Probabilidad y Estadística LCC
Trabajo Práctico Final 2018

1. Considere el problema de la “ruina del jugador” como el presentado en Nicolás Privault (2013) [3.2]:

    a. Utilice el lenguaje R, a fin de simular y visualizar la evolución del capital del jugador A.
    b. Desarrolle el programa anterior de manera de estimar, mediante la simulación de un número adecuado de trayectorias del capital del jugador A, la probabilidad de ruina de dicho jugador; en función de su estado inicial X_0= k, para valores asignados del capital total S y una probabilidad “p” de que el jugador A gane en cada etapa del juego.

2. Considere un proceso Bernoulli E_n : la señal emitida en el momento n es incorrecta y simule:

    a. Una realización de dicho proceso (para n=10)
    b. Una realización del proceso S_n: número de señales incorrectas emitidas al momento n.
    c. Encuentre la Esperanza y la Variancia de ambos procesos.

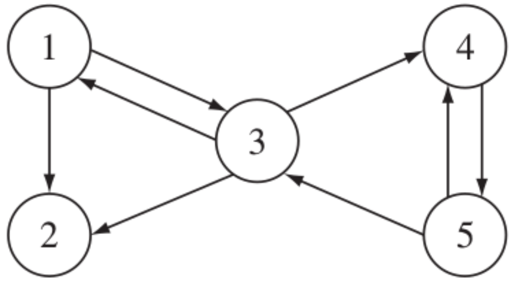
3. Considere el proceso D_n =2I_n-1, donde I_n es un proceso Bernoulli. Por ejemplo D_n puede representar el cambio de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta en saltos de ∓ 1en cada momento.

    a. Simule una trayectoria de D_n.
    b. Simule una realización del proceso S_n que denota la posición de la partícula en el momento n.

4. Una persona está buscando cierta información en un universo de tan solo 5 páginas Web. Cada una de estas páginas puede tener uno o varios *links* a alguna otra. También puede haber páginas que no posean links.

    La persona elegirá, a partir de la página actual que está mirando, la próxima a visitar seleccionando con igual probabilidad alguna de las linkeadas. Si la página actual no posee link alguno, entonces seleccionará con igual probabilidad cualquiera de las 5 páginas Web existentes.

    Se tiene el siguiente esquema de páginas que apuntan a otras, en donde un nodo sin arcos salientes significa una página sin links:



a. Modele el comportamiento de visitas a las páginas como una cadena de Markov.
b. Determine la probabilidad de visitar la página *j,* para *j=1,..,5.*

Nota: Este modelo del navegador aleatorio forma las bases para el algoritmo *PageRank* que utiliza Google para determinar la importancia de una página en la Web. El ranking de una página está dado por la probabilidad estacionaria de la página en la cadena de Markov. El tamaño del espacio de estados en dicha cadena es de miles de millones de páginas.

5. Un ratón de laboratorio se encuentra atrapado en un laberinto y, al inicio, tiene que elegir entre dos posibles direcciones. Si elige ir a la derecha, entonces se paseará en el laberinto durante los siguientes tres minutos y luego volverá a su posición inicial. Si elige ir a la izquierda, entonces con probabilidad 1/3 saldrá del laberinto después de dos minutos, y con probabilidad 2/3 volverá a su posición inicial al cabo de cinco minutos. Asumiendo que el ratón, en todo momento, elige con la misma probabilidad ir a la izquierda o a la derecha, ¿cuál es el número esperado de minutos que permanecerá atrapado en el laberinto?

6. Las primas anuales de seguros de automóviles se determinan, en la mayoría de los países de Europa y Asia, por el uso de un sistema denominado "Bonus Malus". A cada asegurado se le otorga un estado que valora el tipo de coche asegurado y el tipo de póliza.

   El estado del asegurado cambia de un año a otro de acuerdo al número de reclamos realizados. Debido a que los estados más bajos corresponden a primas anuales más bajas, el estado del asegurado por lo general se reducirá si no hizo reclamos en el año anterior y aumentará si el asegurado realiza al menos un reclamo.

   Si bien los sistemas reales tienen 20 estados o más, supongamos un ejemplo hipotético en el cual existen sólo cinco estados y un asegurado se inicia en el estado 4. La regla de evolución, se muestra en la siguiente ecuación:

$$bm_{t+1} = \max(1, bm_t - 1) * (I = 0) + \min(5, bm_t + 2 * I) * (I \geq 1)$$

   Si el número de reclamos anuales realizados por un asegurado es una variable aleatoria *I* con distribución de Poisson con parámetro λ, los sucesivos estados del asegurado puede constituir una cadena de Markov con probabilidades de transición dadas por el modelo probabilístico indicado.

Los coeficientes que se aplican a las primas anuales en cada estado se presentan en la siguiente tabla:

Estado	Coeficiente
1	0.50
2	0.70
3	0.90
4	1.00
5	1.25

a. Explicite cómo se obtienen las probabilidades de transición en un paso.
b. Realice el grafo correspondiente.
c. Encuentre el promedio de prima anual que se paga cada año, si el número de reclamos anuales realizados se comporta a priori según un proceso de Poisson con frecuencia de reclamos auto-años igual a 0.05.

7. Simule las trayectorias muestrales de un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ.
   (a) Elija al menos dos valores de λ y represente gráficamente el comportamiento de las trayectorias simuladas.
   (b) Para cada uno de los valores elegido para λ, simule una trayectoria muestral durante un intervalo de tiempo suficientemente largo $[0,T]$, calcule los tiempos entre llegadas. Represente gráficamente los tiempos observados entre llegadas a través de un histograma y compare el resultado obtenido con la función de densidad teórica del tiempo entre llegadas determinada por el modelo elegido.

8. Un estudiante necesita aprobar tres cursos anuales para alcanzar su título. Cada año hace un examen para saber si puede pasar de curso o no. Si aprueba, avanza al año siguiente hasta alcanzar el título y si no aprueba repite el curso. Los alumnos del 1° curso tienen una probabilidad de 0.80 de pasar de curso, los del 2° curso una probabilidad de 0.7 de avanzar y para los del 3° curso, sólo el 50% aprueba al finalizar el curso. La condición de un de un estudiante al momento n puede modelarse según una Cadena de Markov Homogénea.

   a. Exprese la matriz de transición en forma canónica.
   b. Clasifique los estados.
   c. Encuentre la probabilidad de que un estudiante permanezca en el 2° curso después de dos exámenes?.
   d. Calcule cuántos años pasa en promedio un estudiante hasta alcanzar su título.

Nicolas Privault (2013).Understanding Markov Chains. Examples and Applications, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer.