

第三次大作业

半离散格式的色散和耗散优化.

有限体积方法计算NACA0012的可压缩绕流.

SIMPLE方法计算方腔驱动流.

吴辰禹
苏佑天
陆晨阳

目录

1. 半离散格式的色散和耗散优化.....	3
1.1 MDCD4th格式色散耗散理论分析.....	3
1.1.1 MDCD4th格式精度分析.....	3
1.1.2 MDCD4th色散耗散分析.....	3
1.2 色散耗散系数算例分析	5
1.3 改进思路	7
2. NACA0012的可压缩绕流	8
2.1 数值方法	9
2.1.1 FDS格式.....	9
2.1.2 中心格式.....	10
2.1.4 时间推进.....	11
2.1.5 边界条件.....	12
2.1.6 计算网格	13
2.2 算例验证	14
2.2.1 $M=0.4, \alpha=1.25^\circ$	14
2.2.2 $M=0.8, \alpha=1.25^\circ$	15
2.2.3 $M=1.2, \alpha=1.25^\circ$	18
2.2.4 局部时间步与全局时间步的对比	21
3. 方腔驱动流.....	22
3.1 问题介绍	22
3.2 数值方法	23
3.2.1 SIMPLE算法	23
3.2.2 交错网格	24
3.2.3 非线性项的离散	24
3.2.4 粘性项的处理	26
3.2.5 压力修正方法	26
3.2.6 边界条件设置	27
3.3 计算结果	27
References	32
小组分工	32

1. 半离散格式的色散和耗散优化^[1]

1.1 MDCD4th格式色散耗散理论分析

1.1.1 MDCD4th格式精度分析

考虑如下空间离散格式

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_j} \approx u_\Delta(x_j) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^3 a_{j+l} \cdot u_{j+l}$$

其中对应系数为,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} a_{j-3} & a_{j-2} & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & a_{j+2} & a_{j+3} \\ \hline -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta & 2\alpha + 3\beta + \frac{1}{12} & -\frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta - \frac{2}{3} & 10\beta & \frac{5}{2}\alpha - \frac{15}{2}\beta + \frac{2}{3} & -2\alpha + 3\beta - \frac{1}{12} & \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{array}$$

为测试上述格式精度, 对于 $u(x_j)$ 附近进行 Taylor 展开, 考察格式对于一阶导数的离散精度。具体操作如下,

$$T_{lm} = \frac{1}{l!} \cdot (m \cdot \Delta x)^l \quad (l = 0 \cdots 6, m = -3 \cdots 3, 特别的认为 0^0 = 1)$$

Taylor 系数矩阵满足性质

$$u_m = u^{(l)} T_{lm} + o(\Delta x^7)$$

进而, 右乘系数矩阵即可考察离散格式的精度

$$\frac{1}{\Delta x} a_m u_m = \frac{1}{\Delta x} u^{(l)} T_{lm} a_m + o(\Delta x^6) = \overleftarrow{u}^{(l)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{30} dx^4 (-1 + 30\alpha) \\ -\frac{dx^5 \beta}{2} \end{pmatrix} + o(\Delta x^6)$$

可见无论参数如何选取, 上述格式均具有四阶精度。

1.1.2 MDCD4th色散耗散分析

进一步, 考察格式的色散与耗散性质。采用傅里叶分析的方法, 将待离散空间函数分解为基函数的和。具体的, 考察任意基函数 $u(x) = \text{Exp}(ikx)$ 的空间离散性质。

$$u_\Delta(x_j) = i \cdot k' \cdot \text{Exp}(ikx) = i \cdot \left(\frac{\Re(k \cdot \Delta x) + i \cdot \Im(k \cdot \Delta x)}{\Delta x} \right) \cdot \text{Exp}(ikx)$$

其中与差分等效波束 k' 相关无量的函数 $\Re(k)$, $\Im(k)$ 分别对应半离散格式的色散与耗散特性。具体的

MDAD4th的 $\Re(\varphi_0)$, $\Im(\varphi_0)$ 函数关系如下, (令 $k \cdot \Delta x = \varphi_0$, 代表一个网格对应的相位变化)

$$\begin{cases} \Re(\varphi_0) = \left(\frac{4}{3} + 5\alpha\right) \sin(\varphi_0) - \left(\frac{1}{6} + 4\alpha\right) \sin(2\varphi_0) + \alpha \sin(3\varphi_0) \\ \Im(\varphi_0) = \beta (-10 + 15 \cos(\varphi_0) - 6 \cos(2\varphi_0) + \cos(3\varphi_0)) \end{cases}$$

可见色散耗散性质分别独立的由 α 、 β 决定。考虑色散性质的误差函数,

$$Error = \exp(-\nu\pi) \int_0^\pi \exp(\nu(\pi - \varphi_0)) \cdot (\Re(\varphi_0) - \varphi_0)^2 d\varphi_0$$

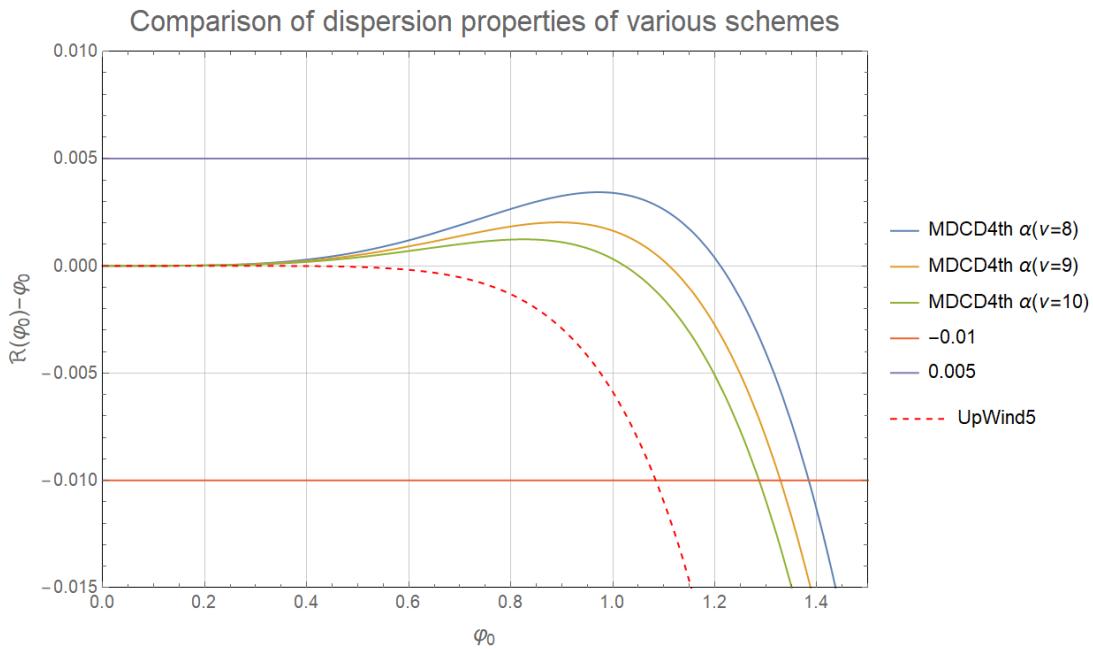
实际上, 为获取最小误差, 误差函数是依赖于系数 ν 及待定参数 α 的函数。此处取三种系数 ν 的取值使得误差函数最小, 即

$$\frac{\partial Error(\alpha, \nu)}{\partial \alpha} \Big|_{\nu=8, 9, 10} = 0$$

对应的优化结果为,

$\nu = 8$	$\alpha = 0.046378291953993685$
$\nu = 9$	$\alpha = 0.04389996681449459$
$\nu = 10$	$\alpha = 0.04204770049590488$

进一步, 画出色散性质图像,



可见虽然MDAD为四阶精度格式, 但是通过调节色散系数可以将色散曲线的性质优化到超越五阶迎风。具体的, 误差函数中 ν 的增大代表着对于大尺度误差的权重增加。可以从图(1)中见到MDAD4th其色散性质在大尺度情况可以初步优化, 代价是中尺度区域的色散性质会降低。因此对于色散系数调节, 一个重要的因素在于误差函数的构造的理论依据与可实用性。

耗散系数的选取从 $\Im(\varphi_0)$ 的表达式可以看出是线性依赖关系。然而实际上, 耗散系数带来消除数值震

荡的功能的同时也会带来解细节的抹平。因此耗散系数的选取需要在一定区间之内，而不是一味的缩小，否则会在非线性方程中产生解的不稳定性。在前两节的分析中采用 Hu[1]的色散耗散关系约束，即

$$r(\varphi_0) = \left| \frac{\frac{\partial \Re(\varphi_0)}{\partial \varphi_0} - 1}{\Im(\varphi_0)} \right| \subset [1, 10]$$

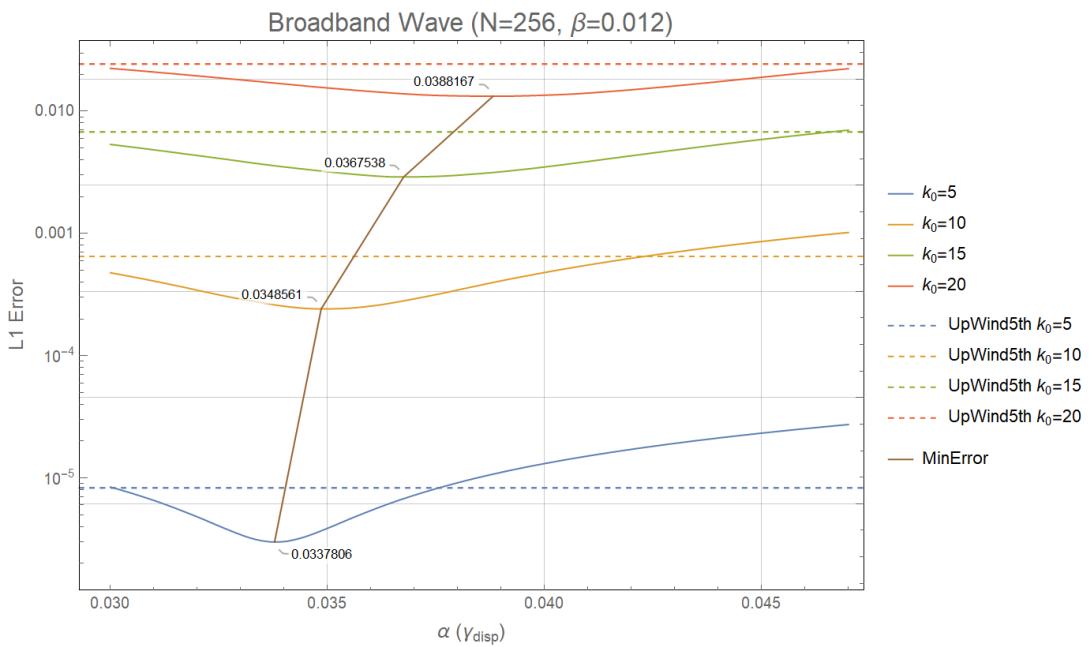
选取 $r(\varphi_0)=9$, $\alpha=\alpha(\nu=8)$, 其所要求的最小的耗散系数为 $\beta=0.012$ 。具体的，该系数的确定很大程度上依据于实际应用情况的经验处理。在下一节中，耗散系数使用0.012对其他参数进行优化，虽然此值不是 LAE 方程的最佳 MDCD4th 格式，依旧对于 Euler、NS 方程有指导意义。第三节中会对这种处理进行说明与调整。

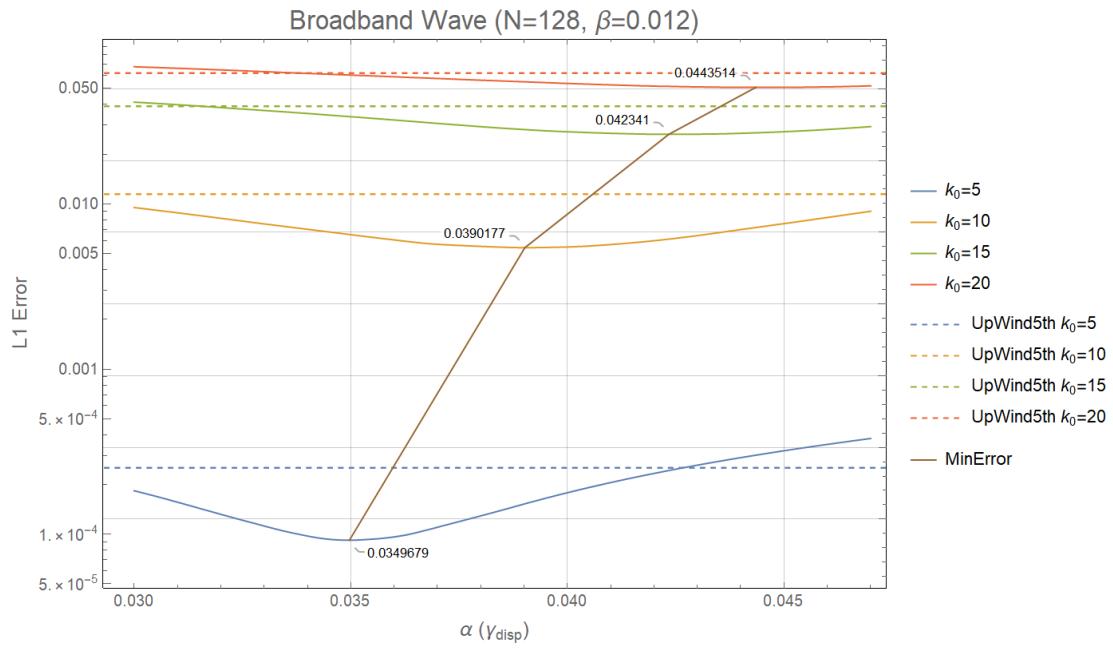
1.2 色散耗散系数算例分析

本报告中算例采用的是一维LAE的宽频波传播问题。具体的算例如下，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad x \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{N/4} \sqrt{E(k)} \sin(2\pi k(x + \psi_k)) \\ E(k) &= \left(\frac{k}{k_0}\right)^4 \exp\left(-2\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right) \\ \varepsilon &= 0.1, \quad \psi_k = \text{Rand}([0, 1]) \end{aligned}$$

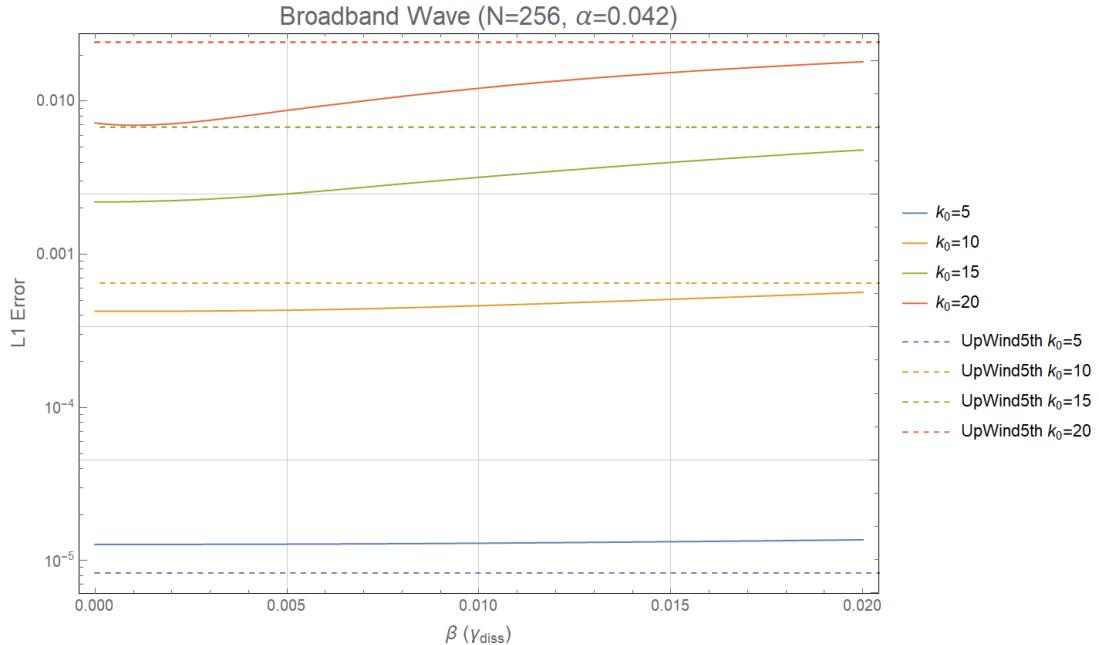
选取周期性边界条件。分别在网格数 $N=128, 256$ 考虑 $k_0=5, 10, 15, 20$ 情况。采用四阶龙格库塔时间推进，为减少时间项误差，CFL 取 0.3。计算时间为 1s，即沿求解域传播一整个周期。采用一范数误差，具体计算结果误差分析如下，

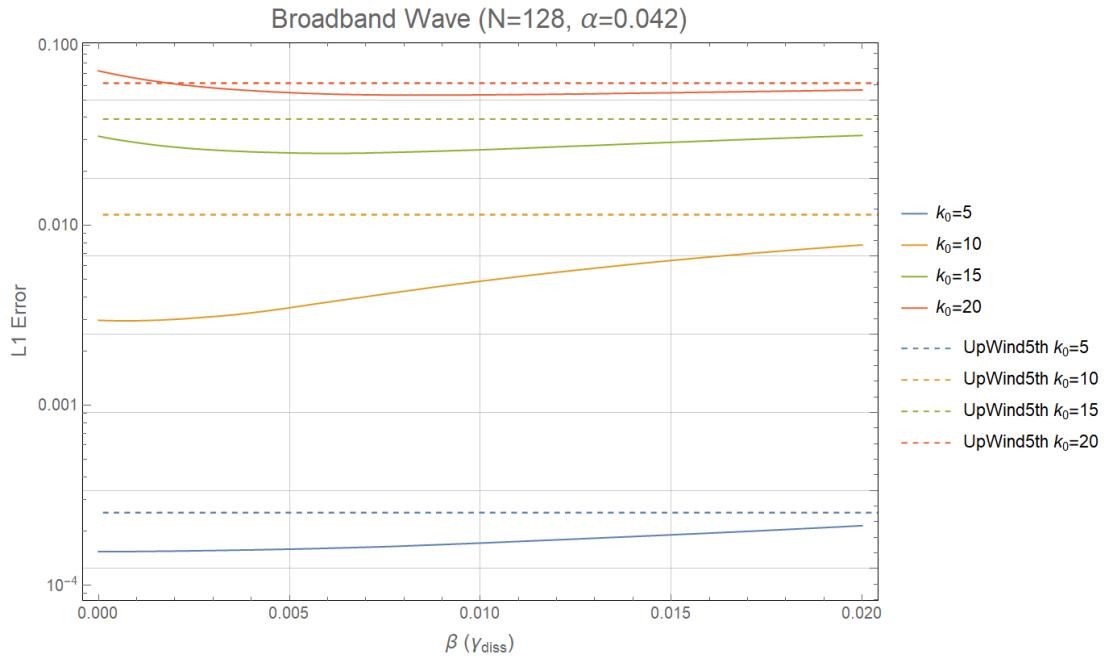




可见，随着高波数成分的增加，最优色散系数会随之增加。这在之前的色散性质曲线中是可以预见的。当 ν 较大时，色散系数所对应的色散性质曲线在大尺度区域会贴合理论值更好。总体上，在算例所及的 k_0 取值中，色散系数的取值在 0.032 到 0.042 的区间内都能达到优于五阶迎风格式的计算精度。

此外，对于耗散系数，由于 LEA 即线性对流方程具备很好的线性性，其非物理震荡的幅度极为有限，稳定性较高。对于计算结果与理论精确解比较，以下为不同耗散系数的一范数误差图，





可见对于 k_0 取 5、10 时，误差线随着耗散系数的增加而单调增加。当小尺度成分明显时，由于 MDCD4th 的色分辨能力有限，小尺度波的群速度和相速度都无法计算准确，因此选取较大的耗散系数将产生误差的频段抹平将对整体准确度将起到正面效果。这也就解释了 k_0 较大时，存在一个最小误差对应的色散系数。特别的，由于五阶迎风格式具有较大耗散，进而整体上五阶迎风格式在此时准确度相对较差。

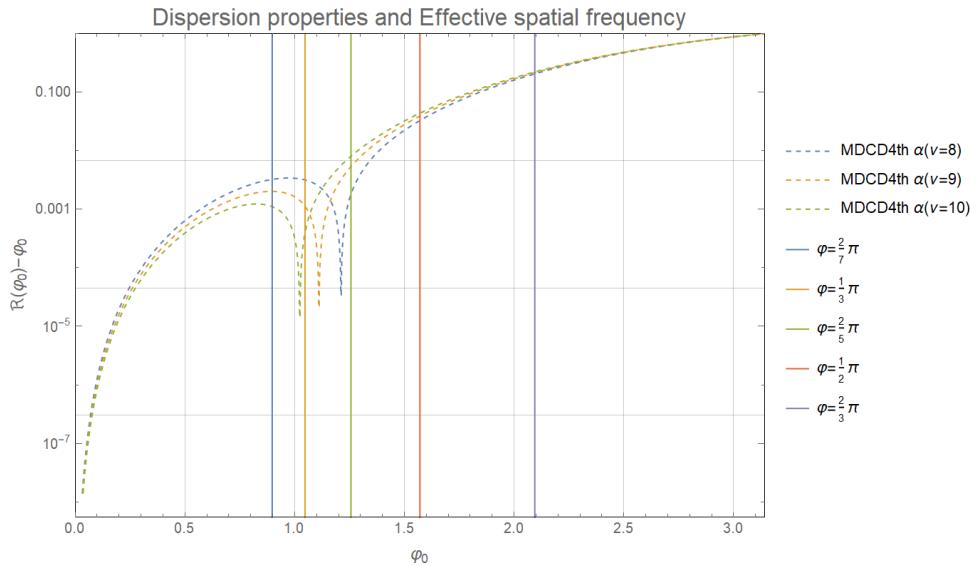
1.3 改进思路

由之前 MDCD4th 的表现分析，MDCD4th 格式的性质取决于耗散色散参数的选取。而耗散参数与实际求解问题的频谱相关。相应的，耗散系数的选取也与需要抹平的高波束成分比例相关。此时，需要定义问题的尺度即频谱特性便成为了相对关键的问题。本报告中提出一种全场的尺度定义方案，至于向局部引申，需要更为细致的分析。

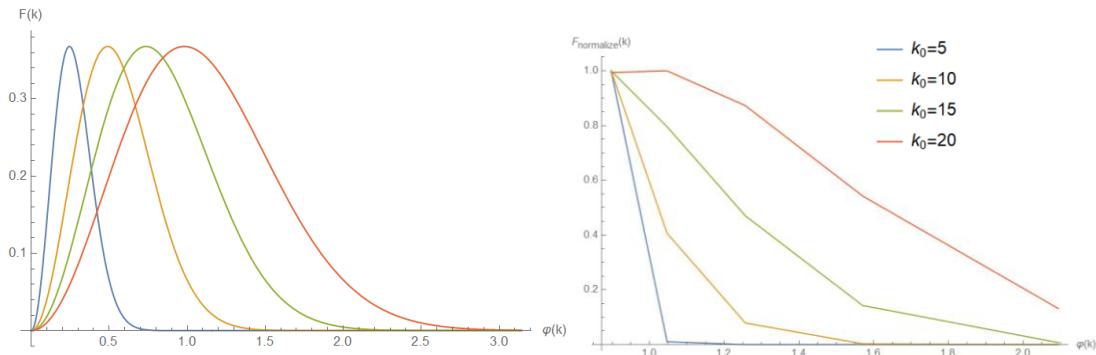
考虑七格点格式的实际分辨能力，理论上由正弦波拟合可以构造出 10 个有效基函数。然而由于模板格点数目过少，误差较大，因此考虑全场的傅里叶变换。注意此处不是严格意义上的离散傅里叶变换，而仅仅是对应 10 个基函数的傅里叶变换。这种非严格的傅里叶变换可以在节省计算量的同时提供较丰富的有用信息。然而由于色散性质与模板点个数对应的基函数不完全匹配，进而需要对大尺度进行额外取点。相反的由于采样定理的限制，小尺度区域是有相速度极限的，因此对于极限波数并不应增添权重。进而，这十个基函数对应分辨的五种等效空间频率即，

$$\varphi = \left\{ \frac{2}{7}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi \right\}$$

对于色散特性曲线的部分为，



分析之前算例结果，对于如下频谱图像，我们可以对于理论傅里叶变换结果进行分析。同时对于计算的对应10个基函数的五个模长进行归一化。得到下图结果。



下一步，我们将构建归一化后的频谱空间模长与MDCTD4th色散参数的关系。即

$$\alpha = \alpha[F_{normalize}(\varphi)]$$

该公式的具体形式是一个四自由度的优化问题。注意到，该公式仅能提供连续的频谱特性所反映出的实际尺度大小。

同时由于FFT的窗口大小的问题，一般的，该方法仅能应用到全局之中，调整整个算例的最佳色散系数。然而如果采用小波的方式获取局部的基函数分解，则可以对于局部的尺度进行定义。如果采用FFT算法，其计算消耗将有可能低于尺度识别器的计算消耗。然而具体的计算量仍取决于色散系数与频谱对应关系的公式的具体形式。

2. NACA0012的可压缩绕流

我们使用有限体积方法求解二维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}|_{i,j} = -\frac{1}{\Omega_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{F}n_{k,x} + \mathbf{G}n_{k,y})$$

空间离散采用FDS格式和Jameson中心格式，时间推进采用四阶Runge-Kutta方法。将来流 $Ma = 0.4, 0.8, 1.2$ (对应亚声速、跨声速和超声速) 情况下NACA0012翼型的绕流问题作为验证算例，考察了不同格式、不同网格量对计算得到的激波的影响。

2.1 数值方法

2.1.1 FDS格式

采用带minmod限制器的重构，即（使用简化版本，不采用特征变量）：

$$U_{i+1/2}^L = U_i + \frac{1}{2} \text{minmod}(U_i - U_{i-1}, U_{i+1} - U_i)$$

$$U_{i+1/2}^R = U_{i+1} - \frac{1}{2} \text{minmod}(U_{i+2} - U_{i+1}, U_{i+1} - U_i)$$

通过上述重构得到界面左右状态之后，在界面处求解 扩张一维 Euler方程，得到 $t > t_n$ 时刻 Riemann 问题的解，从而计算界面处的数值通量。我们使用 Roe 格式求解 Riemann 问题。首先使用重构得到的左右状态，计算界面处变量的 Roe 平均：

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\ \tilde{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{v} &= \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ H &= E + p/\rho\end{aligned}$$

然后依照下面方法计算界面处的数值通量：

$$\mathbf{H}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}(U_{i+1/2}^L) + \mathbf{H}(U_{i+1/2}^R)] - \frac{\Delta l_{i+1/2,j}}{2} \sum_k \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) n_x + \mathbf{G}(\mathbf{U}) n_y$$

$$\mathbf{R}_1 = |\tilde{V} - \tilde{a}| \left(\frac{\Delta p - \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta V}{2\tilde{a}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{a} n_x \\ \tilde{v} - \tilde{a} n_y \\ \tilde{H} - \tilde{a} \tilde{V} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = |\tilde{V}| \left\{ \left(\frac{\Delta \rho \tilde{a}^2 - \Delta p}{\tilde{a}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)/2 \end{pmatrix} + \tilde{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v + \tilde{w} \Delta w - \tilde{V} \Delta V \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{R}_3 = |\tilde{V} + \tilde{a}| \left(\frac{\Delta p + \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta V}{2\tilde{a}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a} n_x \\ \tilde{v} + \tilde{a} n_y \\ \tilde{H} + \tilde{a} \tilde{V} \end{pmatrix}$$

其中， $\tilde{(\cdot)}$ 为界面处Roe平均的值， $\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$ ， $V = un_x + vn_y$ 。

2.1.2 中心格式

使用Jameson中心格式计算界面处的通量。通量的表达式如下：

$$\mathbf{H}_{i+1/2,j} = \mathbf{H} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i,j} + \mathbf{U}_{i+1,j}) \right] - \mathbf{D}_{i+1/2,j}$$

$$\mathbf{D}_{i+1/2,j} = \Lambda_{i+1/2,j}^S [\epsilon^{(2)} (\mathbf{W}_{i+1,j} - \mathbf{W}_{i,j}) - \epsilon^{(4)} (\mathbf{W}_{i+2,j} - 3\mathbf{W}_{i+1,j} + 3\mathbf{W}_{i,j} - \mathbf{W}_{i-1,j})]$$

$$\epsilon^{(2)} = k^{(2)} \max(\gamma_i, \gamma_{i+1})$$

$$\epsilon^{(4)} = \max[0, (k^{(4)} - \epsilon_{i+1/2}^{(2)})]$$

$$\gamma_i = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}$$

$$\Lambda_{i+1/2,j}^S = (\Lambda_{i+1/2,j}^I + \Lambda_{i+1/2,j}^J)$$

$$\Lambda_{i+1/2,j}^I = (|V|_I + a) \Delta l_I, \quad \Lambda_{i+1/2,j}^J = (|V|_J + a) \Delta l_J$$

引入四阶和二阶人工粘性项，用通量的雅可比矩阵谱半径来调制人工粘性的大小；通过压力开关函数控制二阶粘性项在流动变量梯度较大的地方开启，在流动梯度较小的地方关闭；控制四阶粘性项在流动变量梯度较小的地方开启。本次计算中取二阶、四阶粘性项系数分别为：

$$k^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad k^{(4)} = \frac{1}{64}$$

2.1.4 时间推进

使用四阶Runge-Kutta方法进行时间推进：

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(n)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{\Omega} \mathbf{P}^{(n)}$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(n)} - \alpha_2 \frac{\Delta t}{\Omega} \mathbf{P}^{(1)}$$

$$\mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}^{(n)} - \alpha_3 \frac{\Delta t}{\Omega} \mathbf{P}^{(2)}$$

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)} - \alpha_4 \frac{\Delta t}{\Omega} \mathbf{P}^{(3)}$$

CFL数、各次推进时所用的 α 采用推荐值^[2]，如下所示：

$$CFL = 0.92, \quad \alpha_1 = 0.1084, \quad \alpha_2 = 0.2602, \quad \alpha_3 = 0.5052, \quad \alpha_4 = 1.000$$

我们通过类比一维线性对流方程的CFL条件来 估计 时间推进步长：

$$\Delta t_{i,j} = CFL \frac{\Omega_{i,j}}{(\Lambda_{i,j}^I + \Lambda_{i,j}^J)}$$

其中I, J方向谱半径、控制体体积的计算方法如下：

$$\Lambda_{i,j}^I = (|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_I| + a) \Delta l_I, \quad \Lambda_{i,j}^J = (|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_J| + a) \Delta l_J$$

$$\mathbf{n}_I = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2), \quad \mathbf{n}_J = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4)$$

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{2} |\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|$$

其中， \mathbf{V} 、 a 为控制体形心处速度矢量和声速。 \mathbf{n} 为控制体各个界面的法向量， \mathbf{d} 为控制体对角线向量，具体意义如Fig 2.1所示。

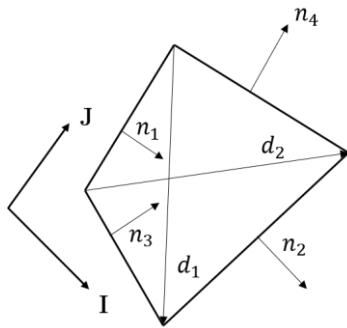


Fig 2.1 控制体内各个向量的定义

使用上述方法会在不同控制体上计算出不同的时间推进步长。在实际时间推进时，我们可以令每个控制体都在时间方向上推进相同的步长，并取为当前计算出的所有控制体对应的时间推进步长中的最小值（被称为全局时间步长）作为这个步长，即：

$$\Delta t = \min_{i,j} (\Delta t_{i,j})$$

对于定常问题，我们还可以将每个控制体对应的时间步长计算值作为该控制体的时间推进步长。这会导致不同控制体在时间方向上向前推进的步长各不相同。采用局部时间步长往往可以加快收敛。

当前一次迭代的结果和后一次迭代的结果满足下面关系时，我们认为迭代收敛：

$$\max_{i,j} (\| \mathbf{U}_{i,j}^{(n+1)} - \mathbf{U}_{i,j}^{(n)} \|_{\infty}) < 0.005$$

然而在实际操作中，我们一般设置迭代步数，并输出用于续算的数据文件Restart.dat。如果设置的迭代步数不能使得误差满足上述条件，则控制程序读取Restart.dat进行续算，直到满足上述收敛条件为止（这样做是因为我们并不清楚迭代是否可以收敛）。实践证明，若使用局部时间步长，则对于细网格，800步迭代一般可以达到收敛；对于粗网格，600步迭代一般可以达到收敛。

2.1.5 边界条件

将边界处的欧拉方程简化为扩张一维欧拉方程，仅考虑F通量，从而通过特征分析的方法求得边界通量。在壁面边界处，由于只有一条特征线指向域内，故只提一个边界条件，即：

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$$

其他物理量则根据内点处的物理量得到：

$$V_n - \frac{2a}{\gamma-1} = V_n^* - \frac{2a^*}{\gamma-1}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p^*}{\rho^{*\gamma}}$$

$$V_t = V_t^*$$

其中不带 * 的量为待确定的边界值，带 * 的量为从内点处插值得到的边界值。上述四式的含义是：第一波特征和第一、第二流特征由内点插值确定，第二波特征由物理条件 ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$) 确定。在本次计算中采用线性插值，即：

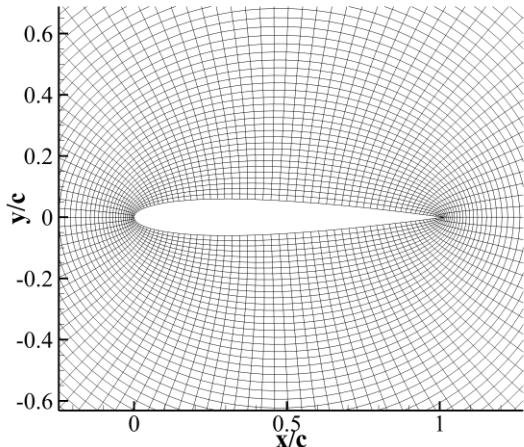
$$\mathbf{U}^* = 1.5\mathbf{U}_1 - 0.5\mathbf{U}_2$$

根据上述关系即可解出边界处流动变量的值。我们使用同样的方法处理远场边界，只是在处理前需要判断边界为出口边界还是进口边界、是超声速边界还是亚声速边界。具体判断和处理的方法如下表所示：

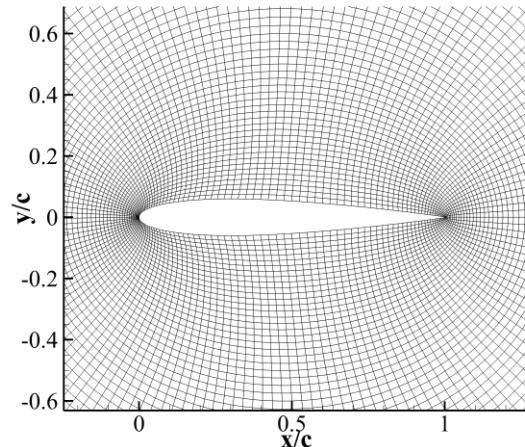
	$ V_n > a_\infty$	$ V_n < a_\infty$
$V_n > 0$	超声速出口，边界所有值都由内点插值得到。	亚声速出口，第一波特征和第一、第二流特征均由来流条件确定，第二波特征由内点值插值得到。
$V_n < 0$	超声速进口，边界所有值都由给定的来流条件相同	亚声速出口，第二波特征和第一、第二流特征均由内点值插值得到，第一波特征由来流条件确定。

Chart 1. 不同情况下的边界处理

2.1.6 计算网格



(a) 粗网格, 120×80



(b) 细网格, 160×112

Fig 2.2 不同密度的计算网格

考虑到我们求解的是Euler方程，即便近壁网格较粗也无妨（因为不需要解析边界层），因此我们使用不带网格加密的、正交性较好的O网格。使用自编的Winslow-nosource.exe生成两套网格量不同的

NACA0012翼型O网格，其中粗网格在翼型周向上布置120个控制体，在翼型法向上布置80个控制体；细网格在翼型周向上布置160个控制体，在法向上布置112个控制体（这使得细网格的控制体数目大约是粗网格的两倍）。两套网格如Fig 2.2所示。

2.2 算例验证

2.2.1 $M=0.4, \alpha=1.25^\circ$

该工况下流场中不会产生激波，故我们不必探讨网格量对激波解析程度的影响。为此，我们只使用细网格进行计算，计算结果如Fig 2.3和Fig 2.4所示。

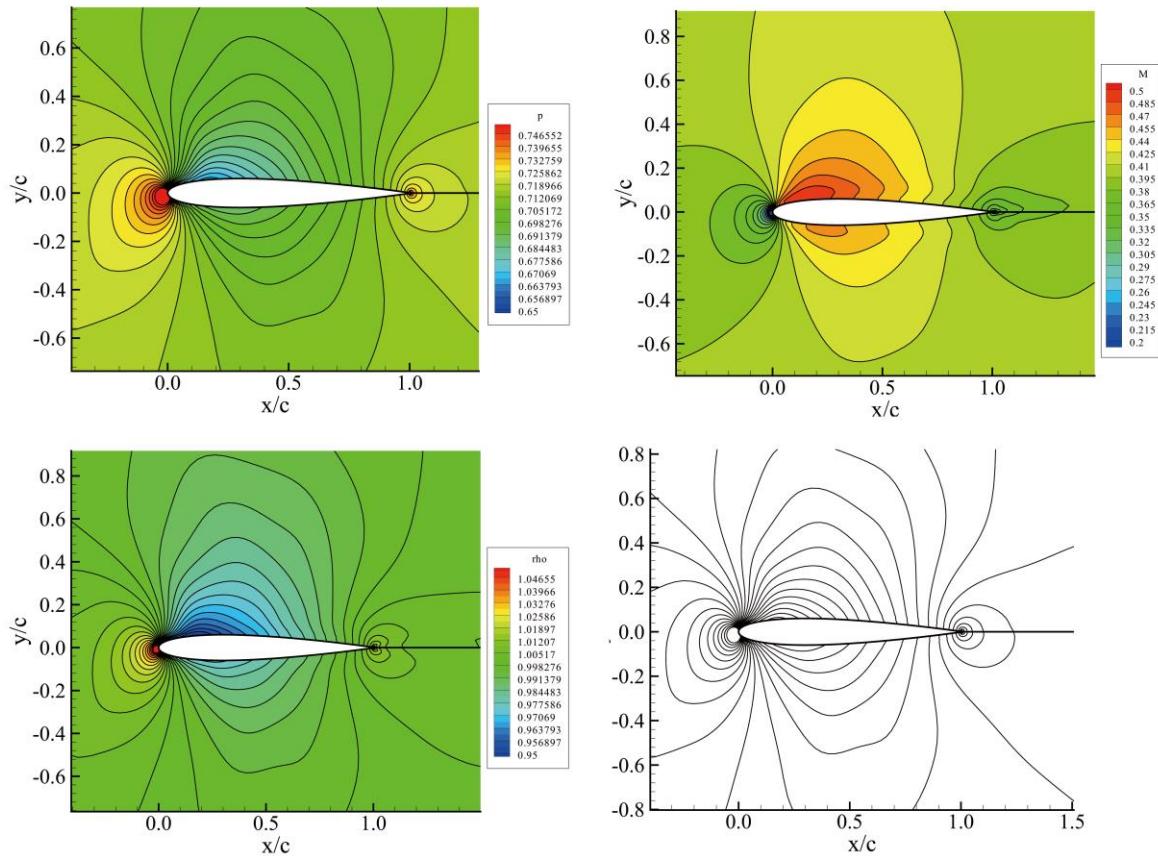
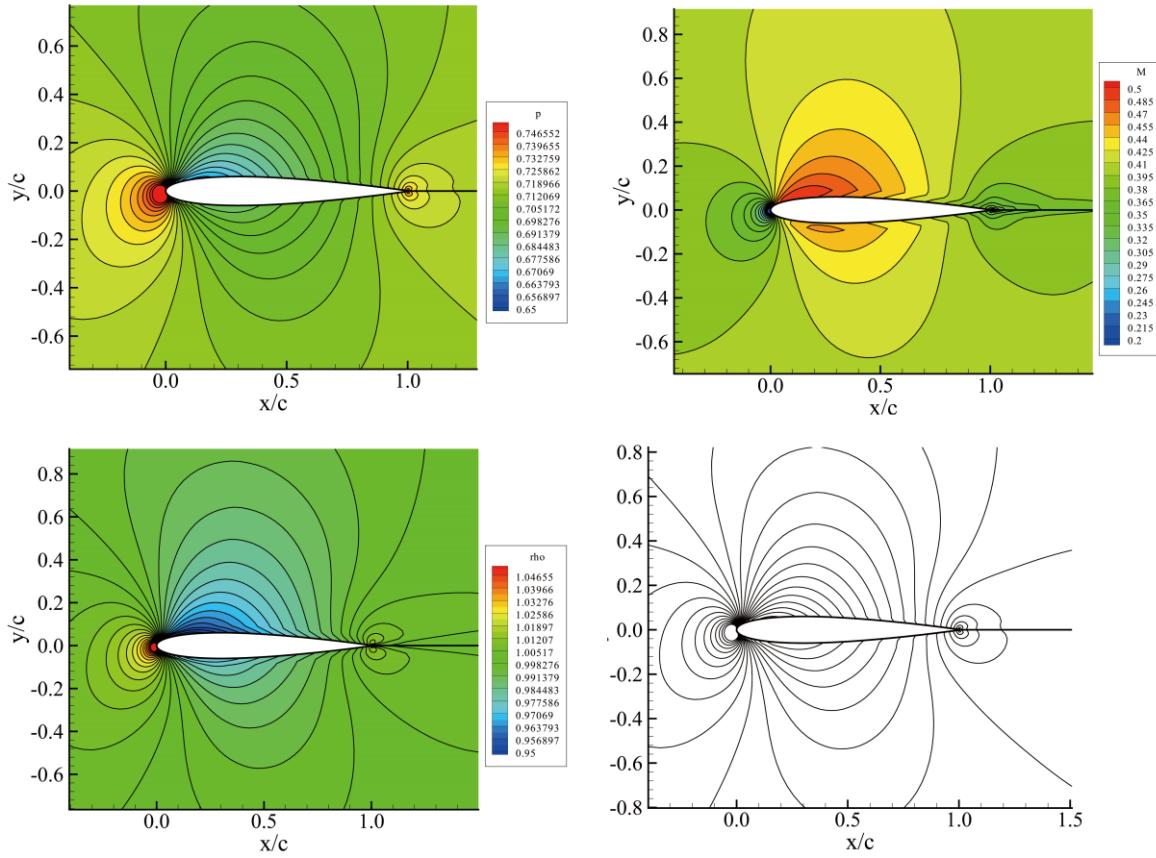


Fig 2.3 $M = 0.4$, Jameson中心格式

Fig 2.4 $M = 0.4$, TVD+Roe格式

从上面两图可以看到, Jameson中心格式和TVD+Roe格式给出了相似的结果, 且都捕捉到了翼型前缘的驻点(可以看到两种方法算出的压力、密度均在前缘取最大值)、前缘上表面流动的加速(两种方法均得到上表面前缘附近流体压力小、密度低, 且局部马赫数取得最大值, 在0.5左右), 故计算结果合理。但是, 从以上两图右下角的压力分布等值线可以看出, TVD+Roe格式计算出的压力等值线比中心格式计算出的等值线更加光滑, 这应该是中心格式附带的人工粘性项和中心格式易产生震荡的特性造成的。

2.2.2 $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$

对于NACA0012翼型, 来流 $M = 0.8$ 时, 流场中已经出现激波, 翼型处于跨声速状态。我们使用不同格式、不同网格密度对流场进行计算, 考察计算对激波的捕捉效果。

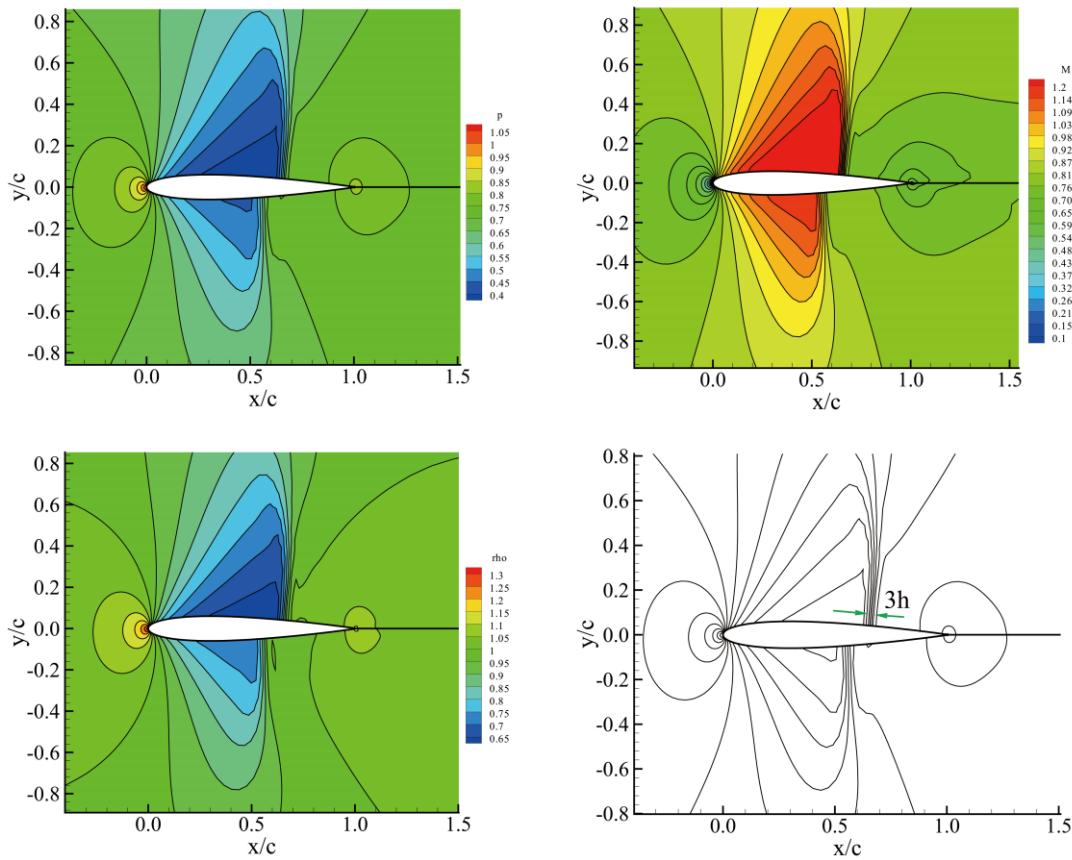
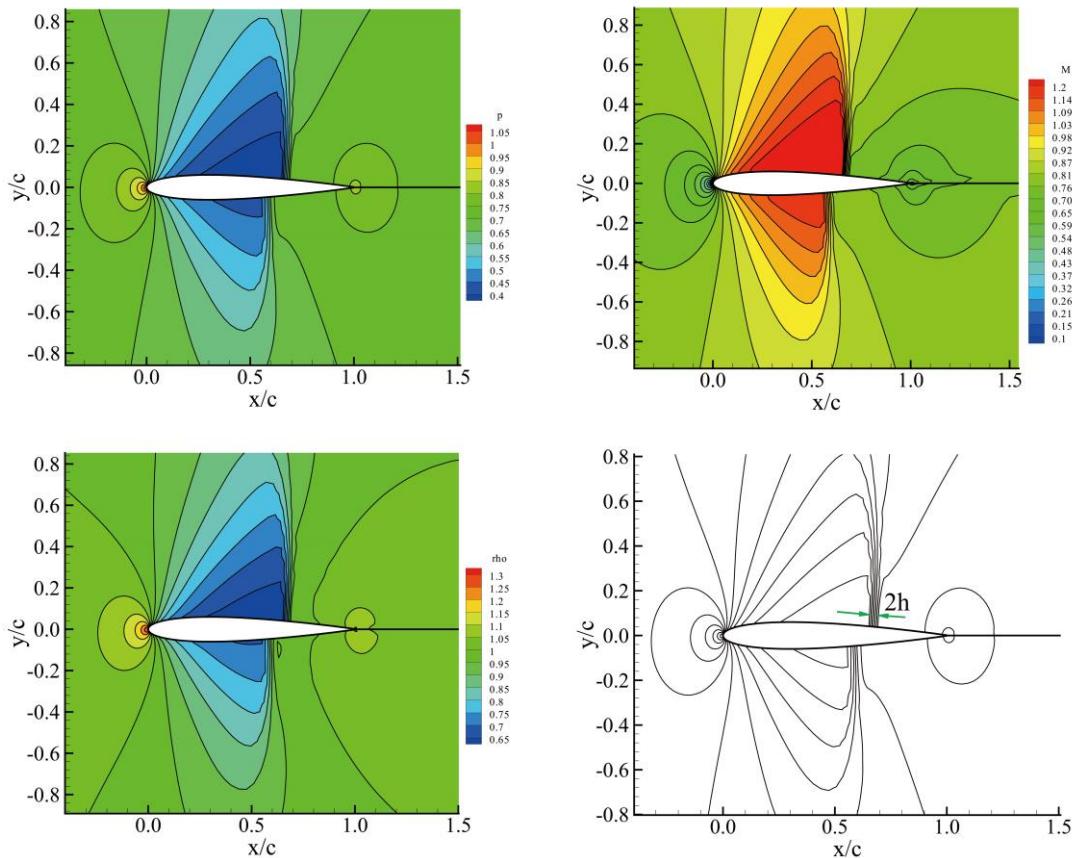
Fig 2.5 $M = 0.8$, Jameson 中心格式, 细网格Fig 2.6 $M = 0.8$, TVD+Roe 格式, 细网格

Fig 2.5和Fig 2.6显示了使用细网格（ 160×112 ）时Jameson中心格式和TVD+Roe格式的计算结果。可以看到，二者计算的激波位置几乎没有区别，即，上表面激波处于65%弦长处，下表面激波处于50%弦长处，这和文献结果相近^{[3][4]}。另外可以看到，在两种格式的计算结果中，激波后都出现了轻微的伪震荡。但是，从Fig 2.5和Fig 2.6右下角的图中可以看出，Jameson中心格式捕捉的激波大约有3个网格宽（在图中标记为 $3h$ ， h 代表网格宽度），TVD+Roe格式捕捉的激波大约有2个网格宽（在图中标记为 $2h$ ， h 代表网格宽度），因此可以认为，Jameson中心格式对激波的抹平效应要略强于TVD+Roe格式。

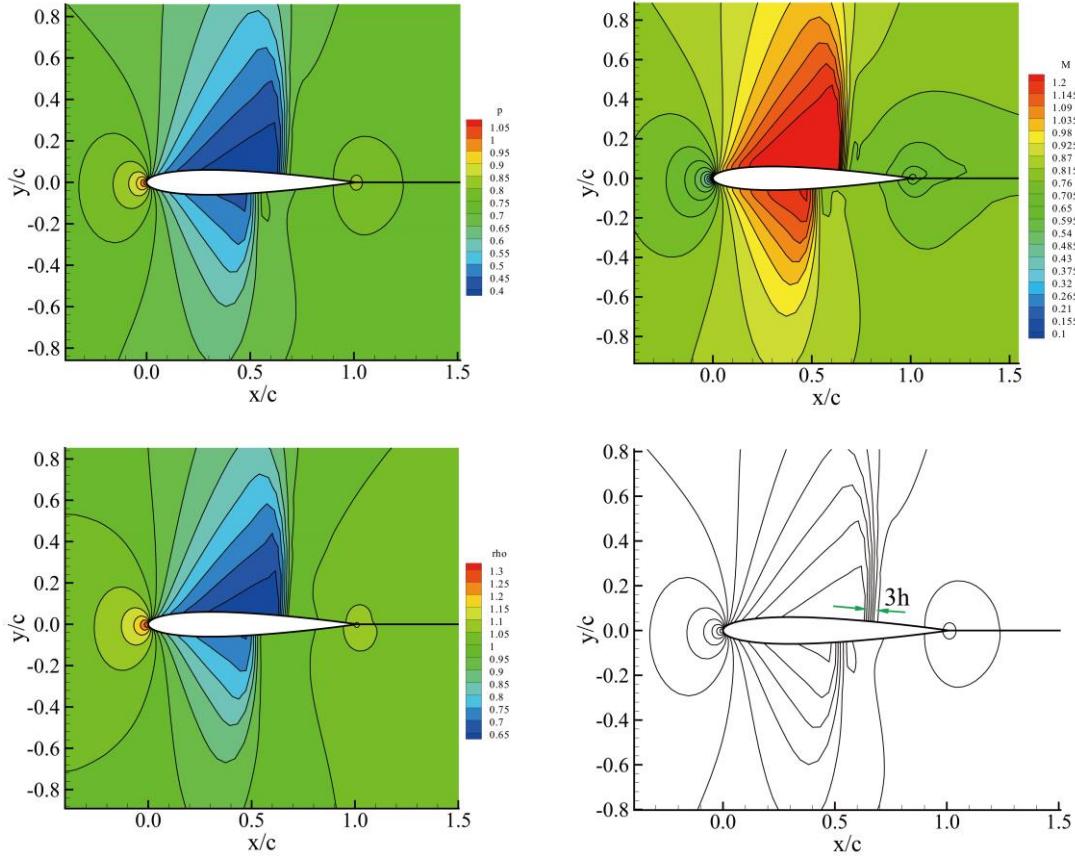


Fig 2.7 $M = 0.8$, Jameson中心格式, 粗网格

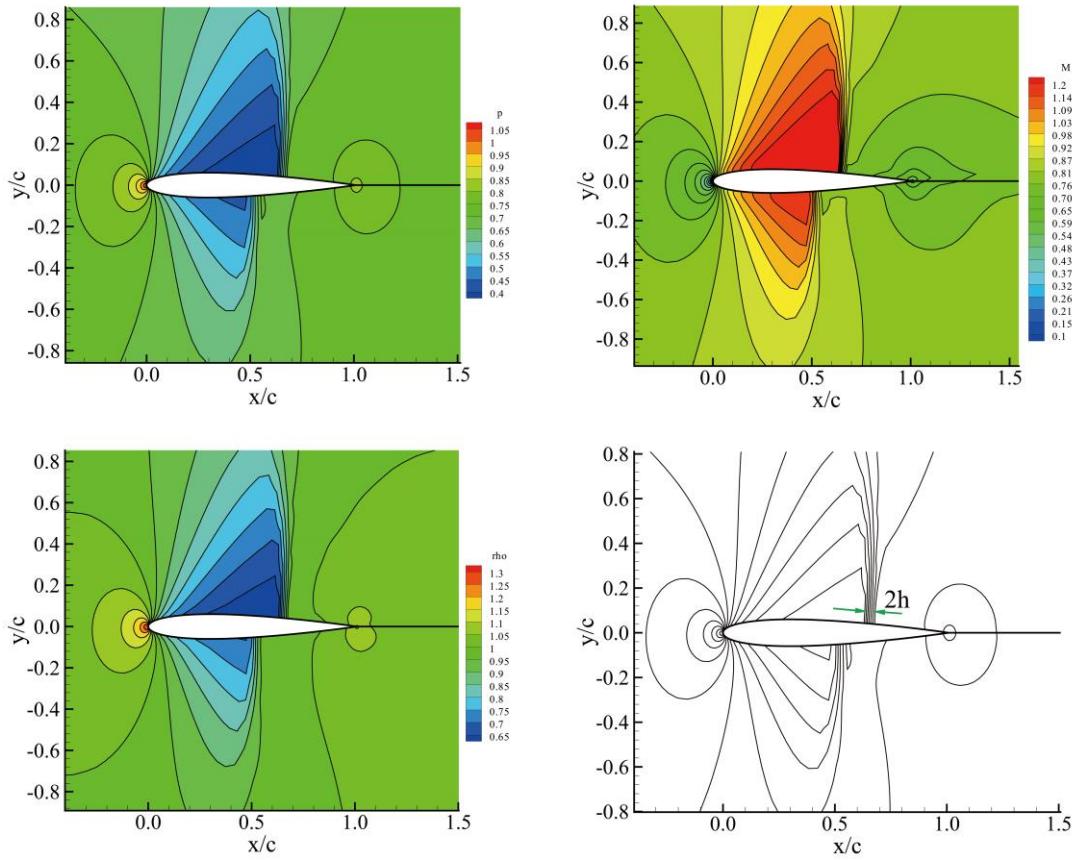
Fig 2.8 $M = 0.8$, TVD+Roe格式, 粗网格

Fig 2.7和Fig 2.8显示了使用粗网格 (120×80) 时Jameson中心格式和TVD+Roe格式的计算结果。

可见激波位置等特征与使用细网格时的计算结果非常相似。另外, Jameson中心格式捕捉的激波宽度仍约为3个网格宽, TVD+Roe格式则约为2个网格宽。与细网格计算结果不同的是, 使用粗网格时, Jameson格式计算出激波后出现了比较明显的伪震荡 (由Fig 2.7右上图马赫数等值线可以看出), 而TVD+Roe格式的伪震荡则很小。

综合以上分析可以得到, 使用相同格式计算跨声速工况时, 激波的宽度大致与网格尺度成正比。另外, TVD+Roe格式具有更好的捕捉激波的能力 (因为它捕捉的激波宽度更小), 且TVD+Roe格式更不易产生伪震荡。

2.2.3 $M=1.2$, $\alpha=1.25^\circ$

对于NACA0012翼型, 来流 $M = 1.2$ 时, 翼型前缘产生弓形的脱体激波, 尾缘产生斜激波。我们使用不同格式、不同网格密度对流场进行计算, 考察计算对两种激波的捕捉效果。

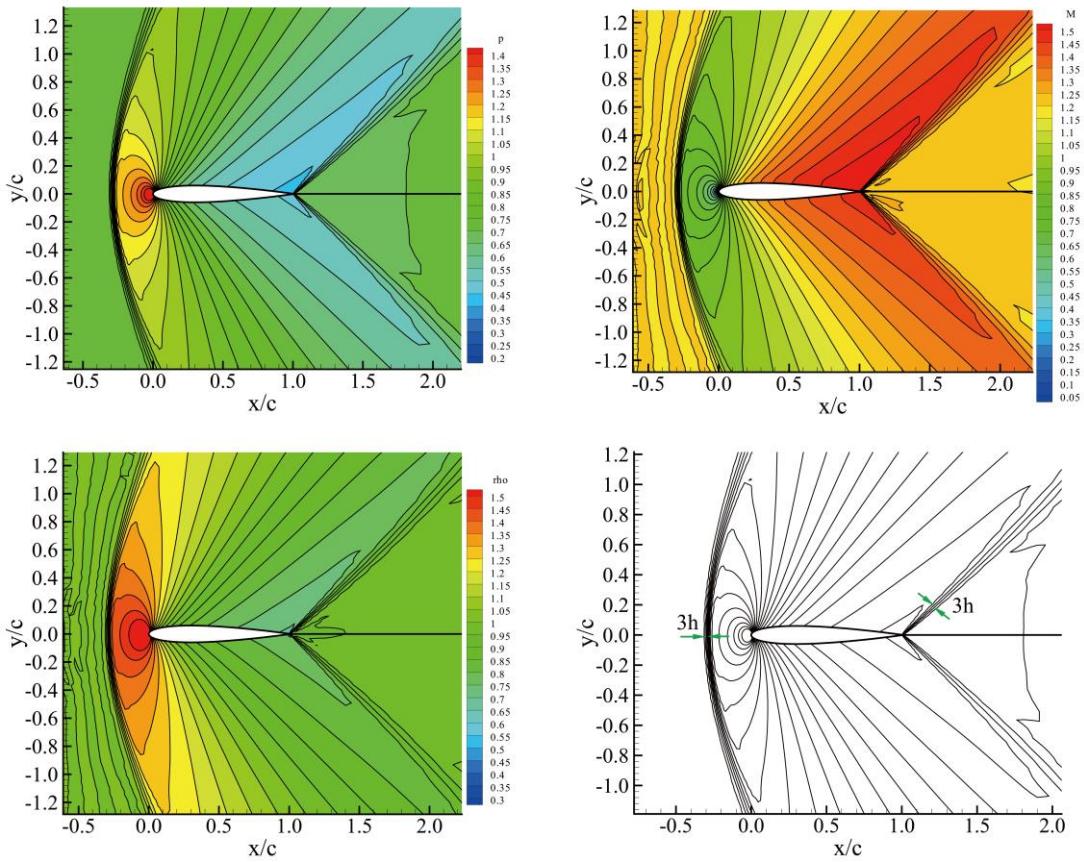
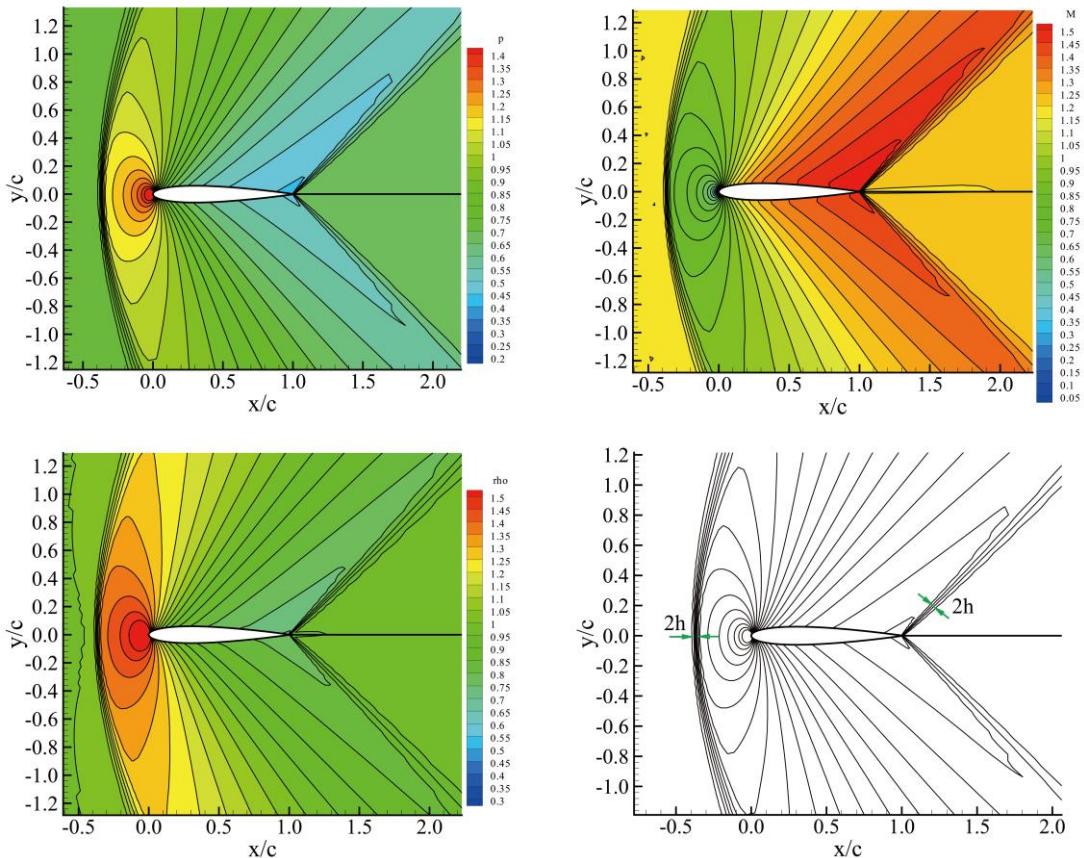
Fig 2.9 $M = 1.2$, Jameson中心格式, 细网格Fig 2.10 $M = 1.2$, TVD+Roe格式, 细网格

Fig 2.9和Fig 2.10显示了使用细网格(160×112)时Jameson中心格式和TVD+Roe格式的计算结果。可以看到, Jameson中心格式捕捉到的前缘脱体弓形激波比TVD+Roe格式捕捉到的要更加靠近翼型; 两种格式捕捉到的后缘斜激波的激波角相似, 均在 45° 左右。与跨声速情况相似, TVD+Roe格式捕捉的激波宽度在2个网格宽度左右, Jameson格式则在3个网格宽度左右。另一方面, 从Fig 2.9的右上图(Ma分布)和左下图(ρ 分布)看出, Jameson格式在激波前产生了强烈的数值震荡, 导致Ma等值线和 ρ 等值线 棋盘状 地分布, 还导致等值线不光滑。

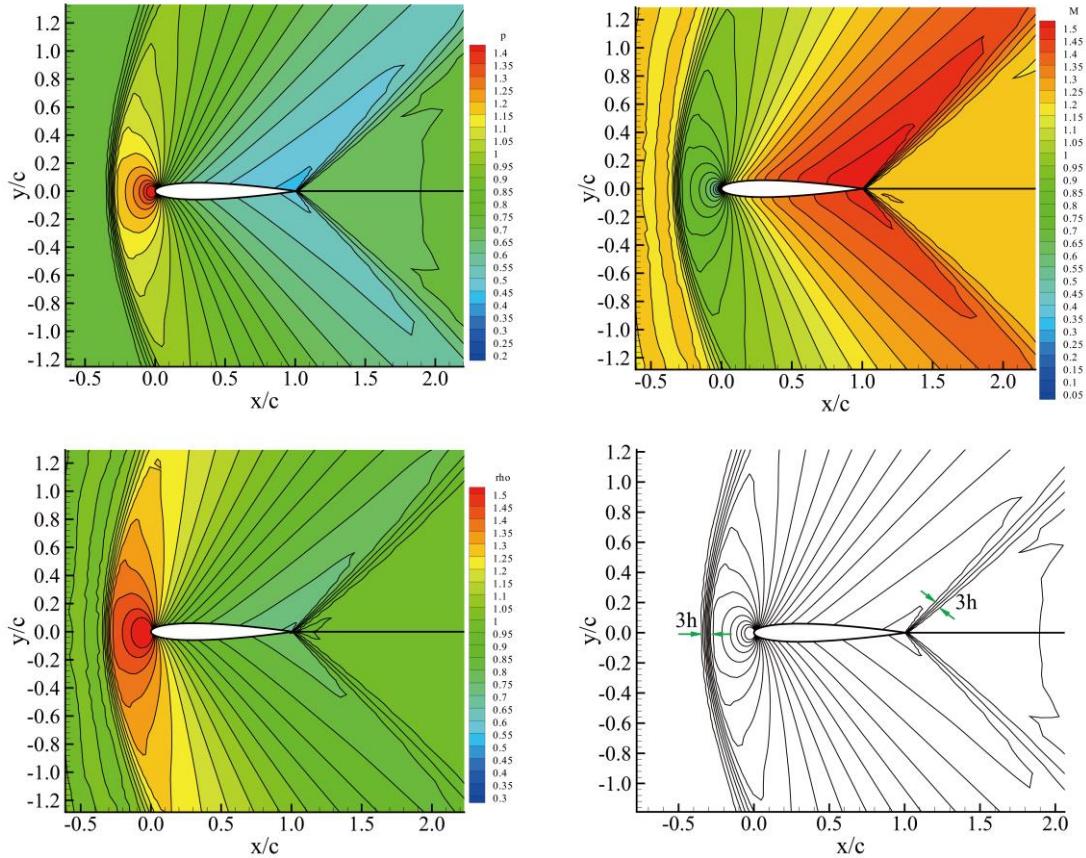


Fig 2.11 $M = 1.2$, Jameson中心格式, 粗网格

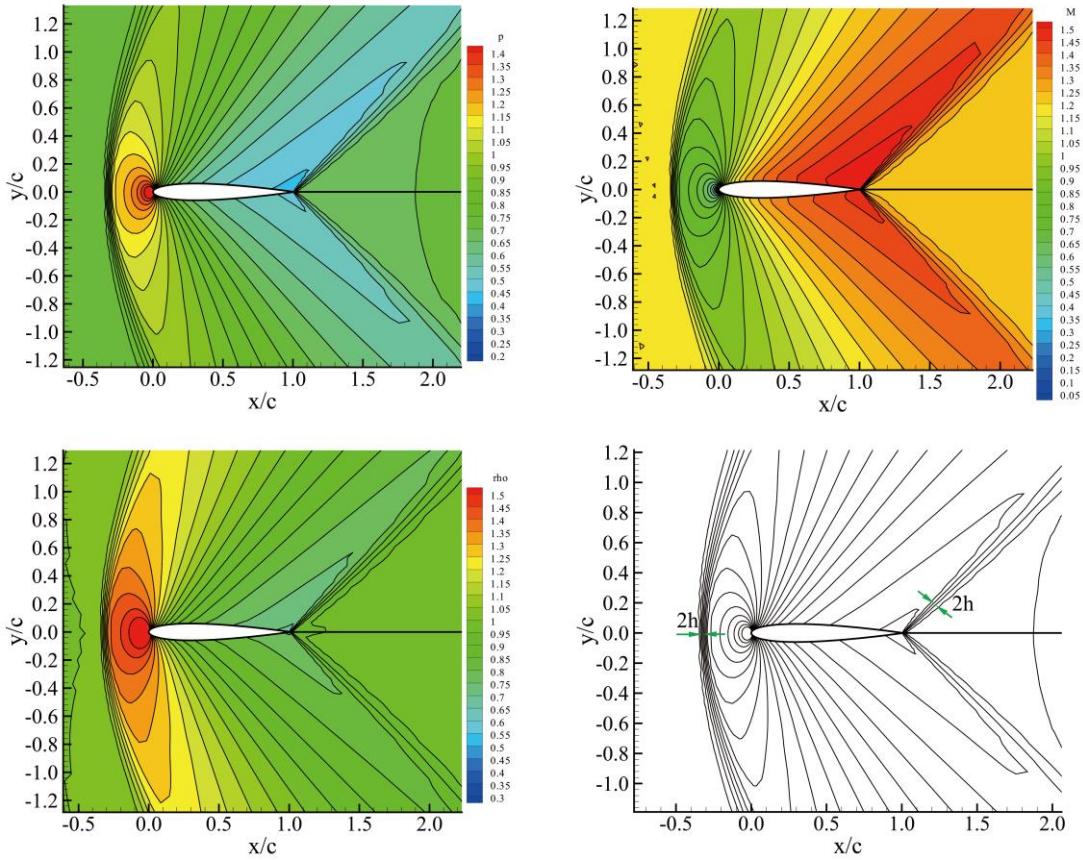
Fig 2.12 $M = 1.2$, TVD+Roe格式, 粗网格

Fig 2.11和Fig 2.12显示了使用粗网格(120×80)时Jameson中心格式和TVD+Roe格式的计算结果。

计算结果的特点和细网格时的类似，因此不再赘述。

从上面分析可知，超声速情况下，Jameson中心格式和TVD+Roe格式计算出的激波形态、激波位置相似。Jameson格式会在激波前产生强烈的伪震荡，而TVD+Roe格式却几乎不产生震荡。

2.2.4 局部时间步与全局时间步的对比

我们使用粗网格(120×80)计算来流 $M = 0.8$ 时NACA0012翼型的绕流，收敛条件为：

$$\max_{i,j} (\| \mathbf{U}_{i,j}^{(n+1)} - \mathbf{U}_{i,j}^{(n)} \|_\infty) < 0.005$$

二者的迭代步数如下表所示：

方法	局部时间步	全局时间步
迭代步数	800	3000+

Chart 2. 不同方法的迭代步数

从上表可以看出，使用局部时间步，计算收敛的速度明显快于使用全局时间步时的速度（使用全局时间步计算3000步后停止计算，这时结果仍未收敛。但这已经足以证明全局时间步的收敛速度极慢）。

3. 方腔驱动流

3.1 问题介绍

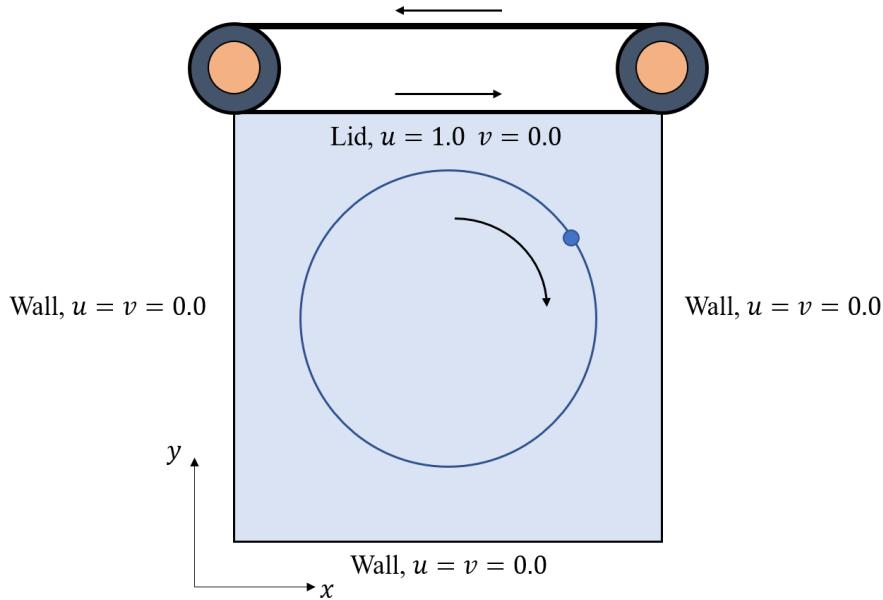


Fig 1. Problem description

截面为正方形，垂直纸面深度远大于截面尺度的方腔内充满不可压缩流体。截面的底部、左右侧均为固壁，传送带充当顶盖，如Fig 1.所示。传送带逆时针转动时，腔内流体在传送带的驱动下流动，且由无滑移假设，流体在顶盖处的流速与传送带运动速度相同，在其它边界处速度处处为0。我们的问题是：在顶盖的驱动下，方腔内的不可压缩流体会做怎样的流动？已知截面边长为 l ，传动带速度为 U 。

由问题描述可知，问题的控制方程为二维不可压缩流体的N-S方程。为了求解过程更加清晰，我们使用 l 和 U 对坐标和速度进行无量纲化，用常密度 $\tilde{\rho}$ 和 U 对密度以及压力进行无量纲化。上方带有 \sim 号的量为有量纲量，无量纲化方法如下：

$$x = \frac{\tilde{x}}{l}$$

$$y = \frac{\tilde{y}}{l}$$

$$p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho} U^2}$$

$$\rho = 1$$

定义雷诺数为 $Re = \frac{\tilde{\rho} U L}{\mu}$ ，则无量纲化的二维不可压缩流体N-S方程可写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

边界条件为：

$$u(1, y) = v(1, y) = u(0, y) = v(0, y) = u(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

$$u(x, 1) = 1 \quad v(x, 1) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

求解上述方程，便可以得到方腔内的速度场。

3.2 数值方法

3.2.1 SIMPLE算法

~ 将非线性项离散，进行一次时间推进：

$$\frac{\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = -\mathbf{U}^n \cdot \nabla \mathbf{U}^n$$

得到 \mathbf{U}^*

~ 将粘性项离散，再进行一次时间推进：

$$\frac{\mathbf{U}^{**} - \mathbf{U}^*}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U}$$

得到 \mathbf{U}^{**}

~ 对压力进行修正，并进行时间推进，从而得到 \mathbf{U}^{n+1} 。对压力的修正思路源于此次时间推进的方式，修正思路如下^[5]：

我们希望进行如下时间推进：

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{**}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}$$

而且，我们希望保证得到的 \mathbf{U}^{n+1} 场的散度为 0。对上式求散度并带入 $\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0$ ，我们得到：

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{U}^{**}$$

求解这个泊松方程，我们便得到了能够使 $\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0$ 的压力场，因此在时间推进后得到的速度场满足连续方程。

下面将分步详细介绍数值方法。

3.2.2 交错网格

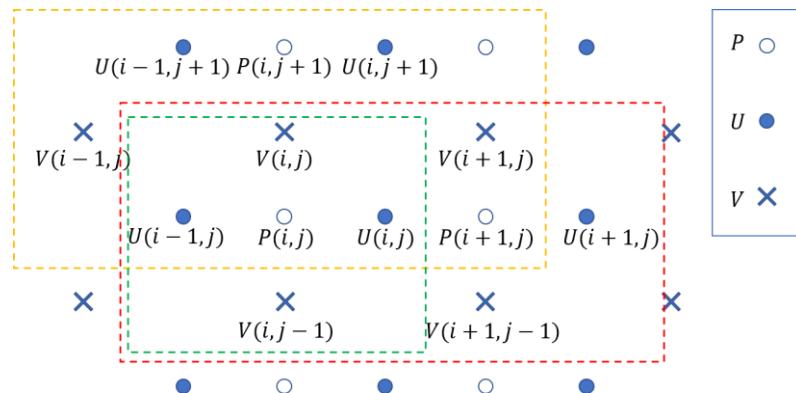


Fig 2. Staggered grid and stencil

计算使用的交错网格如Fig 2.所示。储存 P, U, V 的网格点均匀分布，且储存 U 的网格点分布在储存 P 的网格点的东西两侧，储存 V 的网格点分布在储存 P 的网格点的南北两侧。采用这样的交错网格便于我们计算动量方程中的非线性通量。

3.2.3 非线性项的离散

为了进行第一次时间推进：

$$\frac{\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = -\mathbf{U}^n \cdot \nabla \mathbf{U}^n$$

需要计算非线性项 $\mathbf{U}^n \cdot \nabla \mathbf{U}^n$ 。采用迎风、守恒格式对非线性项进行离散。下面以 x 方向非线性对流项为例，介绍非线性项的离散方法。 x 方向非线性对流项可写为：

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}$$

使用中心差分近似对流项在 (i, j) 位置的值：

$$convection_x = \frac{(UU)_{i+1/2,j}^n - (UU)_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{(UV)_{i,j+1/2}^n - (UV)_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}$$

这需要用到 U, V 在 $(i + \frac{1}{2}, j)$, $(i - \frac{1}{2}, j)$, $(i, j + \frac{1}{2})$, $(i, j - \frac{1}{2})$ 位置的值。采用平均的方法得到这些位置处的 U, V 值：

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j}^n &= \frac{U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{2} \\ U_{i-1/2,j}^n &= \frac{U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{2} \\ U_{i,j+1/2}^n &= \frac{U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{2} \\ U_{i,j-1/2}^n &= \frac{U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{2} \\ V_{i,j+1/2}^n &= \frac{V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{2} \end{aligned}$$

$$V_{i,j-1/2}^n = \frac{V_{i,j-1}^n + V_{i+1,j-1}^n}{2}$$

我们不直接使用这些值计算对流项，而是使用迎风方法($(i - \frac{1}{2}, j)$, $(i, j - \frac{1}{2})$ 处的值类似):

$$(UU)_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} U_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{1+\gamma}{2} U_{i,j}^n + \frac{1-\gamma}{2} U_{i+1,j}^n \right), & U_{i+\frac{1}{2},j}^n \geq 0 \\ U_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{1-\gamma}{2} U_{i,j}^n + \frac{1+\gamma}{2} U_{i+1,j}^n \right), & U_{i+\frac{1}{2},j}^n < 0 \end{cases}$$

$$(UV)_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{1+\gamma}{2} U_{i,j}^n + \frac{1-\gamma}{2} U_{i,j+1}^n \right), & V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{1-\gamma}{2} U_{i,j}^n + \frac{1+\gamma}{2} U_{i,j+1}^n \right), & V_{i,j+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}$$

其中， $\gamma = \min(\frac{1.2 \max(max_{i,j}(U), max_{i,j}(V)) \Delta t}{\Delta x}, 1)$, $\frac{\max(max_{i,j}(U), max_{i,j}(V)) \Delta t}{\Delta x}$ 衡量了 Δt 内信息传播的距离与网格间距 Δx 的比值，这个比值越大， γ 也就越大（但不会超过1），格式就更偏向全迎风格式；这个比值越小， γ 也就越小（但不会小于0），格式就更偏向中心格式^[6]。因此格式可以根据 Δt 内信息传播的距离自动调整迎风的程度。

类似地可以写出y方向非线性对流项的差分格式：

$$convection_y = \frac{(UV)_{i+1/2,j}^n - (UV)_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{(VV)_{i,j+1/2}^n - (VV)_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}$$

$$V_{i+1/2,j}^n = \frac{V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{2}$$

$$V_{i-1/2,j}^n = \frac{V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{2}$$

$$U_{i,j+1/2}^n = \frac{U_{i-1,j+1}^n + U_{i,j+1}^n}{2}$$

$$U_{i,j-1/2}^n = \frac{U_{i-1,j}^n + U_{i,j}^n}{2}$$

$$V_{i,j+1/2}^n = \frac{V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n}{2}$$

$$V_{i,j-1/2}^n = \frac{V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{2}$$

$$(UV)_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} U_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{1+\gamma}{2} V_{i,j}^n + \frac{1-\gamma}{2} V_{i+1,j}^n \right), & U_{i+\frac{1}{2},j}^n \geq 0 \\ U_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{1-\gamma}{2} V_{i,j}^n + \frac{1+\gamma}{2} V_{i+1,j}^n \right), & U_{i+\frac{1}{2},j}^n < 0 \end{cases}$$

$$(VV)_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{1+\gamma}{2} V_{i,j}^n + \frac{1-\gamma}{2} V_{i,j+1}^n \right), & V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{1-\gamma}{2} V_{i,j}^n + \frac{1+\gamma}{2} V_{i,j+1}^n \right), & V_{i,j+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}$$

计算出非线性对流项之后进行显式时间推进：

$$\frac{U_{i,j}^* - U_{i,j}^n}{\Delta t} = -\left(\frac{(UU)_{i+1/2,j}^n - (UU)_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{(UV)_{i,j+1/2}^n - (UV)_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}\right)$$

$$\frac{V_{i,j}^* - V_{i,j}^n}{\Delta t} = -\left(\frac{(UV)_{i+1/2,j}^n - (UV)_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{(VV)_{i,j+1/2}^n - (VV)_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}\right)$$

3.2.4 粘性项的处理

粘性项中的二阶导数全部使用中心差分格式处理:

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 U = \frac{1}{Re} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{Re} \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 V = \frac{1}{Re} \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{Re} \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

进行隐式时间推进并使用Crank-Nicolson方法:

$$\frac{U_{i,j}^{**} - U_{i,j}^*}{\Delta t} = \frac{1}{2Re} \left(\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)^*$$

$$+ \frac{1}{2Re} \left(\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)^{**}$$

$$\frac{V_{i,j}^{**} - V_{i,j}^*}{\Delta t} = \frac{1}{2Re} \left(\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)^*$$

$$+ \frac{1}{2Re} \left(\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)^{**}$$

求解时使用ADI方法: (记 $\mu_x = \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$)

$$1 - \frac{1}{2} \mu_x (U_{i+1,j}^\# - 2U_{i,j}^\# + U_{i-1,j}^\#) = 1 + \frac{1}{2} \mu_y (U_{i,j+1}^* - 2U_{i,j}^* + U_{i,j-1}^*)$$

$$1 - \frac{1}{2} \mu_y (U_{i,j+1}^{**} - 2U_{i,j}^{**} + U_{i,j-1}^{**}) = 1 + \frac{1}{2} \mu_x (U_{i+1,j}^\# - 2U_{i,j}^\# + U_{i-1,j}^\#)$$

根据上述方程, 使用Thomas算法分两步求解 U^{**} 。 V^{**} 的求解方法相同。

3.2.5 压力修正方法

我们希望压力场满足:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{U}^{**}$$

这是一个泊松方程, 我们仍然采用中心差分格式来求解:

$$\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{U_{i,j}^{**} - U_{i-1,j}^{**}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j}^{**} - V_{i,j-1}^{**}}{\Delta y} \right)$$

使用SOR方法求解该椭圆形方程, 松弛因子设置为1.5, 迭代收敛的判据是 $|max_{i,j} (U_{i,j}^{*,k+1} - U_{i,j}^{*,k})| < 10^{-4}$,

其中 $U_{i,j}^{*,k}$ 为第k次迭代得到的值。

3.2.6 边界条件设置

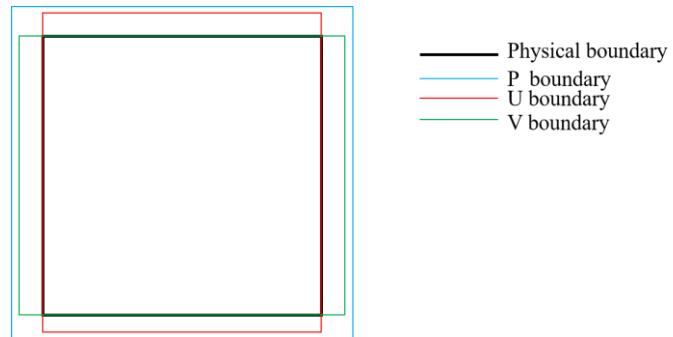


Fig 3. Boundary of the staggered grid

Fig 3. 显示了交错网格的边界与物理边界。可见，U网格的左右边界与物理边界重合，上下边界各有一层网格点落在物理边界之外；V网格上下边界与物理边界重合，左右边界各有一层网格落在物理边界之外；P网格所有边界都落在物理边界之外。因此边界条件表达为(下标E, W的量位于左右物理边界的左、右侧，下表为N,S的量位于上下物理边界的上、下侧)：

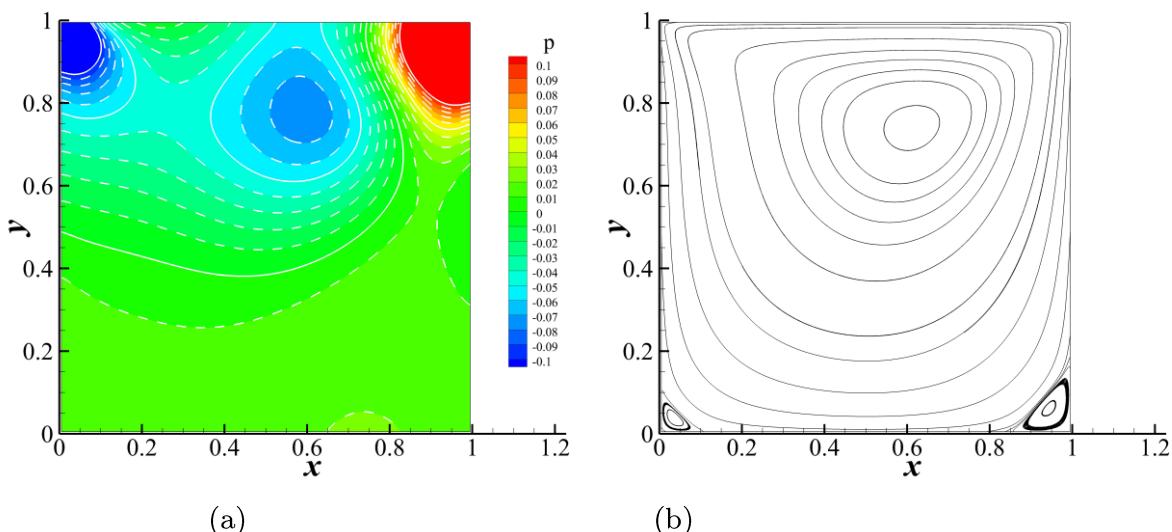
$$\frac{U_N + U_S}{2} = 1, V = 0, P_N - P_S = 0 \quad \text{at } y = 1$$

$$\frac{U_N + U_S}{2} = 0, V = 0, P_N - P_S = 0 \quad \text{at } y = 0$$

$$\frac{V_E + V_W}{2} = 0, U = 0, P_E - P_W = 0 \quad \text{at } x = 1$$

$$\frac{V_E + V_W}{2} = 0, U = 0, P_E - P_W = 0 \quad \text{at } x = 0$$

3.3 计算结果



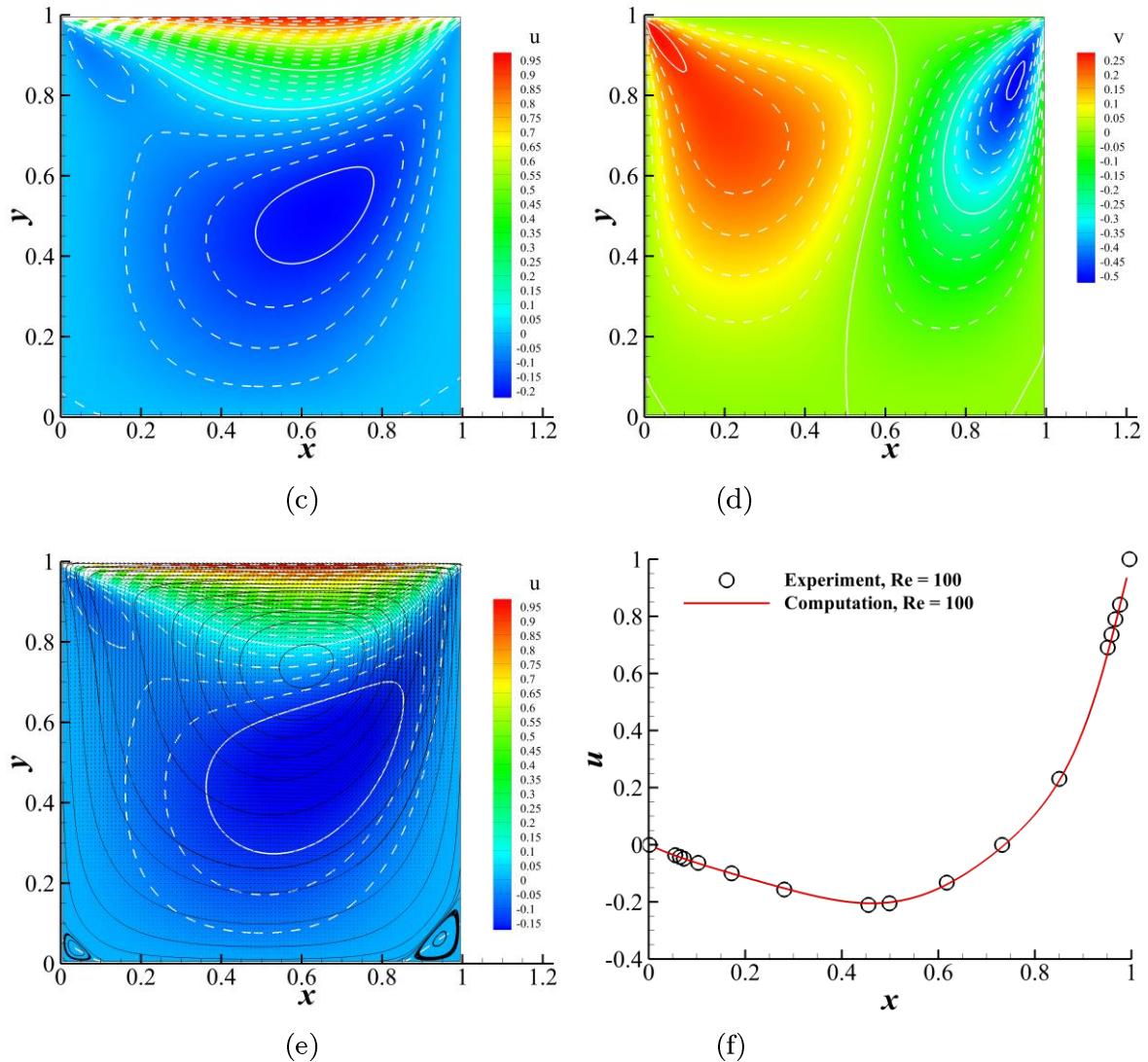


Fig 4. Result obtained at $Re = 100$. (a) Contours of pressure field. (b) Streamlines. (c) Contours of velocity in x direction. (d) Contours of velocity in y direction. (e) Vector representation of the velocity field. Streamlines are also shown. (f) Velocity in x direction along the vertical line passing through the geometric center of the domain.

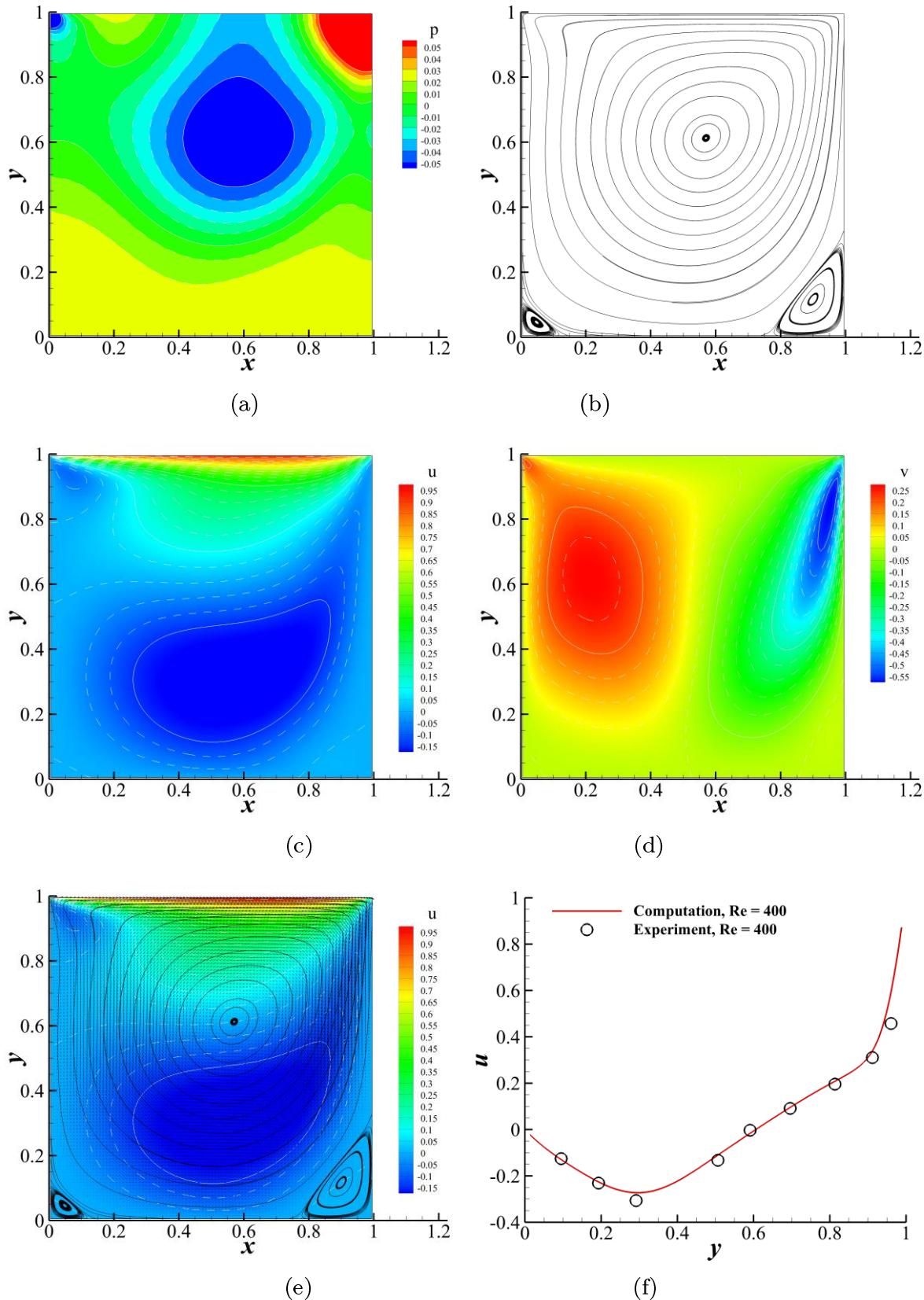


Fig 5. Result obtained at $Re = 400$. (a) Contours of pressure field. (b) Streamlines. (c) Contours of velocity in x direction. (d) Contours of velocity in y direction. (e) Vector representation of the velocity field. Streamlines are also shown. (f) Velocity in x direction along the vertical line passing

through the geometric center of the domain.

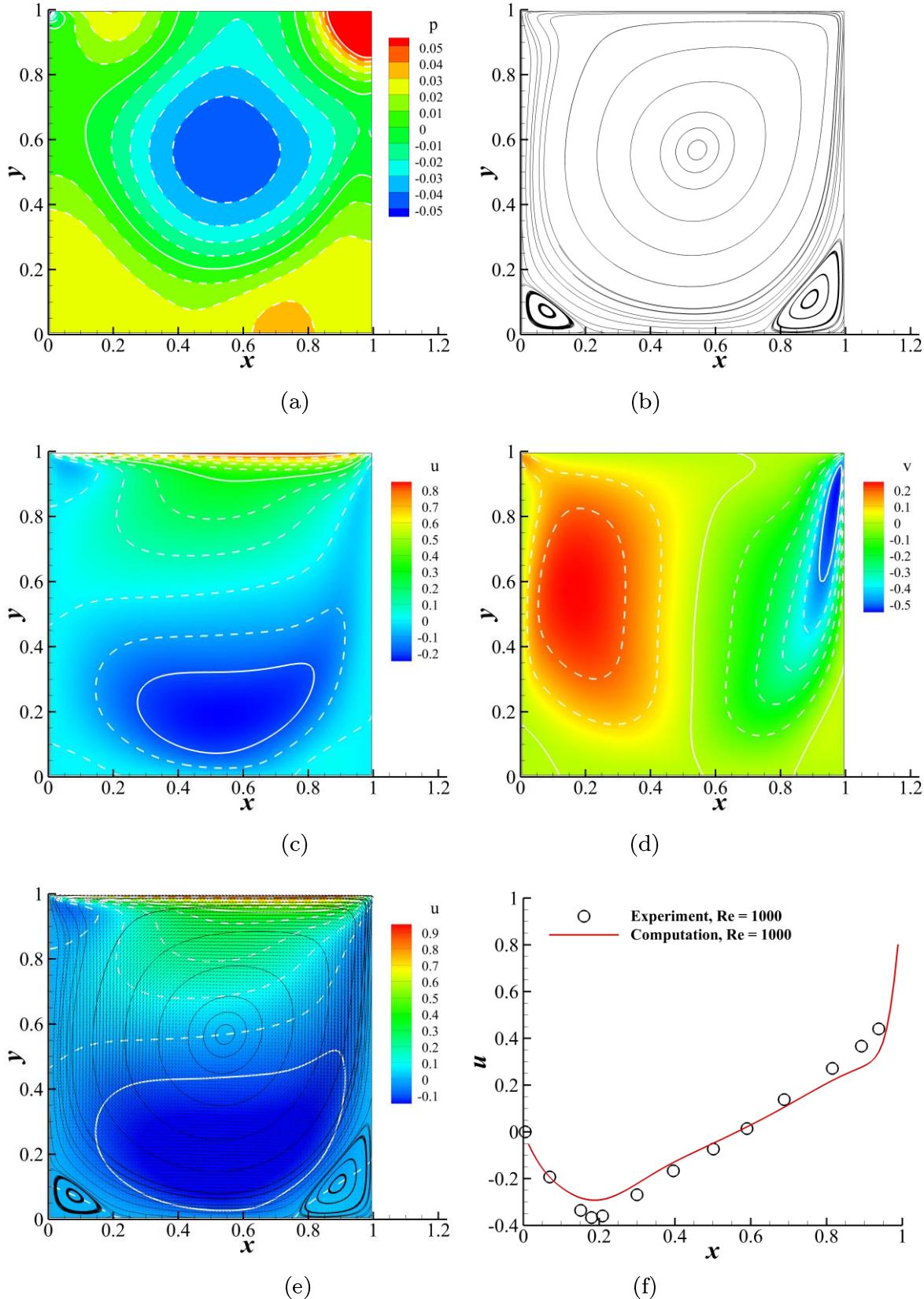


Fig 6. Result obtained at $Re = 1000$. (a) Contours of pressure field. (b) Streamlines. (c) Contours of velocity in x direction. (d) Contours of velocity in y direction. (e) Vector representation of the

velocity field. Streamlines are also shown. (f) Velocity in x direction along the vertical line passing through the geometric center of the domain.

使用 100×100 的网格，计算 $Re = 100, 400, 1000$ 时的流场，时间步长分别设置为 $\Delta t = 0.01, 0.01, 0.008$ ，迭代步数设置为 $n = 4000$ ，所得结果如 Fig 4. 至 Fig 6. 所示。

可以发现，流场中有一个处在中心位置附近的大涡以及处在下方两角点处的两个小涡。由 Fig 4.(b), Fig 5.(b) 和 Fig 6.(b) 可以看出，随着雷诺数增加，大涡中心逐渐左移、下移 ($Re = 100$ 时，涡中心处于 $x = 0.6, y = 0.8$ 左右； $Re = 1000$ 时，涡中心处于 $x = 0.5, y = 0.5$ 左右)，且角点处两个小涡的尺度逐渐增大。另外，随着雷诺数增加，区域左上方的流线拐折愈发严重。由于 Fig 4.(a), Fig 5.(a), Fig 6.(a) 可以看出，随着雷诺数的增加，中心大涡造成的低压区在不断变小。Fig 4.(f), Fig 5.(f), Fig 6.(f) 对比了实验^[7]和计算得到的、沿着直线 $x = 0.5$ 的水平方向速度 u 分布。可以发现，随着雷诺数增高，上下壁面附近 u 的梯度明显增大，这是边界层效应造成的。另外， $Re = 100, Re = 400$ 时，计算速度分布和实验测得的速度分布非常接近，然而 $Re = 1000$ 时，计算的速度分布虽然整体上和实验值也较为接近，但是在近壁处有较大差异。造成差异的主要原因是： Re 增大后，边界层变薄，近壁速度梯度变大，精确计算边界层及其周围流动所需要的网格量增大，然而对 $Re = 100, 400, 1000$ 的情形，我们都使用 100×100 的网格，这套网格能较为精确地分辨 $Re = 100, 400$ 时近壁区的速度分布，但可能无法分辨速度梯度更大的、 $Re = 1000$ 时的近壁区速度分布，因此会对流场求解带来误差。

References

- [1]Hu, X. Y., V. K. Tritschler, S. Pirozzoli, and N. A. Adams. 2012. Dispersion-Dissipation Condition for Finite Difference Schemes. (October 2014). <http://arxiv.org/abs/1204.5088>.
- [2]Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications[M]. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [3]Harris C D. Two-dimensional aerodynamic characteristics of the NACA 0012 airfoil in the Langley 8 foot transonic pressure tunnel[J]. 1981.
- [4]吴伟, 许厚谦, 王亮, 等. AUFS 格式在无网格方法中的应用[J]. 力学与实践, 2014, 36(1): 76.
- [5]Benjamin Seibold. A compact and fast Matlab code solving the incompressible Navier-Stokes equations on rectangular domains[EB/OL]. www-math.mit.edu/~seibold. 2008
- [6]Griebel M, Dornseifer T, Neunhoeffer T. Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [7]Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of computational physics, 1982, 48(3): 387-411.

小组分工

吴辰禹: NACA0012可压缩绕流有限体积计算程序编写、报告撰写。 $M = 0.8$, TVD+Roe格式, 细网格; $M = 0.8$, Jameson中心格式, 粗网格; $M = 1.2$, TVD+Roe格式, 细网格计算、后处理。SIMPLE算法计算方腔驱动流程序编写、所有工况的计算以及相应内容的报告撰写。

苏佑天: 半离散格式优化全部内容 (包括优化思路、编程、报告撰写); $M = 0.4$, TVD+Roe格式, 细网格; $M = 0.4$, Jameson中心格式, 细网格计算、后处理。

陆晨阳: $M = 0.8$, TVD+Roe格式, 粗网格; $M = 0.8$, Jameson中心格式, 细网格; $M = 1.2$, TVD+Roe格式, 粗网格计算、后处理; $M = 1.2$, Jameson中心格式, 细网格计算、后处理; $M = 1.2$, Jameson中心格式, 粗网格计算、后处理。