統計學講義

第三部分：抽樣分配

參考書籍

Jeffrey S. Rosenthal, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*, 2nd Edition
Chapter 6: Sampling Distributions

https://utstat.utoronto.ca/mikevans/jeffrosenthal/

1 母體、樣本與統計量

1.1 母體與樣本

定義 1.1 (母體與樣本).

- **母體**（population）：研究對象的全體，通常以機率分配描述。
- **樣本**（sample）：從母體中抽取的部分個體。
- **母體參數**（population parameter）：描述母體特徵的數值，如母體平均數 μ、母體變異數 σ^2。
- **樣本統計量**（sample statistic）：由樣本計算出的數值，如樣本平均數 $\bar{X}$、樣本變異數 S^2。

定義 1.2 (隨機樣本). 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為從母體中抽取的 n 個觀測值，且滿足：

(i) 每個 X_i 與母體有相同的分配
(ii) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互獨立

則稱 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為一組大小為 n 的**隨機樣本**（random sample），記為

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F$$

其中 F 為母體分配，i.i.d. 表示「獨立且同分配」（independent and identically distributed）。

1.2 常用樣本統計量

定義 1.3 (樣本平均數). 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為隨機樣本，則**樣本平均數**（sample mean）定義為：

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

定義 1.4 (樣本變異數與樣本標準差). **樣本變異數**（sample variance）定義為：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

樣本標準差（sample standard deviation）定義為：

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

註. 樣本變異數的分母為 $n-1$ 而非 n，這是為了使 S^2 成為 σ^2 的**不偏估計量**（unbiased estimator）。$n-1$ 稱為**自由度**（degrees of freedom）。

性質 1.1 (樣本變異數的計算公式).

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}\right)$$

1.3 統計量的抽樣分配

定義 1.5 (抽樣分配). **抽樣分配**（sampling distribution）是指統計量在所有可能樣本下的機率分配。

由於樣本是隨機的，由樣本計算的統計量（如 $\bar{X}$、S^2）也是隨機變數，有其自己的分配。

定理 1.1 (樣本平均數的期望值與變異數). 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為來自母體（$\mathsf{E}[X_i] = \mu$，$\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$）的隨機樣本。則：

(i) $\mathsf{E}[\bar{X}] = \mu$（$\bar{X}$ 是 μ 的不偏估計量）

(ii) $\mathrm{var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

(iii) $\mathrm{SE}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$（標準誤）

證明. (i) 期望值：

$$\mathsf{E}[\bar{X}] = \mathsf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

(ii) 變異數：

由於 $X_1, \ldots, X_n$ 獨立：

$$\mathrm{var}(\bar{X}) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

定義 1.6 (標準誤). 統計量的**標準誤**（standard error, SE）是該統計量抽樣分配的標準差。

對於樣本平均數：

$$\mathrm{SE}(\bar{X}) = \sqrt{\mathrm{var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

若 σ 未知，以 S 估計：

$$\widehat{\mathrm{SE}}(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

定理 1.2 (樣本變異數的期望值). 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為來自母體（變異數為 σ^2）的隨機樣本。則：

$$\mathsf{E}[S^2] = \sigma^2$$

即 S^2 是 σ^2 的不偏估計量。

證明.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2\end{aligned}$$

注意 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = n(\bar{X} - \mu)$，故：

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

取期望值：

$$\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}[(X_i-\mu)^2]-n\mathsf{E}[(\bar{X}-\mu)^2]=n\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}=(n-1)\sigma^2$$

因此 $\mathsf{E}[S^2]=\dfrac{1}{n-1}\cdot(n-1)\sigma^2=\sigma^2$。

2 中央極限定理

2.1 定理陳述

定理 2.1 (中央極限定理 (Central Limit Theorem, CLT)). 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為 i.i.d. 隨機變數，$\mathsf{E}[X_i]=\mu$，$\mathrm{var}(X_i)=\sigma^2<\infty$。則當 $n\to\infty$ 時：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

或等價地：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

註. 中央極限定理的重要性：

- **不需假設母體為常態分配**——無論母體是什麼分配，只要變異數有限，樣本平均數近似常態。
- 這解釋了為什麼常態分配在統計學中如此重要。
- 經驗法則：當 $n\geqslant 30$ 時，近似通常足夠好。若母體本身接近常態，較小的 n 也可接受。

推論 2.1 (CLT 的實用形式). 當 n 夠大時：

$$\bar{X}\overset{\text{approx}}{\sim}N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

或等價地：

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{\text{approx}}{\sim}N(0,1)$$

2.2 連續性校正

定義 2.1 (連續性校正). 當使用連續型分配（如常態分配）近似離散型分配（如二項分配）時，由於離散變數只取整數值，而連續變數可取任意實數值，需要進行**連續性校正**（continuity correction）以提高近似精度。

具體做法：將離散變數的整數值 k 對應到連續變數的區間 $(k-0.5, k+0.5)$。

性質 2.1 (連續性校正規則). 設 X 為離散型隨機變數，以連續型隨機變數 Y 近似：

(i) $\mathsf{P}(X=k)\approx P(k-0.5<Y<k+0.5)$
(ii) $\mathsf{P}(X\leqslant k)\approx\mathsf{P}(Y<k+0.5)$
(iii) $\mathsf{P}(X<k)\approx\mathsf{P}(Y<k-0.5)$
(iv) $\mathsf{P}(X\geqslant k)\approx\mathsf{P}(Y>k-0.5)$
(v) $\mathsf{P}(X>k)\approx\mathsf{P}(Y>k+0.5)$
(vi) $\mathsf{P}(a\leqslant X\leqslant b)\approx\mathsf{P}(a-0.5<Y<b+0.5)$

註. 連續性校正的直觀理解：整數 k 在數線上是一個點，但在連續近似中，我們將它「擴展」為寬度為 1 的區間 $(k-0.5, k+0.5)$，使得該區間的機率可以更準確地近似離散點的機率。

2.3 中央極限定理的應用

例題 2.1. 某地區人口的 IQ 分數平均為 100，標準差為 15。隨機抽取 36 人。

(a) 求樣本平均 IQ 超過 105 的機率
(b) 求樣本平均 IQ 介於 97 與 103 之間的機率

解答. 設 $X_i =$ 第 i 個人的 IQ，$\mu = 100$，$\sigma = 15$，$n = 36$。

由中央極限定理，$\bar{X} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(100, \dfrac{15^2}{36}\right) = N(100, 6.25)$

標準誤：$\mathrm{SE}(\bar{X}) = \dfrac{15}{\sqrt{36}} = 2.5$

(a)

$$\mathsf{P}(\bar{X} > 105) = P\left(Z > \frac{105-100}{2.5}\right) = \mathsf{P}(Z > 2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(97 < \bar{X} < 103) &= P\left(\frac{97-100}{2.5} < Z < \frac{103-100}{2.5}\right) \\ &= \mathsf{P}(-1.2 < Z < 1.2) \\ &= \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) \\ &= 2\Phi(1.2) - 1 \approx 2(0.8849) - 1 = 0.7698\end{aligned}$$

例題 2.2. 擲一枚公正硬幣 100 次，求正面次數介於 45 到 55 之間的機率。

解答. 設 $X =$ 正面次數，$X \sim B(100, 0.5)$。

$\mu = np = 50$，$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{25} = 5$。

檢驗近似條件：$np = 50 > 5$，$n(1-p) = 50 > 5$ ✓

使用連續性校正：由於我們要計算 $\mathsf{P}(45 \leqslant X \leqslant 55)$，根據規則 (vi)，應近似為 $\mathsf{P}(44.5 < Y < 55.5)$：

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(45 \leqslant X \leqslant 55) &\approx \mathsf{P}(44.5 < Y < 55.5) \quad \text{（連續性校正）} \\ &= P\left(\frac{44.5-50}{5} < Z < \frac{55.5-50}{5}\right) \\ &= \mathsf{P}(-1.1 < Z < 1.1) \\ &= 2\Phi(1.1) - 1 \approx 2(0.8643) - 1 = 0.7286\end{aligned}$$

比較：若不使用連續性校正，直接計算 $\mathsf{P}(-1 < Z < 1) = 0.6826$，誤差較大。

3 隨機變數變換與 Jacobian

本節介紹推導抽樣分配所需的數學工具。

3.1 單變數變換

定理 3.1 (單變數變換公式)**.** 設連續型隨機變數 X 的 PDF 為 $f_X(x)$。令 $Y = g(X)$，其中 g 為嚴格單調函數，反函數為 $X = g^{-1}(Y) = h(Y)$。則 Y 的 PDF 為：

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = f_X(h(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

證明. 設 g 為嚴格遞增函數（遞減情況類似）。則：

$$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \leqslant y) = P(g(X) \leqslant y) = \mathsf{P}(X \leqslant g^{-1}(y)) = F_X(h(y))$$

對 y 微分：

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$$

若 g 為遞減函數，則 $F_Y(y) = \mathsf{P}(X \geqslant h(y)) = 1 - F_X(h(y))$，微分後 $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot (-h'(y))$。

綜合兩種情況，$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$。

3.2 多變數變換與 Jacobian

定理 3.2 (雙變數變換公式)**.** 設 (X, Y) 的聯合 PDF 為 $f_{X,Y}(x, y)$。令

$$U = g_1(X, Y), \quad V = g_2(X, Y)$$

為一對一變換，反變換為

$$X = h_1(U, V), \quad Y = h_2(U, V)$$

則 (U, V) 的聯合 PDF 為：

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J|$$

其中 J 為 **Jacobian 行列式**：

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

註. Jacobian 的絕對值 $|J|$ 代表變換的「面積縮放因子」。在單變數情況下，$|J| = |dx/dy|$ 就是定理 3.1 中的 $|h'(y)|$。

4 卡方分配

4.1 卡方分配的定義與 PDF 推導

定義 4.1 (卡方分配)**.** 若 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ 為 i.i.d. $N(0, 1)$ 隨機變數，則

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

服從自由度為 k 的**卡方分配**（chi-square distribution），記為 $\chi^2 \sim \chi_k^2$ 或 $\chi^2(k)$。

定理 4.1 (χ_1^2 的 PDF)**.** 若 $Z \sim N(0, 1)$，令 $Y = Z^2$，則 $Y \sim \chi_1^2$，其 PDF 為：

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{1/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

證明. 設 $Z \sim N(0, 1)$，$f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$。

令 $Y = Z^2$。對於 $y > 0$，使用 CDF 方法：

$$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \leqslant y) = \mathsf{P}(Z^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant Z \leqslant \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

由標準常態的對稱性：

$$F_Y(y) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

對 y 微分得 PDF：

$$f_Y(y) = 2 \cdot \phi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\phi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

代入 $\phi(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$：

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}$$

利用 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，可改寫為：

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{1/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

定理 4.2 (一般 χ^2_k 的 PDF)**.** 若 $X \sim \chi^2_k$，則其 PDF 為：

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

這是參數為 $\alpha = k/2$、$\lambda = 1/2$ 的 **Gamma 分配**。

證明 (概要)**.** 由卡方分配的可加性（定理 4.3），$\chi^2_k = \chi^2_1 + \chi^2_1 + \cdots + \chi^2_1$（$k$ 個獨立的 χ^2_1）。

獨立隨機變數之和的 PDF 可由卷積得到。由於 χ^2_1 是 $\mathrm{Gamma}(1/2, 1/2)$ 分配，而 Gamma 分配具有可加性：

$$\mathrm{Gamma}(\alpha_1, \lambda) + \mathrm{Gamma}(\alpha_2, \lambda) \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

故 $\chi^2_k \sim \mathrm{Gamma}(k/2, 1/2)$，其 PDF 如上所述。

(完整的卷積證明需要較長的計算，此處從略。)

4.2 卡方分配的性質

引理 4.1 (標準常態的四階動差)**.** 若 $Z \sim N(0,1)$，則 $\mathsf{E}[Z^4] = 3$。

證明.

$$\mathsf{E}[Z^4] = \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

使用分部積分。令 $u = z^3$，$dv = z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$。

則 $du = 3z^2 dz$，$v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$。

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[Z^4] &= \left[-z^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 3z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \\ &= 0 + 3\mathsf{E}[Z^2] = 3 \cdot 1 = 3\end{aligned}$$

(邊界項為 0 是因為 $z^3 e^{-z^2/2} \to 0$ 當 $z \to \pm\infty$。)

引理 4.2 (卡方分配的負一次動差)**.** 若 $V \sim \chi^2_k$ 且 $k > 2$，則：

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{1}{k-2}$$

證明. V 的 PDF 為 $f_V(v) = \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} v^{k/2-1} e^{-v/2}$，$v > 0$。

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} v^{k/2-1} e^{-v/2}\,dv \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty v^{k/2-2} e^{-v/2}\,dv\end{aligned}$$

令 $u = v/2$，則 $v = 2u$，$dv = 2\,du$：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty (2u)^{k/2-2} e^{-u} \cdot 2\,du \\ &= \frac{2^{k/2-2}\cdot 2}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty u^{k/2-2} e^{-u}\,du \\ &= \frac{2^{k/2-1}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(k/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)\end{aligned}$$

利用 Gamma 函數的遞推公式 $\Gamma(k/2) = (k/2-1)\Gamma(k/2-1)$：

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\Gamma(k/2-1)}{2\cdot(k/2-1)\cdot\Gamma(k/2-1)} = \frac{1}{k-2}$$

此結果需要 $k/2 - 1 > 0$，即 $k > 2$。

定理 4.3 (卡方分配的可加性)**.** 若 $X_1 \sim \chi^2_{k_1}$ 與 $X_2 \sim \chi^2_{k_2}$ 獨立，則：

$$X_1 + X_2 \sim \chi^2_{k_1+k_2}$$

證明. 設 $X_1 = \sum_{i=1}^{k_1} Z_i^2$，$X_2 = \sum_{j=1}^{k_2} W_j^2$，其中所有 Z_i、W_j 皆為獨立的 $N(0,1)$。

則：

$$X_1 + X_2 = \sum_{i=1}^{k_1} Z_i^2 + \sum_{j=1}^{k_2} W_j^2 = \sum_{m=1}^{k_1+k_2} U_m^2 \sim \chi^2_{k_1+k_2}$$

其中 $U_1, \ldots, U_{k_1+k_2}$ 為 $k_1 + k_2$ 個獨立的 $N(0,1)$ 隨機變數。

性質 4.1 (卡方分配的期望值與變異數)**.** 若 $X \sim \chi^2_k$，則：

(i) $\mathsf{E}[X] = k$
(ii) $\mathrm{var}(X) = 2k$

證明. 設 $Z \sim N(0,1)$，則 $Z^2 \sim \chi^2_1$。

(i) 由 $\mathrm{var}(Z) = \mathsf{E}[Z^2] - (\mathsf{E}[Z])^2 = 1$，得 $\mathsf{E}[Z^2] = 1$。

對於 $\chi_k^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$（$Z_i$ i.i.d. $N(0,1)$）：

$$\mathsf{E}[\chi_k^2] = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[Z_i^2] = k \cdot 1 = k$$

(ii) 由引理 4.1，$\mathsf{E}[Z^4] = 3$，故：

$$\mathrm{var}(Z^2) = \mathsf{E}[Z^4] - (\mathsf{E}[Z^2])^2 = 3 - 1^2 = 2$$

由獨立性：

$$\mathrm{var}(\chi_k^2) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{var}(Z_i^2) = k \cdot 2 = 2k$$

4.3 樣本變異數與卡方分配

定理 4.4 (樣本變異數與卡方分配)**.** 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，則：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

且 $\bar{X}$ 與 S^2 **獨立**。

證明 (證明概要)**.** 令 $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$ i.i.d.，$\bar{Z} = (\bar{X} - \mu)/\sigma$。則：

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

可分解為：

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 + n\bar{Z}^2$$

(這是因為 $\sum (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum Z_i^2 - n\bar{Z}^2$)

由於 $\bar{Z} \sim N(0, 1/n)$，故 $n\bar{Z}^2 = (\sqrt{n}\bar{Z})^2 \sim \chi_1^2$。

為何 $\bar{Z}$ 與 $\sum (Z_i - \bar{Z})^2$ 獨立？

直觀理解：$\bar{Z}$ 代表「樣本平均數離 0 有多遠」，而 $\sum (Z_i - \bar{Z})^2$ 代表「各觀測值圍繞樣本平均數的分散程度」。對於常態分配，樣本的「中心位置」與「分散程度」是獨立的資訊。

嚴格來說，可用正交變換來證明：令 $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^T$，存在正交矩陣 P (第一列為 $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$) 使得 $\mathbf{W} = P\mathbf{Z}$ 滿足 $W_1 = \sqrt{n}\bar{Z}$，$W_2, \ldots, W_n$ 為其餘正交分量。由多元常態分配的性質，$W_1, \ldots, W_n$ 獨立且均為 $N(0,1)$，而 $\sum (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{j=2}^n W_j^2$，故與 $W_1^2 = n\bar{Z}^2$ 獨立。

由卡方分配的可加性，$\sum_{j=2}^n W_j^2 \sim \chi_{n-1}^2$。

因此：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

且由於 $\bar{X}$ 僅與 $\bar{Z}$ 有關，S^2 僅與 $\sum (Z_i - \bar{Z})^2$ 有關，故 $\bar{X}$ 與 S^2 獨立。

註. 自由度為 $n-1$ 而非 n，因為 $(X_i - \bar{X})$ 滿足限制條件 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$，只有 $n-1$ 個自由的項。從分解 $\chi_n^2 = \chi_{n-1}^2 + \chi_1^2$ 也可看出。

5 t 分配

5.1 t 分配的定義與 PDF 推導

定義 5.1 (t 分配). 若 $Z \sim N(0,1)$ 且 $V \sim \chi^2_k$ 獨立，則

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$$

服從自由度為 k 的 **t 分配**（Student's t-distribution），記為 $T \sim t_k$ 或 $t(k)$。

定理 5.1 (t 分配的 PDF). 若 $T \sim t_k$，則其 PDF 為：

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

證明. 設 $Z \sim N(0,1)$，$V \sim \chi^2_k$ 獨立。其聯合 PDF 為：

$$f_{Z,V}(z,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} v^{k/2-1} e^{-v/2}, \quad -\infty < z < \infty,\ v > 0$$

令變換 $(Z,V) \to (T,V)$：

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}, \quad V = V$$

反變換：

$$Z = T\sqrt{V/k}, \quad V = V$$

計算 Jacobian：

$$J = \frac{\partial(z,v)}{\partial(t,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{v/k} & \frac{t}{2\sqrt{kv}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{v}{k}}$$

(T,V) 的聯合 PDF：

$$\begin{aligned} f_{T,V}(t,v) &= f_{Z,V}\left(t\sqrt{v/k}, v\right) \cdot |J| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2 v/(2k)} \cdot \frac{v^{k/2-1} e^{-v/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot \sqrt{\frac{v}{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot v^{k/2-1/2} e^{-v(1+t^2/k)/2} \end{aligned}$$

T 的邊際 PDF（對 v 積分）：

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T,V}(t,v)\,dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k} \cdot 2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty v^{(k+1)/2-1} e^{-v(1+t^2/k)/2}\,dv \end{aligned}$$

令 $u = v(1+t^2/k)/2$，則 $v = \dfrac{2u}{1+t^2/k}$，$dv = \dfrac{2}{1+t^2/k}du$：

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\cdot 2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot \left(\frac{2}{1+t^2/k}\right)^{(k+1)/2} \int_0^\infty u^{(k+1)/2-1}e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\cdot 2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot \frac{2^{(k+1)/2}}{(1+t^2/k)^{(k+1)/2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \\
&= \frac{2^{1/2}\cdot\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi k}\cdot\Gamma(k/2)} \cdot \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}
\end{aligned}
$$

5.2 t 分配的性質

性質 5.1 (t 分配的性質)**.** 若 $T \sim t_k$，則：

(i) $\mathsf{E}[T] = 0$（當 $k>1$）
(ii) $\mathrm{var}(T) = \dfrac{k}{k-2}$（當 $k>2$）
(iii) t 分配對稱於 0
(iv) t 分配比標準常態分配有較厚的尾部（heavier tails）
(v) 當 $k\to\infty$ 時，$t_k \to N(0,1)$

證明. 設 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/k}}$，其中 $Z\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2_k$ 獨立。

(iii) 對稱性：由於 Z 對稱於 0，且 $\sqrt{V/k}>0$，故 $T = Z/\sqrt{V/k}$ 也對稱於 0。從 PDF 也可見 $f_T(-t) = f_T(t)$。

(i) 期望值：由於 Z 與 V 獨立，

$$
\mathsf{E}[T] = \mathsf{E}\left[\frac{Z}{\sqrt{V/k}}\right] = \mathsf{E}[Z]\cdot\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{V/k}}\right] = 0\cdot\mathsf{E}\left[\sqrt{\frac{k}{V}}\right] = 0
$$

（當 $k>1$ 時，$\mathsf{E}[1/\sqrt{V}]$ 存在且有限。）

(ii) 變異數：當 $k>2$ 時，

$$
\mathrm{var}(T) = \mathsf{E}[T^2] - (\mathsf{E}[T])^2 = \mathsf{E}[T^2] = \mathsf{E}\left[\frac{Z^2}{V/k}\right] = k\cdot\mathsf{E}[Z^2]\cdot\mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right]
$$

由於 $\mathsf{E}[Z^2]=1$，且由引理 4.2，$\mathsf{E}[1/V] = \dfrac{1}{k-2}$（當 $k>2$）：

$$
\mathrm{var}(T) = k\cdot 1\cdot\frac{1}{k-2} = \frac{k}{k-2}
$$

(v) 當 $k\to\infty$ 時：由大數法則，$V/k \to \mathsf{E}[V/k] = 1$（機率收斂）。因此：

$$
T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \to \frac{Z}{\sqrt{1}} = Z \sim N(0,1)
$$

也可從 PDF 驗證：當 $k\to\infty$ 時，$\left(1+\dfrac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \to e^{-t^2/2}$。

註.
- 當 $k=1$ 時，$\mathsf{E}[T]$ 不存在（Cauchy 分配）。
- 當 $k \leqslant 2$ 時，$\mathrm{var}(T)$ 不存在（無限或未定義）。
- 當 $k=2$ 時，$\mathrm{var}(T)=\infty$。
- 當 $k>2$ 時，$\mathrm{var}(T)=k/(k-2)>1$，比標準常態的變異數 1 大，這對應於較厚的尾部。

5.3 樣本平均數的 t 統計量

定理 5.2 (樣本平均數的 t 統計量). 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，則：

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

證明. 由定理 4.4：

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

且 Z 與 V 獨立。

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}$$
$$= \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma}{S} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

註. t 分配的重要性：當母體變異數 σ^2 未知時（實務中幾乎總是如此），我們用 S^2 估計 σ^2。此時使用 t 分配而非常態分配來進行推論。

df	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

表 1: t 分配的常用臨界值（$t_{\alpha,df}$：右尾機率為 α 的分位數）

6 F 分配

6.1 F 分配的定義與 PDF 推導

定義 6.1 (F 分配). 若 $U \sim \chi^2_{k_1}$ 與 $V \sim \chi^2_{k_2}$ 獨立，則

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

服從自由度為 (k_1, k_2) 的 **F 分配**，記為 $F \sim F_{k_1,k_2}$ 或 $F(k_1,k_2)$。

定理 6.1 (F 分配的 PDF). 若 $F \sim F_{k_1,k_2}$，則其 PDF 為：

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2}\frac{x^{k_1/2-1}}{\left(1+\frac{k_1x}{k_2}\right)^{(k_1+k_2)/2}}, \quad x > 0$$

證明. 設 $U \sim \chi^2_{k_1}$，$V \sim \chi^2_{k_2}$ 獨立。其聯合 PDF 為：

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{u^{k_1/2-1}e^{-u/2}}{2^{k_1/2}\Gamma(k_1/2)} \cdot \frac{v^{k_2/2-1}e^{-v/2}}{2^{k_2/2}\Gamma(k_2/2)}, \quad u, v > 0$$

令變換 $(U, V) \to (F, V)$：

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} = \frac{k_2U}{k_1V}, \quad V = V$$

反變換：

$$U = \frac{k_1}{k_2}FV, \quad V = V$$

計算 Jacobian：

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(f,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial f} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial f} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k_1v}{k_2} & \frac{k_1f}{k_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{k_1v}{k_2}$$

(F, V) 的聯合 PDF：

$$\begin{aligned} f_{F,V}(f,v) &= f_{U,V}\left(\frac{k_1fv}{k_2}, v\right) \cdot |J| \\ &= \frac{\left(\frac{k_1fv}{k_2}\right)^{k_1/2-1} e^{-k_1fv/(2k_2)}}{2^{k_1/2}\Gamma(k_1/2)} \cdot \frac{v^{k_2/2-1}e^{-v/2}}{2^{k_2/2}\Gamma(k_2/2)} \cdot \frac{k_1v}{k_2} \end{aligned}$$

整理：

$$f_{F,V}(f,v) = \frac{1}{2^{(k_1+k_2)/2}\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2} f^{k_1/2-1}v^{(k_1+k_2)/2-1}e^{-v(1+k_1f/k_2)/2}$$

F 的邊際 PDF（對 v 積分）：

$$f_F(f) = \int_0^\infty f_{F,V}(f,v)\,dv$$

令 $w = v(1 + k_1f/k_2)/2$，則積分變為 Γ 函數：

$$\begin{aligned} f_F(f) &= \frac{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2} f^{k_1/2-1}}{2^{(k_1+k_2)/2}\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)} \cdot \frac{2^{(k_1+k_2)/2}\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\left(1+\frac{k_1f}{k_2}\right)^{(k_1+k_2)/2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2}\frac{f^{k_1/2-1}}{\left(1+\frac{k_1f}{k_2}\right)^{(k_1+k_2)/2}} \end{aligned}$$

6.2 F 分配的性質

性質 6.1 (F 分配的性質). 若 $F \sim F_{k_1,k_2}$，則：

(i) $F \geqslant 0$

(ii) $\mathsf{E}[F] = \dfrac{k_2}{k_2-2}$ （當 $k_2 > 2$）

(iii) 若 $F \sim F_{k_1,k_2}$，則 $\dfrac{1}{F} \sim F_{k_2,k_1}$

(iv) $F_{1-\alpha,k_1,k_2} = \dfrac{1}{F_{\alpha,k_2,k_1}}$

(v) 若 $T \sim t_k$，則 $T^2 \sim F_{1,k}$

證明. (ii) 期望值：設 $F = \dfrac{U/k_1}{V/k_2}$，其中 $U \sim \chi^2_{k_1}$，$V \sim \chi^2_{k_2}$ 獨立。

$$F = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{U}{V}$$

由於 U 與 V 獨立：

$$\mathsf{E}[F] = \frac{k_2}{k_1} \cdot \mathsf{E}[U] \cdot \mathsf{E}\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{k_2}{k_1} \cdot k_1 \cdot \frac{1}{k_2-2} = \frac{k_2}{k_2-2}$$

（利用 $\mathsf{E}[U] = k_1$ 及引理 4.2：$\mathsf{E}[1/V] = 1/(k_2-2)$，當 $k_2 > 2$。）

(iii) 倒數性質：若 $F = \dfrac{U/k_1}{V/k_2} \sim F_{k_1,k_2}$，則：

$$\frac{1}{F} = \frac{V/k_2}{U/k_1} \sim F_{k_2,k_1}$$

這直接由 F 分配的定義得到。

(iv) 分位數關係：由性質 (iii)，若 $F \sim F_{k_1,k_2}$，則 $1/F \sim F_{k_2,k_1}$。

設 F_{α,k_1,k_2} 為 F_{k_1,k_2} 的上 α 分位數，即 $\mathsf{P}(F > F_{\alpha,k_1,k_2}) = \alpha$。

則 $\mathsf{P}(F < F_{\alpha,k_1,k_2}) = 1-\alpha$，等價於 $\mathsf{P}(1/F > 1/F_{\alpha,k_1,k_2}) = 1-\alpha$。

由於 $1/F \sim F_{k_2,k_1}$，這意味著 $1/F_{\alpha,k_1,k_2}$ 是 F_{k_2,k_1} 的上 $(1-\alpha)$ 分位數：

$$\frac{1}{F_{\alpha,k_1,k_2}} = F_{1-\alpha,k_2,k_1}$$

移項得 $F_{1-\alpha,k_1,k_2} = \dfrac{1}{F_{\alpha,k_2,k_1}}$。

(v) 與 t 分配的關係：設 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/k}} \sim t_k$，其中 $Z \sim N(0,1)$，$V \sim \chi^2_k$ 獨立。

則 $Z^2 \sim \chi^2_1$（由定理 4.1），故：

$$T^2 = \frac{Z^2}{V/k} = \frac{Z^2/1}{V/k} \sim F_{1,k}$$

6.3 兩樣本變異數比

定理 6.2 (兩樣本變異數比的分配). 設 $X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 與 $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 為兩組獨立樣本，樣本變異數分別為 S_1^2 與 S_2^2。則：

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

特別地，若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$：

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

證明. 由定理 4.4：

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}, \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

且由於兩組樣本獨立，這兩個卡方隨機變數也獨立。

由 F 分配的定義：

$$F = \frac{\left[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\right]/(n_1-1)}{\left[\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\right]/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，則 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$。

7 常用抽樣分配摘要

情況	統計量	分配
母體 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
母體 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	t_{n-1}
母體 $N(\mu,\sigma^2)$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}
兩獨立常態母體，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	F_{n_1-1,n_2-1}
任意母體，n 大（CLT）	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\approx N(0,1)$

表 2: 常用抽樣分配摘要

分配	PDF	$\mathsf{E}[X]$	$\mathrm{var}(X)$
χ_k^2	$\dfrac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}$	k	$2k$
t_k	$\dfrac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\dfrac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$	$0\ (k>1)$	$\dfrac{k}{k-2}\ (k>2)$
F_{k_1,k_2}	$\dfrac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2}\dfrac{x^{k_1/2-1}}{(1+\frac{k_1x}{k_2})^{(k_1+k_2)/2}}$	$\dfrac{k_2}{k_2-2}\ (k_2>2)$	—

表 3: 三大抽樣分配的 PDF 與動差

8 本章習題

習題 8.1. 設母體平均數 $\mu = 50$，母體變異數 $\sigma^2 = 100$。從此母體抽取 $n = 25$ 的隨機樣本。

(a) 求 $\mathsf{E}[\bar{X}]$ 與 $\mathrm{var}(\bar{X})$
(b) 求 $\mathrm{SE}(\bar{X})$
(c) 若改為 $n = 100$，標準誤變為多少？

解答. (a) $\mathsf{E}[\bar{X}] = \mu = 50$

$\mathrm{var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{100}{25} = 4$

(b) $\mathrm{SE}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2$

(c) 若 $n = 100$：$\mathrm{SE}(\bar{X}) = \dfrac{10}{\sqrt{100}} = 1$

樣本量增加 4 倍，標準誤減半。

習題 8.2. 某零件壽命的平均為 1000 小時，標準差為 200 小時（不假設常態分配）。隨機抽取 64 個零件。

(a) 求樣本平均壽命超過 1050 小時的機率
(b) 求樣本平均壽命介於 950 與 1030 小時之間的機率

解答. $\mu = 1000$，$\sigma = 200$，$n = 64$。

由 CLT，$\bar{X} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(1000, \dfrac{200^2}{64}\right) = N(1000, 625)$

$\mathrm{SE}(\bar{X}) = \dfrac{200}{8} = 25$

(a) $\mathsf{P}(\bar{X} > 1050) = P\left(Z > \dfrac{1050-1000}{25}\right) = \mathsf{P}(Z > 2) \approx 0.0228$

(b) $\mathsf{P}(950 < \bar{X} < 1030) = P\left(\dfrac{950-1000}{25} < Z < \dfrac{1030-1000}{25}\right)$

$= \mathsf{P}(-2 < Z < 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-2) = 0.8849 - 0.0228 = 0.8621$

習題 8.3. 設 $X_1, \ldots, X_{10} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 16)$（即 $\sigma^2 = 16$）。求 $\mathsf{P}(S^2 > 25)$。

解答. 由定理 4.4：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9S^2}{16} \sim \chi_9^2$$

$$\mathsf{P}(S^2 > 25) = P\left(\frac{9S^2}{16} > \frac{9 \times 25}{16}\right) = P(\chi^2_9 > 14.0625)$$

查 χ^2 表：$\chi^2_{9,0.10} = 14.68$，$\chi^2_{9,0.15} \approx 13.29$

故 $\mathsf{P}(S^2 > 25) \approx 0.12$（介於 0.10 與 0.15 之間）。

習題 8.4. 設 $X_1, \ldots, X_9 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(20, \sigma^2)$（$\sigma^2$ 未知），$S = 4$。求使 $\mathsf{P}(|\bar{X} - 20| \leqslant c) = 0.95$ 的 c 值。

解答. σ^2 未知，使用 t 分配。

$T = \dfrac{\bar{X} - 20}{S/\sqrt{9}} = \dfrac{\bar{X} - 20}{4/3} \sim t_8$

$\mathsf{P}(|\bar{X} - 20| \leqslant c) = 0.95$

$P\left(\left|\dfrac{\bar{X} - 20}{4/3}\right| \leqslant \dfrac{c}{4/3}\right) = 0.95$

查表：$t_{0.025,8} = 2.306$

故 $\dfrac{c}{4/3} = 2.306 \implies c = 2.306 \times \dfrac{4}{3} = 3.075$

習題 8.5. 設兩組獨立常態樣本：第一組 $n_1 = 13$，$S_1^2 = 24$；第二組 $n_2 = 10$，$S_2^2 = 12$。假設兩母體變異數相等。求 $\mathsf{P}(S_1^2/S_2^2 > 2)$。

解答. 若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，則 $F = S_1^2/S_2^2 \sim F_{12,9}$。

$F = \dfrac{24}{12} = 2$

$\mathsf{P}(F_{12,9} > 2)$

查表：$F_{0.10,12,9} = 2.38$，$F_{0.25,12,9} \approx 1.56$

故 $\mathsf{P}(F_{12,9} > 2) \approx 0.15$（介於 0.10 與 0.25 之間）。