Chapitre 05 : Variables aléatoires discrètes.

5.1 Espace probabilisé

Nous généralisons ici ce qui a été vu brièvement dans le cas fini en 1ère année. Lorsque l'univers Ω n'est pas dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ contient trop d'éléments. Donc tout sous ensemble de Ω ne sera pas forcément un événement. C'est une difficulté théorique que nous ne soulèverons pas.

5.1.1 Tribu

Définition 1 (Tribu).

1. On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :
   a. $\Omega \in \mathcal{C}$.
   b. $\forall A \in \mathcal{C}$, $\overline{A} \in \mathcal{C}$.
   c. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}$.
2. Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés les événements. 3. $(\Omega, \mathcal{C})$ est appelé espace probabilisable.

Proposition 1

Soit $\mathcal{C}$ une tribu sur Ω. On a :

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$.
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}$.
3. $\forall n>0$, $\forall (A_k)_{k\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{C}^n$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{C}$ et $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{C}$.

Dém

1. $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{C}$.
2. $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{(\overline{A_n})} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}}$ On $A_n \in \mathcal{C}$, donc $\overline{A_n}$ aussi, $\bigcup \overline{A_n}$ aussi.
3. Prendre $A_i = \Omega$ à partir de $n+1$

Remarque :

Sur les événements, on peut donc faire les opérations algébriques suivantes :

$\cup$ finie, $\cup$ dénombrable, $\cap$ finie, $\cap$ dénombrable, complémentaire.

. Une tribu est parfois appelée σ-algèbre.

Exemple :

. $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ signifie au moins un A_n est réalisé.

. $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ " tous les A_n sont réalisés.

. $\bigcup_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n\right)$: tous les A_n à partir d'un certain rang.

. $\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n\right)$: Une infinité de A_n sont réalisés.

Définition 2 : (Vocabulaires, notation $\coprod$).

. $\emptyset$ est appelé événement impossible.

. Ω " " certain.

. $\overline{A}$ " événement contraire de A.

. $A \subset B$: événement $A \Rightarrow$ événement B.

. $A \cap B = \emptyset$: A et B sont dits incompatibles.

. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont dits incompatibles deux à deux. On note alors l'union.

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n := \coprod_{n=0}^{+\infty} A_n$$

Définition 3 : (SCE : système complet d'événements).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{C})$. On l'appelle système complet d'événements ssi :
1. $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$
2. $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Autrement dit ssi $\Omega = \coprod_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Exemple : $(A, \overline{A})$ est un SCE d'événements.

Proposition 2 : (Tribu engendrée)

Soit $\Omega \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il existe une plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{A}$. On la note $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ et on l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

Dém : Soit $T = \{\text{tribu sur } \Omega \text{ contenant } \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$.

Alors $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{C}' \in T} \mathcal{C}'$ convient.

Exemple :

Soit $A \subset \Omega$ et $\mathcal{A} = \{A\}$. $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{\emptyset ; A ; \bar{A} ; \Omega\}$.

Définition 4 : (Tribu engendrée par un SCE).

Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace probabilisable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un SCE.

Notons $\mathcal{A} = \{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ est appelée tribu engendrée par le SCE $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Remarque :

Il s'agit d'un rare cas où l'on peut décrire complètement la tribu.

Cette tribu est constituée des

$B_J = \bigcup_{i \in J} A_i$ où $J \subset \mathbb{N}$.

5.1.2 Espace probabilisé.

Définition 5 :

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{C})$ toute application :

$\mathbb{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}(A) \in [0 ; 1]$. (propriété découlant de 1 et 3).
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles.

$$\mathbb{P}\left(\coprod_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (\sigma\text{-additivité}).$$

Proposition 3 : (Propriétés des probabilités).

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2. $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. $\forall A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

4. Pour toute famille d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

5. Continuité monotone : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (ie $\forall n \; A_n \subset A_{n+1}$), alors $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

6. Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événements ie $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ alors $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Dém : admis

Corollaire 1 :

Pour toute suite quelconque d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

1. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

Dém : admis.

Exemple fondamental :

On effectue une série de lancers indépendants d'un dé non pipé (truqué).

L'espace approprié est $\Omega = [\![1;6]\!]^{\mathbb{N}^*}$.

Soit E l'événement : "On n'obtient jamais 6".

Notons : A_n : "On n'obtient aucun 6 lors des n premiers lancers".

et B_k : "On obtient 6 au k-ème lancer."

On a par indépendance des lancers $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{6}$.

et $A_n = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_n}$.

On a par indépendance $\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{B_k}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $E = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Donc $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

Donc $\mathbb{P}(E) = 0$.

Pour autant, E n'est pas impossible. C'est là une différence fondamentale avec le cas fini, puisque dans le cas fini, $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$.

Définition 6.

1. Un événement $A \in \mathscr{E}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ est dit négligeable.
2. Un événement $B \in \mathscr{E}$ tq $\mathbb{P}(B) = 1$ est dit presque sûr.

5.1.3 Probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Lorsque Ω est dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu adaptée au contexte général. Les probabilités élémentaires $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ où $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ permettent de décrire toute la probabilité.

Théorème 1. (Caractérisation par les probas élémentaires).

1. Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé (ie soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n = \mathbb{P}(\{n\}) \leq 1$
   b. La série $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   c. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in A} p_n$.
2. Réciproquement, Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ | a. $\forall n \geq 0$ $\quad 0 \leq p_n$
   b. $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Alors il existe une unique proba $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$.

Dém :

1. a. est immédiat par déf d'une proba.
   b. $\mathbb{N} = \coprod_{n=0}^{+\infty} \{n\}$. donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1 = \mathbb{P}\left(\coprod_{n=0}^{+\infty}\{n\}\right) \underset{\sigma\text{ additivité}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$.

c. Idem $A = \coprod_{n\in A} \{n\}$.

2. On pose $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} p_n$

Cela définit de manière unique la probabilité cherchée.

(Le plus dur est de montrer la σ-additivité (Famille sommable, sommation par paquets).

. Ce que l'on vient de faire sert de base aux V.A.R discrètes.

5.1.4 Conditionnement

$(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Définition 7 : (Probabilité conditionnelle).

Soit $B \in \mathcal{C} /$ $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$\forall A \in \mathcal{C}$, on note $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ appelée probabilité conditionnelle de A sachant B.

Si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose $\mathbb{P}(A|B) = 0$.

Exemple :

On lance un dé. $A = \{6\}$. $B = \{2;4;6\}$.

$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = 0$.

Proposition 4 :

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$. $\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{C} \longmapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \in \mathbb{R}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{C})$.

Dem : admis.

Remarque :

1. $\mathbb{P}_B$ vérifie toutes les propriétés de la proposition 3.
2. On a en particulier les formules suivantes :

Théorème 2 :

1. Formule des probabilités composées.

$\forall (A_i)_{i\in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{C}^n$,

$$\mathbb{P}(A_1\cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1\cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2. Formule des probabilités totales :

Si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un SCE. $\forall A \in \mathcal{C}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|B_n)\,\mathbb{P}(B_n).$$

3. Formule de Bayes : Sous les ^ hypothèses que en 2

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\,\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A|B_n)\,\mathbb{P}(B_n)}.$$

Idées de dém :

1. Par récurrence sur n. $\mathcal{P}(2)$ est la déf.

2. Appliquer la σ-additivité de $\mathbb{P}$ sur

$$A = \coprod_{n=0}^{+\infty} (A\cap B_n)$$ et revenir à la déf des $\mathbb{P}_{B_n}$.

3. définition et point 2.

Exemple typique d'utilisation :

[1] Probas composées : tirage sans remise.

1. Urne : n boules blanches, n boules noires.

On tire sans remises n boules.

A = " On a obtenu aucune boule noire."

Soit B_k = " boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ".

Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1\cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_3|B_1\cap B_2)\dots\mathbb{P}(B_n|B_1\cap\dots\cap B_{n-1})$

$$= \frac{n}{2n}\times\frac{n-1}{2n-1}\times\frac{n-2}{2n-2}\times\dots\times\frac{1}{n+1}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

2 Probas totales : On détecte un SCE. en général 1 expérience aléatoire faite en 2 étapes, la seconde dépendant fortement du résultat de la première étape.

On considère n urnes $U_1 \ldots U_n$. Chaque urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. Un candidat choisit au hasard un entier entre 1 et n. Puis, s'il choisit k, il tire au hasard une boule dans l'urne k.

Quelle est la probabilité α_ℓ qu'il obtienne $\ell \in [\![1;n]\!]$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_\ell$.

On note $(B_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ le SCE B_k : " il choisit l'entier k ".

et on note A_ℓ : " il tire ~~la~~ une boule numérotée ℓ ".

On a $$\mathbb{P}(A_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_\ell | B_k)\, \mathbb{P}(B_k).$$

On a $\forall k \in [\![1;n]\!]$ $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{n}$.

et ℓ étant donné . si $k < \ell$, $\mathbb{P}(A_\ell | B_k) = 0$ car l'urne U_k ne contient pas de boule numérotée ℓ.

. Si $k \geq \ell$ $\mathbb{P}(A_\ell | B_k) = \frac{1}{k}$.

Donc $$\alpha_\ell = \mathbb{P}(A_\ell) = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k}.$$

3 Peu utilisé dans ce cours.

5.1.5. Indépendance mutuelle

Définition 8 : (indépendance, indépendance mutuelle)

1. Deux événements $(A,B) \in \mathcal{E}^2$ sont dits indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
2. Soit une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements. Ces événements sont dits

mutuellement indépendants ssi $\forall J \subset \mathbb{N}$ J, fini,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Exemple :

déjà utilisé lors de lancers indépendants d'un dé, ou d'une pièce.
On lance un dé jusqu'à obtention d'un 6. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 au $n^{\text{ème}}$ lancer. Combien de lancers faut-il faire au minimum pour avoir 1 chance sur 2 d'avoir obtenu 6.

Soit S_k : "On obtient 6 au $k^{\text{ème}}$ lancers". A_n : "Premier 6 au $n^{\text{ème}}$ lancer"

les lancers étant indépendants $P(A_n) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap .. \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n)$.

$$= \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{S_k}) \times P(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

Soit $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ ces événements sont 2 à 2 incompatibles.

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

$$P(B_n) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - (5/6)^n}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

On souhaite $P(B_n) \geq \frac{1}{2}$ et $P(B_{n-1}) < \frac{1}{2}$.

$P(B_1) = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$. $P(B_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ $P(B_3) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.

$P(B_4) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$. $n = 4$.

Remarque :

⚠ Indce 2 à 2 $\neq$ Indce mutuelle.

Exemple : On lance 2 dés. A = "premier donne pair". B : "second donne pair"

C = "somme des deux donne pair".

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(C) = \frac{\text{Nbre de couple pairs + nbre de couples impairs}}{36}$

ie $P(C) = \text{card}\left(\{2;4;6\}^2 \amalg \{1;3;5\}^2\right)$.

$= \text{card}\left(\{2;4;6\}^2\right) + \text{card}\left(\{1;3;5\}\right)^2$

$= \text{card}\left(\{2;4;6\}\right)^2 + \text{card}\left(\{1;3;5\}^2\right) = 3^2 + 3^2 = 18$

donc $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

$P(A \cap B) = \frac{\text{card}\{2;4;6\}^2}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ car $A \cap C = A \cap B = C \cap B$.

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ donc on a ind^{ce} 2 à 2.

Enfin. $A \cap B \cap C = A \cap C \cap C = A \cap C$. donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$

A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

5.2. Variables aléatoires discrètes (V.A. discrètes).

Dans cette partie, on considère les applications $X : \Omega \to \mathbb{N}$ bien que tout ceci se généralise aux applications $X : \Omega \to E$ où E est dénombrable ie en bijection avec $\mathbb{N}$ ou fini.

5.2.1 Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition 9 :

1. Soit $(\Omega, \mathscr{C}, P)$ un espace probabilisé. On appelle V.A. discrète (à valeurs dans $\mathbb{N}$) toute fonction :

$X : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{-1}(\{n\}) = [X = n] = \{w \in \Omega \mid X(w) = n\} \in \mathscr{C}$.

2. $X(\Omega)$ s'appelle support de X.

Remarque fondamentale :

Une V.A est une fonction (ou application) sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$.