10.7

(6) 证明集合 $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in Z\}$ 对于通常加法和乘法构成一个整环。

证明：Z对于通常加法 $a_1+b_1\sqrt{2}+a_2+b_2\sqrt{2}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$，构成一个加法交换群，存在零元0，$a+b\sqrt{2}$ 存在负元 $-a-b\sqrt{2}$。

对于通常乘法，$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$

满足结合律和分配律，有单位元1，满足交换律，是交换环，假设存在零因子，

使得 $(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}=0$

即 $a_1,b_1,a_2,b_2\neq 0$，$a_1,b_1,a_2,b_2\in Z$，

$$\begin{cases}a_1a_2+2b_1b_2=0\\ a_1b_2+a_2b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1a_2=-2b_1b_2\\ a_1b_2=-a_2b_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a_1}{b_1}=-2\frac{b_2}{a_2}\\ \frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}\end{cases}$$

则有 $-2\frac{b_2}{a_2}=-\frac{a_2}{b_2}$ 则有 $a_2^2=2b_2^2$ 则 $\frac{a_2}{b_2}=\pm\sqrt{2}$，$\frac{a_1}{b_1}=\pm\sqrt{2}$ 显然与 a_1,b_1,a_2,b_2 均为整数矛盾，故不存在零因子

(5) 设D是无平方因数的整数，证明集合 $Q[\sqrt{D}]=\{a+b\sqrt{D} \mid a,b\in Q\}$ 对于通常加法和乘法构成一个域

证明：Q对于加法：$a_1+b_1\sqrt{D}+a_2+b_2\sqrt{D}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{D}$ 构成一个加法交换群，存在零元0，$a+b\sqrt{D}$ 存在负元，$-a-b\sqrt{D}$，$(a,b\in Q)$

Q对于乘法，首先D为无平方因数的整数则 $\sqrt{D}$ 为无理数。

$(a_1+b_1\sqrt{D})(a_2+b_2\sqrt{D})=(a_1a_2+Db_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{D}$，满足结合律、分配律、交换律、~~构成~~，有单位元1，对于每个非零元，

$a+b\sqrt{D}$ 若存在可逆元 $a'+b'\sqrt{D}$ 则满足 $(a+b\sqrt{D})(a'+b'\sqrt{D})=(aa'+Dbb')+(ab'+a'b)\sqrt{D}=1$

则有 $\begin{cases}aa'+Dbb'=1\\ ab'+a'b=0\end{cases}$ 解得逆元为 $\frac{a-b\sqrt{D}}{a^2-b^2D}$ 有 $(a+b\sqrt{D})(\frac{a-b\sqrt{D}}{a^2-b^2D})=1$

其中 $a^2-b^2D\neq 0$，因为D为无平方因数且a,b不同时为0，

故 $Q(\sqrt{D})$ 对于通常加法乘法构成一个域

若 $a^2-b^2D=0$ 则 $(\frac{a}{b})^2=D$，D为有理数的平方，这与D为无平方因数的整数这一条件矛盾