1　ランダムウォーク

$S_1, S_2, \dots S_n$,i.i.d とし,$P(S_i = 1) = p, P(S_i = -1) = 1 - p$ とする ($L = 1$ に限定して考える). i.i.d とは独立同分布を意味する. 独立同分布とは簡単に言えば, ある時間に左右どちらに移動するかは, 未来や過去にどちらに移動したかによらない. さらに, どの時間においても, 右に行く確率 p, 左に行く確率 $1 - p$ ということである.$n \geq 1$ に対して X_n を式 (1) のように定義する. 時刻 n とすると X_n はランダムウォークである.

$$X_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n \tag{1}$$

さて,$P(X_n = k)$ (k:整数,$-n \leq k \leq n$) が分かれば, 分散を計算することができる. $P(X_n = k)$ は n 秒後に位置 k にいる確率を表している. このため $P(X_n = k)$ を計算する. $S_i = 1$ なる i の個数 W_n,$S_i = -1$ なる i の個数 L_n と定義する. これより,$X_n = W_n - L_n$,$n = W_n + L_n$ であるから,$X_n + n = 2W_n$ と表せる. すなわち $X_n = k$ は $W_n = \frac{k+n}{2}$ というふうに表せる. W_n は n 回試行で i 回 1 がでた確率だから二項分布 $Bin(n, p)$ に従う. これより $k + n$ が奇数のとき,$\frac{k+n}{2}$ は整数にならないから,$P(X_n = k) = 0$ となる. $k + n$ が偶数のときは式 (2) に示すように $P(X_n = k)$ が計算できる.

$$P(X_n = k) = P\left(W_n = \frac{n+k}{2}\right) = {}_nC_{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \tag{2}$$

式 (2) より X_n の期待値および分散は式 (3) および式 (4) になる.

$$E[X_n] = E[2W_n - n] = 2np - n = n(2p - 1) \tag{3}$$

$$V[X_n] = V[2W_n - n] = 4V[W_n] = 4np(1 - p) \tag{4}$$

$p = 0.5$ のとき, 期待値と分散を計算してみる. 式 (3) および式 (4) に $p = 0.5$ を代入すると式 (5) および式 (6) のようになる. 式 (6) は, 数値計算で求めた分散 $V[\Delta x^2(N)] = N$ になることを示している. つまり, 最小二乗法の傾きはおおよそ 1.0 になるはずである.

$$E[X_n] = n(2p - 1) = 0 \tag{5}$$

$$V[X_n] = 4np(1 - p) = n \tag{6}$$

$p = 0.7$ のとき, 期待値と分散を計算してみる. 式 (3) および式 (4) に $p = 0.7$ を代入すると式 (7) および式 (8) のようになる. 式 (8) は, 数値計算で求めた分散 $V[\Delta x^2(N)] = 0.84N$ になることを示している. つまり, 最小二乗法の傾きはおおよそ 0.84 になるはずである.

$$E[X_n] = n(2p - 1) = 0.4n \tag{7}$$

$$V[X_n] = 4np(1 - p) = 0.84n \tag{8}$$

参考文献

[1] 久保田達也,"現代数理統計学の基礎", 共立出版社,2020

[2] AIcia Solid Project,`https://youtu.be/NE1W0wJH8q8`, 閲覧日 2021/1/21