

Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

Silabus :

- Bab I Matriks dan Operasinya
- Bab II Determinan Matriks
- Bab III Sistem Persamaan Linear
- Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang
- Bab V Ruang Vektor
- Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam
- Bab VII Transformasi Linear
- Bab VIII Ruang Eigen

VII Transformasi Linear

Sub pokok Bahasan

- Definisi Transformasi Linear
- Matriks Transformasi
- Kernel dan Jangkauan

Beberapa Aplikasi Transformasi Linear

- Grafika Komputer
- Penyederhanaan Model Matematis
- dan lain lain

Transformasi Linear

Misalkan V dan W adalah ruang vektor, $T : V \rightarrow W$ dinamakan transformasi linear, jika untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dan $\alpha \in R$ berlaku :

$$1. T(\bar{a} + \bar{b}) = T(\bar{a}) + T(\bar{b})$$

$$2. T(\alpha \bar{a}) = \alpha T(\bar{a})$$

Jika $V = W$ maka T dinamakan operator linear

Contoh :

Tunjukkan bahwa $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Rumus Transformasi

merupakan transformasi linear.

Jawab :

Ambil unsur sembarang di \mathbb{R}^2 ,

Misalkan

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(i) Akan ditunjukkan bahwa

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

$$\begin{aligned}
T(\bar{u} + \bar{v}) &= T \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ -(u_1 + v_1) \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ -u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

(ii) Ambil unsur sembarang $\bar{u} \in R^2$ dan $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} T(\alpha\bar{u}) &= T\left[\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ -\alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(-u_1) \\ \alpha(u_2) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(\bar{u}) \end{aligned}$$

Jadi, T merupakan transformasi linear.

Contoh 2 :

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari $M_{2 \times 2}$ ke \mathbb{R} yang didefinisikan oleh $T(A) = \det(A)$, untuk setiap $A \in M_{2 \times 2}$, Apakah T merupakan Transformasi linier.

Jawab :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$

maka untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} \det(\alpha A) &= \det \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix} \\ &= \alpha^2 (a_1 a_2 - a_3 a_4) = \alpha^2 \det(A) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$

Jadi T bukan transformasi linier.

Contoh 3 :

Diketahui $T : P_2$ (Polinom orde-2) $\rightarrow R^2$, dimana

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

a. Apakah T merupakan transformasi linear

b. Tentukan $T(1 + x + x^2)$

Jawab :

a.(i) Ambil unsur sembarang P_2 ,

$$p = u_1 + u_2x + u_3x^2 \qquad q = v_1 + v_2x + v_3x^2$$

Sehingga

$$p + q = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} T(p + q) &= T\left((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \\ (u_1 - u_3) + (v_1 - v_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix} \\ &= T(u_1 + u_2x + u_3x^2) + T(v_1 + v_2x + v_3x^2) \end{aligned}$$

Ambil unsur sembarang P2, $p = u_1 + u_2x + u_3x^2$
dan $\alpha \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\begin{aligned} T(\alpha \bar{u}) &= T(\alpha u_1 + u_2 x + u_3 x^2) \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha u_1 - \alpha u_2) \\ (\alpha u_1 - \alpha u_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(u_1 + u_2x + u_3x^2) \end{aligned}$$

Jadi, T merupakan transformasi linear

$$\text{b. } T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suatu transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dapat direpresentasikan dalam bentuk :

$$T(\bar{u}) = A\bar{u} \quad \text{untuk setiap } \bar{u} \in V.$$

→ A dinamakan matriks transformasi dari T .

Contoh :

Misalkan, suatu transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ didefinisikan oleh :

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi untuk $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ merupakan transformasi linear maka ukuran matriks transformasi adalah **m x n**

Misalkan

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ basis bagi ruang vektor V dan

$T: R^2 \rightarrow R^3$ merupakan transformasi linear

dimana

$$T(\bar{v}_i) = (\bar{u}_i) \text{ untuk setiap } i = 1, 2.$$

Matriks transformasinya dapat ditentukan dengan cara :

Tulis :

$$T(\bar{v}_1) = A\bar{v}_1 = \bar{u}_1$$

$$T(\bar{v}_2) = A\bar{v}_2 = \bar{u}_2$$

Sehingga

$$A_{3 \times 2} [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2]_{2 \times 2} = [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2]_{3 \times 2}$$

Jadi

$$A = [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2] [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2]^{-1}$$

$[\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2]$ basis bagi V
maka ia punya invers

Contoh 3 :

Misalkan

$$\left\{ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ adalah basis bagi } \mathbb{R}^3$$

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$ Transformasi linear didefinisikan

$$T(\bar{v}_i) = A\bar{v}_i = p_i \quad \text{untuk setiap } i = 1, 2, 3.$$

Jika

$$p_1 = 1 - x; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 2x$$

Tentukan :
Matrix transformasi dan $T \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

Jawab :

Definisikan :

$$p_1 = [1-x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad p_2 = [1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad p_3 = [2x]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Karena

$$A\bar{v}_i = p_i, \quad \forall_i = 1, 2, 3$$

Maka

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

invers matriks dicari dengan OBE :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi T adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] &= A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ingat bahwa $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = -1 + x^2$

jadi

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = (-1 + x)$$

Contoh 4 :

Diketahui basis dari polinom orde dua adalah

$$\left\{ 1 + x, -x + x^2, 1 + x - x^2 \right\}$$

Jika $T : P_2 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linear
dimana

$$T[1 + x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T[-x + x^2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T[1 + x - x^2] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

$$T(1 - x + x^2)$$

Gunakan
Definisi
Membangun



Jawab :

Perhatikan bahwa

himpunan 3 polinom tersebut adalah basis
bagi polinom orde 2

maka polinom tersebut ditulis menjadi :

$$1 - x + x^2 = k_1 (1 + x) + k_2 (-x + x^2) + k_3 (1 + x - x^2)$$

Samakan suku-suku sejenis
sehingga diperoleh SPL

$$k_1 + k_3 = 1$$

$$k_1 - k_2 + k_3 = -1$$

$$k_2 - k_3 = 1$$

dengan solusi $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, dan $k_3 = 1$.

Jadi kombinasi linear diatas berbentuk :

$$1 - x + x^2 = 0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2)$$

atau

$$T(1 - x + x^2) = T(0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2))$$

Karena transformasi T bersifat linear maka :

$$\begin{aligned} T(1 - x + x^2) &= 0T(1 + x) + 2T(-x + x^2) + T(1 + x - x^2) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kernel dan Jangkauan

Misalkan $T : V \rightarrow W$ merupakan transformasi linear
Semua unsur di V yang dipetakan ke vektor nol di W
dinamakan kernel T

notasi $\ker(T)$.

atau

$$\text{Ker}(T) = \{ \bar{u} \in V \mid T(\bar{u}) = \bar{0} \}$$

Contoh 5 :

Trans. Linear $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa $T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

maka $1 + x + x^2 \in \text{Ker}(T)$

Sementara itu, $1 + 2x + x^2 \notin \text{Ker}(T)$

karena $T(1 + 2x + x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$

Jelas bahwa vektor nol pada daerah asal transformasi merupakan unsur kernel T.

Tetapi, tak semua transformasi linear mempunyai vektor tak nol sebagai unsur kernel T.

Teorema :

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear maka $\text{Ker}(T)$ merupakan subruang dari V

Bukti :

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \text{Ker}(T)$ sembarang dan $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Karena setiap $\bar{a} \in \text{Ker}(T)$
 artinya setiap $\bar{a} \in V$ sehingga $T(\bar{a}) = \bar{0}$
 maka $\text{Ker}(T) \subseteq V$

2. Perhatikan bahwa $\bar{0} \in \text{Ker}(T)$
 artinya setiap $T(\bar{0}) = A\bar{0} = \bar{0}$
 oleh karena itu $\text{Ker}(T) \neq \{\}$

3. Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \text{Ker}(T)$ dan $\text{Ker}(T) \subseteq V$
 Ingat bahwa V mrp ruang vektor, sehingga berlaku

$$\bar{a} + \bar{b} \in V$$
 akibatnya $T(\bar{a} + \bar{b}) = T\bar{a} + T\bar{b} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
 Jadi $\bar{a} + \bar{b} \in \text{ker}(T)$

4. Karena $\bar{a} \in \text{Ker}(T)$ maka $\bar{a} \in V$

karena V adalah ruang vektor

maka untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku :

$$T(\alpha \bar{a}) = \alpha T(\bar{a}) = \alpha \bar{0} = \bar{0}$$

Jadi,

$$\alpha \bar{a} \in \text{Ker}(T)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear maka

$\text{Ker}(T)$ merupakan **subruang** dari ruang vektor V

Karena $\text{Ker}(T)$ merupakan subruang

➔ Basis $\text{Ker}(T)$.

Contoh 6 :

Diketahui Transformasi linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ dengan

$$T \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] = (a + b) + (2a - c)x + (2a + b + c)x^2$$

Tentukan basis dan dimensi $\text{Ker}(T)$ dan $\text{R}(T)$

Jawab :

Perhatikan bahwa :

$$T \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] = (a + b) + (2a - c)x + (2a + b + c)x^2 = 0$$

Ini memberikan

$$\begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$T \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi bagi T adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE pada matriks tersebut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, Basis $\ker(T) = \{ \}$

dan nulitasnya adalah nol.

Perhatikan hasil OBE

maka basis ruang kolom dari matriks A adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

oleh karena itu, basis jangkauan dari T adalah :

$$\left\{ 1 + 2x^2, 1 + 2x + x^2, -x + x^2 \right\}$$

sehingga *rank* (dimensi basis $R(t)$) = 3

Contoh 7 :

Diketahui transformasi linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
didefinisikan oleh :

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c - 2d \\ -a - b + c - 2d \end{pmatrix}$$

Tentukan basis kernel dari T dan nulitasnya

Jawab :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Jadi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis Ker(T) dan Nulitasnya?

Ker(T) adalah ruang solusi dari

$$T(\bar{v}) = A(\bar{v}) = \bar{0}, \forall \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4$$

Dengan OBE

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(T) = \text{ruang solusi dari } A\bar{v} = \bar{0}$

yaitu

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} t, s, t \neq 0 \right\}$$

Jadi Basis $\text{Ker}(T)$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulitas = Dimensi dari $\text{Ker}(T) = 2$

Latihan

1. Suatu transformasi $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

didefinisikan oleh

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ a + c \end{pmatrix}$$

Periksa apakah T merupakan transformasi linear

2. Jika suatu transformansi $T : P_1 \rightarrow P_2$ diberikan oleh :

$$T[2 + x] = 4 - x + x^2 \quad \text{dan} \quad T[1 + 3x] = 7 + 2x - 2x^2$$

Tentukan $T[3 - x]$

(Untuk no. 3 – 5)

Suatu transformasi linear, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Yang diilustrasikan sebagai berikut :

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad T\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan matriks transformasi dari T !

4. Tentukan hasil transformasi, $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

5. Tentukan basis kernel dan jangkauan dari T !

6. Tentukan *rank* dan *nulitas* matriks Transformasi :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ a + c \end{pmatrix}$$

Tentukan basis $\text{Ker}(T)$ dan basis $\text{R}(T)$
beserta dimensinya !

