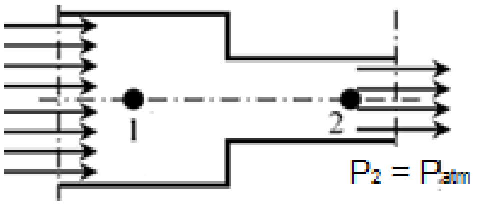
MDF

Série de TD N°3

Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Exercice 5 :



L'extrémité d'une conduite cylindrique rectiligne de diamètre 33 mm est muni d'une réduction de diamètre 26 mm, comme cela est montré sur la figure. Si le débit volumique à la sortie de la conduite est de 50 litres par minute, calculer la pression relative en 1. On donne : $\rho = 989\ g.l^{-1}$, $g = 9.81\ ms^{-2}$.

Solution :

Hypothèses : régime permanent, fluide parfait incompressible

Equation de Bernoulli entre 1 et 2 *(en suivant l'écoulement)*:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

$$p_2 = p_{atm}\ et\ z_1 = z_2$$

$$p_{r1} = p_1 - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2)$$

Conservation de la masse : $V_1 S_1 = V_2 S_2 = Q_v$

$$V_1 = \frac{4\ Q_v}{\pi\ D_1^2}\ et\ V_2 = \frac{4 Q_v}{\pi\ D_2^2}$$

$$p_1 - p_{atm} = \rho \frac{8\ Q_v^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right), \quad Q_v = 50\ l\ min^{-1} = 50 * \frac{10^{-3}}{60} = 0.83\ 10^{-3} m^3\ s^{-1}$$

$$p_1 - p_{atm} = 989 \frac{10^{-3}}{10^{-3}} \frac{8 * (0.83\ 10^{-3})^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{0.026^4} - \frac{1}{0.033^4}\right) = 742.8\ Pa$$

Exercice 06

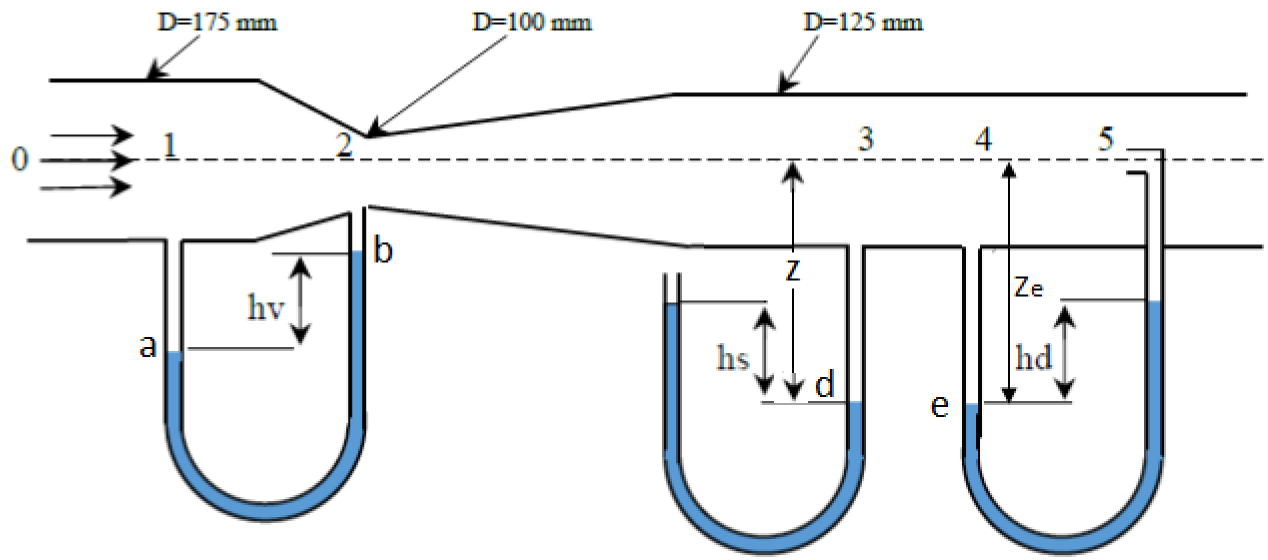
Une conduite hydraulique horizontale où circule de l'eau a les dimensions indiquées sur la figure ci-dessous. Elle comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double (statique + dynamique) qui sont reliées à des manomètres à mercure. La masse volumique du mercure est $\rho_{Hg} = 13600 kg/m^3$.

On donne : pression absolue en 0 : P_0=1.5 bar, pression atmosphérique P_{atm}=1 bar, z = 1m.

1- Sachant que h_v=40 mm, calculer le débit volumique dans la conduite.

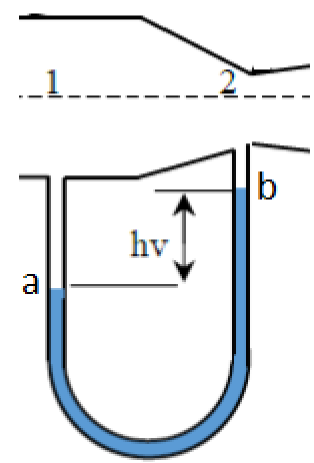
2- Calculer h_s.

3- Calculer h_d.



Solution :

1/ Calcul du débit volumique



$$V_1S_1 = V_2S_2 = Q_v$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_v^2}{S_1^2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_v^2}{S_2^2}$$

$$Q_v^2.\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)\right] + p_1 - p_2 = 0 \qquad (1)$$

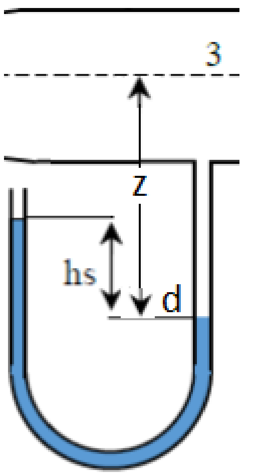
Par ailleurs, l'équation fondamentale de la statique donne :

$$\begin{aligned} p_a &= p_1 + \rho g z_a \\ p_b &= p_a - \rho_m g h_v \\ P_2 &= P_b - \rho g z_b \end{aligned} \qquad \rightarrow \quad p_2 = p_1 - \rho_m g h_v + \rho\, g\, \overbrace{(z_a - z_b)}^{h_v} = p_1 + g h_v(\rho - \rho_m)$$

De (1) on obtient : $$Q_v^2 = \frac{g h_v(\rho - \rho_m)}{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad Q_v = \frac{\pi D_1^2}{4}\sqrt{\frac{2 g h_v(\rho_m - \rho)}{\rho\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right]}}$$

$$Q_v = 0.02613\ m^3 s^{-1} = 26{,}13\ l s^{-1}$$

2/ Calcul de $\boldsymbol{h_s}$



$$p_d = p_{atm} + \rho_m g h_s \rightarrow h_s = \frac{p_d - p_{atm}}{\rho_m g}$$

$$p_d = p_3 + \rho g z$$

$$h_s = \frac{p_3 - p_{atm} + \rho g z}{\rho_m g}$$

D'après l'équation de Bernoulli

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho g z_0 = p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \rho g z_3$$

$$p_3 = p_0 + \frac{1}{2}\rho (V_0^2 - V_3^2)$$

$$Q_v = V_0 S_0 = V_1 S_1 = V_2 S_2 = V_3 S_3 = V_4 S_4$$

$$V_0 = V_1 = 1{,}09\ ms^{-1}, V_2 = 3{,}33\ ms^{-1}, V_3 = V_4 = 2{,}13\ ms^{-1}$$

D'où :

$p_3 = 1{,}482\ bar$ et $h_s = 434\ mm$

3/ Calcul de $\boldsymbol{h_d}$

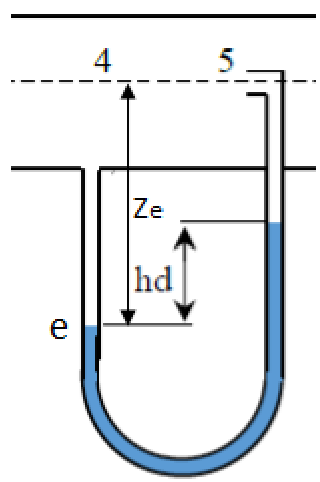
TH. Bernoulli (4) – (5) / (5) est un point d'arrêt ($V_5 = 0$)

$$P_4 + \frac{1}{2}\rho V_4^2 = P_5 \quad \Rightarrow \quad P_5 - P_4 = \frac{1}{2}\rho V_4^2$$

Equation fondamentale de la statique :

$$P_e = P_4 + \rho g z_e$$

$$P_e = P_5 + \rho g (z_e - h_d) + \rho_m g h_d$$



D'où :

$$P_5 - P_4 = (\rho_m - \rho)\, g\, h_d$$

Ce qui implique :

$$h_d = \frac{\frac{1}{2}\rho V_4^2}{g(\rho_m - \rho)} \qquad h_d = 19{,}2\ mm$$

Exercice 7

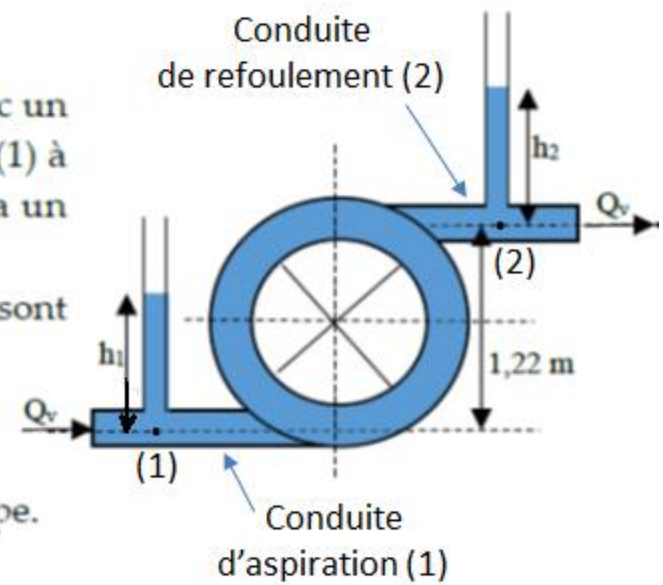
Une pompe fait circuler de l'eau considérée comme fluide parfait avec un débit volumique de 9000 $l.mn^{-1}$. La conduite d'aspiration horizontale (1) à un diamètre de 30 cm et la conduite de refoulement horizontale (2) a un diamètre de 20 cm.

On donne h_1=15 cm et h_2=50 cm et g=10 m/s^2. Les autres données sont mentionnées sur la figure.

1- Calculer les pressions P_1 et P_2

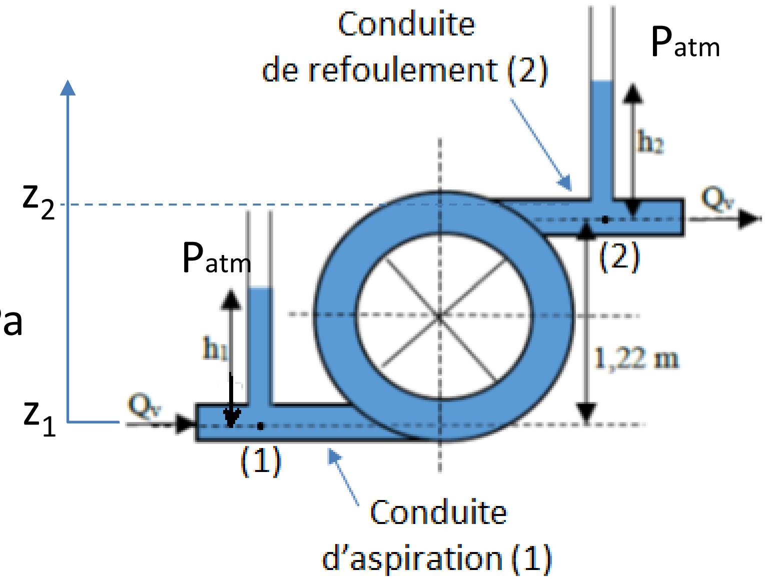
2- Calculer les vitesses aux points 1 et 2.

3- Pour un rendement de η=0.8, calculer la puissance fournie à la pompe.



Solution :

1) P_1 et P_2



La loi fondamentale de la statique des fluides donne :

$P_1 = P_{atm} + \rho\, g\, (h_1+0{,}5\, D_1)$

$P_1 = 10^5 + 1000 \times 9{,}81\ (0{,}15+0{,}5\times0{,}3)$ = 102,94 kPa

$P_2 = P_{atm} + \rho\, g\, (h_2+0{,}5\, D_2)$

$P_2 = 10^5 + 1000 \times 9{,}81\ (0{,}5+0{,}5\times0{,}2)$ = 105,89 kPa

2) V_1 et V_2

Conservation de la masse $\Rightarrow q_{m1}=q_{m2}=q_m$

Eau : fluide incompressible $\Rightarrow q_{v1}=q_{v2}=q_v$ =9000 L/min =9000× $10^{-3}/60$=0,15 m³/s

$$V_1 = \frac{q_v}{S_1} = \frac{4\, q_v}{\pi\, D_1^2} = \frac{4 \times 0{,}15}{\pi\, 0{,}3^2} = 2{,}12\ m/s$$

$$V_2 = \frac{q_v}{S_2} = \frac{4\, q_v}{\pi\, D_2^2} = \frac{4 \times 0{,}15}{\pi\, 0{,}2^2} = 4{,}77\ m/s$$

3) Puissance électrique $\dot{W}_a$ à l'arbre de la pompe

TH. Bernoulli (1)-(2) $\Rightarrow$

Puissance nette échangée avec le fluide

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{1}{2}V_1^2+g\,z_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}V_2^2+g\,z_2+\frac{\dot{W}_{net}}{q_m}$$

$avec:\ z_1=0\ et\ z_2=$1,22 m

D'où : $\dot{W}_{net}=q_m\left[\frac{P_1-P_2}{\rho}+\frac{1}{2}(V_1^2-V_2^2)+g\,(z_1-z_2)\right]$

$$\dot{W}_{net}=q_v\left[(P_1-P_2)+\frac{1}{2}\rho\,(V_1^2-V_2^2)+\rho\,g\,(z_1-z_2)\right]$$

$$\dot{W}_{net}=0{,}15\left[(102{,}94-105{,}89)\times 10^3+\frac{1}{2}1000\left(2{,}12^2\ -4{,}77^2\ \right)+1000\times 9{,}81\,(0-1{,}22)\right]$$

$\dot{W}_{net}$ =-3,58 kW

Rendement de la pompe : $\eta_p=\frac{\dot{W}_{net}}{\dot{W}_a}\Rightarrow\quad \dot{W}_a=\frac{\dot{W}_{net}}{\eta_p}$ =-4,47 kW

$\dot{W}_a$**< 0 , Pompe reçoit du travail**