

シミュレーション レポート

第6回～第10回

提出日 2021年7月15日 1～2コマ目

組番号 408

学籍番号 17406

氏名 金澤雄大

1 目的

2 実験環境

実験環境を表 1 に示す.gcc は Windows 上の WSL(Windows Subsystem for Linux) で動作するものを用いる.

表 1: 実験環境

CPU	AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor
メモリ	16.0GB DDR4
OS	Microsoft Windows 10 Home
gcc	(Ubuntu 9.3.0-17ubuntu1 ~ 20.04) 9.3.0
Make	GNU Make 4.2.1

3 課題 6

本章では課題 6 における課題内容, プログラムの説明, 実行結果, 考察の 4 つについて述べる.

3.1 課題内容

式 (1) の方程式はロトカ・ヴォルテラの方程式と呼ばれる微分方程式である. ロトカ・ヴォルテラの方程式は 2 種類の生物の個体数の変化に関する数理モデルである. 式 (1) は被食者 (食べられる側) の個体数 y_1 , 捕食者 (食べる側) の個体数 y_2 としたときの個体数の変化を表している. 本課題では式 (1) をオイラー法で実装し, 正の実数定数 a, b, c, d を変化させたときの解の特徴について考察する.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = ay_1 - cy_1y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -by_2 + dy_1y_2 \end{cases} \quad (1)$$

3.2 プログラムの説明

本節では実装のための理論および次に示す 6 つの関数の機能, およびソースコードについて説明する.

1. multipleMatrix 関数
2. addVector 関数
3. scalerVector 関数
4. transformVector 関数
5. setVector 関数
6. main 関数

3.2.1 実装のための理論

本項では、はじめに 2 変数の単純な連立微分方程式について考え、一般変数に理論を拡張する。はじめに 2 変数の単純な連立方程式について考える。式 (2) の微分方程式をオイラー法で解く方法を考える。ただし、 a に添え字がついているものはすべて定数である。注目してほしいのは右辺で、 y_1, y_2 の一次式になっていることがわかる。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} + a_{12}y_1 + a_{13}y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21} + a_{22}y_1 + a_{23}y_2 \end{cases} \quad (2)$$

オイラー法を用いると式 (2) は時間 $t+1$ のとき式 (3) のように近似できる。ただし、 h は刻み幅とする。

$$\begin{cases} y_1(t+1) = y_1(t) + h(a_{11} + a_{12}y_1(t) + a_{13}y_2(t)) \\ y_2(t+1) = y_2(t) + h(a_{21} + a_{22}y_1(t) + a_{23}y_2(t)) \end{cases} \quad (3)$$

式 (3) を実装すれば 2 変数の場合には問題なく実行できる。しかし、これを 3 変数、4 変数と拡張しようとすると C 言語では不都合が生じる。例えば式 (2) の右辺を関数として実装した場合、変数が増えるごとに関数の数が増えてしまい拡張性やメンテナンス性が悪い。このため式 (3) では一般変数に対応できない。そこで行列を用いる。式 (3) を行列を用いて表すと式 (4) のようになる。

$$\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

式 (4) を参考にして、一般に y_1, y_2, \dots, y_n の n 個の連立微分方程式 (式 5) があるとき、オイラー法による数値解は式 (6) の行列を用いることで計算できる。本課題では式 (6) を実装する。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} + a_{12}y_1 + a_{13}y_2 + \dots + a_{1n+1}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21} + a_{22}y_1 + a_{23}y_2 + \dots + a_{2n+1}y_n \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1} + a_{n2}y_1 + a_{n3}y_2 + \dots + a_{nn+1}y_n \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_n(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

式 (1) のロトカ・ヴォルテラの方程式は y_1y_2 という相互作用項を含んでいるが、式 (6) の行列によるオイラー法の数値計算はこれに対応していない。式 (1) の方程式を行列で表すと式 (7) のようになる。これによって相互作用項に対応させることができる。式 (7) から、行列の積、ベクトルの変換、ベクトルのスカラー倍、ベクトルの和の 4 つの演算が必要であることがわかる。しかし、式 (7) では $y_1(t+1) \cdot y_2(t+1) = y_1y_2(t+1)$ が成立していないため、 $y_1(t)y_2(t)$ を $y_1(t) \cdot y_2(t)$ に置き換える必要がある。

$$\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ y_1y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1y_2(t) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & -b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1y_2(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

3.2.2 multipleMatrix 関数

multipleMatrix 関数は行列の積を計算する関数である. 表 2 に multipleMatrix 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す. multipleMatrix 関数は $n \times (n + 1)$ 行列と $(n + 1) \times 1$ 行列の積を計算する機能を持つから, 引数として a,b,c の 3 つの行列をとる設計になっている. そして引数 a,b の行列積 ab を c に代入する処理を行う. ただし, DIM はオブジェクト形式マクロで定義されている微分方程式の変数の数である.

表 2: multipleMatrix 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	$n \times (n + 1)$ 行列と $(n + 1) \times 1$ 行列の行列積を計算する
引数	double a[DIM][DIM+1],double b[DIM+1][1],double c[DIM][1]
戻り値	なし

リスト 1 に multipleMatrix 関数のソースコードを示す. リスト 1 では引数の行列 a,b の積を for 文を用いて計算し, その結果を引数 c に代入する処理を行っている.

リスト 1: multipleMatrix 関数のコード

```
1 #define DIM 3
2
3 void multipleMatrix(double a[DIM][DIM+1],double b[DIM+1][1],double c[DIM][1]){
4     int i,j,k;
5     double tmp;
6     tmp=0;
7     for(i=0; i<DIM+1; i++){
8         for(j=0; j<DIM; j++){
9             c[i][j]=0;
10            for(k=0; k<DIM+1; k++){
11                c[i][j]+=a[i][k]*b[k][j];
12            }
13        }
14    }
15 }
```

3.2.3 addVector 関数

addVector 関数はベクトルの和を計算する関数である. 表 3 に addVector 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す. addVector 関数は 2 つの n 次元ベクトルの和を計算する機能を持つから, 引数として a,b,c の 3 つのベクトルをとる設計になっている. そして, 引数 a,b の和を計算し, c に代入する処理を行う.

表 3: addVector 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	2 つの n 次元ベクトルの和を計算する
引数	double a[DIM][1],double b[DIM][1],double c[DIM][1]
戻り値	なし

リスト 2 に addVector 関数のソースコードを示す. リスト 2 では引数 a,b の和を for 文を用いて計算し, その結果を引数 c に代入する処理を行っている.

リスト 2: addVector 関数のコード

```
1 void addVector(double a[DIM][1],double b[DIM][1],double c[DIM][1]){
2     int i;
3     for(i=0; i<DIM;i++){
```

```

4         c[i][0] = a[i][0]+b[i][0];
5     }
6 }

```

3.2.4 scalerVector 関数

scalerVector 関数はベクトルのスカラー倍を計算する関数である。表 4 に scalerVector 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す。scalerVector 関数はベクトルのスカラー倍を計算する機能を持つから, 引数としてベクトル a, スカラー h をとる設計になっている。そして, 引数 a の h 倍を計算し, a を更新する処理を行う。

表 4: scalerVector 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	ベクトルのスカラー倍を計算する
引数	double a[DIM][1], double h
戻り値	なし

リスト 3 に scalerVector 関数のソースコードを示す。リスト 3 では引数 a の h 倍を for 文を用いて計算し, その結果を a に代入する処理を行っている。

リスト 3: scalerVector 関数のコード

```

1 void scalerVector(double a[DIM][1], double h){
2     int i;
3     for(i=0; i<DIM; i++){
4         a[i][0] *=h;
5     }
6 }

```

3.2.5 transformVector 関数

transformVector 関数は n 次元ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $(n+1)$ 次元ベクトル $x' = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ に変換する関数である。表 5 に transformVector 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す。transformVector 関数はベクトル変換をする機能を持つから, 引数として n 次元ベクトル a および $(n+1)$ 次元ベクトル b をとる設計になっている。そして, 引数 a の変換を計算し, b に代入する処理を行う。

表 5: transformVector 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	ベクトルの変換を行う
引数	double a[DIM][1], double b[DIM+1][1]
戻り値	なし

リスト 4 に transformVector 関数のソースコードを示す。リスト 4 では b[0][0] に 1 を代入し, 他の b 成分には引数 a の成分を for 文を用いて代入する処理を行っている。

リスト 4: transformVector 関数のコード

```

1 void transformVector(double a[DIM][1], double b[DIM+1][1]){
2     int i;
3     b[0][0]=1;
4     for(i=1; i<DIM+1; i++){
5         b[i][0] = a[i-1][0];

```

```

6     }
7 }

```

3.2.6 setVector 関数

setVector 関数はベクトルの値を別の変数に代入する関数である。表 6 に setVector 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す。setVector 関数はベクトルの値を別の変数に代入する機能を持つから, 引数としてベクトル a,b をとる設計になっている。そして, 引数 a を引数 b に代入する処理を行う。

表 6: setVector 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	ベクトルの値を別の変数に代入する
引数	double a[DIM][1],double b[DIM][1]
戻り値	なし

リスト 5 に setVector 関数のソースコードを示す。リスト 5 では引数 a を for 文を用いて b に代入する処理を行っている。

リスト 5: setVector 関数のコード

```

1 void setVector(double a[DIM][1],double b[DIM][1]){
2     int i;
3     for(i=0;i<DIM;i++){
4         b[i][0] = a[i][0];
5     }
6 }

```

3.2.7 main 関数

main 関数は Euler 法を用いて連立微分方程式を計算する。表 7 に main 関数の機能, 引数, 戻り値の 3 つを示す。main 関数は

表 7: main 関数の機能, 引数, 戻り値

機能	連立微分方程式の計算を行う
引数	なし (void)
戻り値	(int)0

リスト 6 に main 関数のソースコードを示す。

リスト 6: main 関数のコード

```

1 int main(void){
2     double h = 0.1;
3     double lim=1.01;
4     double a=0.7;
5     double b=0.4;
6     double c=0.09;
7     double d=0.06;
8     double y10=10;
9     double y20=10;
10    double step;
11    int i;

```

```

12
13 // 初期値を宣言するベクトルの配列
14 double initVector[DIM][1] = {{y10},{y20},{y10*y20}};
15 // ベクトル変換用配列
16 double transVector[DIM+1][1];
17 // 連立微分方程式のパラメータの配列
18 double weightMatrix[DIM][DIM+1] = {{0,a,0,-c},
19                                     {0,0,-b,d},
20                                     {0,0,0,0}
21                                     };
22
23 // 計算用配列
24 double yiVector[DIM][1];
25 double tmpVector[DIM][1];
26 //結果表示用配列
27 double resultVector[DIM][1];
28
29 // 初期値表示
30 #ifdef STDOUT
31 printf("step = %0.2lf\n",0.1);
32 #else
33 printf("%lf,%lf,%lf",0.0,initVector[0][0],initVector[1][0]);
34 #endif
35
36 for(i=0;i<DIM;i++){
37     #ifdef STDOUT
38     printf("y%d = %lf\n",i,initVector[i][0]);
39     #endif
40 }
41 printf("\n");
42
43 // 初期値を計算用配列にセット
44 setVector(initVector,yiVector);
45
46 for(step=h;step<=lim;step+=h){
47     //ベクトル変換
48     transformVector(yiVector,transVector);
49     // 微分係数を計算
50     multipleMatrix(weightMatrix,transVector,tmpVector);
51     scalerVector(tmpVector,h);
52     // 1次ラグとの和を計算
53     addVector(yiVector,tmpVector,resultVector);
54
55     //結果を表示
56     #ifdef STROUT
57     printf("step = %0.2lf\n",step);
58     for(i=0;i<DIM;i++){
59         printf("y%d = %lf\n",i,resultVector[i][0]);
60     }
61     printf("\n");
62     #else
63     printf("%lf,%lf,%lf\n",step,resultVector[0][0],resultVector[1][0]);
64     #endif
65
66     // y1*y2調整処理
67     resultVector[2][0] = resultVector[0][0]*resultVector[1][0];
68     // 結果を計算用配列にセット
69     setVector(resultVector,yiVector);
70 }
71 return 0;
72 }

```

リスト 6 では次に示す手順で処理を行っている。

1. ステップ数, 連立方程式のパラメータの値, 初期条件の値, ループ用変数の 4 つを宣言する (リスト 6 の 2 行目から 11 行目).
2. 初期条件を `initVector` という変数で宣言する (リスト 6 の 14 行目).
3. ベクトル変換用の配列を `transVector` という変数で宣言する (リスト 6 の 16 行目).
4. 連立方程式のパラメータを `weightMatrix` という変数で宣言する (リスト 6 の 18 行目).

5. 計算および結果表示用の配列を宣言する (リスト 6 の 23 行目から 26 行目).
6. 初期値を表示する. 本プログラムでは条件付きコンパイルを用いる. オブジェクト形式マクロで `STDOUT` が宣言されているときは標準出力に適したフォーマットで計算結果を出力する. `CSVOUT` が定義されているときは, `csv` 出力に適したフォーマットで出力する (リスト 6 の 29 行目から 40 行目).
7. 計算用配列に初期条件をセットする (リスト 6 の 43 行目).
8. ステップ数に応じて手順 9 から手順 14 を反復実行する.
9. ベクトルの変換を行う. ここでの変換とは n 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $(n+1)$ 次元ベクトル $\mathbf{x}' = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ にする変換のことである (リスト 6 の 47 行目).
10. 行列の積を用いて微分係数を計算する (リスト 6 の 49 行目から 50 行目).
11. ベクトルの和を用いて Euler 法の近似計算を行う (リスト 6 の 52 行目).
12. 結果を表示する. 表示形式は手順 6 と同様に `STDOUT`, `CSVOUT` の場合分けが行われている (リスト 6 の 55 行目から 63 行目).
13. $y_1(t)y_2(t)$ の調整を行う (リスト 6 の 66 行目).
14. 次のステップの計算のために計算結果を計算用配列にセットする (リスト 6 の 68 行目).

3.3 実行結果

実行結果は連立微分方程式のパラメータ a, b, c, d の値によって異なると考えられる. パラメータ a, b, c, d の大小で実験結果が異なると仮定すると, 実験が必要なパラメータの組み合わせは, 表 8 のようになる. 本節では実験 1 から実験 4 までの実行結果について述べる.

表 8: 実験計画

条件	$y_2 > a/c$	$y_2 < a/c$
$y_1 > b/d$	実験 1	実験 2
$y_1 < b/d$	実験 3	実験 4

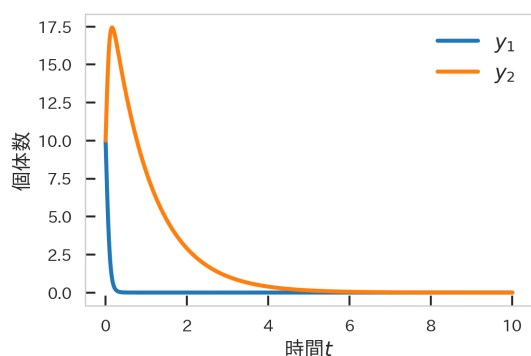
実験 1 から実験 9 までのパラメータ a, b, c, d を表 9 に示す. ただし, $y_1 = 10, y_2 = 10, h = 0.01$ は固定とする. 実験 1 および実験 4 はパラメータを 4 通りに変化させて実験を行う. 実験 2 および実験 3 はパラメータを 2 通りに変化させて実験を行う.

表 9: 各実験におけるパラメータの設定

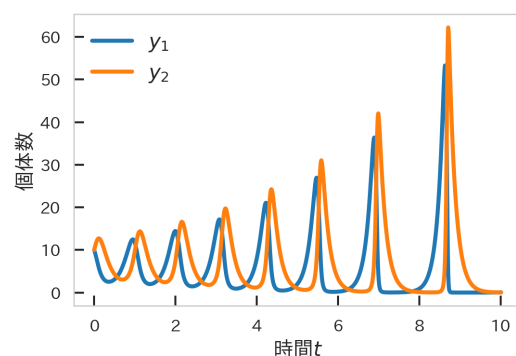
実験番号	a	b	c	d
実験 1-1	1	1	1	1
実験 1-2	7	6	1	1
実験 1-3	6	7	0.9	0.8
実験 1-4	6	7	0.8	0.9
実験 2-1	3	2	0.1	0.5
実験 2-2	3	2	0.1	0.8
実験 3-1	2	3	0.5	0.1
実験 3-2	2	3	0.8	0.1
実験 4-1	2	3	0.1	0.2
実験 4-2	4	5	0.3	0.4
実験 4-3	3	2	0.2	0.1
実験 4-4	2.1	2	0.2	0.18

3.3.1 実験 1 の結果

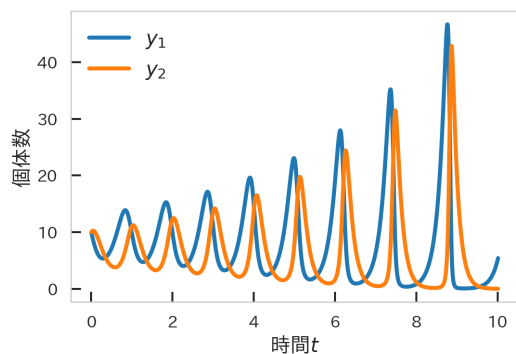
実験 1 は, $y_2 > a/c$ かつ $y_1 > b/d$ の条件下でパラメータを変化させたときの実行結果である. 実験 1-1 から実験 1-4 までの結果を図 1 に示す.



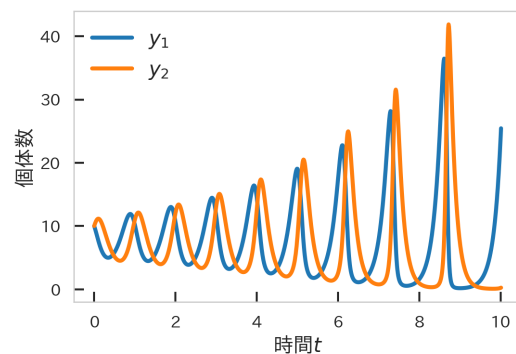
(a) 実験 1-1



(b) 実験 1-2



(c) 実験 1-3



(d) 実験 1-4

図 1: 実験 1 の結果

図 1a は表 9 に示した実験 1-1 の結果をグラフにしたものである。まず、実行結果と手計算で求めたオイラー法の値が一致することを確認する。表 10 に実験 1-1 における実行結果から得られた値と手計算によって計算した値である。表 10 では時間 t が 0.01 から 0.03 までの場合について、手計算を行った。

表 10: 実験結果と手計算の比較

時間 t	実験結果		手計算	
	y_1	y_2	y_1	y_2
0	10	10	10	10
0.01	9.1	10.9	9.1	10.9
0.02	8.1991	11.7829	8.1991	11.7829
0.03	7.314999	12.631163	7.314999	12.631163

手計算の方法を例を交えて説明する。パラメータはすべて 1 だから、計算する連立方程式微分方程式は式 (8) である。式 (8) をオイラー法の計算式にすると式 (9) になる。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2 + y_1 y_2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} y_{1(i+1)} = y_{1(i)} + h(y_{1(i)} + y_{1(i)}y_{2(i)}) \\ y_{2(i+1)} = y_{2(i)} + h(-y_{2(i)} + y_{1(i)}y_{2(i)}) \end{cases} \quad (9)$$

$h = 0.01$ のときの正しい実験結果は、 $y_{1(0)} = y_{2(0)} = 10$ を式 (9) に代入すると、式 (10) に示すように計算できる。時間を 0.02, 0.03... と変化させた場合も同じように計算を行えばよい。

$$\begin{cases} y_{1(0.01)} = 10 + 0.01 \cdot (10 + 10 \cdot 10) = 9.1 \\ y_{2(0.01)} = 10 + 0.01 \cdot (-10 + 10 \cdot 10) = 10.9 \end{cases} \quad (10)$$

表 10 の実験結果と手計算の結果から、時間 t が 0.01 から 0.03 のとき、実行結果と手計算の結果が一致していることがわかる。時間 t が 0.01 から 0.03 の 3 例ですべての実行結果と手計算に誤差がないとは言えないから、excel による計算結果と実行結果を比較する。図 2 に excel による計算と実行結果の差を示す。

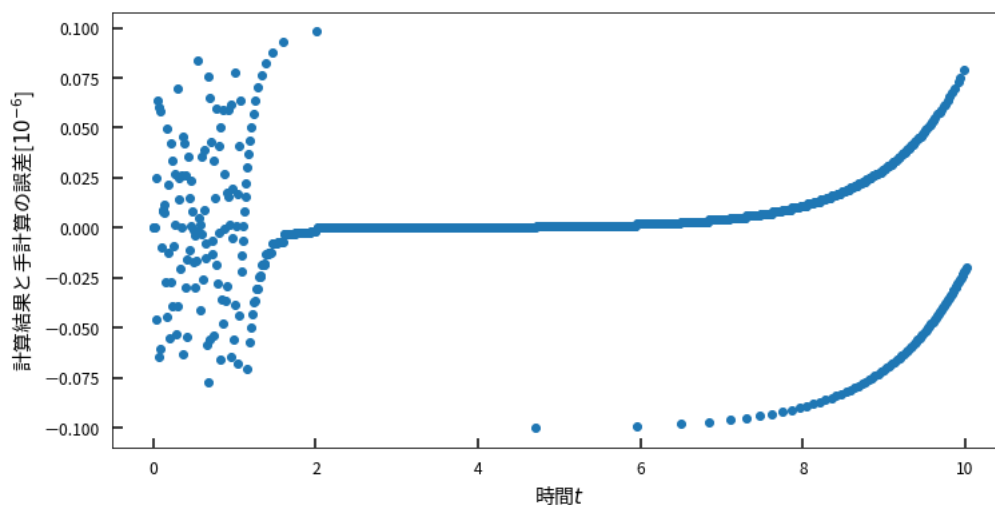


図 2: 計算結果の差

図 2 において、手計算と実行結果の差は 10^{-7} 程度であることがわかる。これより、実行結果と手計算が一致していると考えられる。よって実行結果は正しいと言える。

実行結果が正しいことがわかったから、パラメータを変化させたときの実行結果について観察する。実験 1 の 4 つの実験結果に共通していることは、 y_1, y_2 の値が 0 以上であるということである。 y_1 は被食者、 y_2 は捕食者を表していた。式 (1) のモデルの特性は後で考察するが、 y_1, y_2 が非負であることは、モデルによる生物の個体数の増減のシミュレーションの結果が非常にわかりやすくなる。さらに、 a, b を固定して、 c, d を入れ替えた実験 1-3、実験 1-4 の結果に注目する。実験 1-3 と実験 1-4 の結果は y_1, y_2 が入れ替わっただけである。このことから、 a, b を固定したとき、 c, d は対称関係にあり、 c, d のうち、値の大きいほうが、周期的な立ち上がりが大きくなる。

3.3.2 実験 2 の結果

実験 2 は、 $y_2 < a/c$ かつ $y_1 > b/d$ の条件下でパラメータを変化させたときの実行結果である。実験 2-1 および実験 2-2 の結果を図 3 に示す。図 3 から、実験 2 の条件では被食者 y_2 が周期的に大量発生し、捕食者 y_1 は 20 前後の数字であることが読み取れる。このことから、 $y_2 < a/c$ という条件が満たされるようなモデルは、被食者が周期的に大量発生し、捕食者は被食者と比較すると少数であることが考えられる。

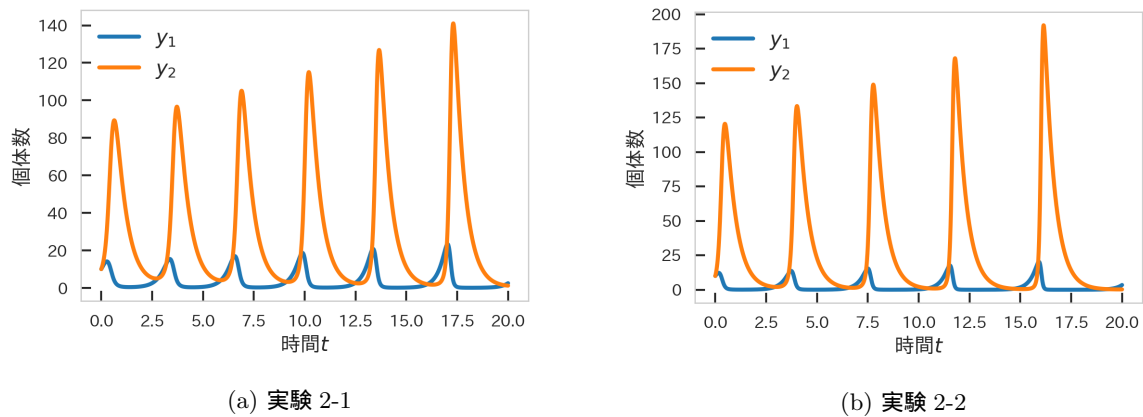
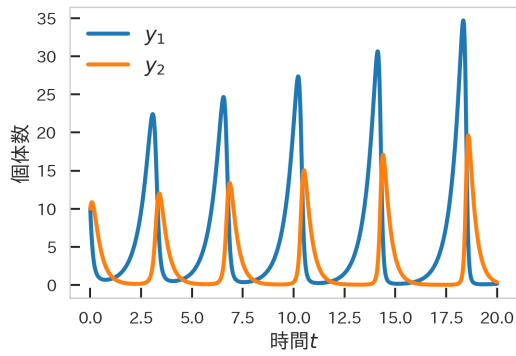


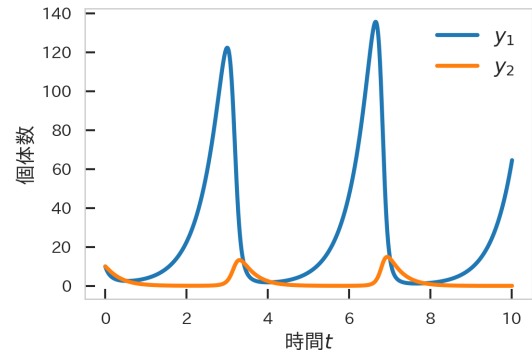
図 3: 実験 2 の結果

3.3.3 実験 3 の結果

実験 3 は、 $y_2 > a/c$ かつ $y_1 < b/d$ の条件下でパラメータを変化させたときの実行結果である。実験 3-1 および実験 3-2 の結果を図 4 に示す。図 4 から、実験 3 の条件では実験 2 とは逆に、被食者 y_1 が周期的に大量発生し、捕食者 y_2 は少数であることが読み取れる。実験 2 および実験 3 から、 $y_2 > a/c$ または $y_1 > b/d$ というどちらかの条件を満たすモデルでは、被食者と捕食者のバランスが悪いシミュレーション結果が得られることが考えられる。さらに、実験 2、実験 3 のどちらにおいても、個体数が 0 に限りなく近づくタイミングがあることがわかる。今扱っているモデルでは連続なモデルを考えているから、個体数が 0 に限りなく近づいても上昇することがあるが、実際には生態系のバランス崩れたことで絶滅したと考えることもできる。



(a) 実験 3-1

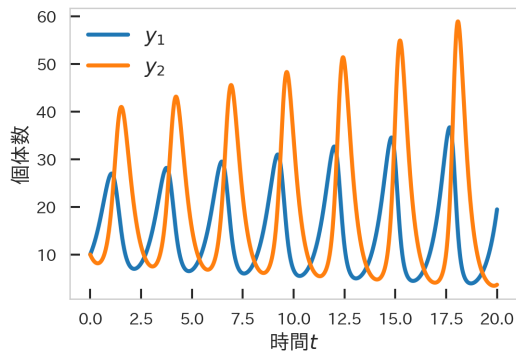


(b) 実験 3-2

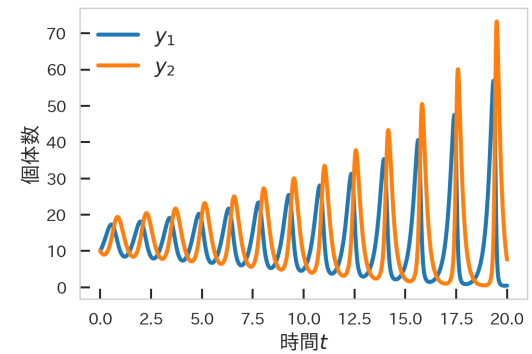
図 4: 実験 3 の結果

3.3.4 実験 4 の結果

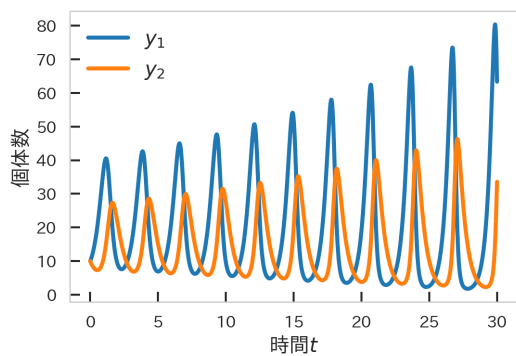
実験 4 は, $y_2 < a/c$ かつ $y_1 < b/d$ の条件下でパラメータを変化させたときの実行結果である. 実験 4-1 から実験 4-2 までの結果を図 5 に示す. 図 5 から実験 4 の結果は, パラメータによってまったく違うことが読み取れる. 図 5a は y_1, y_2 とともに個体数が安定しており, 個体数が 0, つまり絶滅しにくいモデルであることが読み取れる. 図 5b は個体の周期的な増減に加えて, 全体にトレンドがあるように見える. 図 5c は y_1, y_2 の周期的な増加のピークの値が, 増加しているモデルであるように見える. 図 5d は $t = 2$ で y_1, y_2 とともに絶滅するモデルであると読み取れる.



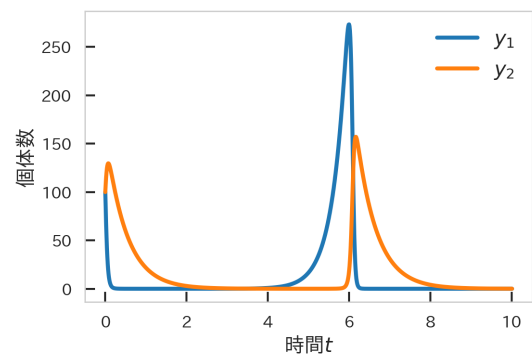
(a) 実験 4-1



(b) 実験 4-2



(c) 実験 4-3



(d) 実験 4-4

図 5: 実験 4 の結果

3.4 考察

実験 1~4 の結果から、パラメータ a, b, c, d の意味を考察する。式 (1) からパラメータ a は被食者の繁殖のしやすさ、パラメータ b は捕食者の減少のしやすさを意味すると考えられる。パラメータ c は実験 2 から捕食者の数に比例した被食者の減少のしやすさであると考えられる。パラメータ d は実験 3 から被食者の数に比例した捕食者の繁殖のしやすさであると考えられる。

4 課題 7

本章では課題 7 における、課題内容、プログラムの説明、実行結果の 3 つについて述べる。

4.1 課題内容

課題 7 では、ばね定数 k のばねに質量 m の物体がつながっているときの単振動のシミュレーションを行う。本課題では床との摩擦を考慮し、摩擦係数の大きさ l とする。このときの運動方程式は式 (11) のように書ける。初期条件は $y(0) = 10, y'(0) = 0$ とする。高階微分方程式をそのまま数値計算を行うことはできない。我々が扱えるのは、連立微分方程式であるから、これに帰着するように式変形を行う。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = -lv \quad (11)$$

$v = \frac{dx}{dt}$ とおくと、式 (11) は式 (12) で表せる。また、式 (12) のときの初期条件は、 $y(0) = 10, v(0) = 0$ となる。式 (12) は連立方程式微分方程式であるから、課題 6 のプログラムを改変すれば数値計算を行うことができる。

$$\begin{cases} v = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = -kx - lv \end{cases} \quad (12)$$

4.2 プログラムの説明

課題 7 のプログラムは、課題 6 のプログラムのメイン関数を改変しただけである。リスト 7 にメイン関数のコードを示す。リスト 7 において、質量 m は変数 m 、ばね定数 k は変数 k 、摩擦係数は l は変数 l で管理している。

リスト 7: メイン関数のコード

```
1 int main(void){
2     double h = 0.01;
3     double lim=10.0;
4     double m=1;
5     double k=2;
6     double l=0;
7     double step;
8     int i;
9     double initVector[DIM][1] ={{10},{0}}; // 初期条件 y,v
10    double transVector[DIM+1][1];
11    double weightMatrix[DIM][DIM+1] = {{0,0,1},
12                                         {0,-k/m,-l/m}
13                                         };
14    double yiVector[DIM][1];
15    double tmpVector[DIM][1];
16    double resultVector[DIM][1];
17
18    setVector(initVector, yiVector);
19    for(step=h; step<=lim; step+=h){
20        transformVector(yiVector, transVector);
21        multipleMatrix(weightMatrix, transVector, tmpVector);
22        scalarVector(tmpVector, h);
23        addVector(yiVector, tmpVector, resultVector);
```

```

24 #ifdef STDOUT
25     printf("step = %lf\n",step);
26     printf("y = %lf\n",resultVector[0][0]);
27     printf("v = %lf\n",resultVector[1][0]);
28     printf("\n");
29 #else
30     printf("%lf,%lf,%lf\n",step,resultVector[0][0],resultVector[1][0]);
31 #endif
32     setVector(resultVector,yiVector);
33 }
34 return 0;
35 }

```

4.3 実行結果

実行結果として、次の2つを確認する。

1. $l = 0$ のとき単振動になることの確認
2. l, k の値を変更した場合の動作

4.3.1 $l = 0$ のときの実行結果

$l = 0$ のとき、単振動になることを確認する。 $l = 0$ のとき、式 (11) は式 (13) のように書き直せる。さらに、角速度 $\omega (\omega > 0)$ を用いると式 (13) は式 (14) のように表せる。これより、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ という関係があることがわかる。一方で、周期 T と角速度 ω には式 (15) に示す関係がある。これらより、周期 T は式 (16) に、示すようにばね定数 k および質量 m で表すことができる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (13)$$

$$= -\omega^2x \quad (14)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (16)$$

さらに、式 (14) の微分方程式は簡単に解を求めることができる。解を求める方法については省略するが、式 (14) を解くと式 (17) の一般解が得られる (C_1, C_2 は任意定数)。初期条件および $m = 1$ という指定を式 (17) に代入すると、 $l = 0$ のときの位置 x は式 (18) で表せる。さらに、式 (18) から速度 v は式 (19) で表せる。

$$x = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (17)$$

$$x = 10 \cos(\sqrt{k}t) \quad (18)$$

$$v = -10\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}t) \quad (19)$$

式 (18) は振幅が 10 の余弦関数であり、式 (19) は振幅 10 の正弦関数である。これより、シミュレーションの結果は位置 y が振幅が 10 の余弦関数、速度 v が振幅が 10 の制限関数になることを確認すればよい。図 6 ~ 図 9 にシミュレーションの結果を示す。図 6 は $l = 0, k = 2$ のときの位置 y 、図 7 は $l = 0, k = 4$ のとき位置 y のグラフである。図 8 は $l = 0, k = 2$ のときの速度 v 、図 9 は $l = 0, k = 4$ のとき速度 v のグラフである。図 6 および図 7 から、シミュレーションの結果はおおよそ余弦関数の理論値と一致していることが読み取れる。図 8 および図 9 についても、シミュレーションの結果はおおよそ正弦関数の理論値と一致していることが読み取れる。これらより、 $l = 0$ のとき単振動になることが確認できた。

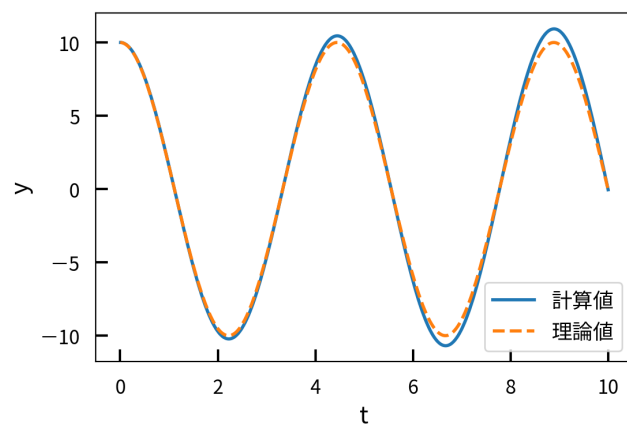


図 6: $l = 0, k = 2$ のときの実行結果 (y)

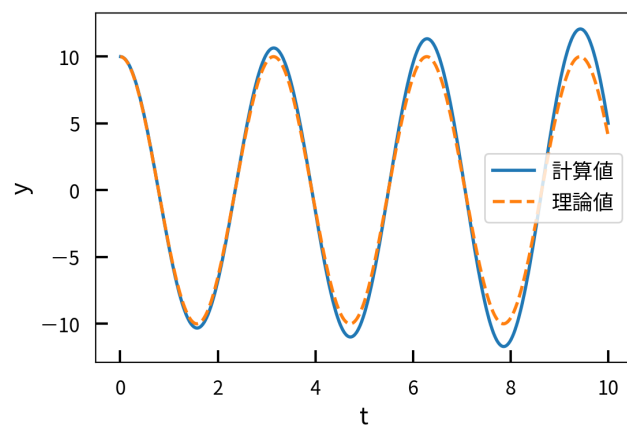


図 7: $l = 0, k = 4$ のときの実行結果 (y)

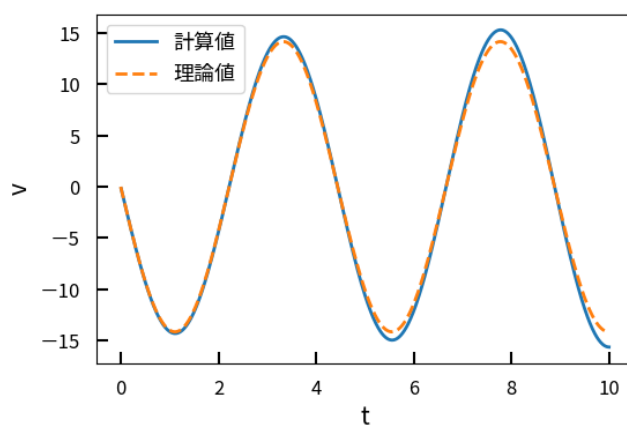


図 8: $l = 0, k = 2$ のときの実行結果 (v)

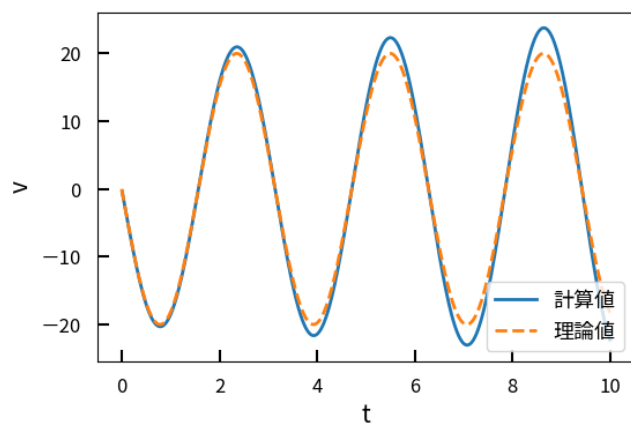


図 9: $l = 0, k = 4$ のときの実行結果 (v)

次に l, k の値を変更した場合の動作について確認する。刻み幅は次節の考察で述べるように、時間によらず振幅が一定になるような刻み幅 $h = 0.001$ を用いる。図 10 および図 11 に l を変化させたときの実行結果を示す。図 10 は $l = 1$, 図 11 は $l = 3$ のときの実行結果である。図 10 および図 11 から摩擦力の項があると、振動が徐々に減衰して静止する運動になることがわかる。単振動に摩擦力があると、これは徐々に振動が弱くなり、最終的には停止するというイメージに一致する。

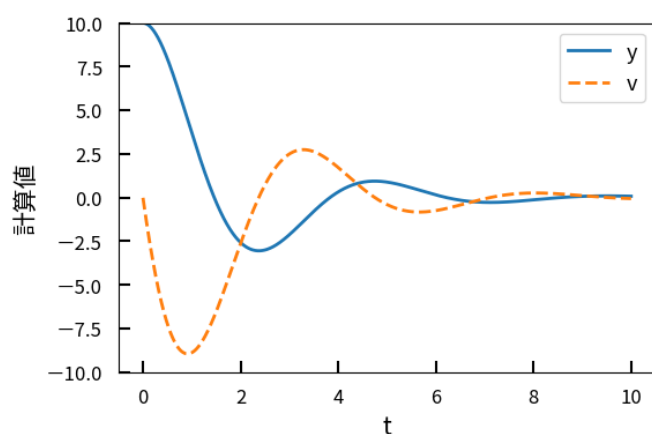


図 10: $l = 1, k = 2$ のときの実行結果

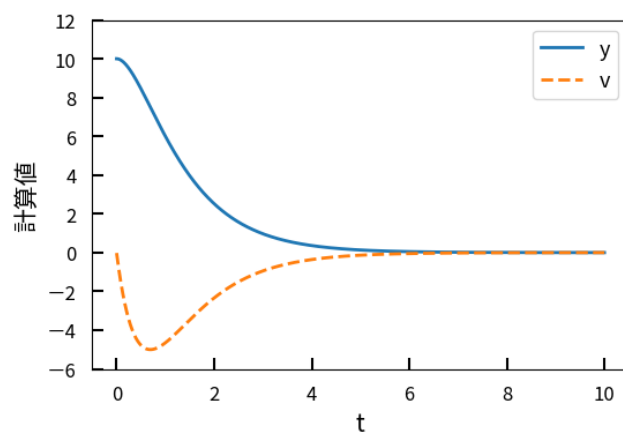


図 11: $l = 3, k = 2$ のときの実行結果

4.4 考察

図 6 および図 7 からは、時間が経過すると誤差が大きくなってしまふ特徴が読み取れる。時間によらず振幅が一定になるような刻み幅を考察する。ここでは $k = 4, l = 0$ での 3 周期分の「計算値の絶対値」と「理論値の絶対値」の標準偏差を比較し、相対誤差が 1% 未満になる場合の刻み幅を、振幅が一定になるような刻み幅とする。このような指標を設ける理由は、グラフからの視覚的な誤差の判断では、グラフの拡大縮小によって誤差の見方が変化してしまうためである。振幅が 10 の余弦関数を $2n$ 周期 (n : 整数) とったときの標準偏差はおおよそ $\sqrt{10} = 3.16$ になるはずである。表 11 に刻み幅 h を変化させて実験を行った結果を示す。表 11 から、誤差は刻み幅 h の値を小さくすると減少し、 $h = 0.001$ のとき、指標となる 1% 未満になることがわかる。 $h = 0.001$ のときの振動の様子を図 12 に示す。図 12 から $h = 0.001$ のとき、目視では理論値と計算値の違いがわからないほど、計算値と理論値の誤差が小さいことが読み取れる。これらより $h = 0.001$ が振幅が一定になるような刻み幅であると考ええる。

表 11: 刻み幅と誤差の関係

刻み幅	計算値の標準偏差	理論値の標準偏差	相対誤差 [%]
0.1	13.71	3.09	77.46
0.05	6.00	3.08	94.81
0.01	3.62	3.08	17.53
0.005	3.23	3.08	4.87
0.001	3.11	3.08	0.97

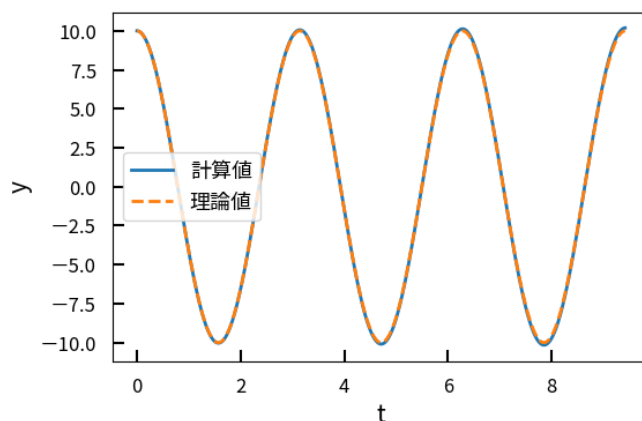


図 12: $h = 0.001$ のときの振動の様子

5 課題 8

本章では課題 8 における、課題内容、プログラムの説明、実行結果の 3 つについて述べる。

5.1 課題内容

課題 8 では直列 RLC 回路の微分方程式をホイン法で解くシミュレーションを行う。ホイン法の説明は前回の第一回のレポートで行ったため省略する。本課題で解く微分方程式を式 (20) に示す。初期条件は、 $Q(0) = Q_0, \frac{d}{dt}Q(0) = 0$ とする。

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (20)$$

式 (20) はパラメータ R (レジスタンス), L (インダクタンス), C (キャパシタンス) が特殊な値のときのみ解を求めることができるが, 一般に解を求めることができない. このためシミュレーションを行う. シミュレーションを行う場合, 式 (20) は 2 階微分方程式であるため課題 7 で行ったように式変形を行って連立微分方程式に帰着させる必要がある. この変形について説明する. $\frac{dQ(t)}{dt}$ は物理学的には電流 I を表しているから, $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ とおくと, 式 (20) は式 (21) で表せる. 初期条件も I を用いて $Q(0) = Q_0, I(0) = 0$ と書き直せる. 式 (20) から式 (21) の変形で 2 階微分方程式を連立微分方程式に帰着させることができたから, シミュレーションを行うことができる.

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) + \frac{Q(t)}{CL} = 0 \\ I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \end{cases} \quad (21)$$

5.2 プログラムの説明

プログラムの説明を行う. リスト 8 にホイン法で連立微分方程式を解くプログラムを示す. n 次元の連立微分方程式をホイン法で解くプログラムを作成することは難しかったため, 2 次の連立微分方程式を解くプログラムを作成した. 微分方程式のパラメータ R, L, C および初期条件 Q_0, I_0 は定数として定義している. また, 連立方程式は 16 行目から 20 行目に示す関数の形で定義している. ホイン法による連立微分方程式の計算は 24 行目から 48 行目に示す Heun 関数で行っている.

リスト 8: 課題 8 のプログラム

```

1  #include<stdio.h>
2  #include<stdlib.h>
3
4  //define STDOUT
5  #define CSVOUT
6
7  #define R 0.0
8  #define L 10.0
9  #define C 0.3
10 #define Q0 10.0
11 #define I0 0.0
12
13 #define H 0.01
14 #define MAX_STEP 3000
15
16 double fI(double Q, double I){
17     return -(R/L)*I - Q/(C*L);
18 }
19
20 double fQ(double I){
21     return I;
22 }
23
24 void Heun(){
25     double t = 0;
26     double tp;
27     double Qp, Ip, k1, k2;
28     double Q=Q0;
29     double I=I0;
30     for(int i=0; i<MAX_STEP; i++){
31         tp = t+H;
32         k1 = H*fI(Q, I);
33         k2 = H*fI(Q+H, I+k1);
34         Ip = I+(k1+k2)/2;
35
36         k1 = H*fQ(I);
37         k2 = H*fQ(I+k1);
38         Qp = Q+(k1+k2)/2;

```

```

39     #ifdef STDOUT
40         printf("t=%lf  Q=%0.10lf,I=%0.10lf\n",tp,Qp,Ip);
41     #else
42         printf("%lf,%lf,%lf\n",tp,Qp,Ip);
43     #endif
44     t=tp;
45     I=Ip;
46     Q=Qp;
47 }
48 }
49
50 int main(int argc,char *argv[]){
51     #ifdef STDOUT
52         printf("t=%3d  Q=%0.10lf,I=%0.10lf\n",0,Q0,I0);
53     #else
54         printf("%d,%lf,%lf\n",0,Q0,I0);
55     #endif
56     Heun();
57
58     return 0;
59 }

```

5.3 実行結果と考察

実行結果として, 次を示す 2 つを確認する.

1. $R = 0$ のとき, 単振動になることを確認する. また, 正しく計算できる刻み幅を考察する.
2. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 付近での動作を確認する.

まず, $R = 0$ のときに単振動になることを確認する. $R = 0$ のとき式 (20) は式 22 となる. これは課題 7 の式 (13) と同じ形の式である. これよりシミュレーションの結果は $Q(t)$ が余弦関数, $I(t)$ が正弦関数になるはずである.

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = -\frac{Q(t)}{LC} \quad (22)$$

図 13 に $R = 0, L = 10, C = 0.3$ のときの実行結果を示す. 刻み幅は $h = 0.01$ としている. 図 13 から, $Q(t)$ は振幅 10 の余弦関数, $I(t)$ は正弦関数になっていることがわかる. これらより, $R = 0$ のときに単振動になることが確認できた.

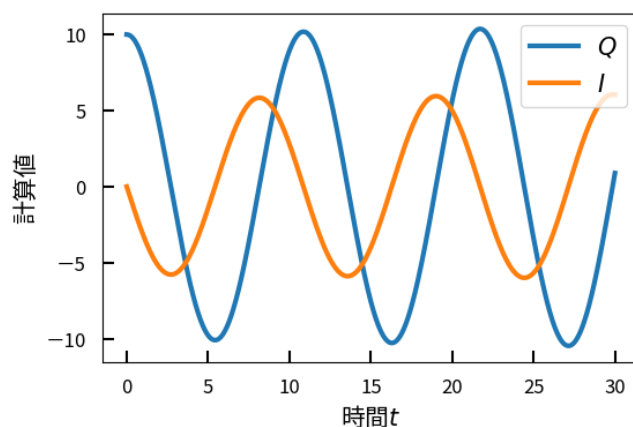


図 13: $R = 0$ のときの実行結果

次に, 正しく計算できる刻み幅について考察する. 正しく計算できているかは課題 7 と同じ指標を用いて行う. 表 12 に各刻み幅における計算値, 理論値の相対誤差を示す. 課題 7 と同様に理論値は $\sqrt{10}$ になる. 表

12 から刻み幅 $h = 0.001$ のときに, 指標となる 1%未満になっていることがわかる. このことから正しく計算できる刻み幅は 0.001 であると考察する.

表 12: 刻み幅と誤差の関係

刻み幅	計算値の標準偏差	理論値の標準偏差	相対誤差 [%]
0.1	4.55	3.08	47.73
0.05	3.64	3.08	18.18
0.01	3.17	3.08	2.92
0.005	3.12	3.08	1.30
0.001	3.09	3.08	0.32

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 付近での動作を確認する. $L = 10, C = 0.3$ という条件から $R = 11.54$ でシミュレーションを行ってみる. 図 14 に $R = 11.54$ のときの実行結果を示す. 図 14 から Q, I どちらも, 振動することなく減衰し, 10 秒付近で 0 になっていることが読み取れる.

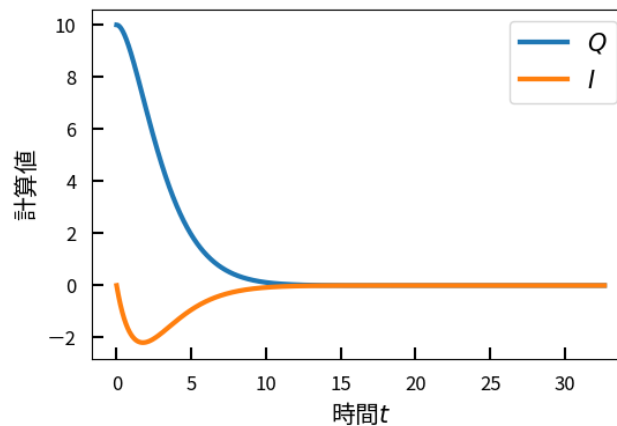


図 14: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 付近での実行結果

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 付近での動作について考察する. 式 (20) の特性方程式は式 (23) で表せる. ここで, 式 (23) の判別式 D (式 (24)) を考える.

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \quad (23)$$

$$D = R^2 - 4\frac{L}{C} \quad (24)$$

回路の動作は図 13 のように定常な場合と, 図 14 のように電流, 電圧が時間的に変化する 2 つの場合に分けられる. 回路は電源投入時や切断の直後に図 14 のような動作をし, 十分な時間が経過すると図 13 のように変化が落ち着いた状態になる. 「例題と演習で学ぶ 続・電気回路」!によれば, 電源投入時や切断の直後に電流, 電圧が変化する状態を過渡状態という. またこの現象を過渡現象という. 過渡現象は判別式 D (式 (24)) の符号によって変化し, それぞれの現象には次に示すように名前がつけられている.

- $D > 0$... 過制動
- $D = 0$... 臨界制動
- $D < 0$... 減衰振動

いま考えている現象は $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ という条件を, 式 (24) に代入すると $D = 0$ になることから臨界制動であることがわかる. 臨界制動のとき式 (20) は解くことができる. 式 (20) を解くために, 式 (23) を用いる. 式 (23) に $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ を代入して変形すると式 (25) のようになる. 式 (25) の CL を式 (26) に示すように α とおく.

$$CL\lambda^2 + 2\sqrt{CL}\lambda + 1 = 0 \quad (25)$$

$$\alpha\lambda^2 + 2\sqrt{\alpha}\lambda + 1 = 0 \quad (26)$$

判別式 $D = 0$ より, λ が 2 重解を持つことがわかるから, 式 (26) を式 (27) に示すように, 標準系に変形する. 式 (27) から, 式 (28) に示すように λ を求められる. これより臨界制動のときの $Q(t)$ の一般解は式 (30) で表せる. C_1, C_2 は任意定数である.

$$(\sqrt{\alpha}\lambda + 1)^2 = 0 \quad (27)$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (28)$$

$$Q(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}t} \quad (29)$$

$$Q(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{1}{\sqrt{CL}}t} \quad (30)$$

初期条件 $Q(0) = 10, I(0) = 0$ から, $Q(t), I(t)$ の特殊解を計算する. 式 (30) から $Q(0)$ を計算すると式 (31) に示すように $C_1 = 10$ であることがわかる.

$$Q(0) = C_1 = 10 \quad (31)$$

C_2 は $Q(t)$ の微分, つまり $I(t)$ に初期条件を代入することで求めることができる. $I(t)$ を実際に計算すると式 (33) のようになる. 式 (33) に初期条件を代入すると, 式 (35) に示すように $C_2 = \frac{10}{\sqrt{CL}}$ であることがわかる.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (32)$$

$$= C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{CL}}t} - \frac{1}{\sqrt{CL}}(C_1 + C_2 t)e^{-\frac{1}{\sqrt{CL}}t} \quad (33)$$

$$I(0) = C_2 - \frac{1}{\sqrt{CL}}C_1 = 0 \quad (34)$$

$$C_2 = \frac{10}{\sqrt{CL}} \quad (35)$$

これらより, $Q(t)$ の特殊解は式 (36), $I(t)$ の特殊解は式 (37) に示すようになる.

$$Q(t) = 10\left(1 + \frac{t}{CL}\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{CL}}t} \quad (36)$$

$$I(t) = -\frac{10}{CL}te^{-\frac{1}{\sqrt{CL}}t} \quad (37)$$

図 14 から, 式 (36) および式 (37) は, 時間 t を大きくすると 0 に収束するという特徴があることが考えられる. このことは, 式 (36) および式 (37) の本質部分である e^{-t} および te^{-t} の無限大の極限をとることで確認できる. e^{-t} の無限大の極限は 0 である. 式 (38) から式 (40) に te^{-t} の無限大の極限を計算した結果を示す. 式 (38) の右辺から, 分母分子がともに無限大の極限であることがわかる. このため, 式 (38) から式 (39) の展開にはロピタルの定理を用いて, te^{-t} の無限大の極限は 0 になるから, 図 14 のシミュレーション結果と一致していることが確認できた.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} \quad (38)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \quad (39)$$

$$= 0 \quad (40)$$

6 課題 9, 課題 10

本章では課題 9 および課題 10 における, 課題内容, プログラムの説明, 実行結果の 3 つについて述べる.

6.1 課題内容

課題 9 および課題 10 では, 電場および磁場中を運動する電荷の運動のシミュレーションを行う. 電荷 q の速度 v , 電場 E , 磁場 B とすると電荷が受ける力 F は式 41 で与えられる.

$$F = q(E + v \times B) \quad (41)$$

この運動を考えるために, まず課題 9 では $E = 0$ かつ, 磁場 $E = (0, 0, B_0)$ の場合について考える. 磁場 $E = (0, 0, B_0)$ の意味は大きさが B_0 で成分が z 成分のみであることを表している. $E = 0$ のとき, 式 41 はローレンツの法則と呼ばれ, 外積を成分表示に直して計算すると式 (??) のようになる.

$$F = q + v \times B \quad (42)$$

$$= q \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \quad (43)$$

$$= q(v_y B_0, -q v_x B_0, 0) \quad (44)$$

6.2 プログラムの説明

6.3 実行結果

6.4 考察

参考文献

[1] 国立高専機構長野高専, <http://www.nagano-nct.ac.jp/>, 閲覧日 2020 年 8 月 5 日