```
SymPy 1.6.2 under Python 3.7.3
Please see the documentation in Help -> Plugins ->
SymPy
```

```
>>> from sympy import S
>>> x = S('x')
```

Ακολουθώντας την μέθοδο του Budan (από το βιβλίο του) θα βρούμε την κυβική ρίζα του 1745.

```
>>> f = x**3 - 1745
```

Κάνοντας αντικαταστάσεις της μορφής

$\boldsymbol{x \leftarrow x+1}$

```
>>> f = x**3 - 1745
    for i in range(1, 13):
        f = f.subs({x : x + 1})
    print('μετά από ',i,' αντικαταστάσεις της μορφής x <-
    x+1 παίρνουμε το πολυώνυμο:: \n\n',f.expand())
```

```
μετά από  12  αντικαταστάσεις της μορφής x <- x+1
παίρνουμε το πολυώνυμο::

 x**3 + 36*x**2 + 432*x - 17
```

και κάνοντας ακόμα μία αντικατάσταση της ίδιας μορφής παίρνουμε ένα πολυώνυμο χωρίς καμία μεταβολή προσήμου.

```
>>> f = f.subs({x : x + 1}).expand(); print(f)
x**3 + 39*x**2 + 507*x + 452
```

Επομένως η τιμή της
$$\sqrt[3]{1745}$$
είναι μεταξύ 12 και 13.

Για να αποφύγει τις πολλές και κοπιαστικές αντικαταστάσεις $x \leftarrow x+1$ ο Budan κάνει την αντικατάσταση

$\boldsymbol{x \leftarrow 10x}$

```
>>> f = x**3 - 1745
    f_dekades = f.subs({x : 10 * x});
    print(f_dekades.expand())
   1000*x**3 - 1745
```

και σε αυτό το καινούργιο πολυώνυμο κάνει αντικαταστάσεις της μορφής $x \leftarrow x+1$ και βλέπει πως η ρίζα είναι στο διάστημα $(1,2)$. Πράγματι έχουμε

```
>>> f = f_dekades
    for i in range(1, 10):
        f = f.subs({x : x + 1}).expand()
        print(f)
   1000*x**3 + 3000*x**2 + 3000*x - 745
   1000*x**3 + 6000*x**2 + 12000*x + 6255
   1000*x**3 + 9000*x**2 + 27000*x + 25255
   1000*x**3 + 12000*x**2 + 48000*x + 62255
   1000*x**3 + 15000*x**2 + 75000*x + 123255
   1000*x**3 + 18000*x**2 + 108000*x + 214255
   1000*x**3 + 21000*x**2 + 147000*x + 341255
   1000*x**3 + 24000*x**2 + 192000*x + 510255
   1000*x**3 + 27000*x**2 + 243000*x + 727255
>>> f10 = f_dekades.subs({x : x + 1}); print(f10.expand())
   1000*x**3 + 3000*x**2 + 3000*x - 745
```

Προσέξτε πως $f10(\frac{x}{10})$ είναι το ίδιο πολυώνυμο που προκύπτει αν στο αρχικό κάνουμε 10 αντικαταστάσεις της μορφης $x \leftarrow x+1$.

```
>>> ( f10.subs({x : x/10}) ).expand()
```

$$x^3 + 30\,x^2 + 300\,x - 745$$

```
>>> f = x**3 - 1745
    for i in range(1, 11):
        f = f.subs({x : x + 1})
    print('μετά από ',i,' αντικαταστάσεις της μορφής x <-
    x+1 παίρνουμε το πολυώνυμο:: \n\n',f.expand())
   μετά από  10  αντικαταστάσεις της μορφής x <- x+1
   παίρνουμε το πολυώνυμο::
```

```
    x**3 + 30*x**2 + 300*x - 745
>>> print( f_dekades.as_poly().intervals() );
   [((1, 2), 1)]
```

Αυτό σημαίνει πως η ρίζα του αρχικού πολυωνύμου f βρίσκεται στο διάστημα $(10, 20)$. Οπότε στο πολυώνυμο $f10(\frac{x}{10})$ συνεχίζει τις αντικαταστάσεις της μορφής $x \leftarrow x+1$ μέχρι να εξαφανιστεί η μεταβολή προσήμου.

```
>>> f = f10.subs({x : x/10})
    for i in range(1, 10):
        f = f.subs({x : x + 1})
        print(i, ' substitutions::',f.expand())
   1  substitutions:: x**3 + 33*x**2 + 363*x - 414
   2  substitutions:: x**3 + 36*x**2 + 432*x - 17
   3  substitutions:: x**3 + 39*x**2 + 507*x + 452
   4  substitutions:: x**3 + 42*x**2 + 588*x + 999
   5  substitutions:: x**3 + 45*x**2 + 675*x + 1630
   6  substitutions:: x**3 + 48*x**2 + 768*x + 2351
   7  substitutions:: x**3 + 51*x**2 + 867*x + 3168
   8  substitutions:: x**3 + 54*x**2 + 972*x + 4087
   9  substitutions:: x**3 + 57*x**2 + 1083*x + 5114
```

Με αυτόν τον τρόπο ο Budan ανακαλύπτει — με *μόνον* 7 αντικαταστάσεις — πως η τρίτη ρίζα του 1745 βρίσκεται ανάμεσα στο 12 και 13.

Πάμε τώρα σε άλλο παράδειγμα να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 1745

```
>>> f = x**2 - 1745
>>> from sympy import sqrt
>>> sqrt(1745.)
```

41.7731971484108

Κάνοντας αντικαταστάσεις της μορφής

$\boldsymbol{x \leftarrow x+1}$

```
>>> f = x**2 - 1745
    for i in range(1, 42):
        f = f.subs({x : x + 1})
    print('μετά από ',i, ' αντικαταστάσεις::',f.expand())
```

```
μετά από  41  αντικαταστάσεις:: x**2 + 82*x - 64
```

και κάνοντας ακόμα μία αντικατάσταση της μορφής $x \leftarrow x+1$ παίρνουμε ένα πολυώνυμο χωρίς καμία μεταβολή προσήμου.

```
>>> f = f.subs({x : x + 1}); print(f.expand())
```

```
x**2 + 88*x + 191
```

Επομένως η τιμή της $\sqrt{1745}$ είναι μεταξύ 41 και 42.

Για να αποφύγει τις πολλές και κοπιαστικές αντικαταστάσεις $x \leftarrow x+1$ ο Budan κάνει την αντικατάσταση

$\boldsymbol{x \leftarrow 10x}$

και βρίσκει πως η ρίζα του νέου πολυωνύμου βρίσκεται στο διάστημα $(4, 5)$.

```
>>> f = x**2 - 1745
    f_dekades = f.subs({x : 10*x}).expand()
    print(f_dekades)
```

```
100*x**2 - 1745
```

```
>>> f = f_dekades
    for i in range(1, 10):
        f = f.subs({x : x + 1}).expand()
        print(f)
```

```
100*x**2 + 200*x - 1645
100*x**2 + 400*x - 1345
100*x**2 + 600*x - 845
100*x**2 + 800*x - 145
100*x**2 + 1000*x + 755
100*x**2 + 1200*x + 1855
100*x**2 + 1400*x + 3155
```

```
100*x**2 + 1600*x + 4655
100*x**2 + 1800*x + 6355
```

```
>>> f = f_dekades
    for i in range(1, 5):
        f = f.subs({x : x + 1}).expand()
        print(f)
    f40 = f
```

```
100*x**2 + 200*x - 1645
100*x**2 + 400*x - 1345
100*x**2 + 600*x - 845
100*x**2 + 800*x - 145
```

```
>>> f40
```

$$100\,x^2 + 800\,x - 145$$

```
>>>
```

Αυτό σημαίνει πως η ρίζα του αρχικού πολυωνύμου f βρίσκεται στο διάστημα $(40, 50)$. Οπότε στο πολυώνυμο $f40(\frac{x}{10})$ συνεχίζει τις αντικαταστάσεις της μορφής $x \leftarrow x+1$ μέχρι να εξαφανιστεί η μεταβολή προσήμου.

```
>>> f = f40.subs({x : x/10}).expand()
    for i in range(1, 10):
        f = f.subs({x : x + 1})
        print(i, ' substitutions::',f.expand())
```

```
1  substitutions:: x**2 + 82*x - 64
2  substitutions:: x**2 + 84*x + 19
3  substitutions:: x**2 + 86*x + 104
4  substitutions:: x**2 + 88*x + 191
5  substitutions:: x**2 + 90*x + 280
6  substitutions:: x**2 + 92*x + 371
7  substitutions:: x**2 + 94*x + 464
8  substitutions:: x**2 + 96*x + 559
9  substitutions:: x**2 + 98*x + 656
```

```
>>>
```

Με αυτόν τον τρόπο ο Budan ανακαλύπτει — με *μόνον* 9 αντικαταστάσεις — πως η τετραγωνική ρίζα του 1745 βρίσκεται ανάμεσα στο 41 και 42.

Για να προσεγγίσει την τετραγωνική ρίζα ο Budan κάνει μια σειρά αντικαταστάσεων της μορφής $x \leftarrow \frac{1}{x}$ και $x \leftarrow x + k, k \in \mathbb{Z}_+$ τόσο σε πολυώνυμα όσο και στην μεταβλητή M (που δεν χρησιμοποιούσε ο Budan) που θα μας ορίσει τον μετασχηματισμό **Moebius**.

Προσέξτε πως η θετική ρίζα του $f41 = x^2 + 82x - 64$ είναι στο διάστημα $(0, 1)$. Ετσι στο πολυώνυμο αυτό και την μεταβλητή $M{=}x$ κάνει την αντικατάσταση $x \leftarrow \frac{1}{x}$

```
>>> f41 = f40.subs({x : x/10}).subs({x : x + 1}).expand()
>>> f41
```

$$x^2 + 82\,x - 64$$

```
>>> M = x
```

και το αποτέλεσμα είναι ένα πολυώνυμο με την θετική του ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

```
>>> f = ( f41.subs({x : 1/x}) * x**2 ).simplify()
>>> M = 1/x
>>> f
```

$$-64\,x^2 + 82\,x + 1$$

```
>>> f.as_poly().intervals()
[((-1, 0), 1), ((1, 2), 1)]
```

Οπως βλέπουμε η θετική ρίζα της f βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$. Θα την φέρουμε στο διάστημα $(0, 1)$ με την αντικατάσταση $x \leftarrow x + 1$.

```
>>> f1 = f.subs({x : x + 1}).expand()
>>> M = M.subs({x : x + 1})
>>> f1
```

$$-64\,x^2 - 46\,x + 19$$

```
>>> f1.as_poly().intervals()
[((-2, -1), 1), ((0, 1), 1)]
```

Στο νέο αυτό πολυώνυμο επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και έχουμε

```
>>> f2 = ( f1.subs({x : 1/x}) * x**2 ).simplify()
>>> M = M.subs({x : 1/x})
>>> f2
```

$19\,x^2 - 46\,x - 64$

```
>>> f2.as_poly().intervals()
```

```
[((-1, 0), 1), ((3, 4), 1)]
```

```
>>> f3 = f2.subs({x : x + 3}).expand()
>>> M = M.subs({x : x + 3})
>>> f3
```

$19\,x^2 + 68\,x - 31$

```
>>> f3.as_poly().intervals()
```

```
[((-4, -3), 1), ((0, 1), 1)]
```

Και ούτω καθεξής

```
>>> f4 = ( f3.subs({x : 1/x}) * x**2 ).simplify()
>>> M = M.subs({x : 1/x})
>>> f4.as_poly().intervals()
```

```
[((-1, 0), 1), ((2, 3), 1)]
```

```
>>> f5 = f4.subs({x : x + 2}).expand()
>>> M = M.subs({x : x + 2})
>>> f5
```

$-31\,x^2 - 56\,x + 31$

```
>>> f6 = ( f5.subs({x : 1/x}) * x**2 ).simplify()
>>> M = M.subs({x : 1/x})
>>> f6
```

$31\,x^2 - 56\,x - 31$

```
>>> f4.as_poly().intervals()
```

```
[((-1, 0), 1), ((2, 3), 1)]
```

```
>>> f7 = f6.subs({x : x + 2}).expand()
>>> f7
```

$$31\,x^{2}+68\,x-19$$

```
>>> f7.as_poly().intervals()
[((-3, -2), 1), ((0, 1), 1)]
```

Για να δούμε τι πετύχαμε μέχρι τώρα

```
>>> M
```

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}}}$$

```
>>> M = M.simplify()
>>> M
```

$$\frac{7\,x+3}{9\,x+4}$$

```
>>> M.subs({x : 0})
```

$$\frac{3}{4}$$

```
>>> M.subs({x : 1})
```

$$\frac{10}{13}$$

```
>>> 3/4
0.75
>>> 10/13
0.7692307692307693
>>> sqrt(1745.)
```

41.7731971484108

Ετσι σαν μια πρώτη προσέγγιση έχουμε $\sqrt{1745}=41.7$

3η Εργασία::
α. Με την μέθοδο του Budan υπολογίστε με 9 αντικαταστάσεις ότι η τετραγωνική ρίζα του 17458 βρίσκεται ανάμεσα στο 132 και 133. Επίσης με την μέθοδο του Budan να την προσεγγίσετε με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.
β. Να απομονώσετε με την μέθοδο του Budan τις 3 θετικές ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 30\,x^2 + 293\,x - 923$.