關於連續複利

若起始投資金額為 A，投資 n 年，年利率 R。若每年複利 1 次，則投資期滿之金額為

$$A\,(1+R)^n$$

若每年複利 m 次，則投資期滿之金額為

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n}$$

若採連續複利，亦即 $m\to\infty$，則投資期滿之金額為

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n} = A\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n} \tag{1}$$

由數學定義

$$e = \lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}$$

(1) 可表示為

$$\begin{aligned}
A\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n} &= A\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{\frac{m}{R}\cdot R\cdot n} \\
&= A\lim_{\frac{m}{R}\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{\frac{m}{R}\cdot R\cdot n} \\
&= A\left(\lim_{\frac{m}{R}\to\infty}\left(1+\frac{R}{m}\right)^{\frac{m}{R}}\right)^{R\cdot n} \qquad (A\,x^{R\cdot n}\text{ 為 }x\text{ 之連續函數}) \\
&= A\left(\lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}\right)^{R\cdot n} \qquad (\text{變數變換：}\ M\longleftarrow\frac{m}{R}) \\
&= A\,e^{R\cdot n}
\end{aligned}$$

若 R_c 為連續複利情形下之利率，R_m 為相對應每年複利 m 次之利率，則

$$e^{R_c} = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^m$$

上式分別兩邊取 $\ln$、兩邊開 m 次方，整理可得

$$\begin{aligned}
R_c &= m\,\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right) \\
R_m &= m\left(e^{\frac{R_c}{m}}-1\right)
\end{aligned}$$