蒙特卡洛方法　作业 *1*

October 10, 2023

李永阳 *2021141220025*

1

题 1.3

我认为在此处使用 δ 函数表示概率密度完全是多此一举, 因此使用分布表表示:

Table 1: 概率分布表

x	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

显然有:

$$<x>=\sum P_i \cdot x_i$$
$$<x^2>=\sum P_i \cdot x_i^2$$
$$\sigma^2=<x^2>-<x>^2$$

因此我们可以得到:

$$<x>=\frac{2}{3}$$
$$<x^2>=1$$
$$\sigma^2=\frac{5}{9}$$
$$\sigma=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

我们给出 CDF 图像 1a 如下。

题 1.2

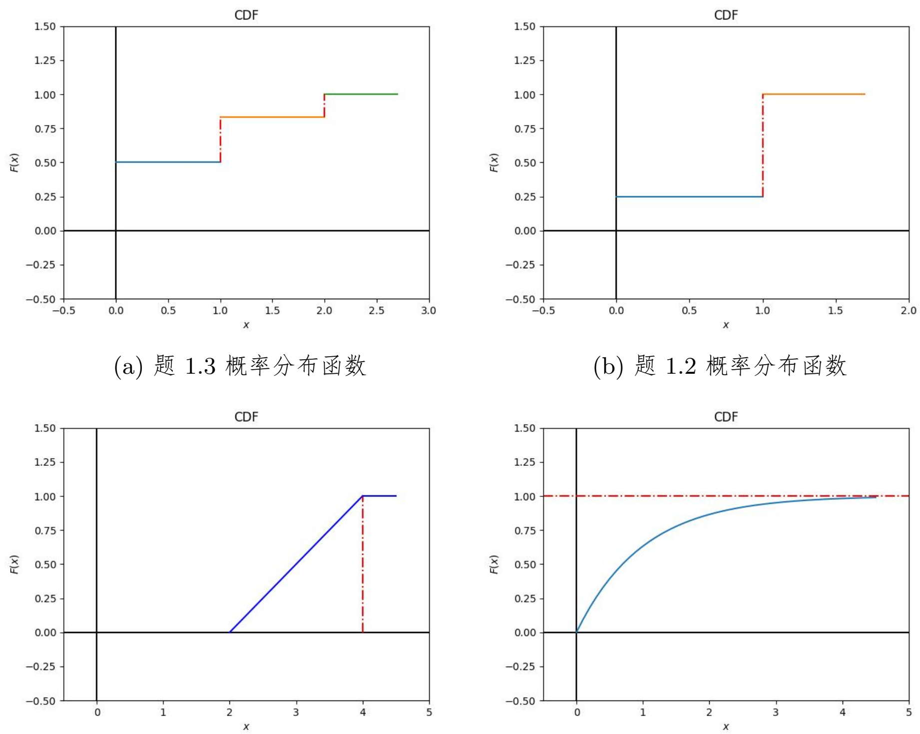
同上题:

Table 2: 概率分布表

x	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

因此我们可以得到:

Figure 1: 概率分布函数



(a) 题 1.3 概率分布函数

(b) 题 1.2 概率分布函数

(c) 题 1.5 概率分布函数

(d) 题 1.6 概率分布函数

$$
\begin{aligned}
<x> &= \frac{3}{4} \\
<x^2> &= \frac{3}{4} \\
\sigma^2 &= \frac{3}{16} \\
\sigma &= \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

我们给出 CDF 图像 1b 如下。

题 1.5

$$
\begin{aligned}
<x> &= \int_2^4 x f(x) dx = 3 \\
<x^2> &= \int_2^4 x^2 f(x) dx = \frac{28}{3} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{3} \\
\sigma &= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

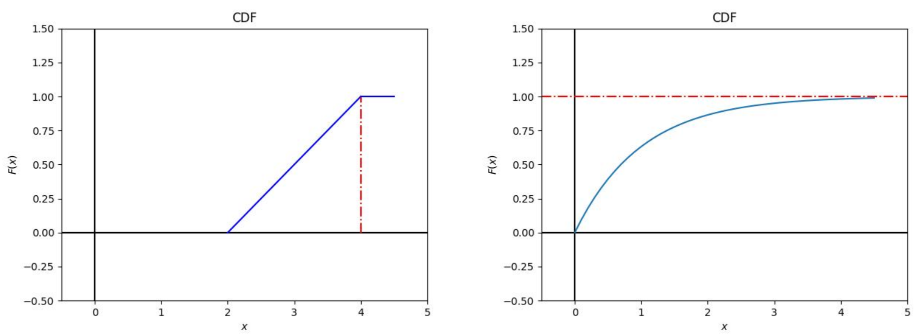
我们给出 CDF 图像 1c 如上。
我们给出 PDF 图像 2a 如下。

题 1.6

$$
\begin{aligned}
&< x >= \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1 \\
&< x^2 >= \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2 \\
&\sigma^2 = 1 \\
&\sigma = 1
\end{aligned}
$$

我们给出 CDF 图像 1d 如上。
我们给出 PDF 图像 2b 如下。

Figure 2: 概率密度函数



(a) 题 1.5 概率密度函数　　(b) 题 1.6 概率密度函数

2

题 2.1

非常显然，有：

$$
y = \begin{cases} 0 & x \in [0, 0.5) \\ 1 & x \in [0.5, 5/6) \\ 2 & x \in [5/6, 1] \end{cases}
$$

题 2.3

类似的，有

$$
\begin{aligned}
z = F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) dt \\
&= \int_{-h}^{x} \frac{dt}{2h} \\
&= \frac{x+h}{2h}
\end{aligned}
$$

求出其反函数：$x = h(2z - 1)$

题 2.6

同样的，有：

$$
\begin{aligned}
z = F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\
&= \int_0^x 2te^{-t^2}dt \\
&= 1 - e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

求出其反函数：$x = \sqrt{-ln(1-z)}$

题 2.7

同样的，有：

$$
\begin{aligned}
z = F(x) &= \int_0^x 3t^2 dt \\
&= x^3
\end{aligned}
$$

求出其反函数：$x = z^{1/3}$

2D-numerical-solution

显然该问题在二维情况下转换成利用蒙特卡洛方法计算积分

$$
\int_0^2 \int_0^2 3 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} dxdy
$$

我们利用 numpy1.25.1 中自带的 0-1 随机数生成器 numpy.random.random 计算程序，numpy 版本号可以利用指令 $numpy.\_\_\_version\_\_\_$ 查询

取样点数：$1e7$

计算结果：$8.000621379470351 \pm 0.00012908204728442695$

计算精度：$1e-3$

3D-numerical-solution

我不是很理解题中在 $3D$ 绘景下计算具体指的是什么意思，不过我猜测是在 $[0,2]\times[0,2]\times[0,3]$ 中随机撒点，通过统计在题中所说平面之下的点的数目来估计体积。依然利用 numpy1.25.1 中自带的 0-1 随机数生成器 numpy.random.random 计算程序。

取样点数：$1e7$

计算结果：$8.001054 \pm 0.0017887365957195208$

计算精度：$1e-2$

十维蒙特卡洛积分

我们当然的意识到，十维蒙特卡洛积分与二维蒙特卡洛积分并无太大区别。我们还可以猜想到，随着蒙特卡洛积分维度的增加，其精度的增加速度必然是在下降的。

取样点数为：$1e6$
计算结果：$0.28884213742394654 \pm 3.0800365850647203e-06$
计算精度：$1e-2$
取样点数为：$1e7$
计算结果：$0.28430519116979497 \pm 9.449811116292106e-07$
计算精度：$1e-2$
取样点数为：$1e8$
计算结果：$0.2847903425129942 \pm 3.0051152344585305e-07$
计算精度：$1e-2$

References

此次 homework 未用到任何参考文献

Appendix

这是此次 homework 用到的全部代码

图像绘制代码:

```
import os
figure_save_path = "figure"
import warnings
warnings.filterwarnings("error")
import numpy as np
np.random.seed(0)
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image


##plt.title("CDF")
##plt.xlabel("$x$")
##plt.ylabel("$F(x)$", rotation=90)
##plt.xlim(-0.5, 2)
##plt.ylim(-0.5, 1.5)
##plt.axhline(0, c="black")
##plt.axvline(0, c="black")
##x1 = np.arange(0, 1.1, 0.1)
##x2 = np.arange(1, 1.8, 0.1)
##plt.plot(x1, 1/4*np.ones(x1.size))
##plt.plot(x2, 1*np.ones(x2.size))
##plt.plot([1, 1], [1/4, 1], "r-.")
##if not os.path.exists(figure_save_path):
##    os.makedirs(figure_save_path)
##plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-2-CDF" + ".jpg"))

##plt.title("CDF")
##plt.xlabel("$x$")
##plt.ylabel("$F(x)$", rotation=90)
##plt.xlim(-0.5, 3)
##plt.ylim(-0.5, 1.5)
##plt.axhline(0, c="black")
##plt.axvline(0, c="black")
##x1 = np.arange(0.0, 1.1, 0.1)
##x2 = np.arange(1.0, 2.1, 0.1)
##x3 = np.arange(2.0, 2.8, 0.1)
##plt.plot(x1, 1/2*np.ones(x1.size))
##plt.plot(x2, 5/6*np.ones(x2.size))
##plt.plot(x3, 1*np.ones(x3.size))
##plt.plot([1, 1], [1/2, 5/6], "r-.")
##plt.plot([2, 2], [5/6, 1], "r-.")
##if not os.path.exists(figure_save_path):
##    os.makedirs(figure_save_path)
##plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-3-CDF" + ".jpg"))

##plt.title("PDF")
##plt.xlabel("$x$")
##plt.ylabel("$P(x)$")
##plt.xlim(1.5, 4.5)
##plt.ylim(0.0, 0.8)
##plt.axhline(0, c="black")
##plt.axvline(0, c="black")
##x1 = np.arange(2, 4.1, 0.1)
##plt.plot(x1, 1/2*np.ones(x1.size))
```

```
##plt.plot([2, 2], [0, 0.5], "r-.")
##plt.plot([4, 4], [0, 0.5], "r-.")
##if not os.path.exists(figure_save_path):
##    os.makedirs(figure_save_path)
##plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-5-PDF" + ".jpg"))

##plt.title("CDF")
##plt.xlabel("$x$")
##plt.ylabel("$F(x)$")
##plt.xlim(-0.5, 5.0)
##plt.ylim(-0.5, 1.5)
##plt.axhline(0, c="black")
##plt.axvline(0, c="black")
##x1 = np.arange(2, 4.1, 0.1)
##f = lambda x:0.5*(x-2)
##plt.plot(x1, f(x1), c="b")
##plt.plot([4, 4], [0, 1], "r-.")
##plt.plot([4, 4.5], [1, 1], c="b")
##if not os.path.exists(figure_save_path):
##    os.makedirs(figure_save_path)
##plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-5-CDF" + ".jpg"))

##plt.title("CDF")
##plt.xlabel("$x$")
##plt.ylabel("$F(x)$")
##plt.xlim(-0.5, 5.0)
##plt.ylim(-0.5, 1.5)
##plt.axhline(0, c="black")
##plt.axvline(0, c="black")
##x1 = np.arange(0, 4.6, 0.1)
##f = lambda x:1-np.exp(-x)
##plt.plot(x1, f(x1))
##plt.axhline(1, c="r", linestyle="-.")
##if not os.path.exists(figure_save_path):
##    os.makedirs(figure_save_path)
##plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-6-CDF" + ".jpg"))

plt.title("PDF")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$P(x)$")
plt.xlim(-0.5, 4.5)
plt.ylim(-0.2, 1.2)
plt.axhline(0, c="black")
plt.axvline(0, c="black")
f = lambda x:np.exp(-x)
x1 = np.arange(0, 4.1, 0.1)
plt.plot(x1, f(x1))
if not os.path.exists(figure_save_path):
os.makedirs(figure_save_path)
plt.savefig(os.path.join(figure_save_path, "1-6-PDF" + ".jpg"))
```

题五代码一：蒙特卡洛方法二维积分

```
import os
figure_save_path = "file_fig"
import warnings
warnings.filterwarnings("error")
import numpy as np
np.random.seed(0)
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from PIL import Image

print("RNG:", "Python numpy.random.random")

X_start = 0
Y_start = 0

X_end = 2
Y_end = 2

N = 10000000

num_points     = list(range(N))
random_xpoints = np.random.uniform(X_start, X_end, N)
random_ypoints = np.random.uniform(Y_start, Y_end, N)

X = np.arange(X_start, X_end, 100)
Y = np.arange(Y_start, Y_end, 100)

f = lambda i: 3 - random_xpoints[i]/2 - random_ypoints[i]/2
guess = np.array(list(map(f, num_points)))
ave = sum(guess)/N
I = ave*(X_end-X_start)*(Y_end-Y_start)

S2 = sum((guess-ave)**2)/(N-1)
S  = S2**0.5

print(I, "\pm", S/N**0.5)

##running result
##RNG: Python numpy.random.random
##8.000621379470351 \pm 0.00012908204728442695
```

题五代码二：蒙特卡洛方法二维点估计

```
import os
figure_save_path = "file_fig"
import warnings
warnings.filterwarnings("error")
import numpy as np
np.random.seed(0)
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image

print("RNG:", "Python numpy.random.random")
N = 10000000

num            = list(range(N))
xpoints = np.random.random(N) * 2
ypoints = np.random.random(N) * 2
zpoints = np.random.random(N) * 3

V = 2 * 2 * 3

f = lambda i:zpoints[i]<=3-xpoints[i]/2-ypoints[i]/2

counts = np.sum(np.array(list(map(f, num))))
ave = counts/N
S2  = counts*(1-ave)**2/(N-1) + (N-counts)*ave**2/(N-1)
S   = S2**0.5
```

```
print(ave*V, "\pm", S/N**0.5*V)
```

题七代码:

```
import os
figure_save_path = "figure"
import warnings
warnings.filterwarnings("error")
import numpy as np
np.random.seed(0)
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image

X1_start = 0
X2_start = 0
X3_start = 0
X4_start = 0
X5_start = 0

X6_start = 0
X7_start = 0
X8_start = 0
X9_start = 0
X0_start = 0


X1_end = 2
X2_end = 2
X3_end = 2
X4_end = 2
X5_end = 2

X6_end = 2
X7_end = 2
X8_end = 2
X9_end = 2
X0_end = 2


N = 100000000

num_points     = list(range(N))
random_x1points = np.random.uniform(X1_start, X1_end, N)
random_x2points = np.random.uniform(X2_start, X2_end, N)
random_x3points = np.random.uniform(X3_start, X3_end, N)
random_x4points = np.random.uniform(X4_start, X4_end, N)
random_x5points = np.random.uniform(X5_start, X5_end, N)

random_x6points = np.random.uniform(X6_start, X6_end, N)
random_x7points = np.random.uniform(X7_start, X7_end, N)
random_x8points = np.random.uniform(X8_start, X8_end, N)
random_x9points = np.random.uniform(X9_start, X9_end, N)
random_x0points = np.random.uniform(X0_start, X0_end, N)

f = lambda i: np.exp(-(random_x1points[i]**2 +
random_x2points[i]**2 +
random_x3points[i]**2 +
random_x4points[i]**2 +
random_x5points[i]**2 +

```

```
random_x6points[i]**2 +
random_x7points[i]**2 +
random_x8points[i]**2 +
random_x9points[i]**2 +
random_x0points[i]**2 ))

guess = np.array(list(map(f, num_points)))
ave = sum(guess)/N
I = ave*(X1_end-X1_start)*\
(X2_end-X2_start)*\
(X3_end-X3_start)*\
(X4_end-X4_start)*\
(X5_end-X5_start)*\
(X6_end-X6_start)*\
(X7_end-X7_start)*\
(X8_end-X8_start)*\
(X9_end-X9_start)*\
(X0_end-X0_start)

S2 = sum((guess-ave)**2)/(N-1)
S  = S2**0.5

print(I, "\pm", S/N**0.5)
```