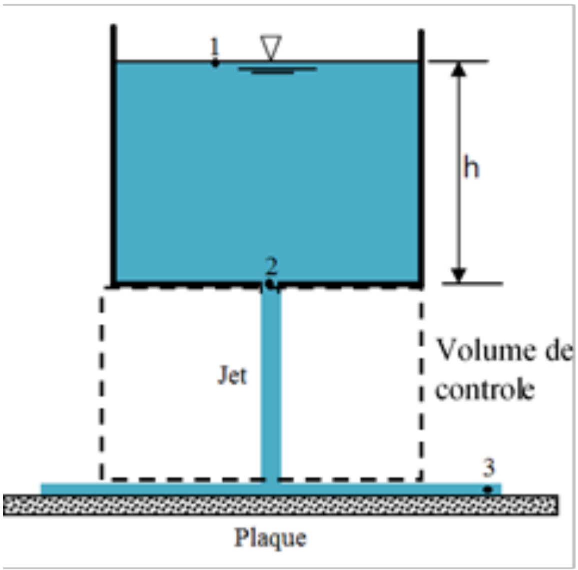
Corrigé du TD N°03 de MDF
(L2 GM, groupes K3 et K6)
Dynamique des fluides incompressibles parfaits « Equation d'Euler »

Exercice 11 :



Un jet d'eau verticale sort par l'orifice circulaire d'un réservoir. Le jet se bute contre une plaque horizontale perpendiculaire à l'axe du jet. Si le diamètre de l'orifice est d = 12.5 cm et la hauteur d'eau dans le réservoir est h =9 m :

1) Calculer la vitesse du jet à la sortie du réservoir. 2) Calculer la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet.

Remarque : v étant la vitesse et V le volume.

1- Calcul de la vitesse du jet à la sortie du réservoir

On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) :

Point 1 : à la surface libre du réservoir

Point 2 : au niveau de l'orifice circulaire du réservoir

$$v_1^2/2 + P_1/\rho + g.z_1 = v_2^2/2 + P_2/\rho + g.z_2$$

Conditions aux points (1) et (2) :
$z_1 = 9$ m, $z_2 = 0$, $v_1 \approx 0$ (grand réservoir) et $P_1 = P_2 = P_{atm}$

$g.z_1 = v_2^2/2$ d'où $v_2 = (2.g.z_1)^{0,5}$

$v_2 = 13,29$ m/s

2- Calcul de la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet

On applique l'équation d'Euler entre les points (1) et (2) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

or $v_1 = 0$ et $q_m = \rho . q_V$ *(de même que* $q_V = S.v_2$ au niveau de l'orifice circulaire du réservoir)

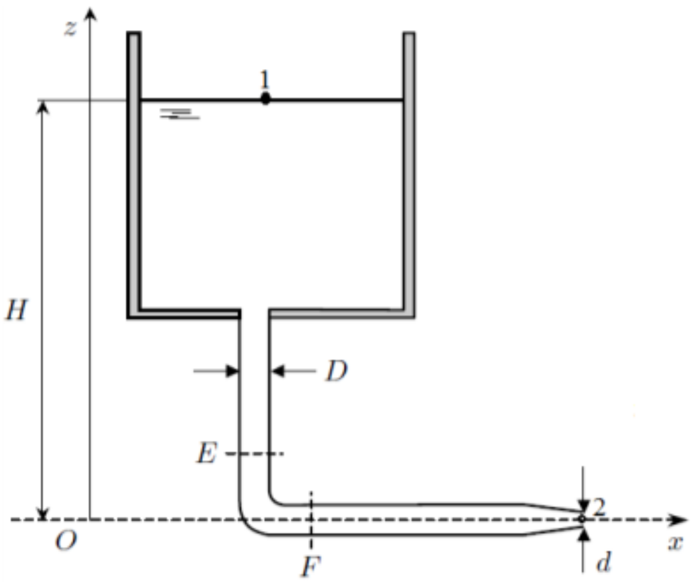
$$F = \rho .\ q_V . v_2 = \rho S v_2^2$$

Comme $S = \pi d_2^2/4$ alors on a :
$F = 1000.(\pi.(0{,}125)^2/4).(13{,}29)^2$

F = 2166 N

La force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet est égale et opposée à F.

Exercice 10 :



Une conduite verticale de diamètre D = 500 mm est alimentée par un réservoir avec une surface libre de grandes dimensions. Elle se termine en aval par un coude à 90°, suivie d'une partie horizontale dont l'extrémité est munie d'un convergent de diamètre d = 100 mm (voir figure). A la sortie du convergent, l'eau de masse volumique = 1000 kg/m^3 s'écoule à l'air libre (P_{atm} = 100 kPa). La hauteur entre la surface libre du réservoir et l'axe du jet d'eau est H =10 m. L'eau est considérée comme un fluide parfait et l'écoulement est stationnaire.

1) Calculer le débit volumique q_V d'eau s'écoulant dans la conduite.

2) En considérant l'eau non pesant, déterminer la résultante des efforts exercés par l'eau sur le coude limité par les sections droites de diamètre D en E et F. On supposera que la pression en amont et en aval du coude est la même ($P_E = P_F$).

1 - Calcul du débit volumique q_V d'eau s'écoulant dans la conduite

On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) :

Point 1 : à la surface libre du réservoir

Point 2 : au niveau de la sortie du convergent

$$v_1^2/2 + P_1/\rho + g.z_1 = v_2^2/2 + P_2/\rho + g.z_2$$

Conditions aux points (1) et (2) :
$z_1 = H = 10$ m, $z_2 = 0$, $v_1 \approx 0$ (grand réservoir) et $P_1 = P_2 = P_{atm}$

$$g.H = v_2^2/2$$

d'où $v_2 = (2.g.H)^{0,5}$
$v_2 = 14$ m/s

$q_V = S.v = S_2.v_2 = (\pi d^2/4)v_2$
avec d = 100 mm = 0,1 m, d'où :
$q_V = 0,11\ m^3/s$

2 - Calcul de la résultante des efforts exercés par l’eau sur le coude limité par les sections droites de diamètre D en E et F

Hypothèse : $P_E = P_F$

On applique l’équation d’Euler entre les points E et F :

$$\sum \bar{F}_{ext} = q_m(\bar{v}_F - \bar{v}_E)$$

$F_E + F_F + R = q_m(v_F - v_E)$ vectorielle

(F_E et F_F étant les forces de pression)

. projection sur l’axe des x :

$-P_F.S + R_x = q_m.v_F$

$R_x = q_m.v_F + P_F.S$

Calcul de v_F :

$q_V = v_F.S_F = v_2.S_2$ (entre les points F et (2))

d’où $v_F = v_2.S_2/S_F$

$v_F = v_2(d/D)^{0,5}$ d’où $\mathbf{v_F = 0,56\ m/s}$

Calcul de la pression P_F :

On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et F :

$$v_1^2/2 + P_1/\rho + g.z_1 = v_F^2/2 + P_F/\rho + g.z_F$$

Conditions aux points (1) et (2) :

$z_1 = H = 10$ m, $z_F = 0$, $v_1 \approx 0$ (grand réservoir) et $P_1 = P_{atm}$

$$P_F = P_1 + \rho g z_1 - \rho v_F^2/2$$

P_F = 198 kPa

or : $R_x = q_m.v_F + P_F.S = \rho.q_V.v_F + ((\pi.D^2)/4).P_F$

$$R_x = 1000.0{,}11.0{,}56 + (3{,}14.(0{,}5)^2/4).198.10^3$$

R_X = 38919 N

. projection sur y :

$P_E.S - R_y = -q_m.v_E$

$R_y = P_E.S + q_m.v_E$

Calcul de v_E :

$q_V = v_F.S = v_E.S$ d'où $v_E = v_F = 0,56$ m/s

or : $R_y = P_E.S + q_m.v_E = ((\pi.D^2)/4).P_E + \rho.q_V.v_E$

$Rx = (3,14.(0,5)^2/4).198.10^3 + 1000.0,11.0,56$

$R_Y = 38919$ N

$R = (R_X{}^2 + R_y{}^2)^{0,5}$

R = 55,040 kN