統計學講義

第六部分：迴歸分析

1 簡單線性迴歸

1.1 模型與估計

定義 1.1 (簡單線性迴歸模型).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

其中 β_0 為截距，β_1 為斜率，$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.

定理 1.1 (OLS 估計量). 最小平方法（OLS）估計量為：

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}}$$

其中：$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2$，$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$。

證明. OLS 最小化殘差平方和 $Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$。

Step 1：對 β_0 偏微分並令其為零：

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

展開得 $\sum Y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum X_i = 0$，故

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Step 2：對 β_1 偏微分並令其為零：

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

展開得 $\sum X_i Y_i - \beta_0 \sum X_i - \beta_1 \sum X_i^2 = 0$。

Step 3：將 $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ 代入：

$$\begin{aligned} \sum X_i Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum X_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 &= 0 \\ \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} + \hat{\beta}_1 n \bar{X}^2 - \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 &= 0 \\ \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} &= \hat{\beta}_1 (\sum X_i^2 - n\bar{X}^2) \end{aligned}$$

由於 $S_{XY} = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$ 且 $S_{XX} = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$，故

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

定理 1.2 (OLS 估計量的不偏性). $\hat{\beta}_0$ 與 $\hat{\beta}_1$ 是 β_0 與 β_1 的不偏估計量。

證明. 證明 $\mathsf{E}[\hat{\beta}_1] = \beta_1$：

將 $\hat{\beta}_1$ 改寫為 Y_i 的線性組合。令 $w_i = \dfrac{X_i - \bar{X}}{S_{XX}}$，則 $\sum w_i = 0$ 且 $\sum w_i X_i = 1$。

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) Y_i}{S_{XX}} = \sum w_i Y_i$$

由模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\hat{\beta}_1] &= \mathsf{E}\left[\sum w_i Y_i\right] = \sum w_i \mathsf{E}[Y_i] = \sum w_i(\beta_0 + \beta_1 X_i) \\ &= \beta_0 \sum w_i + \beta_1 \sum w_i X_i = \beta_0 \cdot 0 + \beta_1 \cdot 1 = \beta_1\end{aligned}$$

證明 $\mathsf{E}[\hat{\beta}_0] = \beta_0$：

$$\mathsf{E}[\hat{\beta}_0] = \mathsf{E}[\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}] = \mathsf{E}[\bar{Y}] - \bar{X}\mathsf{E}[\hat{\beta}_1] = (\beta_0 + \beta_1 \bar{X}) - \bar{X}\beta_1 = \beta_0$$

定理 1.3 (OLS 估計量的變異數)**.**

$$\boxed{\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}}$$

$$\boxed{\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)}$$

證明. 證明 $\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 / S_{XX}$：

由 $\hat{\beta}_1 = \sum w_i Y_i$，其中 $w_i = (X_i - \bar{X})/S_{XX}$，且 Y_i 獨立：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) &= \operatorname{var}\left(\sum w_i Y_i\right) = \sum w_i^2 \operatorname{var}(Y_i) = \sigma^2 \sum w_i^2 \\ &= \sigma^2 \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{S_{XX}^2} = \sigma^2 \cdot \frac{S_{XX}}{S_{XX}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\end{aligned}$$

證明 $\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)$：

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \operatorname{var}(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) = \operatorname{var}(\bar{Y}) + \bar{X}^2 \operatorname{var}(\hat{\beta}_1) - 2\bar{X} \operatorname{cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)$$

由於 $\operatorname{cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = \operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}\sum Y_i, \sum w_i Y_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}\sum w_i = 0$，故

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{S_{XX}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)$$

1.2 變異數分解

定理 1.4 (變異數分解——ANOVA)**.**

$$\boxed{\mathrm{SST} = \mathrm{SSR} + \mathrm{SSE}}$$

其中：

- $\mathrm{SST} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$（總變異）
- $\mathrm{SSR} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$（迴歸變異）
- $\mathrm{SSE} = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$（殘差變異）

證明. 將 $Y_i - \bar{Y}$ 分解為 $(Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$：

$$\begin{aligned}\text{SST} &= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum \left[(Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})\right]^2 \\ &= \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + 2\sum (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y})\end{aligned}$$

關鍵：證明交叉項為零。令 $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$（殘差），則：

$$\sum e_i(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \sum e_i \hat{Y}_i - \bar{Y}\sum e_i$$

由 OLS 正規方程式，$\sum e_i = 0$ 且 $\sum e_i X_i = 0$。

又 $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$，故

$$\sum e_i \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 \sum e_i + \hat{\beta}_1 \sum e_i X_i = 0$$

因此交叉項為零，$\text{SST} = \text{SSE} + \text{SSR}$。

推論 1.1 (SSR 的另一形式). $\text{SSR} = \hat{\beta}_1^2 S_{XX} = \hat{\beta}_1 S_{XY}$。

證明.

$$\begin{aligned}\text{SSR} &= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum \left[(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{Y}\right]^2 = \sum \left[\hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})\right]^2 \\ &= \hat{\beta}_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{XX}\end{aligned}$$

又 $\hat{\beta}_1 = S_{XY}/S_{XX}$，故 $\text{SSR} = \hat{\beta}_1^2 S_{XX} = \hat{\beta}_1 \cdot S_{XY}$。

定理 1.5 (R^2 與相關係數的關係). $R^2 = r_{XY}^2$，其中 r_{XY} 是 X 與 Y 的樣本相關係數。

證明. 樣本相關係數 $r_{XY} = \dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} \cdot S_{YY}}}$。

由 $R^2 = \text{SSR}/\text{SST} = \hat{\beta}_1^2 S_{XX}/S_{YY}$ 且 $\hat{\beta}_1 = S_{XY}/S_{XX}$：

$$R^2 = \frac{(S_{XY}/S_{XX})^2 \cdot S_{XX}}{S_{YY}} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} \cdot S_{YY}} = r_{XY}^2$$

1.3 σ^2 的估計

定理 1.6 (σ^2 的不偏估計).

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2}$$

是 σ^2 的不偏估計量。

證明. 需證明 $\mathsf{E}[\text{SSE}] = (n-2)\sigma^2$。

由 $\text{SSE} = \text{SST} - \text{SSR} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \hat{\beta}_1^2 S_{XX}$：

$$\mathsf{E}[\text{SSE}] = \mathsf{E}[\text{SST}] - S_{XX}\,\mathsf{E}[\hat{\beta}_1^2]$$

計算 $\mathsf{E}[\text{SST}]$：

$$\mathsf{E}[\text{SST}] = \mathsf{E}\left[\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2\right] = \sum \mathsf{E}[Y_i^2] - n\,\mathsf{E}[\bar{Y}^2]$$

由 $\mathsf{E}[Y_i^2] = \mathrm{var}(Y_i) + (\mathsf{E}[Y_i])^2 = \sigma^2 + (\beta_0 + \beta_1 X_i)^2$，且 $\mathsf{E}[\bar{Y}^2] = \mathrm{var}(\bar{Y}) + (\mathsf{E}[\bar{Y}])^2 = \sigma^2/n + (\beta_0 + \beta_1 \bar{X})^2$，經計算：

$$\mathsf{E}[\mathrm{SST}] = (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2 S_{XX}$$

計算 $\mathsf{E}[\hat{\beta}_1^2]$：

$$\mathsf{E}[\hat{\beta}_1^2] = \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) + (\mathsf{E}[\hat{\beta}_1])^2 = \frac{\sigma^2}{S_{XX}} + \beta_1^2$$

合併：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\mathrm{SSE}] &= (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2 S_{XX} - S_{XX}\left(\frac{\sigma^2}{S_{XX}} + \beta_1^2\right) \\ &= (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2 S_{XX} - \sigma^2 - \beta_1^2 S_{XX} = (n-2)\sigma^2\end{aligned}$$

故 $\mathsf{E}[\mathrm{MSE}] = \mathsf{E}[\mathrm{SSE}/(n-2)] = \sigma^2$。

1.4 假設檢定

定理 1.7 (斜率的 t 檢定)**.** 在 $H_0 : \beta_1 = 0$ 下，檢定統計量

$$\boxed{t = \frac{\hat{\beta}_1}{\mathrm{SE}(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1}{s/\sqrt{S_{XX}}} \sim t_{n-2}}$$

證明. Step 1：標準化 $\hat{\beta}_1$。

由定理 1.2 和 1.3，$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2/S_{XX})$，故在 $H_0 : \beta_1 = 0$ 下：

$$Z = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sigma/\sqrt{S_{XX}}} \sim N(0,1)$$

Step 2：SSE/σ^2 的分配。

可證明 $\mathrm{SSE}/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$（殘差有 n 個觀測值減去 2 個估計參數）。

Step 3：$\hat{\beta}_1$ 與 SSE 獨立。

由常態分配的性質，$\hat{\beta}_1$（依賴 $\bar{Y}$ 的方向）與 SSE（垂直於該方向）獨立。

Step 4：構造 t 統計量。

由 t 分配定義：

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_{n-2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}_1/(\sigma/\sqrt{S_{XX}})}{\sqrt{\mathrm{SSE}/\sigma^2/(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}_1}{s/\sqrt{S_{XX}}} \sim t_{n-2}$$

定理 1.8 (整體 F 檢定)**.** 在 $H_0 : \beta_1 = 0$ 下，

$$\boxed{F = \frac{\mathrm{MSR}}{\mathrm{MSE}} = \frac{\mathrm{SSR}/1}{\mathrm{SSE}/(n-2)} \sim F_{1,n-2}}$$

且 $F = t^2$。

證明. 證明 $F \sim F_{1,n-2}$：

在 $H_0 : \beta_1 = 0$ 下，$\mathrm{SSR}/\sigma^2 \sim \chi^2_1$（因為 SSR 是一個參數的函數）。

由於 SSR 與 SSE 獨立（可由正交分解證明），且 $\mathrm{SSE}/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$：

$$F = \frac{\mathrm{SSR}/\sigma^2/1}{\mathrm{SSE}/\sigma^2/(n-2)} = \frac{\mathrm{SSR}/1}{\mathrm{SSE}/(n-2)} \sim F_{1,n-2}$$

證明 $F = t^2$：

$$F = \frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{MSE}} = \frac{\hat{\beta}_1^2 S_{XX}}{s^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2}{s^2/S_{XX}} = \left(\frac{\hat{\beta}_1}{s/\sqrt{S_{XX}}}\right)^2 = t^2$$

1.5 調整後 R^2

定理 1.9 (調整後 R^2)**.** 對於有 k 個自變數的多元迴歸：

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2) = 1 - \frac{\mathrm{SSE}/(n-k-1)}{\mathrm{SST}/(n-1)}}$$

證明. 由 $R^2 = 1 - \mathrm{SSE}/\mathrm{SST}$：

$$1 - R^2 = \frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}$$

調整後 R^2 用均方取代平方和：

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\mathrm{SSE}/(n-k-1)}{\mathrm{SST}/(n-1)} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)$$

這樣調整的原因：當增加無意義的自變數時，SSE 下降但自由度也下降，$\bar{R}^2$ 可能下降，避免過度擬合。

2 信賴區間與預測

定理 2.1 (迴歸係數的信賴區間)**.** β_1 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間為：

$$\boxed{\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \frac{s}{\sqrt{S_{XX}}}}$$

證明. 由定理 1.7，$\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s/\sqrt{S_{XX}}} \sim t_{n-2}$。

故 $\mathsf{P}\left(-t_{\alpha/2,n-2} \leqslant \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s/\sqrt{S_{XX}}} \leqslant t_{\alpha/2,n-2}\right) = 1-\alpha$

移項得 $\mathsf{P}\left(\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2,n-2} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{S_{XX}}} \leqslant \beta_1 \leqslant \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2,n-2} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{S_{XX}}}\right) = 1-\alpha$

定理 2.2 (平均反應的信賴區間)**.** 對於給定 $X = X_0$，$\mathsf{E}[Y|X_0] = \beta_0 + \beta_1 X_0$ 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間：

$$\boxed{\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{S_{XX}}}}$$

證明. 令 $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0$ 為 $\mathsf{E}[Y|X_0]$ 的估計。

計算 $\mathrm{var}(\hat{Y}_0)$：

$$\hat{Y}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} + \hat{\beta}_1 X_0 = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_0 - \bar{X})$$

由於 $\mathrm{cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = 0$：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\hat{Y}_0) &= \mathrm{var}(\bar{Y}) + (X_0 - \bar{X})^2\,\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + (X_0 - \bar{X})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{S_{XX}} = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0-\bar{X})^2}{S_{XX}}\right)\end{aligned}$$

故 $\dfrac{\hat{Y}_0 - (\beta_0 + \beta_1 X_0)}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0-\bar{X})^2}{S_{XX}}}} \sim t_{n-2}$，由此得信賴區間。

定理 2.3 (個別預測的預測區間)**.** 對於給定 $X = X_0$，個別觀測值 Y_{new} 的 $(1-\alpha)$ 預測區間：

$$\boxed{\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0-\bar{X})^2}{S_{XX}}}}$$

證明. 預測誤差為 $Y_{\text{new}} - \hat{Y}_0$。

由於 $Y_{\text{new}} = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \varepsilon_{\text{new}}$ 與 $\hat{Y}_0$ 獨立：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y_{\text{new}} - \hat{Y}_0) &= \mathrm{var}(Y_{\text{new}}) + \mathrm{var}(\hat{Y}_0) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0-\bar{X})^2}{S_{XX}}\right) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0-\bar{X})^2}{S_{XX}}\right)\end{aligned}$$

故預測區間比信賴區間多了 σ^2 這一項（個別觀測的隨機變異）。

3 多元線性迴歸

定義 3.1 (多元迴歸模型)**.**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

定理 3.1 (整體 F 檢定（多元迴歸）)**.** 檢定 $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$：

$$\boxed{F = \frac{\mathrm{MSR}}{\mathrm{MSE}} = \frac{\mathrm{SSR}/k}{\mathrm{SSE}/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}}$$

證明. 在 H_0 下，$\mathrm{SSR}/\sigma^2 \sim \chi^2_k$（$k$ 個限制式），$\mathrm{SSE}/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k-1}$（$n$ 個觀測減去 $k+1$ 個參數），且兩者獨立。

由 F 分配定義：

$$F = \frac{\mathrm{SSR}/\sigma^2/k}{\mathrm{SSE}/\sigma^2/(n-k-1)} = \frac{\mathrm{SSR}/k}{\mathrm{SSE}/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}$$

又 $R^2 = \mathrm{SSR}/\mathrm{SST}$，故 $\mathrm{SSR} = R^2 \cdot \mathrm{SST}$，$\mathrm{SSE} = (1-R^2)\mathrm{SST}$：

$$F = \frac{R^2 \cdot \mathrm{SST}/k}{(1-R^2)\mathrm{SST}/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

定理 3.2 (個別係數 t 檢定)**.** 對於 $H_0 : \beta_j = 0$：

$$\boxed{t = \frac{\hat{\beta}_j}{\text{SE}(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}}$$

證明. 由多元迴歸理論，$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 c_{jj})$，其中 c_{jj} 是 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ 的第 j 個對角元素。

以 s^2 估計 σ^2 後，$\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s\sqrt{c_{jj}}} \sim t_{n-k-1}$。

在 $H_0 : \beta_j = 0$ 下，檢定統計量為 $t = \hat{\beta}_j / \text{SE}(\hat{\beta}_j)$。

4 計算範例

例題 4.1. 給定資料：$(1,2), (2,4), (3,5), (4,4), (5,5)$，進行完整線性迴歸分析。

解答. 1. 基本統計量：$n = 5$，$\bar{X} = 3$，$\bar{Y} = 4$，$S_{XX} = 10$，$S_{XY} = 6$，$S_{YY} = 6$。

2. 估計值：$\hat{\beta}_1 = 6/10 = 0.6$，$\hat{\beta}_0 = 4 - 0.6(3) = 2.2$。

3. ANOVA：$\text{SSR} = (0.6)^2 \times 10 = 3.6$，$\text{SSE} = 6 - 3.6 = 2.4$，$R^2 = 0.6$。

4. 假設檢定：$\text{MSE} = 2.4/3 = 0.8$，$s = 0.894$。

$\text{SE}(\hat{\beta}_1) = 0.894/\sqrt{10} = 0.283$，$t = 0.6/0.283 = 2.12$。

$df = 3$，$t_{0.025,3} = 3.182$。因為 $|2.12| < 3.182$，不拒絕 H_0。

5. 信賴區間：$0.6 \pm 3.182 \times 0.283 = 0.6 \pm 0.90 = (-0.30, 1.50)$。

例題 4.2. $n = 100$，$k = 4$，$R^2 = 0.36$，求 F 值和調整後 R^2。

解答. F **值**：

$$F = \frac{0.36/4}{(1-0.36)/(100-4-1)} = \frac{0.09}{0.64/95} = \frac{0.09}{0.00674} = 13.35$$

調整後 R^2：

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{99}{95}(1 - 0.36) = 1 - 1.042 \times 0.64 = 1 - 0.667 = 0.333$$