

最適資產配置問題：考慮資產流動性

張士傑, 杜昌燁*

國立政治大學風險管理與保險學系

摘要

本文研究考慮資產流動性與交易成本的最適資產配置問題：給定由高流動性、低報酬與低流動性、高報酬兩種資產組成並存在資產互轉交易成本之市場，資產有下界且保費收入滿足雙態 Poisson 隨機過程之條件下，藉由數值求解相伴的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式獲得不同保費收入與各資產規模水平之最適分紅與提存規則。

關鍵字：最適資產配置問題、Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式、資產流動性、交易成本。

1. 研究動機與緒論

資產配置是現代保險業永續經營的最核心問題之一。因應國內外長期低利率、低收益率之投資環境與主管機關之積極監理作為，保險業在保費收入與投資績效上面臨巨大壓力。中華民國人壽保險商業同業公會日前公佈，民國 109 年一至四月壽險業總保費收入較去年同期減少 12.4%，其中新契約保費收入更是減少 41%，而傳統型與投資型新契約保費收入減少幅度相同。在美國聯準會降息 6 碼的背景下，占傳統型契約大宗的利變保單宣告利率因為外部環境變化大幅降低，七月開始實施的監理措施亦規定此宣告利率需貼近實際債市利率水準；占投資型契約相當比例之目標到期債券基金依新規定只准投資 BBB+ 等級以上之債券，且數量不得超過基金淨值 40%。面對以上種種挑戰，正確有效的管理決策至關重大。

連續財務架構下的最適資產配置問題牽涉到複雜的非線性 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式，惟少數特殊情形下可能取得理論封閉解——學者往往在簡化問題設定以求得理論封閉解與加入實際考量而以數值方法求解兩種模式間做選擇。Dixit and Pindyck [10], Stokey [23], Sethi [22] 充分展示 HJB 方程式理論封閉解在經濟問題上的深刻應用，Barles et al. [2], Crandall [8], Fleming and Soner [11], Touzi [24], Kushner and Dupuis [21], Yong and Zhou [26], Bardi and Capuzzo-Dolcetta [1] 廣泛探討 HJB 方程式的數學理論與數值方法。

最適資產配置問題之重要性充分反映在保險學界研究文獻的可觀數量上；Chang and Li [4], Chang et al. [5], Hwang et al. [18], Huang [16], Huang and Lee [17], Chang et al. [6] 與 Hipp [13], Hipp and Plum [14, 15], Yang and Zhang [25], Delong [9], He and Liang [12] 等等文章為最適資產配置問題種種面向之縮影。其中與本文意旨與求解方式最接近的是 Chang et al. [5]，使用 Kushner and Dupuis [21] 的馬可夫鍊近似法 (Markov chain approximation

*通訊作者

電子郵件信箱: bchang@nccu.edu.tw (張士傑), changye.tu@gmail.com (杜昌燁)

method, MCAM) 並配合基因演算法 (genetic algorithm) 求取最適資產配置規則, 但 Chang et al. [5, Figure 3] 顯示的計算結果有頗多疑問, 各最適資產部位隨時間變動之劇烈亦使實際操作無法進行。¹

本文參考 Kaplan and Violante [20], Kaplan et al. [19] 建構應用於保險業的資產模型: 給定由高流動性、低報酬與低流動性、高報酬兩種資產組成並存在資產互轉交易成本之市場, 資產有下界且保費收入滿足連續時間雙態馬可夫鍊過程之條件下, 計算不同保費收入與各資產規模水平之最適分紅與提存規則。在此最適化目標為最大化效用函數期望值, 對比 Hipp and Plum [14], Yang and Zhang [25] 的最小化破產機率與 Huang [16], Huang and Lee [17] 的最大化資產負債比或最大化資產期望值 / 最小化資產變異數等準則。本文其餘章節安排如下: 在詳細敘述資產模型與最適資產配置問題並推導出此問題下的 HJB 方程式後, 我們敘述此 HJB 方程式的一個依據 Barles and Souganidis [3] 理論的數值解法; 選定參數求解並詳細呈現數值結果, 最後是結論與未來展望。

2. 模型

基金管理者 / 保險人每期收受現金 / 保費 z , 投資存放於兩種資產 x, y — 資產 x 流動性低, 而報酬率 r^x 高, y 流動性高, 但報酬率 r^y 低於 r^x — 並配發分紅 c 給基金投資者 / 被保險人。資產 y 與資產 x 間的互換透過提存 d , 資產變換之交易成本為 $\chi(d, x)$ 。據此我們建立以下的模型 (變數下標 t 顯示與時間的相關性):

$$\begin{aligned} dx_t &= (r^x x_t + d_t) dt \\ dy_t &= (r^y y_t + z_t - c_t - d_t - \chi(d_t, x_t)) dt \end{aligned} \quad (1)$$

其中, 現金 / 保費收入 z 滿足連續時間雙態馬可夫鍊過程: $z_t \in \{z_1, z_2\}$, 常數 $z_2 > z_1 > 0$ 並滿足

$$\begin{aligned} P(z_{t+\Delta t} = z_1 | z_t = z_1) &= 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t) \\ P(z_{t+\Delta t} = z_2 | z_t = z_2) &= 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t) \\ P(z_{t+\Delta t} = z_2 | z_t = z_1) &= \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t) \\ P(z_{t+\Delta t} = z_1 | z_t = z_2) &= \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

上式中 $\Delta t \ll 1$, $o(\Delta t) \rightarrow 0$ 當 $\Delta t \rightarrow 0$, 且 $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ 為與時間 t 無關的常數²。令交易成本函數為

$$\chi(d, x) = \chi_0 |d| + \frac{\chi_1}{2} \left(\frac{d}{x} \right)^2 x, \quad \chi_0, \chi_1 > 0 \quad (3)$$

其中第一項 $\chi_0 |d|$ 代表正比於移轉量之固定成本, 第二項 $\frac{\chi_1}{2} \left(\frac{d}{x} \right)^2 x$ 為正比於移轉量 / 流動性資產比值平方與流動性資產之交易成本。再者, x, y 有下界³:

$$x_t \geq \underline{x} > 0, \quad y_t \geq \underline{y} > -\infty. \quad (4)$$

¹觀察 Chang, Tsai and Hung [5, Figure 3] 圖形結果, 圖中最適之國內股票投資部位在 ± 2 間劇烈震盪, 亦即要在最短時間內不計交易環境許可與否來回買賣兩倍部位, 交易成本巨大。該文模型應該存在 HJB 方程式之某種程度的平滑黏滯解, 顯然數值結果有誤。本文理論模型求得之最佳分紅與提存量數值解可驗證為平滑。

²現金 / 保費收入 z 在 z_1, z_2 間變動, 變動規則 (機率分佈) 由 (2) 決定。

³若 x, y 無下界, 公司負債值至一定程度後, 依台灣現行公司法第 211 條, 董事會應即聲請宣告破產, 否則違法。本文所設之 x, y 上下界限範圍如表 2, 限制上下界在數值求解上有數學必要性, 但上下界為何 (有限) 值不影響求解可能性。流動性低資產可想做是地產, 流動性高資產可想做是現金 — 現金部份可能為負 (負債), 但地產就是擁有與未擁有 (不考慮抵押質借)。

給定效用函數 u ，在模型 (1), (2), (3), (4) 下的最適資產配置問題亦即求解最大化效用函數期望值

$$\mathcal{J}(x, y, z, c, d) = \mathbb{E}_0 \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) dt \right\}, \quad \rho > 0 \quad (5)$$

的最適分紅 c^* 與提存 d^* ；常數 ρ 為效用折現因子，衡量未來時點的效用從現在時點看來的滿足程度。令

$$v(x, y, z) = \max_{c, d} \mathcal{J}(x, y, z, c, d) \quad (6)$$

由 Bellman 動態規劃原理 (Sethi [22, 12.1], Fleming and Sonner [11, III.9]), $v(x, y, z)$ 滿足 HJB 方程式

$$\begin{aligned} \rho v(x, y, z) = \max_{c, d} \left\{ u(c) + v_x(x, y, z) (r^x x + d) + v_y(x, y, z) (r^y y + z - c - d - \chi(d, x)) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{z' \neq z \\ z' \in \{z_1, z_2\}}} \lambda(z, z') (v(x, y, z') - v(x, y, z)) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

其中, $v_x(x, y, z) \equiv \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$, $v_y(x, y, z) \equiv \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}$, $\lambda(z_1, z_2) = \lambda_1$, $\lambda(z_2, z_1) = \lambda_2$; (7) 大括弧內項分別對 c, d 微分並取為零可得一階條件

$$u'(c) - v_y(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

$$v_x(x, y, z) - v_y(x, y, z) (1 + \chi_d(d, x)) = 0 \quad (9)$$

令效用函數 u 為

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0 \quad (10)$$

由交易成本函數 $\chi(d, x)$ 表示式 (9)

$$\chi_d(d, x) \equiv \frac{\partial \chi(d, x)}{\partial d} = \begin{cases} \chi_0 + \chi_1 \frac{d}{x} & d > 0 \\ -\chi_0 + \chi_1 \frac{d}{x} & d \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

由 (8), (10) 可得最適分紅 c^*

$$c^* = (u')^{-1}(v_y(x, y, z)) = v_y(x, y, z)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (12)$$

此後我們使用記號

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \min(f, 0)$$

顯然 $f = f^+ + f^-$ 。由 (9), (11) 可得最適提存 d^*

$$d^* = (d^*)^+ + (d^*)^- = \left(\left(\frac{v_x(x, y, z)}{v_y(x, y, z)} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_x(x, y, z)}{v_y(x, y, z)} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x}{\chi_1} \right)^- \quad (13)$$

3. HJB 方程式理論與數值解法

非線性 HJB 方程式 (7) 在一般情況下往往沒有古典解（所得解在求解區域內非處處可微分，可能有尖角等等）；黏滯解（viscosity solution）概念（Crandall et al. [7]）的引入完備了數學理論，而 Barles and Souganidis [3] 的文章提供了求 HJB 方程式黏滯解的一般算法。考慮二階偏微分方程式

$$F(D^2v, Dv, v, x) = 0 \in \bar{U} \quad (14)$$

其中 \bar{U} 為 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的封閉集， $v : \bar{U} \mapsto \mathbb{R}$ 與 $F : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \mapsto \mathbb{R}$ 為局部有界函數， \mathbb{S}^n 為 $n \times n$ 對稱矩陣形成的線性空間， D^2v 、 Dv 分別為 v 的二階導數矩陣與梯度向量。給定函數 $f : C \mapsto \mathbb{R}^N$ ，其中 $C \subseteq \mathbb{R}^N$ 為閉集，定義相關的上半連續（upper semicontinuous）函數 f^* 與下半連續（lower semicontinuous）函數 f_* 為

$$f^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x; y \in C} f(y), \quad f_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x; y \in C} f(y). \quad (15)$$

我們稱 $v : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 為 (14) 的下黏滯解（viscosity subsolution），如果對所有使得 $v^* - \varphi$ 在 $x \in \bar{U}$ 有局域最大值的函數 $\varphi \in C^2(\bar{U})$ 與點 x ，

$$F_*(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x) \leq 0 \quad (16)$$

同樣的，我們稱 $v : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 為 (14) 的上黏滯解（viscosity supersolution），如果對所有使得 $v_* - \varphi$ 在 $x \in \bar{U}$ 有局域最小值的函數 $\varphi \in C^2(\bar{U})$ 與點 x ，

$$F^*(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x) \geq 0 \quad (17)$$

如果 $v : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 同時為 (14) 的上黏滯解與下黏滯解，我們稱 v 為 (14) 的黏滯解。令

$$S(\delta, x, v^\delta(x), v^\delta), \quad \forall x \in \bar{U} \quad (18)$$

為 (14) 的近似模式並滿足

- (單調性) 若 $v \geq \tilde{v}$ ，則

$$S(\delta, x, t, v) \leq S(\delta, x, t, \tilde{v}) \quad \forall \delta > 0, x \in \bar{U}, t \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

- (穩定性) 對所有 $\delta > 0$ 都存在 (18) 的均勻有界解 v^δ 。
- (一致性)

$$\begin{aligned} \limsup_{y \rightarrow x; \delta, \xi \rightarrow 0} \frac{S(\delta, y, \varphi(y) + \xi, \varphi + \xi)}{\delta} &\leq F^*(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x) \\ \liminf_{y \rightarrow x; \delta, \xi \rightarrow 0} \frac{S(\delta, y, \varphi(y) + \xi, \varphi + \xi)}{\delta} &\geq F_*(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x) \end{aligned} \quad (20)$$

- (強唯一性) 若 \tilde{v}, v 分別為 (14) 的上、下半連續解，則 $\tilde{v}(x) \leq v(x), \forall x \in \bar{U}$ 。

則近似模式 (18) 的解 v^δ , $\delta \rightarrow 0$ 局域均勻收斂到 (14) 的唯一黏滯解 (Barles and Souganidis [3, Theorem 2.1])。以下我們描述這樣的一個使用上風有限差分 (upwind finite difference) 與迭代的解 HJB 方程式 (7) 與連帶的 (12)、(13) 的近似模式。

令 $x_i, i = 1, 2, \dots, I, y_j, j = 1, 2, \dots, J, z_k, k = 1, 2, \dots, K$ (在此 $K = 2$) 為方程式求解區域之格子點, 函數 v 在格子點 (x_i, y_j, z_k) 的值記作 $v_{i,j,k} \equiv v(x_i, y_j, z_k)$ 。由此 (7)、(12)、(13) 可分別寫作

$$\begin{aligned} \rho v_{i,j,k} = & u(c_{i,j,k}) + v_{x\ i,j,k} \left(\overbrace{r_{i,j,k}^x x_i + d_{i,j,k}}^{\equiv s_{i,j,k}^x} \right) + \sum_{k' \neq k} \lambda_{k,k'} (v_{i,j,k'} - v_{i,j,k}) \\ & + v_{y\ i,j,k} \left(\underbrace{\overbrace{r_{i,j,k}^y y_j + z_k - c_{i,j,k}}^{\equiv s_{i,j,k}^c} \overbrace{-d_{i,j,k} - \chi(d_{i,j,k}, x_i)}^{\equiv s_{i,j,k}^d}}_{\equiv s_{i,j,k}^y (= s_{i,j,k}^c + s_{i,j,k}^d)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

與

$$\begin{aligned} c_{i,j,k} &= (v_{y\ i,j,k})^{-\frac{1}{\gamma}} \\ d_{i,j,k} &= \left(\left(\frac{v_{x\ i,j,k}}{v_{y\ i,j,k}} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_{x\ i,j,k}}{v_{y\ i,j,k}} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^- \end{aligned} \quad (22)$$

令

$$\begin{aligned} s_{i,j,k}^x &\equiv r_{i,j,k}^x x_i + d_{i,j,k} \\ s_{i,j,k}^c &\equiv r_{i,j,k}^y y_j + z_k - c_{i,j,k} \\ s_{i,j,k}^d &\equiv -d_{i,j,k} - \chi(d_{i,j,k}, x_i) \end{aligned} \quad (23)$$

則 (21) 可寫作

$$\begin{aligned} \rho v_{i,j,k} = & u(c_{i,j,k}) + v_{x\ i,j,k} s_{i,j,k}^x + v_{y\ i,j,k} s_{i,j,k}^c + v_{y\ i,j,k} s_{i,j,k}^d \\ & + \sum_{k' \neq k} \lambda_{k,k'} (v_{i,j,k'} - v_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (24)$$

方程式中微分項 $v_{x\ i,j,k}$ 可以前向差分 $v_{x\ i,j,k}^F$ 或後向差分 $v_{x\ i,j,k}^B$

$$v_{x\ i,j,k}^F = \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i}, \quad v_{x\ i,j,k}^B = \frac{v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k}}{x_i - x_{i-1}} \quad (25)$$

來表示; $v_{y\ i,j,k}$ 可以前向差分 $v_{y\ i,j,k}^F$ 或後向差分 $v_{y\ i,j,k}^B$

$$v_{y\ i,j,k}^F \equiv \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j}, \quad v_{y\ i,j,k}^B \equiv \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}}{y_j - y_{j-1}} \quad (26)$$

來表示。 $c_{i,j,k}$ 與 $d_{i,j,k}$ 是 $v_{x\ i,j,k}$ 、 $v_{y\ i,j,k}$ 的函數, 同樣有前後向差分版本。上風差分法提供了帶係數微分項選擇前後向差分版本的方式: 舉例來說, 帶係數微分項 $v'(x_i)s(x_i) \equiv v'_i s_i$ 在上風差分法原則下將寫作 $v'_i s_i \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} s_i^+ + \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} s_i^-$ — 係數為正則取前向差分, 為負則取負向差分。從此原則出發, 定義

$$c_{i,j,k}^B = (v_{y\ i,j,k}^B)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad c_{i,j,k}^F = (v_{y\ i,j,k}^F)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (27)$$

與

$$\begin{aligned}
d_{i,j,k}^{\text{BB}} &= \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{B}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{B}}} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{B}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{B}}} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^- \\
d_{i,j,k}^{\text{BF}} &= \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{F}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{B}}} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{F}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{B}}} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^- \\
d_{i,j,k}^{\text{FB}} &= \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{B}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{F}}} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{B}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{F}}} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^- \\
d_{i,j,k}^{\text{FF}} &= \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{F}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{F}}} - 1 - \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^+ + \left(\left(\frac{v_{x,i,j,k}^{\text{F}}}{v_{y,i,j,k}^{\text{F}}} - 1 + \chi_0 \right) \frac{x_i}{\chi_1} \right)^-
\end{aligned} \tag{28}$$

以及

$$\begin{aligned}
d_{i,j,k}^{\text{B}} &= (d_{i,j,k}^{\text{BF}})^+ + (d_{i,j,k}^{\text{BB}})^- \\
d_{i,j,k}^{\text{F}} &= (d_{i,j,k}^{\text{FF}})^+ + (d_{i,j,k}^{\text{FB}})^-
\end{aligned} \tag{29}$$

得到

$$\begin{aligned}
s_{i,j,k}^{d\text{B}} &= -d_{i,j,k}^{\text{B}} - \chi(d_{i,j,k}^{\text{B}}, x_i) \\
s_{i,j,k}^{d\text{F}} &= -d_{i,j,k}^{\text{F}} - \chi(d_{i,j,k}^{\text{F}}, x_i)
\end{aligned} \tag{30}$$

與

$$\begin{aligned}
s_{i,j,k}^{c\text{B}} &= r_{i,j,k}^y y_j + z_k - c_{i,j,k}^{\text{B}} \\
s_{i,j,k}^{c\text{F}} &= r_{i,j,k}^y y_j + z_k - c_{i,j,k}^{\text{F}}
\end{aligned} \tag{31}$$

另外令

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{B}} &= d_{i,j,k}^{\text{BB}} \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d\text{B}} < 0\}} + d_{i,j,k}^{\text{FB}} \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d\text{F}} > 0\}} \\
\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{F}} &= d_{i,j,k}^{\text{BF}} \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d\text{B}} < 0\}} + d_{i,j,k}^{\text{FF}} \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d\text{F}} > 0\}}
\end{aligned} \tag{32}$$

則

$$v_{x,i,j,k} s_{i,j,k}^x = v_{x,i,j,k}^{\text{B}} (\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{B}})^- + v_{x,i,j,k}^{\text{F}} ((\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{F}})^+ + r_{i,j,k}^x x_i) \tag{33}$$

綜合以上，HJB 方程式 (7) 的差分模式 (24) 將寫作

$$\begin{aligned}
\rho v_{i,j,k} &= u(c_{i,j,k}) + v_{x,i,j,k}^{\text{B}} (\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{B}})^- + v_{x,i,j,k}^{\text{F}} ((\tilde{d}_{i,j,k}^{\text{F}})^+ + r_{i,j,k}^x x_i) \\
&\quad + v_{y,i,j,k}^{\text{B}} (s_{i,j,k}^{c\text{B}})^- + v_{y,i,j,k}^{\text{F}} (s_{i,j,k}^{c\text{F}})^+ \\
&\quad + v_{y,i,j,k}^{\text{B}} (s_{i,j,k}^{d\text{B}})^- + v_{y,i,j,k}^{\text{F}} (s_{i,j,k}^{d\text{F}})^+ \\
&\quad + \sum_{k' \neq k}^K \lambda_{k,k'} (v_{i,j,k'} - v_{i,j,k})
\end{aligned}$$

由此可得一個滿足 Barles and Souganidis [3] 理論的迭代近似模式 (除末項外略去下標 i, j, k ,

並以標 n 表示迭代期數)

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+1} - v^n}{\delta} + \rho v^{n+1} = & u(c^n) + v_x^{B, n+1} (\tilde{d}^{B, n})^- + v_x^{F, n+1} ((\tilde{d}^{F, n})^+ + r^x x_i) \\
& + v_y^{B, n+1} (s^{c, B, n})^- + v_y^{F, n+1} (s^{c, F, n})^+ \\
& + v_y^{B, n+1} (s^{d, B, n})^- + v_y^{F, n+1} (s^{d, F, n})^+ \\
& + \sum_{k' \neq k}^K \lambda_{k, k'} (v_{k'}^{n+1} - v_k^{n+1})
\end{aligned} \tag{34}$$

與起始值

$$v^0 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{w + r^y(y)y + r^x x}{1 - \gamma} \right)^{1-\gamma} \tag{35}$$

4. 數值範例

我們使用表 1、2 之參數進行計算。圖 1 顯示不同固定 / 變動交易成本因子下移轉資產量與交易成本的數值關係：交易成本函數 (3) 的形式反映出交易成本增加幅度大於移轉資產量增加 — 資產量越大，變現越困難 — 的普遍常識。圖 2 顯示在選定高流動性資產水平下，最適分紅與低流動性資產量的變化曲線（資產越高，分紅自然越多）。圖 3 顯示最適分紅與低流動性資產關係形成的變動區域：在任何高流動性資產水平下最適分紅均由此區域覆蓋。圖 4 顯示在選定高流動性資產水平下，最適提存與低流動性資產量的變化曲線（高流動性資產越少，從低流動性資產提存量越多）。圖 5 顯示最適提存與低流動性資產關係形成的變動區域：在任何高流動性資產水平下最適提存均由此區域覆蓋。圖 6 顯示在選定低流動性資產水平下，最適分紅與高流動性資產的變化曲線（資產越高，分紅自然越多）。圖 7 顯示最適分紅與高流動性資產關係形成的變動區域。圖 8 顯示在選定低流動性資產水平下，最適提存與高流動性資產量的變化曲線（低流動性資產越多，從低流動性資產提存量越多）。圖 9 顯示最適提存與高流動性資產關係形成的變動區域。圖 11 與圖 10 分別顯示在低保費收入與高保費收入下，對應於不同資產組合之最適分紅與最適提存；圖 3、5、7、9 即為圖 11、圖 10 分別對低流動性資產方向與高流動性資產方向的垂直二維投影。

以上所得的數值結果圖形與參數選擇密切相關，看似單純的小小參數變動都有可能使問題從收斂變為無法求解，特別是在報酬率 r^x 、 r^y ，折現因子 ρ ，與交易成本 χ_0 、 χ_1 這幾個參數上。原因很清楚：交易成本造成資產流動性差異。若報酬率差別小加上高交易成本，自然抑制資產移轉；若報酬率差別大加上低交易成本，資產勢必大量移轉至高報酬率者。

5. 結論與未來展望

本文探討一個考量資產流動性、交易成本與資產價值有下界的雙資產模型之最適資產配置問題，並以數值方法求解此問題衍生的 HJB 方程式，最終得出在各資產水平下的最適分紅與提存規則。透過研究此問題的數值解我們發現模型參數對於數值解的影響巨大，部份原因在於最適化條件 (5) — 選取此最適化條件即為研究不隨時間變化的穩定平衡狀態下的分佈。若取有限而非無限大的觀察期間，(5) 將為時間 t 的函數，且必須給予在觀察期間結束點的邊界條件以求解。由於保險業特殊的資產負債長期存續性質，研究穩定平衡狀態下的最適資產配置問題依然符合現實。我們使用的參數部份擷取 Kaplan et al. [19] 透過複雜總體經濟模型與美國資料推估校正的數值，若要使我們的研究模型更能貼近本土實際情形，自然需要針對台灣資料重複此一過程。

參數	數值	定義
γ	2	CRRA 效用函數風險偏好
r^x	0.057	低流動性資產報酬率
r^y	0.02	高流動性資產報酬率
ρ	0.048	折現因子
χ_0	0.04	固定交易成本因子
χ_1	8	變動交易成本因子
z_1	3.6	低保費收入值
z_2	4.4	高保費收入值
$\lambda_{1,2}$	$\frac{1}{3}$	低保費收入變高機率
$\lambda_{2,1}$	$\frac{1}{3}$	高保費收入變低機率

表 1: 本文模型參數。

參數	數值	定義
\underline{x}	0	低流動性資產下界
\underline{y}	0	高流動性資產下界
x_{\max}	100	低流動性資產上界
y_{\max}	50	高流動性資產上界
δ	100	迭代法參數
I	200	低流動性資產分割數
J	250	高流動性資產分割數
n_{iter}	100	最大迭代次數
	10^{-8}	精確度準則

表 2: 本文計算用參數。

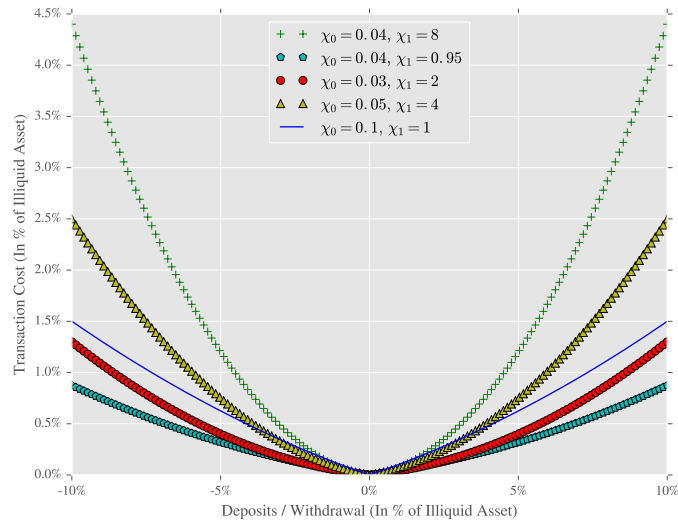


圖 1: 轉移資產比例與交易成本圖示。

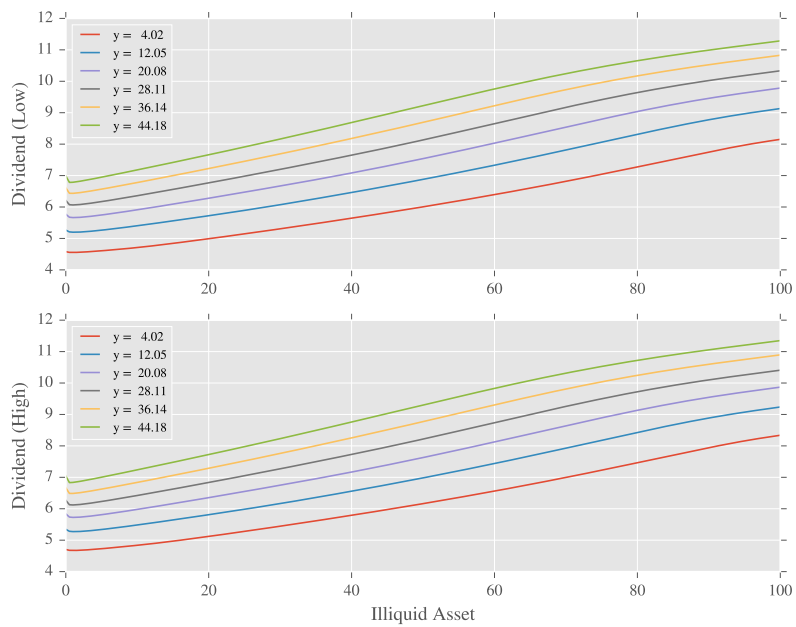


圖 2：給定數種高流動性資產，最適紅利與低流動性資產之變動關係圖：低保費收入（上）與高保費收入（下）。

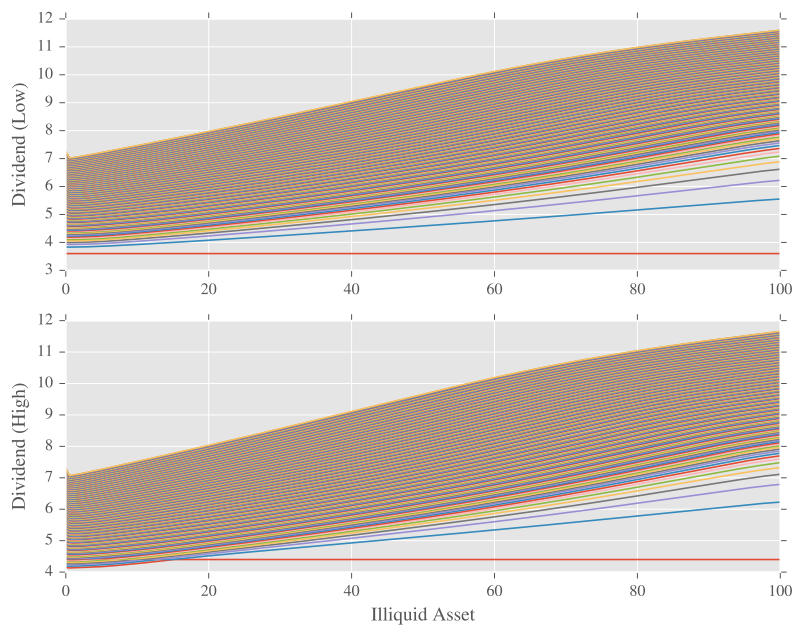


圖 3：固定高流動性資產下，最適紅利與低流動性資產之變動區域：低保費收入（上）與高保費收入（下）。

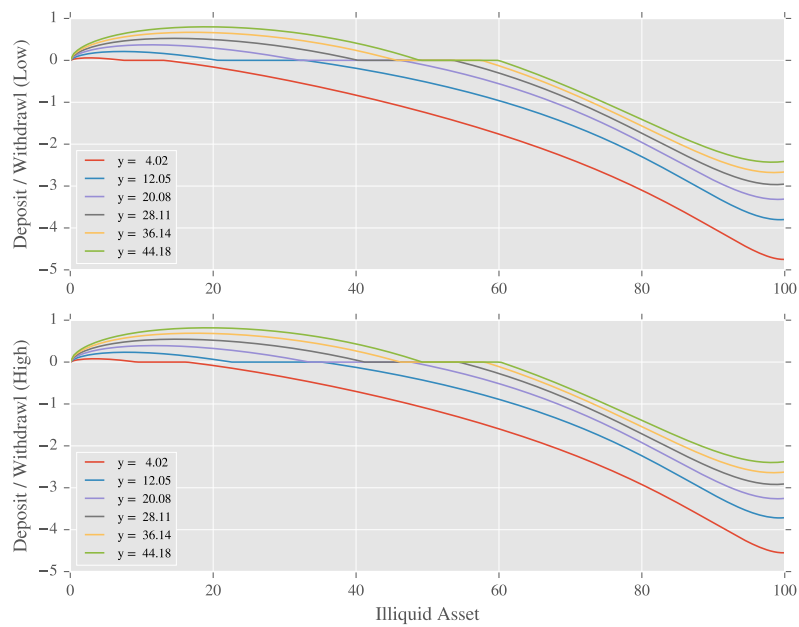


圖 4: 給定數種高流動性資產，最適提存與低流動性資產之變動關係圖：低保費收入（上）與高保費收入（下）。

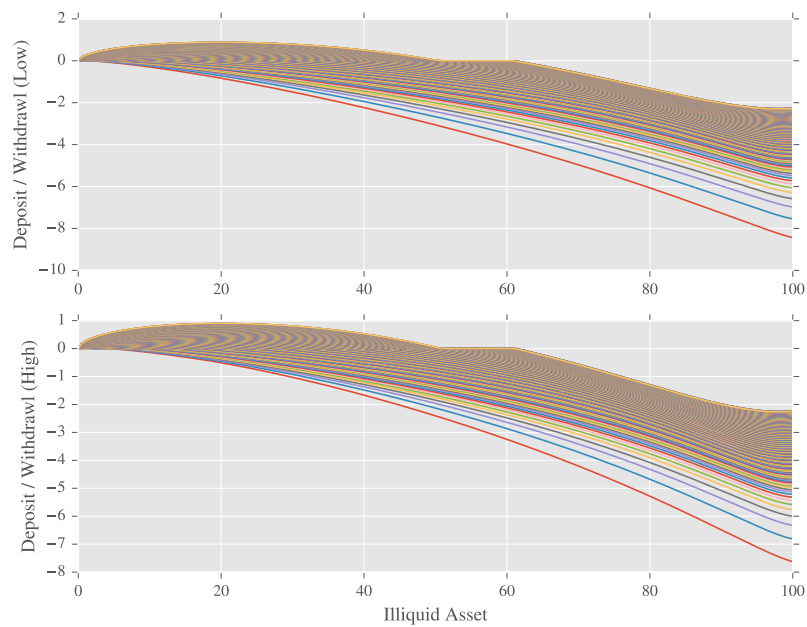


圖 5: 固定高流動性資產下，最適提存與低流動性資產之變動區域：低保費收入（上）與高保費收入（下）。

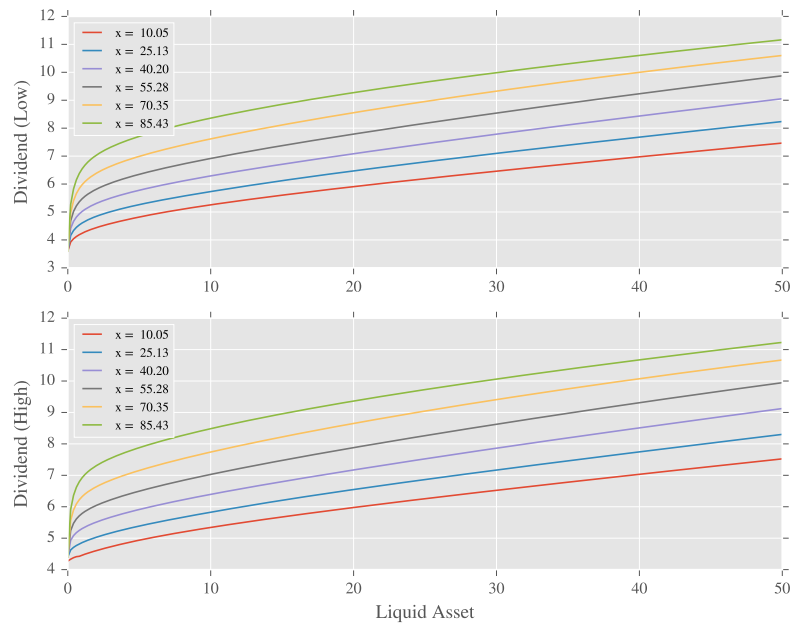


圖 6: 給定數種低流動性資產, 最適紅利與高流動性資產之變動關係圖: 低保費收入 (上) 與高保費收入 (下)。

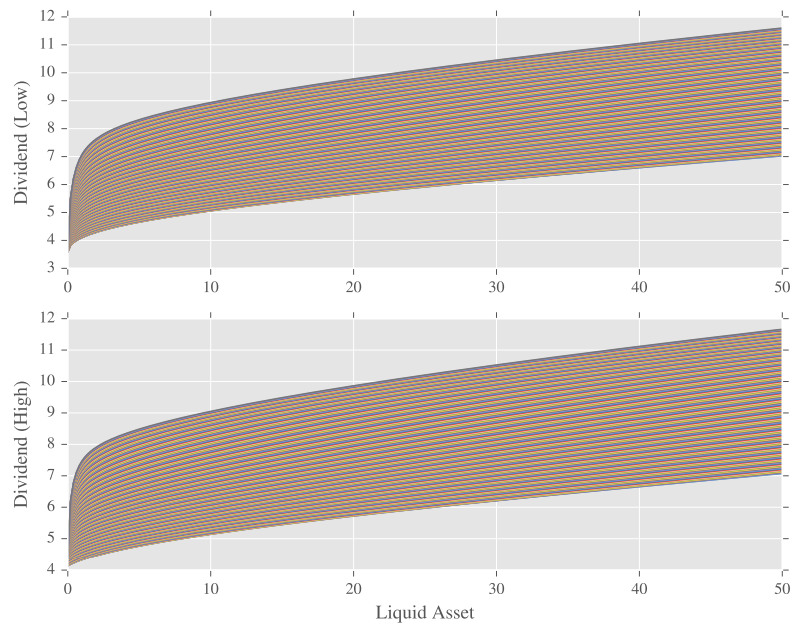


圖 7: 固定低流動性資產下, 最適紅利與高流動性資產之變動區域: 低保費收入 (上) 與高保費收入 (下)。

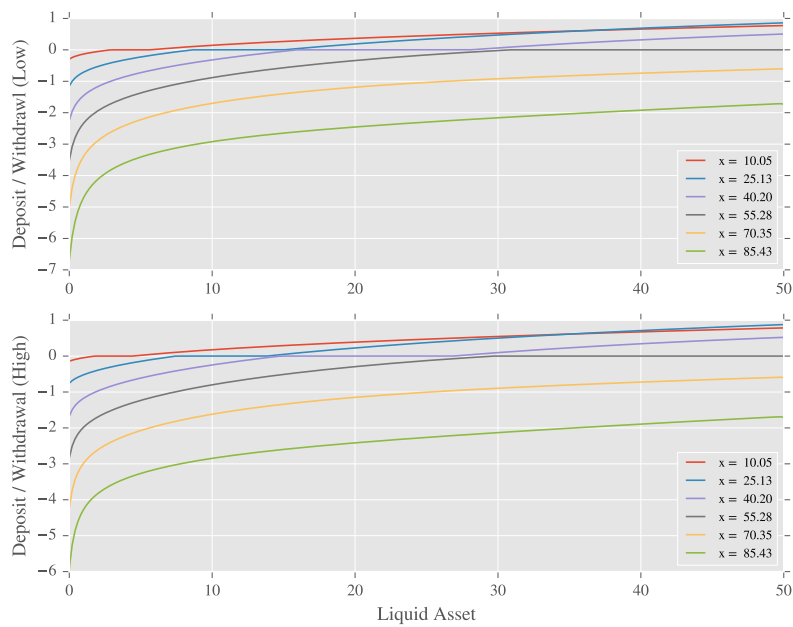


圖 8: 給定數種低流動性資產, 最適提存與高流動性資產之變動關係圖: 低保費收入 (上) 與高保費收入 (下)。

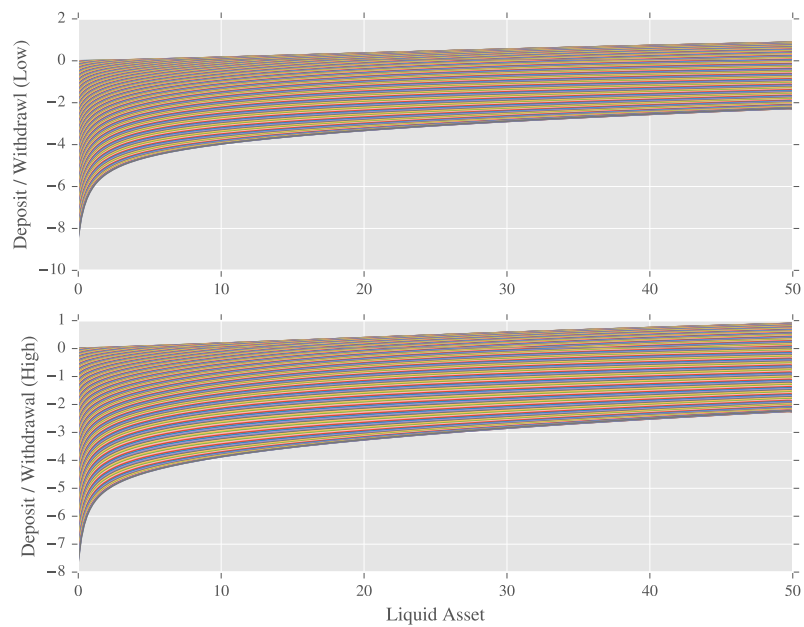


圖 9: 固定低流動性資產下, 最適提存與高流動性資產之變動區域: 低保費收入 (上) 與高保費收入 (下)。

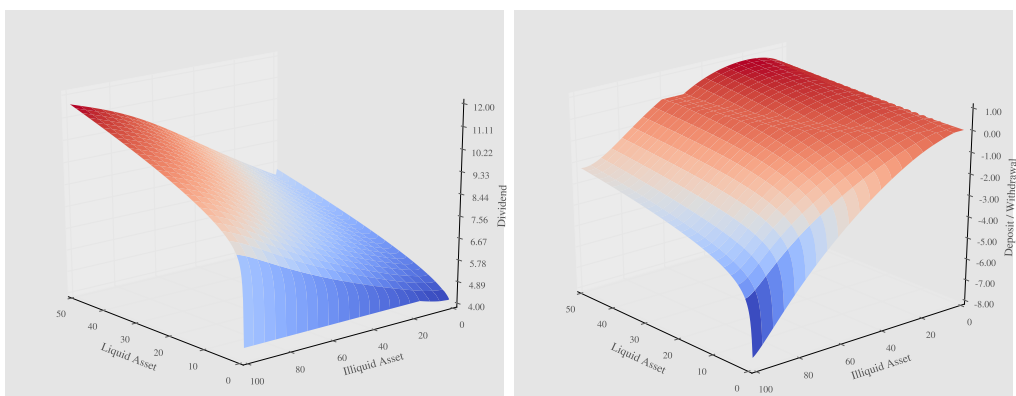


圖 10: 高保費收入時，對應於不同資產組合之最適分紅（左）與最適提存（右）。

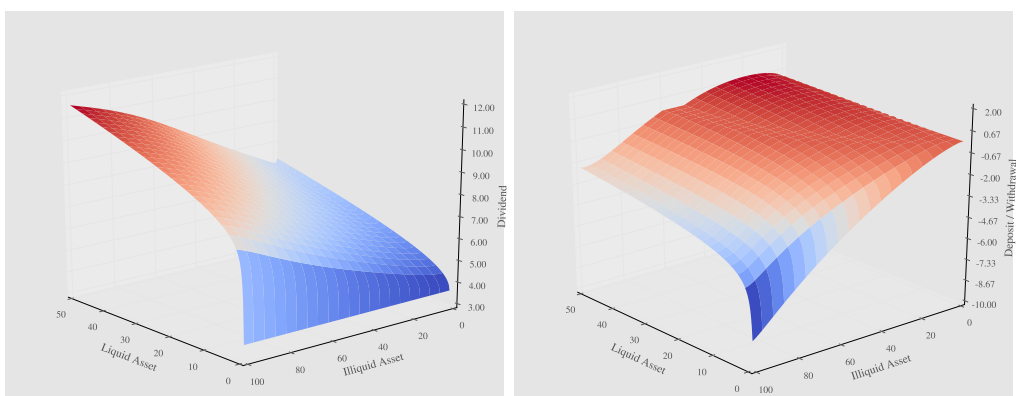


圖 11: 低保費收入時，對應於不同資產組合之最適分紅（左）與最適提存（右）。

爲簡單起見，本文中的保費收入滿足連續時間雙態馬可夫鍊過程 ($K = 2$)。使用同樣的演算法，我們可馬上推廣得出在其他 K 值下的結果。若保費收入滿足擴散過程 (diffusion process)，則 (7) 中大括弧內最後一項將基於 Bellman 動態規劃原理以 Itô 引理做部份修改，迭代近似模式 (34) 亦做相對應的更動。其他可能的模型修改還包括了不同的成本函數引進 — 比如目前的二次方型可換成其他指數型以保持成本函數的凸性 (convexity) — 與資產數量的增加。由於熟知的維數災難 (curse of dimensionality)，偏微分方程式在自變數數量增加的狀況下必須選取特殊解法；稀疏格點 (sparse grid) 近似法是許多文章研究的方向之一。我們將在日後的文章闡述以上的推廣結果。

參考文獻

- [1] Bardi, M., Capuzzo-Dolcetta, I., 1997. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Birkhäuser, Boston.
- [2] Barles, G., Daher, C., Romano, M., 1995. Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 5, 125–143.
- [3] Barles, G., Souganidis, P.E., 1991. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. Asymptotic Analysis 4, 271–283.
- [4] Chang, S.C., Li, Y.F., 2004. Optimal portfolio decisions in pension fund management. Journal of Management 21, 279–290.
- [5] Chang, S.C., Tsai, C.H., Hung, L.C., 2005. Incorporating foreign equities in the optimal asset allocation of an insurer with the consideration for background risks: Model and numerical illustrations. Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance 1, 1–22.
- [6] Chang, S.C., Tsai, C.H., Tien, C.J., Tu, C.Y., 2002. Dynamic funding and investment strategy for defined benefit pension schemes: A model incorporating asset-liability matching criteria. Journal of Actuarial Practice 10, 131–154.
- [7] Crandall, M., Ishii, H., Lions, P.L., 1992. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bulletin of the American Mathematical Society 27, 1–67.
- [8] Crandall, M.G., 1997. Viscosity solutions: A primer, in: Dolcetta, I.C., Lions, P.L. (Eds.), Viscosity Solutions and Applications. Springer-Verlag, Berlin, pp. 1–43.
- [9] Delong, L., 2019. Optimal investment for insurance company with exponential utility and wealth-dependent risk aversion coefficient. Mathematical Methods of Operations Research 89, 73–113.
- [10] Dixit, A.N., Pindyck, R.S., 1994. Investment Under Uncertainty. Princeton University Press, Princeton, N. J.
- [11] Fleming, W., Soner, H.M., 2006. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Second ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [12] He, L., Liang, Z.X., 2015. Optimal asset allocation and benefit outgo policies of dc pension plan with compulsory conversion claims. Insurance: Mathematics and Economics 61, 227–234.
- [13] Hipp, C., 2004. Stochastic control with application in insurance, in: Frittelli, M., Runggaldier, W. (Eds.), Stochastic Methods in Finance: Lectures given at the C.I.M.E.-E.M.S. Summer School Held in Bressanone/Brixen, Italy, July 6–12, 2003. Springer-Verlag, Berlin, pp. 127–164.
- [14] Hipp, C., Plum, M., 2000. Optimal investment for insurers. Insurance: Mathematics and Economics 27, 215–228.
- [15] Hipp, C., Plum, M., 2003. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. Finance and Stochastics 7, 299–321.
- [16] Huang, H.C., 2005. Optimal multiperiod asset allocation matching assets to liabilities in a discrete model. The Journal of Risk and Insurance 77, 451–472.
- [17] Huang, H.C., Lee, Y.T., 2010. Optimal asset allocation for a general portfolio of life insurance policies. Insurance: Mathematics and Economics 46, 271–280.
- [18] Hwang, Y.W., Chang, S.C., Cai, H.C., 2014. Downside risk control in continuous time portfolio management. Asia-Pacific Journal of Financial Studies 42, 913–938.
- [19] Kaplan, G., Moll, B., Violante, G.L., 2018. Monetary policy according to HANK. American Economic Review 108, 697–743.
- [20] Kaplan, G., Violante, G.L., 2014. A model of the consumption response to fiscal stimulus payments. Econometrica 82, 1199–1239.
- [21] Kushner, H., Dupuis, P., 2001. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. Second ed., Springer-Verlag, Berlin.

- [22] Sethi, S.P., 2019. Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. Third ed., Springer-Verlag, Cham.
- [23] Stokey, N., 2009. The Economics of Inaction: Stochastic Control Models with Fixed Cost. Princeton University Press, Princeton, N. J.
- [24] Touzi, N., 2013. Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE. Springer-Verlag, New York.
- [25] Yang, H.L., Zhang, L.H., 2005. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process. Insurance: Mathematics and Economics 37, 615–634.
- [26] Yong, J.M., Zhou, X.Y., 1999. Stochastic Controls: Hamilton Systems and HJB Equations. Springer-Verlag, Berlin.