1. 当题目中有关于积分的不等式时, 可以考虑构造一个原函数 $F(x)$ 使 $F'(x)$ 有不等式的形式, 如 $F(x) = x\int_x^1 f(y)dy$ 或直接求它的导函数 $f'(x)$;使用积分中值定理 [与积分面积相等的矩形必与曲线相交于一点 $(\xi, f(\xi))$]

2. 当题目中有等式或函数某点值时, 可考虑拉格朗日中值定理和罗尔定理.(拉格朗日中值定理与一阶泰勒公式等价.)

3. 题目中有定积分时可考虑将常数项凑成定积分.

4. 注意定义域.

5.$(\ln(x+\sqrt{x^2\pm 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$，$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm 1} \pm \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm 1}|)' = \sqrt{x^2\pm 1}$，$(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x)' = \sqrt{1-x^2}$(可用 dx 中的 x 分部积分得出)

6. 分部积分时设积分结果为 I，要尽量凑出 I 以构成关于 I 的方程，如 $I = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \sin^n x dx$ 要尽量使右侧出现 $\sin x$.

7. 能用三角解决的不要用无理式，有 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$ 可凑 $\tan^2 x$，有 $\frac{1}{\cos^2 x}dx$ 可凑 $d(\tan x)$，有 $\sqrt{1-x^2}$ 可换 $\sin t$，想办法凑 $\tan t$.

8.$\int \frac{du}{(\frac{u}{2})^2+1} \neq \arctan\frac{u}{2}$ 不要忘记积分变量与变量一致性.

9. 积分结果一定要求导验证.

10. 能拆出常数项或多项式项的要先拆后积分，如 $\int \frac{du}{(2u-1)(u^2+1)} = \int \frac{u^2+1-u^2}{(2u-1)(u^2+1)}du$ 从高阶开始配凑，也可使用待定参数，令 $\frac{1}{(2u-1)(u^2+1)} = A\frac{1}{2u-1} + B\frac{u}{u^2+1} + C\frac{1}{u^2+1}$ 解得 $A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, C = -\frac{1}{5}$. 归纳：分母要化为 $(A_1x+B_1)^n(A_2x^2+B_2)(A_3x^2+B_3x+C_3)$ 时,若后两式不能因式分解则最简分量必有 $\frac{1}{(A_1x+B_1)^n}$, $\frac{x}{A_2x^2+B_2}$, $\frac{1}{A_2x^2+B_2}$, $\frac{x}{A_3x^2+B_3x+C_3}$, $\frac{1}{A_3x^2+B_3x+C_3}$.

11. 柯西不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx$.

12. 直线 $l\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ 方向向量为 $\vec{l} = (a,b,c)$, 经过点 $L(x_0,y_0,z_0)$, 点 M 到 l 的距离为 $d = \frac{|\vec{l}\times\vec{L}|}{|\vec{l}|}$.

13. 一条直线与另外两条直线相交，它们的方向向量没有直接关系，也不能联立两直线求交点，认为它在第三条直线上，因为交点可能有两个.

14. 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微,则 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y = O(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

15.$\frac{d}{dy}f(0,y)|_{y=0} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}[\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)|_{(0,0)}$，因此可在求偏导前对无关变量赋值.

16. 设 $\vec{l}$ 与 x,y,z 轴夹角分别为 α,β,γ, 则函数 $u(x,y,z)$ 沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

17.$[f(u(x,y), v(x,y))]'_x = f'_1 u'_x + f'_2 v'_x$.

18.$u(x,y,z)$ 在 ∇u 方向上的方向导数最大，值为 $|\nabla u|$.

19.$f'_x(x,y,z)$ $(z = z(x,y)) \neq \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]$.

20.$\varphi'_x(2x^2) = \varphi'(2x^2)\cdot 4x$.

21. 当 $f''_{12} = f''_{21}$ 时, 最后结果应合并.

22. 隐函数求导之前应将所有 $z = z(x,y)$ 标记出来以免遗忘.

23. 多项式要统一格式，如 $x-y, y-x$ 应统一为 $x-y, -(x-y)$.

24. 求导要一步一步地求，不要跳步.

25. 对 $f(x,y) = 0$ 可用全微分为 0 得到 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$.

26.$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{} \\ \frac{\partial y}{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{}{\partial u} & \frac{}{\partial v} \end{bmatrix} \right|$.

27. 曲线 $(x(t), y(t), z(t))$ 在 (x,y,z) 点切线方向向量为 (x', y', z').

28. 曲面 $f(x,y,z)=0$ 在 (x,y,z) 点法线方向向量为 $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$.

29.$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 方向相同 $\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}\nRightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}$.

30. 求函数在曲面上的最值 (条件最值), 因最值点一定在曲面上, 可将曲面作为乘子引入, 令 $F=(\ln)f(x,y,z)+\lambda\cdot g(x,y,z)$(拉格朗日乘子法).

31. 海伦公式：$S=\sqrt{\frac{L}{2}(\frac{L}{2}-a)(\frac{L}{2}-b)(\frac{L}{2}-c)}$.

32.$z(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，若：1.$B^2-AC<0$, $1^\circ.A>0$，取极小值，$2^\circ.A<0$，取极大值；2.$B^2-AC>0$，非极值点.

33. 对 $f(x,y)$ 若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}=\int 0dx=\varphi(y)$，$f=\int\varphi(y)dy=\psi(y)+C(x)$，对变量 x 积分会出现 $\varphi(y)$.

34. 不要把法向量与 $(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})$ 划等号，它们是共线关系.

35. 多重积分时，x 的上下限为区域画横线，y 的上下限为区域画竖线.

36. 曲面面积 $S=\iint\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

37. $(x^2)^{\frac{3}{2}}\neq x^3$

38. 函数奇偶性，周期性结合积分上下限可极大简化运算

39. 多重积分 $\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\int f\mathrm{d}z$ 中 y 的上下限由对 z 积分后降维图形区域范围确定

40. 转动惯量 $I=\iiint r^2\rho\mathrm{d}V$

41. 开根号一定要加绝对值

42. 不要轻易破坏对称性用于化简，如 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$ 因 $\sin\theta\cos^3\theta$ 为奇，得积分为 0

43. $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 $\Leftrightarrow\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，设 $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,
$\mathrm{d}\vec{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$,
$\oint_L\vec{F}\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}$ 对于可分离出保守场的积分要进行分离以简化运算

44. 设平面 $\Sigma(x,y,z)$ 法向量为 $\vec{p}=(A,B,C)$ 面积为 S，则它在 $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 方向降维后面积为 $S'=S\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}$，其中 $\vec{p}$ 的方向与围成 Σ 的封闭曲线有关，从 z 轴正向看即从 z 的正无穷处向下看，逆时针则 $\vec{p}$ 向上

45. 求体积分和平面积分时，不要用边界条件化简被积函数

46. 无穷级数若可展开为 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots$ 则应展开后根据最低阶判断收敛性（比较判别法的极限形式）没有 $\frac{1}{n}$ 可先凑出 $\frac{1}{n}$；可积分时使用积分判别法；带有 p^n 时考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 判别（根值判别法）

47. 使用洛必达后再用级数展开会引起系数错误，如 $1-\frac{\sin x}{x}$

48. 交错级数：1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$，不为 0 则不收敛，再看是否绝对收敛 2. 求 a_n 与 a_{n+1} 大小关系，若 $a_n>a_{n+1}$，条件收敛

49. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\ln n+c+r_n$，c 为欧拉常数，$r_n\to 0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

50. $\because\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n},(n\geq 3),\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散

51. 一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 先解齐次方程通解 $y=C_1e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 令 $C_1=C_1(x)$ 将通解代入非齐次方程得 $y=e^{-\int P\mathrm{d}x}[c+\int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x]$

52. 复杂级数先求导或积分再求幂级数

53. $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x$ （延拓），$b_n=\frac{2}{2T}\int_{-T}^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x$

54. 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

55. 解一阶非线性方程时，将 x 和 y 凑到一起再进行换元，如 $(x+y)y'+(x-y)=0$ ，令 $u=\frac{y}{x},y'=\frac{u-1}{u+1}$

56. 定积分不要忘记减下限

57. $P(y,x)\mathrm{d}x+Q(y,x)\mathrm{d}y=0$ 形式的方程：先看 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是否成立，成立则用线积分，或考虑积分因子；再看是否可化为 $y'+Py=Q$ 形式，可以就用公式；最后看是否可分离变量，换元

58. 曲率 $\kappa=|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}|=\frac{\mathrm{d}(\arctan y')}{\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

59. 方程 $y''+Py'+qy=P_m(x)\mathrm{e}^{ax}$，特解为 $y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{ax}$,k 为 e^{ax} 根重数，m 为阶数

60. 方程 $y''+Py'+qy=P_m(x)\mathrm{e}^{ax}\sin bx$，特解为 $y^*=x^k(R_m(x)\cos bx+S_m(x)\sin bx)\mathrm{e}^{ax}$，k 与 a 无关，k 为 $a+ib$ 的根重数

61. 解伯努利方程 $y'+P(x)y=q(x)y^n$ 应令 $z=y^{1-n}$ ；解欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a_1x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_2y=f(x)$ ，令 $x=\mathrm{e}^t$

62. 逆序数：从左到右每个数右边小于它的个数之和

63. $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\bar{A})$ 其中 $\bar{A}=[A|B]$ 为增广矩阵

64. 左/右乘逆矩阵 $\Leftrightarrow$ 增广行/列变换；行/列增广时，逆矩阵的原矩阵的放在左边/上边

65. 行列式为 0$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非 0 解

66. 齐次线性方程组可写成列向量线性组合和行向量点乘形式

67. 实对称阵，不同特征值对应的不同特征向量正交

68. 实对称 $\Rightarrow$ 相似于对角阵；n 个不同特征值 $\Rightarrow$ 相似对角；n 个特征向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 相似对角

69. $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}=tri(A),\prod\limits_{i=1}^n\lambda_i=|A|$ ，相似 $\Rightarrow$ 同秩，同特征值，同行列式

70. 设特征向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 对应特征值 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ ，则 $[\alpha_1\cdots\alpha_n]^{-1}A[\alpha_1\cdots\alpha_n]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda$

71. 一个特征值至少有一个特征向量

72. $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix},A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

73. 标准型可与相似对角阵无关，但满足惯性定律

74. 随机事件常用技巧：加一个有的，$(A+B)+B=C+B$；乘一个有的，$(AB)B=CB$；拆成独立事件

75. C_0^0 不存在，当 $P(B)=0$ 时，$P(A|B)$ 不存在

76. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

77. 切比雪夫大数定律：$P\{\text{偏差比}\epsilon\text{大}\}\leq\frac{\text{方差}}{\epsilon^2}$；依概率收敛 $n\to+\infty$ 时，偏差小于任意小常数；切比雪夫大数定律：$n\to+\infty$ 时，总偏差的平均值小于任意小常数；伯努利大数定律：为二项分布时大数定律的特例；辛钦大数定律：二项分布且 $E(x_i)=\mu$ 时大数定律的特例；棣莫弗-拉普拉斯中心极限定律：二项分布当 n 很大时，$\frac{\text{偏差}}{\text{标准差}}$ 服从正态分布；列维-林德伯格中心极限定理：$\sqrt{n}\frac{\text{总偏差的平均值}}{\text{标准差}}$ 服从正态分布

78. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(x,y)$

79. σ 和 σ^2 注意区分，指数分布 $P(x) = \lambda e^{-\lambda x}, E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ 泊松分布 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, E(X) = D(X) = \lambda$

80. $X + Y \sim N(2\mu, 2\sigma^2), X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$，X，Y 满足独立，正态分布

81. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = 1$

82. 正态分布运算法则：$D(X_1 + X_2 + X_3) = 3\sigma^2, D(X_1 + 2X_2) = \sigma^2 + 4\sigma^2$

83. 正态总体的抽样分布中，$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立 $(\mu = 0, \sigma = 1) n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1), (n-1)S^2 \sim \chi^2(n), E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n$

84. 若 α 为单位向量，即 $\alpha^T\alpha = 1$，则 $\alpha(\alpha^T \cdot \alpha) = \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha$，即 1 为 $\alpha\alpha^T$ 的唯一非零特征值

85. 矩阵与对角阵相似时，对角阵中特征值顺序不影响。矩阵 A 特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$，则 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关特征向量 $\Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n (= \lambda)$ 时，$A - \lambda E$ 秩为 n-r（r 重根）

86. 若 $X \sim \chi^2(n)$，则 2X 不服从 χ^2 分布，因此先化系数

87. 绕 y 轴旋转的绕点会构成一个以 y 轴为圆心的圆，即 $\sqrt{x^2 + z^2} = r$，y 坐标不变，因此 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

88. 非实对称阵无对应的正交对角化阵，即不存在 $P^TP = E$，使 $P^{-1}AP = \Lambda$（其中 A 为任一非对称阵）

89. $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^p} dx = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{f(x)}{x^p} dx + \lim\limits_{N \to +\infty} \int_1^N \frac{f(x)}{x^p} dx$ 可判断敛散性，利用极限由洛必达法则还可求出等价积分式；当 p<1 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 存在，当 p>1 时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 存在

90. 前 n-1 阶导数为 0，第 n 阶不为 0$\begin{cases} \text{若 n 为奇，拐点} \\ \text{若 n 为偶，极值点} \end{cases}$

91. 拐点只能在二阶导数为 0 或不存在的点取到；极值点只能在驻点或导数不存在的点取到

92. $f(x,y)$ 在 (x,y) 点最大方向导数为 $|\vec{\nabla} f|$（模）

93. 计算正态分布概率大小要化成标准正态分布再比较

94. 平面图形或线图形绕轴旋转应找到三维坐标与平面某长度关系

95. 看到 a_{ij} 先想到转化成矩阵

96. 代数运算时应把 x 写在一起，把 y 写在一起减少失误

97. 出现 $f(x) + f'(x)$ 时考虑构造 $g(x) = f(x)e^x$

98. 解非齐次线性方程组时不要直接找线性无关解向量，应先转化为齐次线性方程组找到线性无关解再结合特解得到通解

99. $S = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \neq \int \frac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} dx$ 提出的 x 在求导时会影响结果，应令 $S = \frac{1}{x} f(x), f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

100. $+\infty$ 和 $-\infty$ 可能对应两条水平渐近线或一条，奇点处常有一条垂直渐近线，有两条水平渐近线就不可能有斜渐近线

101. $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微 $\Leftrightarrow \Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + O(P) \Leftarrow f'_x, f'_y$

102. 读题要仔细，不要把 e^{x^2} 看成 e^{-x^2}

103. 分清收敛区间（开区间）和收敛域

104. 单调有界 $\Rightarrow$ 收敛