

Το θεώρημα της Anna Johnson

Όπως αναφέραμε, για τον υπολογισμό των τροποποιημένων ευκλείδειων ακολουθιών πολυωνυμικών υπολοίπων αντιστρέφουμε (στον ευκλείδειο αλγόριθμο) το πρόσημο του υπολοίπου πριν το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη διαίρεση. Επομένως, εφόσον η `sturm_q` χρησιμοποιεί - εξ'ορισμού - την τροποποιημένη ευκλείδεια ακολουθία, θα έχει διαφορετικά πρόσημα από αυτά της `euclid_q` που χρησιμοποιεί τον ευκλείδειο αλγόριθμο.

Δίδονται τα πολυώνυμα $f = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5$ και $g = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21$, τα οποία σχηματίζουν μια “μη πλήρη” ακολουθία πολυωνυμικών υπολοίπων όπως φαίνεται παρακάτω.

```
>>> from sympy import S, degree
>>> from sympy.polys.subresultants_qq_zz import *
>>> x = S('x')
>>> f = x**8 + x**6 - 3*x**4 - 3*x**3 + 8*x**2 + 2*x - 5
>>> g = 3*x**6 + 5*x**4 - 4*x**2 - 9*x + 21
>>> ss = sturm_q(f, g, x)
>>> ss
[x**8 + x**6 - 3*x**4 - 3*x**3 + 8*x**2 + 2*x - 5, 3*x**6 +
5*x**4 - 4*x**2 - 9*x + 21, 5*x**4/9 - x**2/9 + 1/3, 117*x**2/25
+ 9*x - 441/25, 233150*x/19773 - 102500/6591,
-1288744821/543589225]
>>> sign_seq(ss, x)
[1, 1, 1, 1, 1, -1]
>>> [print(degree(poly, x)) for poly in ss];
8
6
4
2
1
0
>>>
```

α. Από τον πίνακα του Sylvester του 1853 (`sylvester(f, g, x, 2)`) να υπολογίσετε την ακολουθία `sturm` με ατέραιους συντελεστές — με την διαδικασία που περιγράφεται στο άρθρο. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με το παρακάτω αποτέλεσμα.

```
>>> mss = modified_subresultants_amv(f, g, x)
```

```
>>> mss
[x**8 + x**6 - 3*x**4 - 3*x**3 + 8*x**2 + 2*x - 5, 3*x**6 +
5*x**4 - 4*x**2 - 9*x + 21, -15*x**4 + 3*x**2 - 9, 65*x**2 +
125*x - 245, 12300 - 9326*x, 260708]
>>> sign_seq(mss, x)
[1, 1, -1, 1, -1, 1]
>>>
```

Να φαίνεται καθαρά στην εργασία σας από ποιά υποορίζουσα υπολογίστηκε ο κάθε ένας συντελεστής. Προσέξτε πως η ακολουθία των προσήμων διαφέρει από την ακολουθία των προσήμων που προκύπτει με διαιρέσεις πολυωνύμων

```
>>> mss2 = sturm_amv(f, g, x)
>>> mss2
[x**8 + x**6 - 3*x**4 - 3*x**3 + 8*x**2 + 2*x - 5, 3*x**6 + 5*x**4
- 4*x**2 - 9*x + 21, 15*x**4 - 3*x**2 + 9, 65*x**2 + 125*x - 245,
9326*x - 12300, -260708]
>>> sign_seq(mss2, x)
[1, 1, 1, 1, 1, -1]
>>>
```

β. Να γράψετε την ακολουθία των προσήμων της ευκλείδειας ακολουθίας πολυωνυμικών υπολοίπων, χωρίς να την υπολογίσετε!!

γ. (Για να εκτιμήσετε την εργασία της Anna Johnson.) Η Anna Johnson μπόρεσε να υπολογίσει τους ρητούς συντελεστές και τα πρόσημά τους που μας δίνει η συνάρτηση $ss = \text{sturm_q}(f, g, x)$ παραπάνω, από την ακολουθία των υποορίζουσών που μας δίνει η $\text{modified_subresultants_amv}(f, g, x)$. Στην σελίδα 31 του άρθρου της, από τον τύπο (7) βλέπουμε πως για να υπολογίσουμε τους συντελεστές του ι-οστού υπολοίπου πολλαπλασιάζουμε την κατάλληλη υποορίζουσα $\text{Det}(i, k)$ με τον παράγοντα $\mathcal{PG}^{(i)}$. Οι παράγοντες $\mathcal{PG}^{(i)}$ δίνονται από τον τύπο (9). Εξηγήστε πως υπολογίζονται αυτοί οι παράγοντες από τον τύπο (6).