

1° Práctica de Análisis Numérico

Profesora: Ursula Iturrarán

Semestre 2018-2

Parte Teórica de Aritmética de Punto Flotante

1 [1 pt] Considera el sistema de punto flotante $F(\beta = 10, p = 7, L = -13, U = 11)$

- a** Incluyendo al cero, ¿cuál es la cardinalidad de este sistema?
- b** Hallar el número normalizado positivo más grande (el overflow) y el número normalizado positivo más pequeño (el underflow)
- c** Si usamos redondeo al más cercano, ¿Cuál es el épsilon de la máquina ϵ_{mach} ?
- d** Use redondeo al más cercano para hallar

$$\text{fl}\left(\text{fl}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{fl}\left(\frac{1}{5}\right)\right) \quad \text{y} \quad \text{fl}\left(\text{fl}\left(\frac{1}{3}\right) - \text{fl}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

en este sistema de punto flotante

2 [1 pt] Considera el sistema de punto flotante $F(\beta = 2, p = 8, L = -10, U = 10)$

- a** ¿cuántos números tienen exponente igual a 10?
- b** Hallar el overflow y el underflow. Convierta los números obtenidos a sistema decimal.
- c** Si usamos truncamiento, ¿Cuál es el épsilon de la máquina ϵ_{mach} ?
- d** Si usamos truncamiento, ¿cuál es el valor de $\text{float}((101010.0011111)_2)$?
- e** Convierta 67.13 a binario y calcule $\text{float}(67.13)$ usando truncamiento
- f** Si usamos truncamiento, ¿cuál es el valor de $(1111.00011)_2 \oplus (10001.1001)_2$ en este sistema?

3 [1 pt] Formatos Simple y Doble del IEEE

- a** Convierta la precisión p del formato doble IEEE (64 bits) a binario
- b** Convierta su año de nacimiento al formato simple IEEE (32 bits). Use representación sesgada para el exponente y truncamiento si es necesario.
- c** Hallar el número flotante más grande del formato simple IEEE con exponente igual a $(110011)_2$ y conviértelo a sistema decimal.

4 [1 pt] Errores de Cancelación

- a** Dar una fórmula alternativa a $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ que evite errores de cancelación.
- b** Dar una fórmula que aproxime $\exp(-9)$ usando serie de Taylor hasta el 5° término. Evita errores de cancelación.
- c** Dar una fórmula para calcular la varianza muestral de $N + 1$ observaciones $x_0, \dots, x_N > 0$ que solamente realice una cancelación.

Parte Teórica de Álgebra Lineal Numérica

5 [2 pts] Normas vectoriales y Normas matriciales

- a** Encuentre la figuras que forman los siguientes conjuntos

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 \leq 1 \right\}$$

$$\overline{B_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = 1 \right\}$$

$$B_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \right\}$$

$$\overline{B_\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1 \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = 1 \right\}$$

- b** Sea

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la figuras que forman los siguientes conjuntos

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{B_1} : \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = 1 \right\}$$

$$S_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{B_\infty} : \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C : \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = 1 \right\}$$

Use estas figuras para hallar $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ y $\|A\|_2$, respectivamente

En ambos incisos explica tus pasos y dibuja las figuras usando el software Geogebra

6 [2 pts] Normas matriciales y número de condición

- a** Sea A una matriz real de tamaño $m \times n$. Pruebe que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \quad y \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

- b** Calcule el número de condición de

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en normas 1 e ∞ usando las fórmulas del inciso (a).

¿la inversa de L es una matriz triangular superior o inferior?

- c** Calcule el número de condición de

$$T = \begin{pmatrix} -2^{-5} & 2^5 \\ 0 & -2^5 \end{pmatrix}$$

en normas 1 e ∞ usando las fórmulas del inciso (a).

¿la inversa de T es una matriz triangular superior o inferior?

7 [2 pts] Considera

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- a** Investiga al menos 2 maneras distintas de saber cuando una matriz simétrica es positiva definida.
- b** Prueba que A es positiva definida ya sea por definición o usando inciso (a)
- c** Calcula la Factorización de Cholesky de A y usala para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- d** Calcula la Factorización LU de A con pivoteo por renglones y usala para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- e** Calcula la Factorización LDL^T de A

Indicaciones Generales:

- Usa \LaTeX para elaborar un archivo PDF con las respuestas de esta práctica
- Puedes registrarte en <https://www.overleaf.com> o en <https://latexbase.com> para usar \LaTeX en línea sin necesidad de instalar software ni paquetes adicionales.
- Puedes usar Geogebra en línea en <https://www.geogebra.org/geometry>. Guarda tus archivos como .ggb y .pdf
- Poner los pasos principales de tus cálculos y conversiones, así como explicaciones en el PDF que vas a entregar.
- Tutorial de \LaTeX :
<https://www.overleaf.com/latex/learn/free-online-introduction-to-latex-part-1>