

# Practica1\_Analisis\_Numerico

February 2, 2018

## 1 Parte de Aritmética de Punto Flotante

### 1.1 Ejercicio 1 (1 punto)

La aproximación de Stirling

$$S_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \left( \frac{n}{\exp(1)} \right)^n$$

se usa para aproximar el factorial  $n!$ .

Escriba un programa que muestre a modo de tabla tanto a  $n!$  como a  $S_n$ , así como los errores relativos y absolutos para  $n = 1, \dots, 20$

- haga sus calculos en formato simple de IEEE
- use una rutina de Julia para calcular el factorial de  $n$

¿Qué observa en los errores?

### 1.2 Ejercicio 2 (1 punto)

Ejecute un ciclo que en cada paso reemplace el valor asignado a la variable  $x$  por el doble

- inicie con  $x = 1.0$
- Criterio de paro: el nuevo valor asignado a la variable ya no es mayor que el valor anterior

En aritmética exacta el criterio de paro nunca se cumple. ¿por qué se cumple con el formato doble del IEEE que usa Julia?

Indique cuántas iteraciones realizó el ciclo así como el penúltimo valor y el último valor de la variable  $x$  calculado por el ciclo

### 1.3 Ejercicio 3 (1.5 puntos)

Escriba una rutina para aproximar la evaluación de la función exponencial por los primeros  $n$  términos de su serie de Taylor.

- **Criterios de paro:** cuando el  $n$ -ésimo término sea menor que  $10^{-6}$  o bien cuando  $n = 25$
- Tu rutina debe evitar errores de cancelación cuando recibe  $x < 0$ .

Genera una tabla donde muestres los valores que genera tu algoritmo para  $x = -25, -10, -5, 5, 10, 12$  así como las evaluaciones correspondientes usando la rutina de Julia para la exponencial. Muestre al menos 7 decimales usando notación científica

Para aproximar la derivada de la exponencial en  $x = 0$ , genere una tabla con las diferencias finitas

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} \quad \text{y} \quad \frac{e^{x+h} - e^{x-h}}{2h}$$

donde  $h = 2^{-i}$  para  $i = 1, \dots, 20$ . Realice las evaluaciones de  $e^x$ ,  $e^{x-h}$  y  $e^{x+h}$  usando el algoritmo que diseñó.

¿Las aproximaciones de la derivada del exponencial en  $x = 0$  mejoran o empeoran conforme  $i$  aumenta? Explique sus resultados.

## 2 Parte de Álgebra Lineal Numérica

### 2.1 Ejercicio 4 (3 puntos)

Considera la imagen en escala de grises *Lenna.png*.



- Busque comandos para generar la matriz  $A$  asociada a esta imagen tal que los elementos estén en formato doble del IEEE y en el intervalo  $[0, 1]$ . Muestre la submatriz

$$X = \begin{bmatrix} a_{240,240} & \cdots & a_{240,289} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{289,240} & & a_{289,289} \end{bmatrix}$$

así como la imagen correspondiente a esta submatriz.

- Busque un comando para calcular el rango de una matriz y uselo para hallar el rango de  $A$  y  $X$ .

¿ $A$  es invertible? ¿ $X$  es invertible?

- Apile las columnas  $X_1, \dots, X_{50}$  de  $X$  en un vector

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{50} \end{bmatrix}$$

- Escriba un programa que genere la matriz de Toeplitz  $T$  de tamaño  $m \times m$  dada por

$$t_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} a^{(i-j)^2},$$

donde

$$a = \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)$$

**Entrada:** variables  $\sigma > 0, m \in \mathbb{N}$

**Salida:** arreglo  $T$  de  $m \times m$  que almacena matriz de Toeplitz  
Evite realizar ciclos (for, while)

- Fije  $m = 2500$ ,  
Para  $\sigma = 0.5, 1, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$

haga el producto  $y = Tx$  usando el programa anterior

Reacomode  $y$  como una matriz  $Y$  de tamaño  $50 \times 50$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_{51} & \cdots & y_{2491} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{50} & y_{100} & \cdots & y_{2500} \end{bmatrix}$$

Muestre la imagen correspondiente

¿cómo cambian las imágenes que obtiene en relación a la desviación estándar  $\sigma$ ?

- Fije  $m = 2500$ , genera una tabla con  $\text{cond}_1(T)$  para  $\sigma = 1, 1.5, 1.8, 2.0, 2.1, 2.3, 2.5$

¿qué puede decir del condicionamiento de  $T$  en relación a la desviación estándar  $\sigma$ ?

- En teoría, la matriz  $T$  es positiva definida para cualquier valor de  $\sigma > 0$ . Por lo que tiene factorización de Cholesky.

Sin embargo esto no es válido con el formato doble del IEEE.

Fije  $m = 50$ .

**Halle al tanteo el valor más grande de  $\sigma > 0$  hasta con dos decimales (Ej. 3.56, 17.29) para el cual pueda calcular la factorización de Cholesky de  $T$**

use una rutina para la factorización de Cholesky

No es necesario mostrar las factorizaciones de Cholesky, pero sí el mensaje de error de la rutina

## 2.2 Ejercicio 5 (1.5 puntos)

Halle un comando para generar la matriz de Hilbert  $H_n$  de tamaño  $n \times n$ .

- Construya una tabla que muestre  $\text{cond}_\infty(H_n)$  y  $\det(H_n)$  para  $n = 1, \dots, 30$   
¿cómo cambia el determinante conforme  $n$  aumenta?
- Grafique  $\text{cond}_\infty(H_n)$  contra  $n$  para  $n = 1, \dots, 30$  usando escala logarítmica para el eje vertical  
¿qué le dice la gráfica anterior sobre el condicionamiento de  $H_n$ ?
- Sea  $u$  un vector de unos de  $n$  componentes. Sea  $b = Hu$ . Calcule la solución  $\hat{x}$  del sistema  $Hx = b$  mediante factorización LU con pivoteo por renglones y  $\|\hat{x} - u\|_\infty$  para  $n = 5, \dots, 20$ .

**NOTAS:** puede usar una rutina para factorización LU con pivoteo ,

no muestre explícitamente todas las factorizaciones y las soluciones, basta con la tabla de las normas  $\|\hat{x} - u\|_\infty$

En teoría,  $\hat{x} = u$ . Por lo que  $\|\hat{x} - u\|_\infty = 0$ . ¿esto se refleja en los calculos que hizo? ¿qué ocurre?

## 2.3 Ejercicio 6 (2 puntos)

Una manera de calcular los valores de la función  $u$  en el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= 1, & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

es mediante el método de diferencias finitas.

Sea  $h = \frac{1}{m+1}$  y sean  $x_j = jh$  para  $j = 1, \dots, m$ .

Los valores aproximados de  $u(x_j)$  son las componentes  $\hat{z}_j$  de la solución  $\hat{z}$  del sistema de ecuaciones lineales

$$Tz = b,$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} 2+h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2+h^2 \end{bmatrix}$$

es matriz tridiagonal simétrica  $m \times m$  y

$$b = \begin{bmatrix} h^2 + 1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^2 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

- Busque una rutina para hallar la Factorización LU de una matriz tridiagonal simétrica y usela para resolver  $Tz = b$  cuando  $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$

La rutina solo debe realizar operaciones con los elementos de la diagonal principal, la subdiagonal y la superdiagonal tanto en la Factorización como en las fases de sustitución directa y hacia atrás.

- La función

$$u(x) = 1 - \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)}$$

es la solución del problema de valores en frontera.

En una misma figura gráfique los valores  $u(x_j)$  contra  $x_j$  y las componentes  $\hat{z}_j$  contra  $x_j$  para  $h = 0.1$

- Muestre una tabla con los errores

$$\left\| \begin{bmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \hat{z}_m \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

para  $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$