f converge absolument en tout point x vérifiant $x > x_0$.
On peut conclure ainsi $\zeta_a(I_f) \leq \sup(0, \zeta_c(f))$, en particulier, I_f est dans $\mathcal{L}_{\mathrm{d}}$. En tenant compte de $I_f(0+) = 0$, Alors : $\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}(I_f)(s)$. On peut donc énoncer :

Proposition 1.5.4

Soit f une fonction de $\mathcal{L}_d$. La fonction $t \mapsto \int_0^t f(u)du$ est alors dans $\mathcal{L}_d$ et on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > \sup(0, \zeta_c(f)) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$$

Remarque 1.5.1

Supposons que $\zeta_c(f) < 0$ et que la transformée $\mathcal{L}(f)$ ne soit pas nulle au point $s = 0$. Alors, la fonction $(1/s)\mathcal{L}(f)(s)$ ne peut être holomorphe au point $s = 0$. On en déduit, le demi-plan d 'holomorphie de $\mathcal{L}(I_f)$ ne pouvant contenir ce point, que : $\zeta_c(I_f) \geq 0$. Dans ce cas $\zeta_c(I_f) = \zeta_a(I_f) = 0$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$, on a : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u \text{ d}u\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$ Vérifions le par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sin 2udu &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2u\right]_0^t = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1-\cos 2t}{2} \\
\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\
&= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} \\
&= \frac{s^2+4-s^2}{2s\left(s^2+4\right)} \\
&= \frac{4}{2s\left(s^2+4\right)} \\
&= \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}
\end{aligned}$$

1.5.6 Multiplication par t^n de l'objet ou dérivés de l'image

Theorem 1.1

(Dérivées de limage) :
Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ alors :

$$\mathcal{L}\left\{t^n F(t)\right\} = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}f(s) \quad \text{où} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} = \frac{1}{x-2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{te^{2t}\right\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2} \\
\mathcal{L}\left\{t^2 e^{2t}\right\} &= \frac{\mathrm{d}^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}
\end{aligned}$$

Preuve
On a :

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\mathrm{d}t$$

En dérivant sous le signe de 1'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty (-t)e^{-st}F(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty (t)e^{-st}F(t)\mathrm{d}t \\
&= -\mathcal{L}\{tF(t)\}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}\{tF(t)\} = -f'(s)$ ce qui prouve le théorème pour $n = 1$.
Par induction, supposons le théorème vrai pour $n = k$, c'est-à-dire supposons vrai :

$$\mathcal{L}\left\{t^k F(t)\right\} = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} f(s)$$

alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}\left\{t^k F(t)\right\}\mathrm{d}t &= (-1)^k f^{(k+1)}(s)\\
-\int_0^\infty te^{-st}t^k F(t)\mathrm{d}t &= (-1)^k f^{(k+1)}(s)\\
-\int_0^\infty e^{-st}t^{k+1} F(t)\mathrm{d}t &= (-1)^k f^{(k+1)}(s)\\
\int_0^\infty e^{-st}t^{k+1} F(t)\mathrm{d}t &= (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s)
\end{aligned}$$

Le théorème est donc vrai à l'ordre $k+1$ ce qui termine la preuve par induction.

1.5.7 Division par t de l'objet ou intégration de l'image

Theorem 1.2

(Intégration de l'image) :
Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ alors :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\mathrm{d}u$$

pourvu que $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ existe.

Exemple :
Comme $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ et $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} &= \int_s^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\
&= [\arctan u]_s^\infty\\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan s\\
&= \left[-\arctan\frac{1}{u}\right]_s^\infty\\
&= \arctan\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Preuve
Posons $G(t) = \frac{F(t)}{t}$, alors $F(t) = tG(t)$. Prenons la transformée de Laplace des deux membres :

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{tG(t\})$$

$= (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{G(t)\}$ par le théorème (1.12) c'est-à-dire encore :

$$f(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g$$

Intégrons :

$$\begin{aligned} g(s) = & -\int_{\infty}^{s} f(u)\mathrm{d}u \\ & = \int_{s}^{\infty} f(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)\mathrm{d}u$$

1.5.8 Applications : calcul de transformées de Laplace sans intégration.

Les formules précédentes sont utiles pour trouver des transformées de Laplace sans intégration.

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ Posons $F^{s}(t) = 1$ dans le théorème (1.6) :

$$0 = \mathcal{L}\{0\} = s\mathcal{L}\{1\} - 1$$

donc $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.

- $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ Posons $\hat{F}(t) = t$ dans le théorème (1.6) :

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = s\mathcal{L}\{t\} - 0$$

donc $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$ Posons $F(t) = e^{at}$ dans le théorème (1.6) :

$$\mathcal{L}\left\{ae^{at}\right\} = a\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = s\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} - 1$$

donc $1 = (s-a)\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}$ et $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$.

- $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$ Utilisons le théorème (1.9) :

$$\mathcal{L}\left\{F''(t)\right\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

et posons $F(t) = \sin at$, alors $F'(t) = a\cos at$ et $F''(t) = -a^2 \sin at$, on a donc :

$$\mathcal{L}\left\{-a^2 \sin at\right\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - 0 - a.1$$

et donc :

$$\begin{aligned} -a^2\mathcal{L}\{\sin at\} &= s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - a \\ \left(a^2+s^2\right)\mathcal{L}\{\sin at\} &= a \\ \mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{a^2+s^2} \end{aligned}$$

1.5.9 Exemples divers utilisant les propriétés précédentes

- **Transformée de Laplace de la fonction sinus hyperbolique**.

Si $F(t) = \sinh$ at $\quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall a = x' + jy' \in \mathbb{C}$, par application de la propriété de linéarité (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}\rceil(a) = x' \quad \text{et si} \quad \mathcal{R}\rceil(s) > \mathcal{R}e(-a) = -x' \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2} \text{ si } \mathcal{R}\rceil(s) > |x'| \\
&= \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2-a^2} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}\rceil(s) > |x'|$$

• **Transformée de Laplace de la fonction cosinus hyperbolique**.
Si $F(t) = \cosh$ at $\quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall a = x' + jy' \in \mathbb{C}$,
par application de la propriété de linéarité (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}\rceil(a) = x' \quad \text{et si} \quad \mathcal{R}\rceil(s) > \mathcal{R}\rceil(-a) = -x' \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+a-s-a}{s^2-a^2} \text{ si } \mathcal{R}\rceil(s) > |x'| \\
&= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}\rceil(s) > |x'|$$

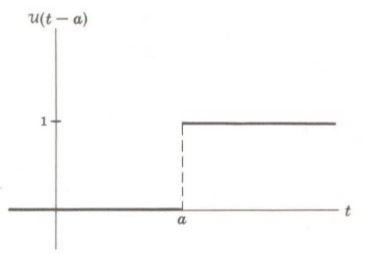
• **Transformée de Laplace de la fonction exponentielle de base** b.
Si $F(t) = b^{at} \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall a = x' + jy' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{b^{at}\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{\ln b^{at}}\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{e^{at\ln b}\right\} \\
&= \frac{1}{s-a\ln b} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(a\ln b)
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{L}\left\{b^{at}\right\} = \frac{1}{s-a\ln b} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(a\ln b)$$

• **Transformée de Laplace de la fonction échelon unité de Heaviside**.
Si $F(t) = U_a(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a \\ 1 & \forall t \geqslant a \end{cases}$



Remarquons tout d'abord que $U_a(t) = U_0(t-a)$ donc par le théorème du retard (1.4), on a :

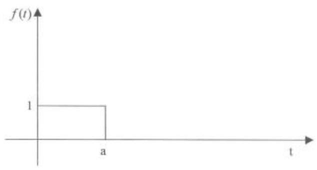
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{U_a(t)\} &= e^{-as}\mathcal{L}\{U_0(t)\}\\ &= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-st}U_0(t)\mathrm{d}t\\ &= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-st}1\ \mathrm{d}t\\ &= e^{-as}\frac{(-1)}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}\\ &= \frac{e^{-as}}{s} \text{ si } \mathcal{R}\rceil(s) > 0\end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{L}\{U_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > 0$$

• **Transformée de Laplace de la fonction onde rectangulaire**.

Si $F(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \text{ et } \forall t \geqslant a \\ 1 & \forall 0 \leqslant t < a \end{cases}$

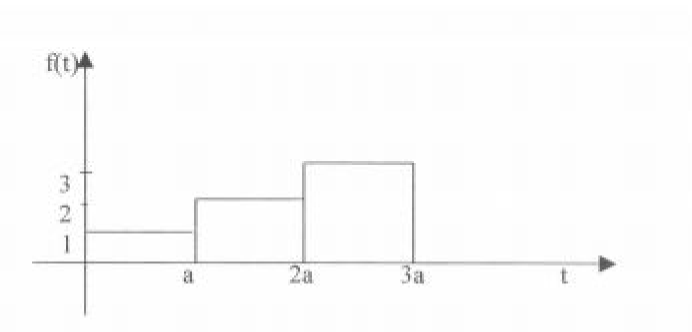


Remarquons tout d'abord que $F(t) = U_0(t) - U_a(t)$ donc par la propriété de linéarité (1.2), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\{U_0(t) - U_a(t)\}\\ &= \mathcal{L}\{U_0(t)\} - \mathcal{L}\{U_a(t)\}\\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}\\ &= \frac{1-e^{-as}}{s} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(s) > 0\end{aligned}$$

• **Transformée de Laplace de la fonction en escalier**.

Si $F(t) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall 0 \leqslant t < a \\ 2 & \forall a \leqslant t < 2a \\ & \dots \end{array}\right\}$



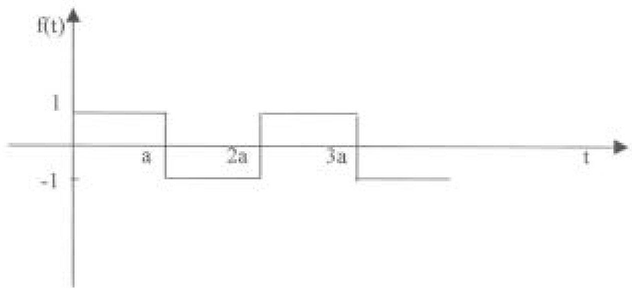
Remarquons tout d'abord que $F(t) = U_0(t) + U_a(t) + U_{2a}(t) + \cdots$ donc par la propriété de linéarité (1.2) on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\left\{U_0(t) + U_a(t) + U_{2a}(t) + \cdots\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{U_0(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{U_a(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{U_{2a}(t)\right\} + \cdots \\
&= \frac{1}{s} + \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} + \cdots \\
&= \frac{1}{s}\left(1 + e^{-as} + e^{-2as} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{s}\frac{1}{1 - e^{-as}}
\end{aligned}$$

car c'est une série géométrique de raison $e^{-as} < 1$ puisque $a > 0$ et $\mathcal{R}](s) > 0$; elle converge donc vers $\frac{1}{1-e^{-ax}}$

- **Transformée de Laplace de la fonction en créneaux.**

Si $F(t) = \begin{cases} \qquad 0 \quad \forall t < 0 \\ 1 \quad \forall 0 \leqslant t < a \quad \text{ou} \quad 2a \leqslant t < 3a \text{ ou} \quad \ldots \\ -1 \quad \forall a \leqslant t < 2a \quad \text{ou} \quad 3a \leqslant t < 4a \quad \text{ou} \quad \ldots \end{cases}$



Remarquons tout d'abord que $F(t) = U_0(t) - 2U_a(t) + 2U_{2a}(t) - 2U_{3a}(t) + \cdots$ donc par la propriété de linéarité (1.2), on a :

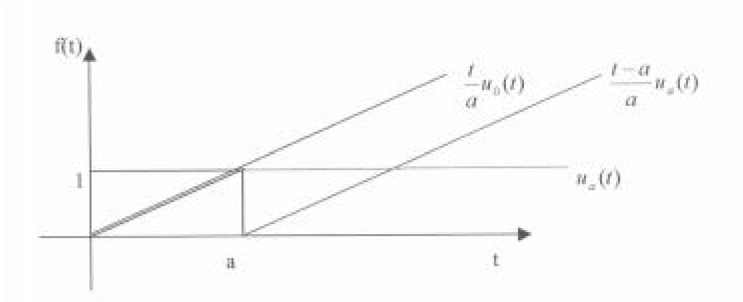
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\left\{U_0(t) - 2U_a(t) + 2U_{2a}(t) - 2U_{3a}(t) + \cdots\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{U_0(t)\right\} - 2\mathcal{L}\left\{U_a(t)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{U_{2a}(t)\right\} - 2\mathcal{L}\left\{U_{3a}(t)\right\} + \cdots \\
&= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-as}}{s} + \frac{2e^{-2as}}{s} - \frac{2e^{-3as}}{s} + \cdots \\
&= \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-as}\left(1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \cdots\right)\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-as}\frac{1}{1 + e^{-as}}\right)
\end{aligned}$$

car c'est une série géométrique de raison $-e^{-as}$ comprise entre -1 et $+1$ qui converge donc vers $\frac{1}{1+e^{-ax}}$. On peut encore simplifier l'expression de la transformée comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{s}\frac{1 + e^{-as} - 2e^{-as}}{1 + e^{-as}} \\
&= \frac{1}{s}\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \\
&= \frac{1}{s}\frac{e^{\frac{ax}{2}} - e^{\frac{-ax}{2}}}{e^{\frac{an}{2}} + e^{\frac{-ax}{2}}} \\
&= \frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}
\end{aligned}$$

•Transformée de Laplace de la fonction en dent de scie.

Si $F(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \text{ ou } \forall t \geqslant a \\ \frac{t}{a} & \forall 0 \leqslant t < a \end{cases}$



Remarquons tout d'abord que $F(t) = \frac{t}{a}U_0(t) - \frac{t-a}{a}U_a(t) - U_a(t)$ donc par la propriété de linéarité (1.2) , on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t}{a}U_0(t) - \frac{t-a}{a}U_a(t) - U_a(t)\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{t}{a}U_0(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{t-a}{a}U_a(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{U_a(t)\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{t}{a}U_0(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{t-a}{a}U_0(t-a)\right\} - \mathcal{L}\left\{U_0(t-a)\right\} \\
&= \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s} \\
&= \frac{1}{as^2}\left(1 - e^{-as} - ase^{-as}\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{t}{a}U_0(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-as}\frac{t}{a}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-as}t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{as^2} \text{ pour } \mathcal{R}\rceil(s) > 0
\end{aligned}$$

et :

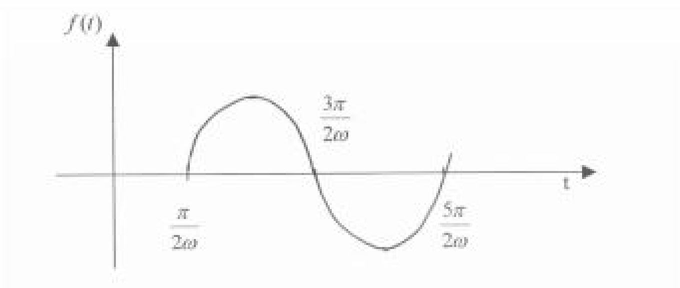
$$\mathcal{L}\left\{\frac{t-a}{a}U_a(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t-a}{a}U_0(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{as^2}$$

par le théorème du retard (1.4)

• Transformée de Laplace de la fonction sinusoïdale avec retard.

Soit :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < \frac{\pi}{2\omega} \\ \sin\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) & \forall t \geqslant \frac{\pi}{2\omega} \end{cases}$$



La période de cette fonction est $\frac{\pi}{2\omega}$ et elle subit un retard de $\frac{\pi}{2\omega}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= e^{-\frac{\pi}{2\omega}s}\mathcal{L}\{\sin \omega t\} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2\omega}s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

1.5.10 Exercices

- Exercices sur les propriétés des transformées de Laplace

Exercice 1 :

Trouver $\mathcal{L}\left\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\sin 5t + 3\cos 2t\right\}$

Exercice 2 :

Evaluer chacune des transformées suivantes :

- $\mathcal{L}\left\{t^3 e^{-3t}\right\}$
- $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$
- $\mathcal{L}\left\{2e^{3t}\sin 4t\right\}$
- $\mathcal{L}\left\{(t+2)^2 e^t\right\}$
- $\mathcal{L}\left\{e^{2t}(3\sin 4t - 4\cos 4t)\right\}$
- $\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\cosh 2t\right\}$

Exercice 3 :

Trouver

- $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin^2 t\right\}$

- $\mathcal{L}\left\{\left(1+te^{-t}\right)^3\right\}$

Exercice 4

Trouver $\mathcal{L}\{F(t)\}$ si :

$$F(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{pour } t > 1 \\ 0 & \text{pour} \\ 0 < t < 1 & \end{cases}$$

Exercice 5

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$, trouver $\mathcal{L}\{F(2t)\}$

Exercice 6

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{\frac{-1}{\pi}}}{s}$, trouver $\mathcal{L}\left\{e^{-t}F(3t)\right\}$ Exercice 7 Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, montrez que pour $r > 0$, on a :

$$\mathcal{L}\left\{r^t F(at)\right\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s - \ln r}{a}\right)$$

CHAPITRE 2

LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE INVERSE

2.1 Définition

Definition 2.1.1

Si la transformée de Laplace d'une fonction $F(t)$ est $f(s)$, c'est-à-dire si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, alors $F(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse de $f(s)$ et on écrit :

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\} = \frac{1}{s+3}$, on peut écrire $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$.

2.2 Unicité de la transformée de Laplace inverse

2.2.1 Fonction nulles

Definition 2.2.1

Si $\mathcal{N}(t)$ est une fonction de t telle que $\forall t > 0$ on a :

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)\mathrm{d}u = 0$$

on appelle $\mathcal{N}(t)$ une fonction nulle.

Exemple :
La fonction :

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est une fonction nulle.
En général, toute fonction qui est nulle partout sauf en un ensemble de points dénombrable (c'est-à-dire qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$) est une fonction nulle. On a bien entendu

$$\mathcal{L}\{\mathcal{N}(t)\} = 0 \quad \forall \text{ fonction nulle}$$

En effet,

$$\mathcal{L}\{\mathcal{N}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{N}(t)\mathrm{d}t$$

par parties :

$$\left\{\begin{array}{l} u = e^{-st} \\ v' = \mathcal{N}(t) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} u' = -se^{-st} \\ v(t) = \int_0^t \mathcal{N}(t) = 0 \end{array}\right.$$

donne :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{N}(t)\} = 0$$

2.2.2 Non unicité de la transformée de Laplace inverse

Comme la transformée de Laplace d'une fonction nulle $\mathcal{N}(t)$ est zéro, il est clair que si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, alors $\mathcal{L}\{F(t) + \mathcal{N}(t)\} = f(s)$ Il s'ensuit que l'on peut avoir deux fonctions différentes qui ont la même transformée de Laplace.

Exemple :

$$F_1(t) = e^{-3t} \text{ et } F_2(t) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t = 1 \\ e^{-3t} \text{ ailleurs} \end{array}\right.$$

ont la même transformée de Laplace $\frac{1}{s+3}$.
$\mapsto$ la transformée de Laplace inverse n'est donc pas unique.

2.3 Propriétés importantes des transformées de Laplace inverses

2.3.1 linéarité

Theorem 2.1

Si c_1 et c_2 sont des constantes quelconques et $f_1(s)$ et $f_2(s)$ sont les transformées de Laplace des fonction $F_1(t)$ et $F_2(t)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\right\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\left\{f_1(s)\right\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\left\{f_2(s)\right\} \\ &= c_1 F_1(t)) + c_2 F_2(t) \end{aligned}$$

Preuve :

On a par le théorème (1.2) :

$$\mathcal{L}\left\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\right\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\right\} &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) \\ &= c_1\mathcal{L}^{-1}\left\{f_1(s)\right\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\left\{f_2(s)\right\} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{-}\sin 2t \end{aligned}$$

2.3.2 Translation de la variable s

Theorem 2.2

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}F(t)\right\} = f(s-a)$$

donc :

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

2.3.3 Translation de la variable t

Theorem 2.3

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}f(s)\right\} = \begin{cases} F(t-a) & \text{si } t > a \\ 0 & \text{sit } < a \end{cases}$$

Preuve :

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$$

donc :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}f(s)\right\} = G(t)$$

où

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{:\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{3}}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right) & \text{si } t > \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{si } t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

2.3.4 Propriété du changement d'échelle

Theorem 2.4

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right) \quad \forall k > 0$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$, on a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\cos 2t$.

2.3.5 Transformée de Laplace inverse des dérivées

Theorem 2.5

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t)$$

Preuve
Comme :

$$\mathcal{L}\left\{t^n F(t)\right\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} f(s) = (-1)^n f^{(-n)}(s)$$

par le théorème (1.6), on a directement :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t)$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ et $\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2s}{s^2+1}^{2}$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} = -t \sin t$$

2.3.6 Transformée de Laplace inverse des intégrales

Theorem 2.6

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(t)}{t}$$

2.3.7 Multiplication par s

Theorem 2.7

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ et $F(0) = 0$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = F'(t)$$

donc la multiplication par s a l'effet de dériver $F(t)$. Si $F(0) \neq 0$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s) - F(0)\} = F'(t)$$

ou encore :

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) + F(0)\delta(t)$$

où $\delta(t)$ est la fonction impulsion de Dirac.

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ et $\sin 0 = 0$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t$$

2.3.8 Division par s

Theorem 2.8

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ et $F(0) = 0$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\mathrm{d}u$$

donc la division par s a l'effet d'intégrer $F(t)$ de 0 à t.

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{ss^2+4}\right\} = \int_0^t \sin 2u \ \mathrm{d}u = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

2.3.9 Propriété de convolution

Theorem 2.9

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)\mathrm{d}u \equiv F * G$$

Exemple :
Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ et $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$ on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)}\mathrm{d}u = e^{2t} - e^t$$

2.4 Méthodes pour trouver les transformées de Laplace inverse

• Après avoir analysé un problème dans le domaine de Laplace, il faut effectuer la transformée inverse pour obtenir la solution dans le domaine du temps.

• L'expression obtenue est souvent une fonction rationnelle de s.
C'est le cas pour la plupart des systèmes physiques.
De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme suivante :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

où - a_i et b_i sont des constantes réelles,
- m et n sont des entiers positifs.
- $F(s)$ est souvent appelée la fonction de transfert.
- la technique utilisée pour résoudre ce problème est appelée l'expansion en fractions partielles.
On peut écrire l'expression de $F(s)$ sous une autre forme :

$$F(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)}$$

où
- z_i est appelé un zéro de $F(s)$: ce sont les racines du numérateur.
- p_i est appelé un pôle de $F(s)$: ce sont les racines du dénominateur.

■ **La méthode :**
- Il faut factoriser le dénominateur en une somme de termes, puis trouver la transformée inverse de chaque terme.
- La méthode est un peu différente selon le type de racines au dénominateur : réelles et distinctes, réelles et répétées, ou complexes.

■ **Exemple 1 :**
$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$
On peut séparer en 2 termes : $F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$
Pour isoler K_1, on multiplie chaque côté par $s+1$:

$$\frac{2}{s+2} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{s+2}$$

Si on prend $s=-1$,

$$K_1 = \left.\frac{2}{s+2}\right|_{s=-1} = 2$$

Pour K_2, on fait le même processus :

$$K_2 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=-2} = -2$$

Et on obtient :

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

La transformée inverse est obtenue selon les tables :

$$f(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-2t}\right)u(t)$$

■ **Exemple 2 :**
$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$ On peut séparer en 3 termes :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

II y a 2 méthodes pour résoudre ce problème.

Méthode 1 :

K_1 est obtenu de la même façon qu'au problème précédent.
$K_1 = 2$. On obtient K_2 en multipliant par $(s+2)^2$ de chaque côté :

$$K_2 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=-2} = -2$$

K_3 est obtenu en dérivant l'expression de K_2.

$$K_3 = \frac{d\left[2(s+1)^{-1}\right]}{ds} = \left.\frac{-2}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = -2$$

ce qui donne :

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{-2}{s+2}$$

et donc

$$f(t) = \left(2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}\right)u(t)$$

Méthode 2 :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

On multiplie chaque côté par le dénominateur.

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s+2)^2 + K_2(s+1) + K_3(s+1)(s+2) \\ &= s^2(K_1+K_3) + s(4K_1+K_2+3K_3) + (4K_1+K_2+2K_3) \end{aligned}$$

et on a 3 équations et 3 inconnues :

$$\left.\begin{array}{c} K_1 + K_3 = 0 \\ 4K_1 + K_2 + 3K_3 = 0 \\ 4K_1 + K_2 + 2K_3 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_1 = 2 \\ K_2 = -2 \\ K_3 = -2 \end{array}$$

■ **Exemple 3 :**

Pour les racines complexes, on peut utiliser les 2 méthodes présentées pour le cas précédent.

$$F(s) = \frac{3}{s\left(s^2+2s+5\right)}$$

On sépare les termes :

$$F(s) = \frac{3}{s\left(s^2+2s+5\right)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

On multiplie chaque côté par le dénominateur.

$$\begin{aligned} 3 &= K_1\left(s^2+2s+5\right) + (K_2 s + K_3)s \\ &= s^2(K_1+K_2) + s(2K_1+K_3) + (5K_1) \end{aligned}$$

et on a 3 équations et 3 inconnues :

$$\left.\begin{array}{c} K_1 + K_2 = 0 \\ 2K_1 + K_3 = 0 \\ 5K_1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_1 = 0.6 \\ K_2 = -0.6 \\ K_3 = -1.2 \end{array}$$

La fonction est :

$$F(s) = \frac{0.6}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

ce qui donne :

$$f(t) = 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos(2t) + 0.5\sin(2t))$$

2.4.1 Exercices

- Exercices sur les propriétés des transformées de Laplace inverse

Exercice 1 Trouver :

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$ - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

Exercice 2 Trouver :

•$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5x}}{(s-2)^2}\right\}$ - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5e^{-4\pi}-\frac{4}{5}}{s^2+25}\right\}$ •$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi x}}{s^2+s+1}\right\}$ •$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3x}}{(s^2+4)^{\frac{5}{2}}}\right\}$

CHAPITRE 3
APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

On va voir deux applications importantes de la transformation de Laplace : la première est une méthode de résolution de certaines équations différentielles, la seconde est l'utilisation de la fonction de transfert d'un système physique linéaire.

3.1 Résolution d'équation

3.1.1 Équations différentielles avec conditions initiales

On considère une équation différentielle de la forme

$$(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

Dire qu'une fonction f vérifie cette équation signifie donc que l'on a

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = g(t)$$

puis

$$\left(a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t)\right) \mathcal{U}(t) = g(t)\mathcal{U}(t)$$

d'où, en appliquant la transformée de Laplace (et dans la mesure où celle-ci est linéaire)

$$a_n \mathscr{L}\left(f^{(n)}(t)\mathcal{U}(t)\right) + a_{n-1}\mathscr{L}\left(f^{(n-1)}(t)\mathcal{U}(t)\right) + \cdots + a_1\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) + a_0\mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t)) = \mathscr{L}(g(t)\mathcal{U}(t))$$

Or on a vu que si on note $F(p) = \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t))$ alors, pour tout entier k, on a

$$\mathscr{L}\left(f^{(k)}(t)\right) = p^k F(p) - p^{k-1} f\left(0^+\right) - p^{k-2} f'\left(0^+\right) - \cdots - f^{(k-1)}\left(0^+\right)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient que

$$\mathscr{L}\left(f^{(k)}(t)\right) = p^k F(p) + \ll \text{un polynôme en } p \text{ de degré } k-1 \text{˘}$$

D'où finalement :

$$(\text{un polynôme en } p \text{ de degré } n) \times F(p) + (\text{ un polynôme en } p \text{ de degré } n-1) = \mathscr{L}(g(t)\mathcal{U}(t))$$

et on trouve donc l'expression de $F(p)$ puis on obtient $f(t)\mathcal{U}(t)$ en prenant l'original de la fonction F obtenue ci-dessus.

On peut alors conclure grace au théorème d'unicité de la solution que la fonction f obtenue est bien la solution cherchée.

Exemple 1 :
- On considère l'équation différentielle (avec condition initiale) suivante

$$\begin{cases} y' = y + te^t \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Soit f la solution de l'équation ci-dessus, on note $F(p) = \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t))$ alors, d'après la formule donnant la transformée de Laplace d'une dérivée, on a

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) = pF(p) - f\left(0^+\right) = pF(p) + 1$$

D'autre part, la relation $f'(t) = f(t)+te^t$ et la linéarité de la transformation de Laplace donnent

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) = \mathscr{L}\left(\left(f(t) + te^t\right)\mathcal{U}(t)\right) = \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t)) + \mathscr{L}\left(te^t\mathcal{U}(t)\right) = F(p) + \mathscr{L}\left(te^t\mathcal{U}(t)\right)$$

Or $\mathscr{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}$ donc $\mathscr{L}\left(te^t\mathcal{U}(t)\right) = \frac{1}{(p-1)^2}$. Il s'ensuit

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) = F(p) + \frac{1}{(p-1)^2}$$

On obtient donc

$$pF(p) + 1 = F(p) + \frac{1}{(p-1)^2}$$

i.e.

$$(p-1)F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} - 1$$

puis

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^3} - \frac{1}{p-1}$$

Il nous reste à déterminer l'original. Tout d'abord, on sait que $\frac{1}{p-1} = \mathscr{L}\left(e^t\mathcal{U}(t)\right)$. De plus, on a $\frac{2}{p^3} = \mathscr{L}\left(t^2\mathcal{U}(t)\right)$ donc $\frac{1}{p^3} = \mathscr{L}\left(\frac{t^2}{2}\mathcal{U}(t)\right)$ puis $\frac{1}{(p-1)^3} = \mathscr{L}\left(e^{-t}\frac{t^2}{2}\mathcal{U}(t)\right)$. On a donc finalement

$$f(t)\mathcal{U}(t) = \left(e^t\frac{t^2}{2} - e^t\right)\mathcal{U}(t)$$

i.e. la solution du problème est la fonction f donnée par $f(t) = e^t\frac{t^2}{2} - e^t$.

- On considère l'équation différentielle (avec conditions initiales) suivante

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t + 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Soit f la solution de l'équation ci-dessus, on note $F(p) = \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t))$ alors, d'après la formule donnant la transformée de Laplace d'une dérivée, on a

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) = pF(p) - f\left(0^+\right) = pF(p).$$

et
$$\mathscr{L}\left(f''(t)\mathcal{U}(t)\right) = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right) = p^2F(p) - 3.$$
D'autre part, la relation $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = t + 3$ et la linéarité de la transformation de Laplace donnent

$$\mathscr{L}\left(f''(t)\mathcal{U}(t)\right) + 2\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) + \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t)) = \mathscr{L}(t\mathcal{U}(t)) + 3\mathscr{L}(\mathcal{U}(t)).$$

Or $\mathscr{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}$ et $\mathscr{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}$ donc

$$p^2F(p) - 3 + 2pF(p) + F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}$$

i.e.
$$(p+1)^2F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p} + 3$$

puis
$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2} + \frac{3}{p(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} = \frac{3p^2+3p+1}{p^2(p+1)^2}$$
Une décomposition éléments simples donne

$$F(p) = \frac{3p^2+3p+1}{p^2(p+1)^2} = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Il nous reste à déterminer l'original. On sait que $\frac{1}{p+1} = \mathscr{L}\left(e^{-t}\mathcal{U}(t)\right)$, $\frac{1}{(p+1)^2} = \mathscr{L}\left(te^{-t}\mathcal{U}(t)\right)$, $\frac{1}{p^2} = \mathscr{L}(t\mathcal{U}(t))$ et $\frac{1}{p} = \mathscr{L}(\mathcal{U}(t))$.
On a donc finalement
$$f(t)\mathcal{U}(t) = \left(te^{-t} - e^{-t} + t + 1\right)\mathcal{U}(t)$$
i.e. la solution du problème est la fonction f donnée par $f(t) = (t-1)e^{-t} + t + 1$

Exemple 2 :
L'équation différentielle suivante admet-elle une solution ?

$$\begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Supposons que l'équation ci-dessus admette une solution f sur $\mathbb{R}$ et on note $F(p) = \mathscr{L}(f(t)\mathcal{U}(t))$.
On a
$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) = pF(p) - f\left(0^+\right) = pF(p) - 1$$

et
$$\mathscr{L}\left(f''(t)\mathcal{U}(t)\right) = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right) = p^2F(p) - p - f'\left(0^+\right)$$
D'autre part, la relation $tf''(t)+2f'(t)+tf(t) = 0$ et la linéarité de la transformation de Laplace donnent
$$\mathscr{L}\left(tf''(t)\mathcal{U}(t)\right) + 2\mathscr{L}\left(f'(t)\mathcal{U}(t)\right) + \mathscr{L}(tf(t)\mathcal{U}(t)) = 0$$
D'après la formule donnant la dérivée d'une transformée de Laplace, on a

$$\mathscr{L}(tf(t)\mathcal{U}(t)) = -F'(p) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}\left(tf''(t)\mathcal{U}(t)\right) = -\frac{d}{dp}\left[p^2F(p) - p - f'\left(0^+\right)\right] = -p^2F'(p) - 2pF(p) + 1$$

On obtient donc
$$-p^2F'(p) - 2pF(p) + 1 + 2(pF(p) - 1) - F'(p) = 0$$

i.e.

$$-\left(p^2+1\right) F'(p) = 1$$

d'où

$$F'(p) = -\frac{1}{p^2+1} = -\mathscr{L}(\sin(t)\mathcal{U}(t)).$$

On en déduit que $\sin(t) = tf(t)$.
On vérifie alors aisément que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est solution du problème.

Exemples 3 :
- Résoudre l'équation du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + 4Y(t) = 2e^{-3t}$$

avec $Y(0) = 0$ Prenons la transformée de Laplace des deux membres :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right\} + 4\mathcal{L}\{Y(t)\} &= 2\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\} \\ sy(s) - Y(0) + 4y(s) &= \frac{2}{s+3} \\ sy(s) - 3 + 4y(s) &= \frac{2}{s+3} \\ (s+4)y(s) &= \frac{2}{s+3} + 3 \\ y(s) &= \frac{2+3(s+3)}{(s+3)(s+4)} \\ y(s) &= \frac{11+3s}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

Décomposons en éléments simples :

$$\frac{11+3s}{(s+3)(s+4} = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+4}$$

donc :

$$y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\} = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+4}$$

Prenons la transformée de Laplace inverse :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= 2e^{-3t} + e^{-4t} \end{aligned}$$

Vérification :

$$Y'(t) = -6e^{-3t} - 4e^{-4t} \text{ et } Y'(t) + 4Y(t) = -6e^{-3t} - 4e^{-4t} + 8e^{-3t} + 4e^{-4t} = 2e^{-3t}$$

et on a bien $Y(0)=3$.
Exemple 4 :
- Résoudre l'équation du deuxième ordre :

$$Y''+Y=t \quad \text{pour} \quad Y(0)=1 \quad \text{et} \quad Y'(0)=-2$$

Prenons la transformée des deux membres :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y''\}+\mathcal{L}\{Y\}&=\mathcal{L}\{t\}\\ s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)+y(s)&=\frac{1}{s^2}\\ s^2y(s)-s+2+y(s)&=\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}y(s)=\mathcal{L}\{Y(t)\}&=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s-2}{s^2+1}\\ &=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}\\ &=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}Y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &=t+\cos t-3\sin t\end{aligned}$$

Vérification :

$$Y'(t)=1-\sin t-3\cos t, Y''(t)=-\cos t+3\sin t$$
$$Y''(t)+Y(t)=-\cos t+3\sin t+t+\cos t-3\sin t=t$$

et on a bien $Y(0)=1$ et $Y'(0)=-2$.
Exemple 5 :

Résolvons :

$$tY''+Y'+4tY=0 \text{ pour } Y(0)=3 \text{ et } Y'(0)=0$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{tY''\}+\mathcal{L}\{Y'\}+\mathcal{L}\{4tY\}&=0\\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{Y''\}+\mathcal{L}\{Y'\}+4(-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{Y\}&=0\\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)\right\}+\{sy(s)-Y(0)\}-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}&=0\\ -2sy(s)-s^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+3+sy(s)-3-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}&=0\\ \left(s^2+4\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+sy(s)&=0\\ \frac{\mathrm{d}y}{y}&=-\frac{s}{s^2+4}\,\mathrm{d}s\\ \ln y+\frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right)&=c_1\\ y(s)&=\frac{c}{\sqrt{s^2+4}}\end{aligned}$$

En inversant, on trouve :

$$Y(t)=cJ_0(2t)$$

Pour déterminer c, notons que $Y(0) = cJ_0(0) = c = 3$ donc :

$$Y(t) = 3J_0(2t)$$

Exemple 6 :

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = t^2 e^t \ ,$$

avec les conditions initiales : $x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 2$. Posons $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. D'où

$$\begin{array}{r} \mathcal{L}\left\{x'''(t)\right\} - 3\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} + 3\mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} - \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{t^2e^t\right\} \\ p^3X\left(p - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) - 3\left(p^2X(p) - px(0) - x'(0)\right)\right. \\ +3(pX(p) - x(0)) - X(p) = \frac{2}{(p-1)^3} \end{array}$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\left(p^3 - 3p^2 + 3p - 1\right) X(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3} \ .$$

D'où

$$X(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}$$

La solution $x(t)$ cherchée est

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^3}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^6}\right\}.$$

Or

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\frac{e^{-\alpha t}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{(p+\alpha)^n}$$

donc en prenant successivement $n = 1, n = 2, n = 3, n = 6$ avec $\alpha = -1$, on obtient finalement

$$x(t) = \left(1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{60}\right) e^t.$$

La méthode de Laplace peut s'appliquer à l'étude de certaines équations différentielles à coefficients variables.

Exemple 7 :

Considérons à titre d'exemple l'équation suivante :

$$tx'' + (1 - 2t)x' - 2x = 0 \ ,$$

satisfaisant aux conditions initiales : $x(0) = 1, x'(0) = 2$. On a

$$\mathcal{L}\left\{tx''\right\} + \mathcal{L}\left\{(1-2t)x'\right\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0$$

Soit $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, la transformée de Laplace de $x(t)$. En tenant compte de la proposition 8.1.10, la proposition 8.1.12 et sa généralisation, on obtient

$$\mathcal{L}\left\{tx''(t)\right\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = -\frac{d}{dp}\left(p^2X(p) - px(0) - x'(0)\right)$$

d'où

$$\mathcal{L}\left\{tx''(t)\right\} = -p^2X'(p) - 2pX(p) + x(0)$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{(1-2t)x'\right\} &= \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} - 2\mathcal{L}\left\{tx'(t)\right\},\\
&= pX(p) - x(0) + 2\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left\{x'(t)\right\}\\
&= pX(p) - x(0) + 2\frac{d}{dp}(pX(p - x(0)),\\
&= pX(p) - x(0) + 2X(p) + 2pX'(p),\\
&= 2pX'(p) + (p+2)X(p) - x(0).
\end{aligned}$$

L'équation précédente s'écrit donc sous la forme

$$(p-2)X'(p) + X(p) = 0$$

c'est- *à* -dire

$$\frac{dX(p)}{X(p)} + \frac{dp}{p-2} = 0$$

d'où $\ln X(p) + \ln(p-2) =$ constante, et par conséquent $X(p) = \frac{C}{p-2}$, où C est une constante à déterminer. Dès lors,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\} = Ce^{2t}$$

Or par hypothèse $x(0) = 1$, donc $C = 1$ et finalement $x(t) = e^{2t}$ est la solution de l'équation différentielle en question. [11pt,svgnames]report amsfonts,amsmath,amssymb [utf8x]inputenc [T1]fontenc [french]babel fancybox graphicx mathrsfs calrsfs float [usenames, x11names,svgnames]xcolor fouriernc frcursive ifthen pifont titletoc manfnt hyperref

BIBLIOGRAPHIE

[1] Transformations de Laplace : théorie et illustrations par les exemples, Demengel, 2002
https://books.google.co.ma/books?id=4HrVAAAACAAJ

[2] Transformations de Laplace et de Mellin : formulaires, mode d'utilisation, Colombo, S. and Lavoine, J, 1972
https://books.google.co.ma/books?id=OsVRAQAAIAAJ

[3] Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace, Ahmed Lesfari, 2012
https://books.google.co.ma/books?id=yGTFNAEACAAJ&dq

[4] Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel, Huguette Delavault, 2012
https://books.google.co.ma/books?id=mzrvAAAAMAAJ&q

[5] Applications physiques de la transformation de Laplace , Maurice Parodi, 1948
https://books.google.co.ma/books?id=_r40AAAAMAAJ&q

[6] Mathématiques appliquées,Transformations de la+place , Cl. Gabriel, 2021
https://www.mediafire.com/file/gp2qity6ukq1aoi/Math%25C3%25A9matiques_appliqu%25C3%25A9es%252C_Transformations_de_la_place.pdf/file