

# 卢瑟福散射相关物理量的模块化推导及粒子散射等概念的提出和改进

赵延新

(黑龙江大学物理科学与技术学院, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 本工作综合前人对卢瑟福散射相关问题的研究, 主要做了三方面的工作: 一, 为了使散射问题的描述更精准、清晰、明确、方便和易于理解, 本工作改进了粒子散射等概念的表述, 并提出了一系列与散射问题有关的新的物理概念; 二, 本工作给出了到目前为止最详细的卢瑟福散射公式推导方案, 并在此推导基础上得到完整而简化的散射粒子轨迹、散射角、微分散射截面、最小散射距离等重要物理量的计算公式; 三, 本工作综合运用数理技巧并采用计算机科学中的模块化推导方法, 解决物理散射实际问题, 使解决物理问题的思路和脉络更清晰, 也使复杂物理问题的解决更简单和易于理解。本工作在物理推导中对数学的综合运用以及模块化推导方式, 可引入到力学、理论力学、原子物理等大学本科基础教学中, 将对大学本科学子数理技能的提升起到辅助积极作用。

**关键词:** 粒子散射; 模块化; 散射粒子轨迹; 微分散射截面; 最小散射距离

**中图分类号:** O571.1

## The modularized derivation of Rutherford scattering related physical quantities and the proposal and improvement of the concepts of particle scattering

Zhao Yanxin

(College of Physical Science and Technology, Heilongjiang University, Harbin 150080)

**Abstract:** The present work synthesizes the former researches about Rutherford scattering, and mainly focuses on three aspects as follows: First, to describe the scattering more accurately, clearly, more explicitly, conveniently and comprehensibly, the concept expression of particle scattering is improved in this work, and a series of new physical concepts about scattering are proposed. Second, this work has provided the most detailed derivation scheme of the Rutherford scattering formula ever, and based on this formula scheme, a complete and simplified formulas, such as scattering particle trajectory, the scattering angle, the differential scattering cross-section and the minimum distance of scattering and other important physical quantities have been obtained. Third, the job comprehensively makes use of mathematical techniques and adopts the derivation method of modularization in computer science, to solve the physical scattering practical problems, which makes the ideas for solving the physics problems more clearly, and also makes the complex physical problems easier to be solved and understood. Comprehensive application of mathematics and modularization derivation method in the physical derivation of this work can be introduced into the basic undergraduate curriculum, including mechanics, theoretical mechanics, atomic physics, which will play a positive role in improving mathematical and physical skills of the undergraduate.

**Key words:** particle scattering; modularization; scattering particle trajectory; differential scattering cross-section; minimum distance of scattering

## 0 引言

卢瑟福散射实验<sup>[1]</sup>是物理学发展史上最重要的基础性实验之一, 这个实验直接促成了原

**基金项目:** 黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11551380); 黑龙江大学青年科学基金项目 (QL201011)

**作者简介:** 赵延新(1981-), 男, 讲师, 主要研究方向: 核物理. E-mail: yanxinzhao@126.com

子有核模型的确立,是原子物理、核物理、粒子物理等学科建立的基础。而今在粒子研究等诸多近现代科学研究领域,粒子散射轰击的方法是基本粒子深层结构和粒子内部运动演化机制实验研究和微观应用测量的最重要实验方法。正因卢瑟福散射实验在基础教学和科学研究中的重要性,卢瑟福散射实验的相关描述普遍出现在物理、核科学等学科领域的本科基础教材中。然而,由于卢瑟福散射实验的理论分析部分过于繁琐和复杂,大多数教材只简单介绍这个实验的实验现象和结果,而散射相关公式如何得到却一般不做描述或仅作简略描述<sup>[2-4]</sup>;另一方面,一般的专业文献对卢瑟福散射的理论性描述又主要集中在推导方法的多样性,和具体应用方面<sup>[1, 5-7]</sup>,因此无论是成熟的传统教材还是专业文献对散射相关公式的推导和知识脉络的系统性分析和梳理不够。这样的一个后果是,相关学科的学生或读者对散射知识及相关问题的整个物理图像普遍感到模糊和模棱两可。另外,笔者在实践教学过程也发现,正由于学生对卢瑟福散射实验相关公式获得的逻辑思辨过程的理解不够,使得学生们在涉及卢瑟福散射实验设计思想的高阶应用及后续概念的理解上也会面临很大的困难。针对以上情况,有必要在现今的本科、研究生教材中引入容易理解的、完整的、细致的卢瑟福散射实验相关公式的推导过程。基于此本工作试图找到一条完整展示整个卢瑟福散射实验理论分析思路,并能够充分说明核式结构产生根源又不失简单的公式化推导。另外,为了使复杂问题变得更加易于理解,本工作采用问题驱动式的模块化推导方法。将问题细化分解为若干小的,易于理解的子问题,这样由诸多小问题汇聚成复杂问题时,读者也可通过对点的把握而对问题的全局和思想脉络有一个清晰的认识。本工作以卢瑟福本人的散射实验思想为基础<sup>[1]</sup>,应用周衍柏<sup>[2]</sup>、Goldstein<sup>[4]</sup>等应用中心力推导散射公式的基本思路,参考了赵明骅等人对卢瑟福散射公式推导的相关解决方法<sup>[5-7]</sup>,总结归纳出,一套思路清晰,推导翔实的卢瑟福散射实验相关公式推导方案。希望本工作能够为学习和应用卢瑟福散射公式的读者提供更全面和细致的阅读体验,以便在后续的相关应用和学习中起到事半功倍的作用。

## 1 卢瑟福散射实验的目的和内容

### 1、卢瑟福散射实验的实验目的:

建立实验可观测量与散射性质之间的联系,通过实验结果与理论对比反推原子的内部结构。

### 2、卢瑟福散射的实验内容:

卢瑟福散射的具体实验内容分为两部分:

A、理论分析:通过理论分析两个带正电的点电荷发生散射时,粒子径迹与粒子本征物理量之间的数值关系,建立粒子本征物理量与实验可观测物理量之间的联系;

B、实验比对:实现粒子散射过程,并通过观察粒子散射轨迹或通过观测其他可观测测量来反推粒子轨迹与理论结果比较获得对原子结构的内部认知。

卢瑟福散射实验的核心内容是对散射过程的理论分析,有了理论分析的结果才能通过实验的比对验证。

## 2 散射基本概念

卢瑟福散射实验的核心内容是理论分析,后续实验的一切结论都是建立在粒子径迹的获得的基础之上。为了清晰的描绘粒子散射过程和散射中粒子之间的相互作用,有必要把散射中涉及的诸多物理过程和状态用专有名词固定下来。以下所述各概念在传统的物理类教材中大多没有固定而明确的含义。本工作结合前人<sup>[2-4]</sup>对散射过程的描述,总结和提炼出可以帮

85 助清晰描述和理解散射过程的 12 个与散射过程有关的物理概念，并给出统一而明确的概念性描述。

1、散射：两个粒子，在相互接近时，由于相互作用使彼此运动方向发生偏转，这样的物理过程叫做粒子散射，简称散射。散射的含义非常丰富，在各个学科领域“散射”这一词汇都有其特定的含义，而在卢瑟福散射实验中，“散射”的含义具体也可表述为“无接触的碰撞”。卢瑟福散射实验就是研究粒子碰撞、分离的实验。

2、靶粒子：在散射过程中，如果初始时刻，其中一个粒子被认为是静止的或与另外一个粒子的速度相比很小，那么这个静止或速度很小的粒子一般叫做靶粒子。在具体问题中，可根据具体粒子的类型，在“靶”的后面更换中心词，如：靶核、靶电子、靶点等。

3、入射粒子：在散射过程中，与靶粒子对应，在散射发生之初，运动的或与靶粒子相比速度高，向靶粒子运动的粒子叫做入射粒子。

4、散射粒子：在散射过程中，与靶粒子对应，在散射发生尾声时，运动的或与靶粒子相比速度高，远离靶粒子运动的粒子叫做散射粒子。散射粒子是入射粒子在运动过程不同阶段的另一种表达，本质上两者没有区别，习惯上，在散射过程发生之初的运动粒子叫做入射粒子，接近完成散射过程之后的入射粒子叫做散射粒子。在不特意强调运动阶段的环境下，在整个散射过程全程，相对运动速度大的粒子可同时叫“入射粒子”或“散射粒子”。

5、基准线：入射粒子距离靶粒子无限远时，过靶粒子的质心，与入射粒子运动速度方向平行的直线，叫做基准线，简称基线。

6、入射线：在散射发生之初，入射粒子距离靶粒子无限远时，过入射粒子质心，沿入射粒子运动速度方向的直线，叫做入射线。

7、散射线：在散射发生接近尾声时，散射粒子运动到距离靶粒子无限远时，过散射粒子质心，沿散射粒子运动速度方向的直线，叫做散射线。

8、散射角：散射时，散射之初的入射粒子的速度方向与散射结束时散射粒子的速度方向之间的夹角。

注意：此处的散射角不能叫做散射线和入射线之间的夹角，数学上两条直线的夹角是锐角，散射角不一定是锐角。

9、瞄准距离：基准线与入射线之间的距离，一般用  $b$  表示。

10、散射面：过靶粒子质心和入射线的平面，即入射粒子的运动平面。

11、入射面：散射之初，过入射粒子质心垂直于基线的平面。入射面与散射面是相互垂直的平面。

12、最小散射距离：散射过程中，入射粒子到靶粒子的最小距离。

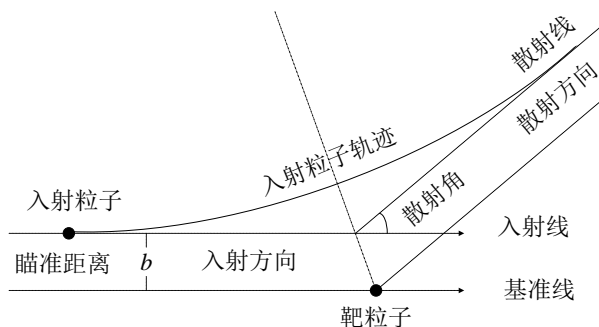


图 1 散射示意图

120 图 1 为散射粒子相关概念示意图，通过此图可以对相关概念做直观理解。

### 3 散射粒子的轨迹方程

卢瑟福散射实验理论分析的传统方法，主要将理论分析的重点放在卢瑟福散射公式本身的推导上。这样的做法有两个主要缺点，第一，卢瑟福散射公式的物理意义并不能够通过公式本身很直观的看出；第二，散射公式在实际应用中，虽然能够非常简单的与实验可观测量对应，但在推导其他与散射有关的物理量方面并不都十分好用，如在推导最小散射距离时。因此，不应该将推导卢瑟福散射公式作为研究散射问题的唯一目标。实践证明，如果首先得到散射粒子的轨迹方程，并将此方程作为我们重要的基础性公式，能够使我们在获得其他有意义的物理量方面变得更简单。而且，轨迹方程相较于卢瑟福散射公式是我们更熟悉的物理概念。通过轨迹方程得到其他物理量的过程也会使推导过程物理流程上更清晰。

130 为了得到散射粒子的轨迹，我们首先需要建立散射过程的具体模型，并设定相关物理量参数。为了使问题具体化，又不失一般性，我们设质量为  $m$  的入射粒子，原子序数为  $z_1$ ，初始动能为  $E_0$ ，以瞄准距离  $b_0$  射向质量为  $M$ ，原子序数为  $z_2$  的靶粒子。在入射粒子和靶粒子之间只有库仑力作用下，入射粒子发生散射。我们可以给出在这个散射过程中，入射粒子的轨迹方程。

135 注意 1：由于实验条件的限制，在微观世界的测量中，一般能够直接测量的物理量是粒子的动能，而粒子的速度需要间接计算得出。因此我们给出的已知量是粒子的初始动能，而不是粒子的初速度。这与一般动力学的初值问题不同。

注意 2：当粒子之间只有库仑力作用时，入射粒子和靶粒子将同时运动，这样的两体运动问题是比较复杂的。实际的散射问题中，一般靶粒子的质量  $M$  要远大于入射粒子质量  $m$ ，入射粒子的速度要远大于靶粒子的速度，另一方面靶粒子通常情况下会被束缚在晶体或金属结构中很难移动，因此靶粒子的运动距离相对于入射粒子来说在整个散射过程中都很小，其运动可忽略。为了简化分析过程，本工作把靶粒子看成是实验室系下固定不动的粒子。靶粒子的运动对运动轨迹以及其他物理可观测量的影响，我们将在另一篇论文中集中讨论。

以下我们应用模块化的分步求解方法，得到粒子散射轨迹。

#### 145 3.1 静电场力动力学方程的表示

由于入射粒子和靶粒子之间只有库仑力作用，入射粒子在一个确定的散射平面内运动。我们以固定不动的靶粒子为原点，在入射粒子的运动平面上建立极坐标系。散射粒子受到靶粒子的静电场力在此坐标系中的一般表达式为：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

150 其中， $r$  是入射粒子到靶粒子的距离，也是入射粒子的极坐标； $\vec{e}_r$  是沿极径方向的单位向量， $e$  为单位电荷电量。为了后续计算方便，我们将力的公式中的所有常量用一个独立常数代替，令

$$k = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2)$$

$k$  为正常数，入射粒子受到的库仑力化为：

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad (3)$$

### 3.2 建立入射粒子的动力学方程

在极坐标系中, 质点的加速度在极坐标系下的表达式为

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \quad (4)$$

对入射粒子应用牛顿第二定律有

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (5)$$

将力和加速度代入牛顿第二定律得到

$$\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \quad (6)$$

对应左右两式得到, 入射粒子的动力学方程

$$\begin{cases} \frac{k}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & (a) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) & (b) \end{cases} \quad (7)$$

### 3.3 入射粒子相对于靶粒子运动角动量守恒

由(7)式(b)得到

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (8)$$

变形得到

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \quad (9)$$

由此得到

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (10)$$

$h$  为由初条件决定的常数。

在极坐标系中, 质点的速度表达式为

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (11)$$

按照角动量的定义, 我们可以得到质点相对于过原点垂直于运动平面的轴的角动量(入射粒子相对于靶粒子运动的轨道角动量)为:

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad (12)$$

对比  $h$  常数表达式, 我们可以得到

$$L = mh \quad (13)$$

可见常量表达式(10)式是中心力场下角动量守恒的另一种表达形式。

### 3.4 求解常数 $h$

常数  $h$  可根据初条件得到。初始时刻, 入射粒子相对于靶粒子的角动量为

$$L = mh = b_0mv_0 \quad (14)$$

其中  $v_0$  可以通过入射粒子的初始动能得到

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \quad (15)$$

代入(14)式得到



$$h = b_0 \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \quad (16)$$

将  $h$  代入(10)式可以得到(7)-(b)式的更简洁形式。

### 3.5 比耐公式

结合(7)式(a)和(b)的结果(10)可以将动力学方程(7)式由坐标对时间的微分方程转化为坐标对坐标的微分方程。比耐公式就是对坐标的微分方程，因此也叫做轨迹微分方程。在极坐标系下，利用比耐公式计算粒子运动轨迹是最方便的方法。比耐公式的推导思路，是通过(10)式将方程中的坐标对时间的导数全部转化为极径对角度的导数而得到的。

1) 计算  $\dot{\theta}$  :

由(10)式得

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad (17)$$

由轨迹计算的实验可知，此处，用  $u = \frac{1}{r}$  对上式进行代换，将给后续计算带来方便，并且使最终公式形式美观对称。在此我们用  $u$  替换  $r$ ，令

$$u = \frac{1}{r} \quad (18)$$

则得到

$$\dot{\theta} = hu^2 \quad (19)$$

2) 计算  $\dot{r}$  :

由

(18)式得

$$ur = 1 \quad (20)$$

对此式微分得到

$$u dr + r du = 0 \Rightarrow dr = -\frac{r du}{u} = -\frac{du}{u^2} \quad (21)$$

得到

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \quad (22)$$

将

(19)式和

(21)式代入到

(22)式中得到

$$\dot{r} = -\frac{du}{u^2 d\theta} hu^2 = -h \frac{du}{d\theta} \quad (23)$$

3) 计算  $\ddot{r}$

$\dot{r}$  对时间求导

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} \quad (24)$$

将(23)式和

(19)式代入得到

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} hu^2 = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (25)$$

4) 得到比耐公式:

以上计算的结果列举如下:

$$u = \frac{1}{r} \quad (26)$$

$$\dot{\theta} = hu^2 \quad (27)$$

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta} \quad (28)$$

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (29)$$

将以上各式代入到动力学方程式(7)式中得到

$$\frac{k}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (30)$$

$$\frac{k}{m} u^2 = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} (hu^2)^2 \Rightarrow h^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{k}{m} \quad (31)$$

比耐公式:

$$h^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{k}{m} \quad (32)$$

对于静电场力粒子散射问题, 式中各常量为

$$h = b_0 \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \quad k = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (33)$$

以上比耐公式的推导过程可绘制出模块化思路框图, 如下所示:

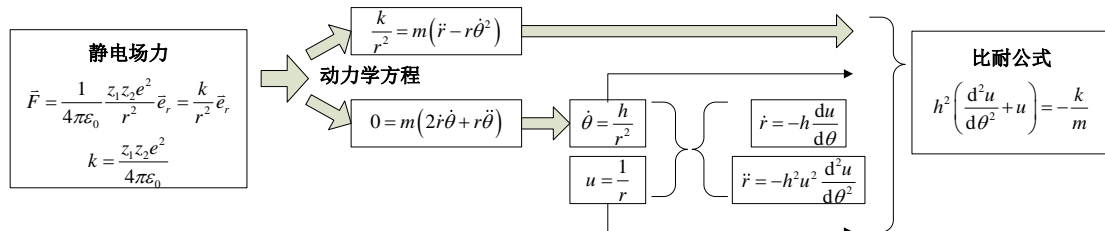


图2 静电场力推导比耐公式流程图

从框图上我们可以很清晰的看到比耐公式推导的思路脉络, 也能够非常清晰的看到公式的渊源结构。在大学或研究生教育中, 如果能够大量使用框图分析, 能够使复杂的问题变得简单, 也会使学生对知识中的关键点有更精准的把握。

### 3.6 轨迹微分方程初解

将(32)式变形得到:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{k}{mh^2} = 0 \quad (34)$$

令

$$\lambda = \frac{k}{mh^2}, \quad \xi = u + \lambda \quad (35)$$

(34)式变为

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi = 0 \quad (36)$$

245 此式为标准简谐振动微分方程，可以得到此式的通解为

$$\xi = A \cos(\theta + \varphi_0) \quad (37)$$

其中  $A$  和  $\varphi_0$  是由系统性质和初条件决定的常数。将 (35) 式代入得到

$$\begin{aligned} u + \lambda &= A \cos(\theta + \varphi_0) = A \cos \varphi_0 \cos \theta + A \sin \varphi_0 \sin \theta \\ \Rightarrow u &= A \cos \varphi_0 \cos \theta + A \sin \varphi_0 \sin \theta - \lambda \end{aligned} \quad (38)$$

250 我们需要利用初条件得到微分方程的最终解。

### 3.7 粒子散射过程的初条件

系统初始时刻，入射粒子在无穷远处的入射线上，瞄准距离为  $b_0$ 。此时有

$$t = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow \pi, \quad u \rightarrow 0 \quad (39)$$

255 入射粒子在距离靶粒子无穷远处，几乎不受库仑力作用。在很长一段时间内，入射粒子做近似匀速直线运动，瞄准距离为  $b_0$ ，粒子的极坐标满足

$$r \sin \theta \rightarrow b_0 \quad (40)$$

变换得到

$$r \sin \theta \rightarrow b_0 \Rightarrow \sin \theta \rightarrow b_0 u \quad (41)$$

对此式微分得到

$$\cos \theta d\theta \rightarrow b_0 du \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \rightarrow \frac{\cos \theta}{b_0} \quad (42)$$

260 在初始时刻， $\theta \rightarrow \pi$ ，则

$$\frac{du}{d\theta} \rightarrow -\frac{1}{b_0} \quad (43)$$

轨迹微分方程的初条件

$$\begin{cases} \theta = \pi \\ u = 0 \\ \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{b_0} \end{cases} \quad (44)$$

### 265 3.8 散射粒子轨迹方程

散射粒子轨迹通解

$$u = A \cos \varphi_0 \cos \theta + A \sin \varphi_0 \sin \theta - \lambda \quad (45)$$

令  $x_0 = A \cos \varphi_0$ ， $y_0 = A \sin \varphi_0$ ，两者为由初条件和系统性质决定的常数，代入方程中得到

$$270 \quad u = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \lambda \quad (46)$$

对角度微商得到

$$\frac{du}{d\theta} = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \quad (47)$$

将初条件(44)式代入到(46)和 (47)式中得到



$$\begin{cases} 0 = x_0 \cos \pi + y_0 \sin \pi - \lambda \\ -\frac{1}{b_0} = -x_0 \sin \pi + y_0 \cos \pi \end{cases} \quad (48)$$

275 求解上式得到

$$\begin{cases} x_0 = -\lambda \\ y_0 = \frac{1}{b_0} \end{cases} \quad (49)$$

代入到  $u$  的函数表达式得到

$$u = -\lambda \cos \theta + \frac{1}{b_0} \sin \theta - \lambda \quad (50)$$

得到粒子在极坐标系下的轨迹方程为

$$r = \frac{1}{-\lambda \cos \theta + \frac{1}{b_0} \sin \theta - \lambda} \quad (51)$$

由此可见, 散射粒子的轨迹为双曲线的一支, 其表达式形式上并不复杂。其中常数为

$$\lambda = \frac{k}{mh^2}, \quad h = b_0 \sqrt{\frac{2E_0}{m}}, \quad k = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (52)$$

由此, 我们得到了散射粒子的轨迹方程解析表达式。

得到散射粒子的解析轨迹方程, 可为其他公式的推导带来便利。

285

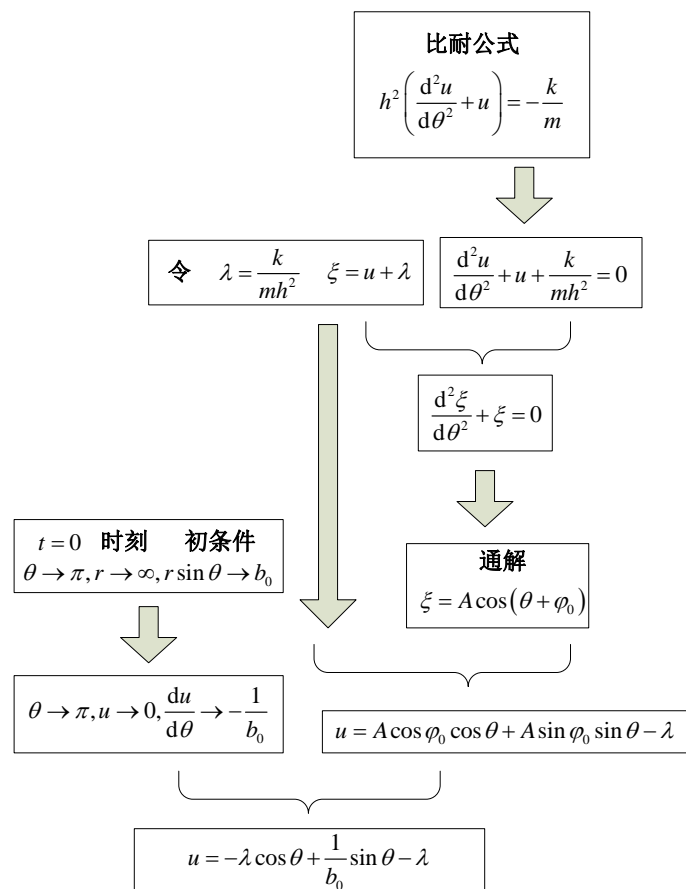


图3 推导轨迹方程流程图

图 3 为轨迹方程推导过程的流程图, 通过流程图可以非常容易的观察出推导的重要步骤和思路流程。

## 4 标准散射角公式

散射角公式是几乎所有研究卢瑟福散射实验工作者最主要的研究目标之一。在我们得到散射粒子的轨迹方程之后, 散射角公式可以非常方便的得到。

从散射粒子的运动轨迹我们可以看到, 当散射粒子完成散射后, 向无穷远处运动时, 散射粒子在以靶粒子为原点的坐标系内, 其相对于坐标系的幅角将无限接近于散射角。由此我们可以通过计算极限情况下, 散射粒子的幅角来间接求解散射角。

设散射角为  $\theta_0$ , 当散射粒子运动到距离原点无穷远处时, 散射粒子的幅角与散射角相同。

将  $r \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$ , 代入 (50) 式得到

$$u = -\lambda \cos \theta_0 + \frac{1}{b_0} \sin \theta_0 - \lambda = 0 \quad (53)$$

此式有两个解, 一个解为,  $t=0$  时刻, 粒子在无穷远处入射时, 对应  $\theta_0 = \pi$ 。此式的另一个解, 即为散射角。从粒子轨迹的物理图像上分析, 散射角取值范围在  $0$  到  $\pi$  之间,  $\cos \theta_0$ , 可正可负, 为了得到唯一的公式表达式, 可将上式中的角度用半角公式替换:

$$\sin \theta_0 = \frac{2 \tan \frac{\theta_0}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_0}{2}}, \quad \cos \theta_0 = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_0}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_0}{2}} \quad (54)$$

将(54)式代入(53)式得到

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = b_0 \lambda \quad (55)$$

将(52)式代入 (55) 式得到

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{z_1 z_2 e^2}{8 \pi \epsilon_0 b_0 E_0} \quad (56)$$

在此式中, 决定散射角的各因素中, 只有瞄准距离  $b_0$  是在实验过程中随机变化的物理量, 而其他物理量都是人为可控常数。因此瞄准距离和散射角之间的关系在散射问题的分析中处于中心重要的地位。正因如此, 标准的散射角公式由(56)式变换得到:

$$\cot \frac{\theta_0}{2} = \frac{8 \pi \epsilon_0 E_0}{z_1 z_2 e^2} b_0 \quad (57)$$

卢瑟福散射角公式, 是现代科学中, 与实验贴合最紧密的公式之一。因为这个公式经过变换后可以直接与实验相验证。

## 5 实验可观测测量: 微分散射截面

与宏观世界的打靶不同, 真正的粒子散射实验中, 很难将一个靶粒子固定在空间中来研究, 而往往用薄金属片或其他物质的薄片来尽可能构造简单的靶环境; 微观的入射粒子也极难做到一个一个的放出, 入射粒子总是成束的射向靶粒子。因此微观世界散射实验也极难进行入射粒子和靶粒子的捉对研究。真正的微观世界散射研究往往是通过大量入射粒子与大量靶粒子之间的大量散射事件的统计研究反推粒子本身的性质。

(57) 式给出的是散射角和瞄准距离之间的关系, 由于实验中难

于对散射粒子和靶粒子捉对研究，这个公式在实际的实验测量中并不好用。因此散射或粒子轰击实验中提出了一个在实验中十分有用的概念：截面。对应粒子散射实验提出了：微分散射截面。以下我们以具体实例说明截面及其物理意义。

### 5.1 实验测量散射粒子的散射角概率分布

考虑一束横截面积为  $S$  的入射粒子，持续的轰击一小片薄靶粒子屏。为了考察散射后粒子的角度分布情况，设粒子散射后，一段时间  $\Delta t$  内，散射角在  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  区间内的散射粒子数为  $dN$ ，相同时间  $\Delta t$  内，入射粒子总数为  $N$ ，则入射粒子轰击靶后散射到  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  区间内的概率为

$$df = \frac{dN}{N} \quad (58)$$

实验上，观察  $df$  随  $\theta_0$  的变化就得到散射粒子的角分布。

注意：入射粒子相对于基线是轴对称出现的，则散射角为  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  的散射粒子也是相对于轴线轴对称分布，其分布情况可如图 4 所示。

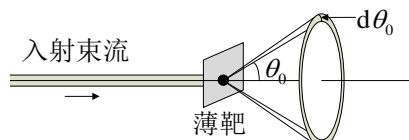


图 4 散射粒子散射角示意图

### 5.2 散射角概率分布的横截面积表示

(58)式给出的是整个束流射向整块靶屏得到对应散射角分布的总概率。这个总概率由每一组单独的入射粒子与对应靶粒子散射后组合得到。我们需要考虑每一组散射的具体效果与总概率之间的关系。

由 (57)式我们知道，散射到  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  区间内的入射粒子在入射时一定出现在对应入射面的  $b_0$  到  $b_0 + db_0$  瞄准距离区间内。由于发生散射时，散射粒子的散射角是相对于基准线轴对称的，因此  $b_0$  到  $b_0 + db_0$  的区间正好在入射面内张开了一个横截面圆环，定义这个圆环的面积为  $d\sigma$ ，起名叫做粒子散射的微分散射截面。这个截面的大小与散射粒子射入  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  散射角区间的概率大小在物理关系上等价。下面我们讨论这个截面与概率之间的关系。

### 5.3 微分散射截面与概率的关系

散射到  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  区间内的粒子数  $dN$ ，是由进入到每一个靶粒子的对应微分散射截面  $d\sigma$  内的入射粒子的加和得到。由于入射粒子在入射面内的分布是均匀的，而靶粒子在靶屏上的分布也是均匀的，则可得到(58)式的概率分布可以通过入射面内所有靶粒子对应的微分散射截面之和与入射粒子总横截面积之比得到

$$df = \frac{dN}{N} = \frac{ds}{S} \quad (59)$$

其中  $ds$  为所有靶屏上靶粒子的微分散射截面之和。设靶屏单位体积内的粒子数为  $n$ ，靶屏厚度为  $l_0$ ，则总微分散射截面为

355

$$ds = nl_0 S d\sigma \quad (60)$$

将(60)式代入到(59)式得到

$$df = \frac{dN}{N} = \frac{ds}{S} = nl_0 d\sigma \Rightarrow df = nl_0 d\sigma \quad (61)$$

360

由此式我们可以看到, 虽然  $d\sigma$  的量纲是面积, 但是由于在粒子散射实验中,  $n$  和  $l_0$  皆为常数(即靶是不变的), 所以发生特定散射角反应的概率与  $d\sigma$  成正比。从这一点可以看出, 微分散射截面虽然以面积为量纲, 但是表征的却是散射反应中特定散射角反应类型概率的大小。

#### 5.4 计算微分散射截面和散射角分布

入射到  $b_0$  到  $b_0 + db_0$  圆环内的粒子将射入  $\theta_0$  到  $\theta_0 + d\theta_0$  散射角区间内。通过对(57)式微分可以得到  $db_0$  与  $d\theta_0$  之间的关系

365

$$d\left(\cot \frac{\theta_0}{2}\right) = d\left(\frac{8\pi\epsilon_0 E_0}{z_1 z_2 e^2} b_0\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \csc^2 \frac{\theta_0}{2} d\theta_0 = \frac{8\pi\epsilon_0 E_0}{z_1 z_2 e^2} db_0 \quad (62)$$

得到

$$db_0 = -\frac{z_1 z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_0 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} d\theta_0 \quad (63)$$

其中负号表示,  $b_0$  的变化与对应  $\theta_0$  的变化方向相反。

由此可计算出微分散射截面  $d\sigma$

370

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left| \pi (b_0 + db_0)^2 - \pi b_0^2 \right| = |2\pi b_0 db_0| \\ &= \left| 2\pi \left( \frac{z_1 z_2 e^2 \cos \frac{\theta_0}{2}}{8\pi\epsilon_0 E_0 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \right) \left( -\frac{z_1 z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_0 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} d\theta_0 \right) \right| \end{aligned} \quad (64)$$

化简得到

$$d\sigma = \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{\epsilon_0 E_0} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{64\pi \sin^3 \frac{\theta_0}{2}} d\theta_0 \quad (65)$$

此式即为卢瑟福散射公式。代入到

(61)式可以得到散射角分布表达式

$$df = nl_0 d\sigma = nl_0 \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{\epsilon_0 E_0} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{64\pi \sin^3 \frac{\theta_0}{2}} d\theta_0 \quad (66)$$

375

这样对应散射角的粒子分布规律可以很容易得到了。通过分析散射粒子角分布的相应规律是否符合上式, 可以得到粒子是否具有极小中心核心的带电体。

## 6 最小散射距离

有了散射粒子的轨迹方程和散射角公式, 可以非常方便的得到最小散射距离(此处用  $r_0$  表示)。

380

由散射粒子轨迹曲线的对称性, 我们可知道, 在散射粒子距离靶粒子的距离为最小时,

对应粒子坐标微分关系有

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad (67)$$

由 (51) 式得到

$$-\lambda r \cos \theta + \frac{1}{b_0} r \sin \theta - \lambda r = 1 \quad (68)$$

385 对此式两边微商得到

$$-\lambda \cos \theta dr + \lambda r \sin \theta d\theta + \frac{1}{b_0} \sin \theta dr + \frac{1}{b_0} r \cos \theta d\theta - \lambda dr = 0 \quad (69)$$

变换得

$$\left( -\lambda \cos \theta + \frac{1}{b_0} \sin \theta - \lambda \right) \frac{dr}{d\theta} + r \left( \lambda \sin \theta + \frac{1}{b_0} \cos \theta \right) = 0 \quad (70)$$

设散射粒子在最小距离位置处的幅角为  $\theta'$ ，将(67)式代入到上式中得到

$$r_0 \left( \lambda \sin \theta' + \frac{1}{b_0} \cos \theta' \right) = 0 \quad (71)$$

得到在散射粒子处于最小散射距离时

$$\lambda \sin \theta' + \frac{1}{b_0} \cos \theta' = 0 \quad (72)$$

又由

$$\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1 \quad (73)$$

395 联立(72)和

(73)两式，并根据  $\theta'$  的特点，得到

$$\begin{cases} \sin \theta' = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 b_0^2 + 1}} \\ \cos \theta' = -\frac{\lambda b_0}{\sqrt{\lambda^2 b_0^2 + 1}} \end{cases} \quad (74)$$

将此式代入

(51)式得到最小散射距离

$$r_0 = \frac{1}{-\lambda \cos \theta' + \frac{1}{b_0} \sin \theta' - \lambda} = \frac{b_0}{\sqrt{\lambda^2 b_0^2 + 1} - \lambda b_0} \quad (75)$$

将(52)式代入并化简得到

$$r_0 = \sqrt{\left( \frac{z_1 z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_0} \right)^2 + b_0^2} + \frac{z_1 z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_0} \quad (76)$$

由此可以看出，最小散射距离是瞄准距离的函数。在瞄准距离  $b_0 = 0$  时，最小散射距离取得最小值。此时入射粒子射向靶粒子，达到最小距离后沿原路返回入射粒子源，此种散射在核科学中叫做背散射。最小散射距离的最小值为

$$r_{0\min} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_0} \quad (77)$$

405

当散射实验中，出现大角散射时，用此式估算散射粒子能够到达靶的最小距离十分方便。由此最小距离可以初步估算靶粒子半径的取值范围。

应用卢瑟福散射实验中用到的钋  $\alpha$  粒子源轰击金箔实验来估算金粒子的半径。

钋源产生的  $\alpha$  粒子的平均能量约为  $5.5\text{MeV}$ ，入射  $\alpha$  粒子的原子序数为  $z_1 = 2$ ，金的原子序数为  $z_2 = 67$ ，元电荷电量为  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ ，真空介电常数为  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}$ ，将这

些参数代入到

(77)式可以得到金半径的估算值为

$$r_{0\min} = 3.51.03 \times 10^{-14} \text{m} \quad (78)$$

这个最小距离比当时已知的原子半径  $R \approx 10^{-10} \text{m}$  小很多。 $\alpha$  粒子轰击金靶能够发生大角散射结合当时已知负电荷质量的微小，说明，原子内部一定有更微小的精细结构，原子内部有一个十分微小的电荷中心。这一结果是原子核式结构模型的最有力支撑。

## 7 结论

本工作主要得到了以下结果：

(1) 本工作提出和改进了可以较精确和明确说明粒子散射基本物理图像的相关基本概念；

(2) 本工作给出了到目前为止，有关卢瑟福散射相关公式最详细和完整的公式推导；

(3) 本工作给出了卢瑟福散射粒子的轨迹方程、散射角公式、微分散射截面公式、散射角分布公式和最小散射距离；

(4) 本工作应用模块化推导方法，使解决复杂物理问题的思路和脉络更清晰，并得到了公式推导的流程图，本工作所采用的方法对高校教学和科学研究都有借鉴意义；

(5) 通过直观的公式说明了微分散射截面与散射角概率分布之间的关系。

## [参考文献] (References)

[1] E.Rutherford, F.R.S.. The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom[J]. Philosophical Magazine, 1911, 21(6): 669-688.

[2] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 第三版. 北京：高等教育出版社，2011.

[3] 杨福家. 原子物理学[M]. 第四版. 北京：高等教育出版社，2010.

[4] Goldstein, Herbert, Poole, Charles, Safko, John. Classical Mechanics[M]. Third ed. New Jersey: Adison Wesley, 2002.

[5] 赵明骅. 对卢瑟福散射的研究[J]. 西南民族大学学报，2003，29(5)：570-572.

[6] 李曦坤. 卢瑟福散射公式的几何证明[J]. 大学物理，2009,28(1)：52-53.

[7] 董文山. 用不变速度推导卢瑟福散射公式[J]. 大学物理，2003,22(8)：21-22.