統計學講義

第一部分：機率基礎

參考書籍

Jeffrey S. Rosenthal, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*, 2nd Edition
Chapter 2: Probability

https://utstat.utoronto.ca/mikevans/jeffrosenthal/

1 機率公理與基本定義

1.1 樣本空間與事件

定義 1.1 (樣本空間). **樣本空間**（Sample Space），記為 Ω，是一次隨機實驗所有可能結果的集合。樣本空間中的每個元素稱為**樣本點**（sample point）。

例題 1.1. 不同隨機實驗的樣本空間：

(a) 擲一枚公正硬幣：$\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}$ 或簡記為 $\Omega = \{H, T\}$
(b) 擲一顆公正骰子：$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(c) 測量燈泡壽命：$\Omega = [0, \infty)$（連續樣本空間）
(d) 計算某日顧客人數：$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

定義 1.2 (事件). **事件**（Event）是樣本空間 Ω 的子集合。若隨機實驗的結果落在事件 A 中，我們說「事件 A 發生了」。

例題 1.2. 擲骰子的事件：

- $A = \{2, 4, 6\}$：「擲出偶數」
- $B = \{1, 2, 3\}$：「擲出小於 4 的數」
- $A \cap B = \{2\}$：「擲出偶數且小於 4」
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$：「擲出偶數或小於 4」
- $A^c = \{1, 3, 5\}$：「擲出奇數」（A 的補集）

定義 1.3 (事件的集合運算). 設 A 和 B 為樣本空間 Ω 的兩個事件：

- **聯集**：$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 或} \omega \in B\}$
- **交集**：$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且} \omega \in B\}$
- **補集**：$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
- **差集**：$A \setminus B = A \cap B^c = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且} \omega \notin B\}$

定義 1.4 (互斥事件). 若 $A \cap B = \varnothing$（空集合），則稱事件 A 與 B **互斥**（mutually exclusive）或**不相交**（disjoint）。

1.2 機率公理

定義 1.5 (Kolmogorov 機率公理). **機率**是一個從事件到實數的函數 $\mathsf{P}(\cdot)$，滿足以下三條公理：

(i) **非負性**：對任意事件 A，$\mathsf{P}(A) \geqslant 0$
(ii) **規範性**：$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
(iii) **可加性**：若 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 為兩兩互斥的事件（即 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 當 $i \neq j$），則

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$$

定理 1.1 (機率的基本性質)**.** 設 A 和 B 為任意事件，則：

(a) $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$
(b) $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$
(c) 若 $A \subseteq B$，則 $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$
(d) $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$
(e) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$（加法法則）

證明. 我們證明其中幾個重要性質：

(a) 證明 $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$：

令 $A_1 = \Omega$，$A_2 = A_3 = \cdots = \varnothing$。由於這些事件兩兩互斥，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$，由公理 (iii)：

$$\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) + \cdots = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\varnothing) + \mathsf{P}(\varnothing) + \cdots$$

由公理 (ii)，$\mathsf{P}(\Omega) = 1$。若 $\mathsf{P}(\varnothing) > 0$，則右式為無窮大，矛盾。故 $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$。

(b) 證明 $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$：

由於 A 與 A^c 互斥且 $A \cup A^c = \Omega$，由公理 (ii) 和 (iii)：

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup A^c) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A^c)$$

移項得 $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$。

(e) 證明加法法則：

將 $A \cup B$ 分解為三個互斥部分：

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

因此：

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A^c \cap B)$$

同時，$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$，故 $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A \cap B)$。

類似地，$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A^c \cap B) + \mathsf{P}(A \cap B)$。

將以上兩式相加：

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A^c \cap B) + 2\mathsf{P}(A \cap B)$$

因此：

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$$

推論 1.1 (排容原理)**.** 對於三個事件 A、B、C：

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) &+ \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) \\ &- \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) \\ &+ \mathsf{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

例題 1.3. 一副 52 張撲克牌中隨機抽取一張。設事件 $A =$「抽到紅心」，$B =$「抽到人頭牌（J, Q, K）」。求 $\mathsf{P}(A \cup B)$。

解答.

- $\mathsf{P}(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$（紅心有 13 張）
- $\mathsf{P}(B) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$（人頭牌每種花色 3 張，共 12 張）

- $\mathsf{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{52}$（紅心的人頭牌有 3 張）

由加法法則：

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$$

2 條件機率與獨立性

2.1 條件機率的定義

在許多情況下，我們想知道「在某事件已發生的條件下，另一事件發生的機率」。

定義 2.1 (條件機率). 設 A 和 B 為兩事件，且 $\mathsf{P}(B) > 0$。在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的**條件機率**（conditional probability）定義為：

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

註. 直觀理解：條件機率 $\mathsf{P}(A|B)$ 是「在 B 已發生的前提下，A 也發生」的機率。分母 $\mathsf{P}(B)$ 將樣本空間「縮小」到 B，分子 $\mathsf{P}(A \cap B)$ 則是 A 與 B 同時發生的部分。

例題 2.1. 擲兩顆公正骰子。設 $A =$「兩骰子點數和為 8」，$B =$「第一顆骰子為 3」。求 $\mathsf{P}(A|B)$。

解答. 樣本空間共有 $6 \times 6 = 36$ 個等機率的樣本點。

- $B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$，故 $\mathsf{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
- $A \cap B = \{(3,5)\}$（第一顆為 3，和為 8，故第二顆為 5），故 $\mathsf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

因此：

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

驗證：在 B 發生的條件下（第一顆為 3），樣本空間縮小為 6 個點。其中只有 $(3,5)$ 使和為 8，故條件機率為 $1/6$。

2.2 乘法法則

定理 2.1 (乘法法則). 由條件機率的定義可立即得到：

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B) \cdot \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B|A) \cdot \mathsf{P}(A)$$

推廣到多個事件：

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathsf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

例題 2.2. 袋中有 5 顆紅球和 3 顆白球。不放回地連續抽取兩球。求兩球都是紅球的機率。

解答. 設 $A_1 =$「第一球為紅」，$A_2 =$「第二球為紅」。

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

說明：第一球為紅的機率是 $5/8$。若第一球為紅，剩下 7 球中有 4 顆紅球，故條件機率為 $4/7$。

2.3 事件的獨立性

定義 2.2 (獨立事件). 若事件 A 和 B 滿足

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

則稱 A 與 B **（統計）獨立**（independent）。

命題 2.1. 若 $\mathsf{P}(B) > 0$，則 A 與 B 獨立等價於

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$$

證明. 由條件機率定義：

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

若 A 與 B 獨立，則 $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$，故：

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A)$$

反之亦然。

註. 獨立性的直觀意義：B 的發生與否不影響 A 發生的機率。這是機率論中極為重要的概念。

例題 2.3. 擲一顆公正骰子。設 $A =$「點數為偶數」，$B =$「點數小於 4」。判斷 A 與 B 是否獨立。

解答.
- $A = \{2, 4, 6\}$，$\mathsf{P}(A) = 3/6 = 1/2$
- $B = \{1, 2, 3\}$，$\mathsf{P}(B) = 3/6 = 1/2$
- $A \cap B = \{2\}$，$\mathsf{P}(A \cap B) = 1/6$

檢驗：$\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = \mathsf{P}(A \cap B)$

因此 A 與 B **不獨立**。

定理 2.2 (獨立性的等價條件). 若 A 與 B 獨立，則以下各對事件也獨立：

(a) A 與 B^c
(b) A^c 與 B
(c) A^c 與 B^c

證明. 證明 (a)：

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \cap B^c) &= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) \quad \text{（因 } A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ 且互斥）} \\
&= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \quad \text{（因 } A \text{ 與 } B \text{ 獨立）} \\
&= \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) \\
&= \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B^c)
\end{aligned}$$

故 A 與 B^c 獨立。(b) 和 (c) 的證明類似。

定義 2.3 (多事件的獨立性). 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 稱為**相互獨立**（mutually independent），若對任意 $k \geqslant 2$ 個事件的子集 $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$，都有：

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \mathsf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathsf{P}(A_{i_k})$$

註. 注意：兩兩獨立（pairwise independent）不蘊含相互獨立（mutually independent）。相互獨立的條件更強。

3 貝氏定理與全機率定理

3.1 樣本空間的分割

定義 3.1 (分割)**.** 若事件 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 滿足：

(i) $B_i \cap B_j = \varnothing$ 當 $i \neq j$（兩兩互斥）
(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$（覆蓋整個樣本空間）
(iii) $\mathsf{P}(B_i) > 0$ 對所有 i

則稱 $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ 為樣本空間 Ω 的一個**分割**（partition）。

3.2 全機率定理

定理 3.1 (全機率定理 (Law of Total Probability))**.** 設 $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ 為樣本空間的一個分割，A 為任意事件。則：

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i)$$

證明. 由於 $\{B_1, \ldots, B_n\}$ 為分割，任何事件 A 可分解為：

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

因 B_i 兩兩互斥，$(A \cap B_i)$ 也兩兩互斥。由機率公理 (iii)：

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i)$$

例題 3.1. 某工廠有三條生產線，產量分別佔總產量的 20%、30%、50%。各生產線的不良率分別為 5%、3%、1%。隨機抽取一件產品，求其為不良品的機率。

解答. 設 B_1、B_2、B_3 分別表示產品來自生產線 1、2、3，A 表示產品為不良品。

已知：

- $\mathsf{P}(B_1) = 0.20$，$\mathsf{P}(B_2) = 0.30$，$\mathsf{P}(B_3) = 0.50$
- $\mathsf{P}(A|B_1) = 0.05$，$\mathsf{P}(A|B_2) = 0.03$，$\mathsf{P}(A|B_3) = 0.01$

由全機率定理：

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) &= \mathsf{P}(A|B_1)\mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(A|B_2)\mathsf{P}(B_2) + \mathsf{P}(A|B_3)\mathsf{P}(B_3) \\
&= 0.05 \times 0.20 + 0.03 \times 0.30 + 0.01 \times 0.50 \\
&= 0.010 + 0.009 + 0.005 \\
&= 0.024
\end{aligned}$$

故隨機抽取的產品為不良品的機率為 2.4%。

3.3 貝氏定理

定理 3.2 (貝氏定理 (Bayes' Theorem))**.** 設 $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ 為樣本空間的一個分割，A 為任意事件且 $\mathsf{P}(A) > 0$。則對任意 $j = 1, 2, \ldots, n$：

$$\mathsf{P}(B_j|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_j) \cdot \mathsf{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_j) \cdot \mathsf{P}(B_j)}{\mathsf{P}(A)}$$

證明. 由條件機率定義：

$$\mathsf{P}(B_j|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B_j)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_j) \cdot \mathsf{P}(B_j)}{\mathsf{P}(A)}$$

再由全機率定理將 $\mathsf{P}(A)$ 展開即得。

說明 (貝氏定理術語)**.**

- $\mathsf{P}(B_j)$：**先驗機率**（prior probability）——在觀察到 A 之前，對 B_j 的機率判斷
- $\mathsf{P}(B_j|A)$：**後驗機率**（posterior probability）——在觀察到 A 之後，對 B_j 的更新機率
- $\mathsf{P}(A|B_j)$：**似然**（likelihood）——在 B_j 條件下觀察到 A 的機率

貝氏定理描述了「如何根據新證據更新我們的信念」。

例題 3.2 (續上例)**.** 若隨機抽取的產品為不良品，求其來自生產線 1 的機率。

解答. 由貝氏定理：

$$\mathsf{P}(B_1|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_1) \cdot \mathsf{P}(B_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.05 \times 0.20}{0.024} = \frac{0.010}{0.024} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

雖然生產線 1 只佔總產量的 20%，但因其不良率較高（5%），在已知產品為不良品的條件下，它來自生產線 1 的機率提高到約 41.7%。

例題 3.3. 參加多選題考試，每題有 c 個選項。你知道答案的機率為 p；若不知道答案則隨機猜測。已知你答對了某題，求你真正知道答案的機率。

解答. 設事件：

- $K =$ 知道答案
- $C =$ 答對

已知條件：

- $\mathsf{P}(K) = p$，$\mathsf{P}(K^c) = 1 - p$
- $\mathsf{P}(C|K) = 1$（若知道答案，必答對）
- $\mathsf{P}(C|K^c) = \dfrac{1}{c}$（不知道答案，隨機猜中的機率）

求 $\mathsf{P}(K|C)$。

步驟 1：由全機率定理求 $\mathsf{P}(C)$：

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(C) &= \mathsf{P}(C|K) \cdot \mathsf{P}(K) + \mathsf{P}(C|K^c) \cdot \mathsf{P}(K^c) \\
&= 1 \cdot p + \frac{1}{c} \cdot (1 - p) \\
&= p + \frac{1-p}{c} = \frac{cp + 1 - p}{c} = \frac{1 + p(c-1)}{c}
\end{aligned}$$

步驟 2：由貝氏定理求 $\mathsf{P}(K|C)$：

$$\mathsf{P}(K|C) = \frac{\mathsf{P}(C|K) \cdot \mathsf{P}(K)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{1 \cdot p}{\frac{1 + p(c-1)}{c}} = \frac{cp}{1 + p(c-1)}$$

驗證（特殊情形）：

- 若 $p = 1$（總是知道答案）：$\mathsf{P}(K|C) = \dfrac{c}{c} = 1$ ✓
- 若 $p = 0$（完全不知道）：$\mathsf{P}(K|C) = \dfrac{0}{1} = 0$ ✓
- 若 $c \to \infty$（選項很多）：$\mathsf{P}(K|C) \to 1$（答對很可能是真知道）✓

4 聯合機率與邊際機率

4.1 聯合機率

定義 4.1 (聯合機率). 對於兩個事件 A 和 B，它們同時發生的機率 $\mathsf{P}(A \cap B)$ 稱為 A 與 B 的**聯合機率**（joint probability）。

當處理兩個或多個隨機變數時，我們常用**聯合機率表**來呈現資料。

例題 4.1. 超市根據 86,214 次購物記錄，統計顧客養貓數量與購買貓糧數量的聯合機率（部分數據）：

	無貓	1 隻貓	2 隻貓	3 隻貓	3 隻以上
無購買貓糧	0.0487	0.0217	0.0025	0.0002	0
1–3 件	0.1698	0.0734	0.0104	0.0004	0.0002
4–6 件	0.1182	0.0516	0.0093	0.0006	0.0002
7–12 件	0.1160	0.0469	0.0113	0.0012	0.0005
12 件以上	0.2103	0.0818	0.0216	0.0021	0.0011

表格中每個數值代表「養特定數量貓」**且**「購買特定數量貓糧」的機率。所有格子的機率加總應等於 1。

4.2 邊際機率

定義 4.2 (邊際機率). 對於聯合機率表，將某一行或某一列的機率加總，所得的機率稱為**邊際機率**（marginal probability）。

例題 4.2 (續上例). 求「無養貓」的邊際機率。

解答. 將「無貓」那一行的所有機率加總：

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\text{無貓}) &= 0.0487 + 0.1698 + 0.1182 + 0.1160 + 0.2103 \\ &= 0.6630\end{aligned}$$

4.3 聯合機率表與獨立性

命題 4.1. 兩個類別變數 X 與 Y 獨立，若且唯若對所有可能的值 x 與 y：

$$\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \mathsf{P}(X = x) \cdot \mathsf{P}(Y = y)$$

即聯合機率等於兩個邊際機率的乘積。

例題 4.3. 檢驗上例中「養貓數量」與「購買貓糧數量」是否獨立。

解答. 從上例計算：

- $\mathsf{P}(\text{無貓}) = 0.6630$
- $\mathsf{P}(3\text{ 隻以上貓}) = 0 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0020$
- $\mathsf{P}(\text{無購買貓糧}) = 0.0487 + 0.0217 + 0.0025 + 0.0002 + 0 = 0.0731$

若獨立，應有：

$$\mathsf{P}(\text{無貓}, \text{無購買貓糧}) = \mathsf{P}(\text{無貓}) \times \mathsf{P}(\text{無購買貓糧}) = 0.6630 \times 0.0731 = 0.0485$$

但實際觀察值為 $0.0487 \approx 0.0485$，非常接近。

再檢驗另一組：

$$\mathsf{P}(3\text{ 隻以上貓}, 12\text{ 件以上}) = 0.0011$$

若獨立：$\mathsf{P}(3\text{ 隻以上貓}) \times \mathsf{P}(12\text{ 件以上}) = ?$

需先算 $\mathsf{P}(12\text{ 件以上}) = 0.2103 + 0.0818 + 0.0216 + 0.0021 + 0.0011 = 0.3169$

若獨立：$0.0020 \times 0.3169 = 0.00063$

但實際值為 0.0011，差距較大。

結論：養貓數量與購買貓糧數量**不獨立**（直覺上也合理：養越多貓，越可能購買更多貓糧）。

4.4 由聯合機率計算條件機率

例題 4.4. 利用上述購物資料，求「在養 3 隻以上貓的條件下，購買超過 3 件貓糧」的條件機率。

解答. 設 $A =$「購買超過 3 件貓糧」（即 4–6 件、7–12 件、或 12 件以上）

設 $B =$「養 3 隻以上貓」

先計算邊際機率：

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(3\text{ 隻以上貓}) = 0 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0020$$

計算聯合機率：

$$\mathsf{P}(A \cap B) = 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0018$$

（養 3 隻以上貓且購買 4 件以上貓糧）

條件機率：

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{0.0018}{0.0020} = 0.90 = 90\%$$

對比「無養貓」的顧客：

$$\mathsf{P}(A|\text{無貓}) = \frac{0.1182 + 0.1160 + 0.2103}{0.6630} = \frac{0.4445}{0.6630} \approx 0.67 = 67\%$$

結論：養 3 隻以上貓的顧客購買超過 3 件貓糧的條件機率（90%）遠高於無養貓的顧客（67%）。這再次說明兩變數不獨立，且呈正相關。

5 本章習題

習題 5.1. 一個袋子裡有 4 顆紅球和 6 顆白球。隨機抽取一球後放回，再抽第二球。

(a) 求兩球都是紅球的機率。
(b) 求至少一球是紅球的機率。
(c) 設 $A =$「第一球為紅」，$B =$「第二球為紅」。判斷 A 與 B 是否獨立。

解答.

(a) 由於放回抽樣，每次抽到紅球的機率都是 $4/10 = 2/5$。

$$\mathsf{P}(\text{兩球皆紅}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

(b) 令 $C =$「至少一球為紅」。則 $C^c =$「兩球皆白」。

$$\mathsf{P}(C^c) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

$$\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(C^c) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

(c) 由於是放回抽樣：
- $\mathsf{P}(A) = 4/10 = 2/5$
- $\mathsf{P}(B) = 4/10 = 2/5$
- $\mathsf{P}(A \cap B) = (2/5)(2/5) = 4/25$
- $\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) = (2/5)(2/5) = 4/25 = \mathsf{P}(A \cap B)$

故 A 與 B **獨立**。

習題 5.2. 某疾病在人群中的盛行率為 1%。有一種檢測方法，對於患病者有 99% 的機率呈陽性（敏感度），對於健康者有 95% 的機率呈陰性（特異度）。若某人檢測呈陽性，求其真正患病的機率。

解答. 設 $D =$「患病」，$T^+ =$「檢測陽性」。

已知：

- $\mathsf{P}(D) = 0.01$，$\mathsf{P}(D^c) = 0.99$
- $\mathsf{P}(T^+|D) = 0.99$（敏感度）
- $\mathsf{P}(T^-|D^c) = 0.95$，故 $\mathsf{P}(T^+|D^c) = 0.05$（偽陽性率）

求 $\mathsf{P}(D|T^+)$。

由全機率定理：

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(T^+) &= \mathsf{P}(T^+|D) \cdot \mathsf{P}(D) + \mathsf{P}(T^+|D^c) \cdot \mathsf{P}(D^c) \\ &= 0.99 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99 \\ &= 0.0099 + 0.0495 = 0.0594\end{aligned}$$

由貝氏定理：

$$\mathsf{P}(D|T^+) = \frac{\mathsf{P}(T^+|D) \cdot \mathsf{P}(D)}{\mathsf{P}(T^+)} = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0594} = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167$$

結論：即使檢測呈陽性，真正患病的機率只有約 16.7%。這個看似反直覺的結果是因為疾病盛行率很低（1%），而偽陽性（5%）相對較高。

習題 5.3. 三人 A、B、C 輪流擲硬幣，按 A→B→C→A→ ⋯ 的順序進行。最先擲出正面者獲勝。假設硬幣為公正硬幣。求三人各自獲勝的機率。

解答. 設 P_A、P_B、P_C 分別為 A、B、C 獲勝的機率。

A 獲勝的情形：A 第一輪擲出正面，或三人第一輪都擲反面後 A 再獲勝。

$$P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} P_A$$

解得：

$$P_A - \frac{1}{8} P_A = \frac{1}{2} \implies \frac{7}{8} P_A = \frac{1}{2} \implies P_A = \frac{4}{7}$$

B 獲勝的情形：A 擲反面，B 擲正面，或 A、B、C 都擲反面後 B 再獲勝。

$$P_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} P_B = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} P_B$$

解得：

$$\frac{7}{8} P_B = \frac{1}{4} \implies P_B = \frac{2}{7}$$

由 $P_A + P_B + P_C = 1$：

$$P_C = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

驗證：先擲的人有優勢，$P_A > P_B > P_C$，符合直覺。

習題 5.4. 設 $\mathsf{P}(A) = 0.6$，$\mathsf{P}(B) = 0.4$，$\mathsf{P}(A|B) = 0.5$。求：

(a) $\mathsf{P}(A \cap B)$
(b) $\mathsf{P}(A \cup B)$
(c) $\mathsf{P}(B|A)$
(d) 判斷 A 與 B 是否獨立

解答. (a) 由條件機率定義：

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B) \cdot \mathsf{P}(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

(b) 由加法法則：

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$$

(c) 由條件機率定義：

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

(d) 檢驗獨立性：

$$\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) = 0.6 \times 0.4 = 0.24 \neq 0.2 = \mathsf{P}(A \cap B)$$

故 A 與 B **不獨立**。
另一種檢驗：$\mathsf{P}(A|B) = 0.5 \neq 0.6 = \mathsf{P}(A)$，同樣說明不獨立。