統計學講義

第零部分：預備微積分知識

1 極限與連續性

1.1 極限的直觀概念

定義 1.1 (極限). 若當 x 趨近於 a（但 $x \neq a$）時，$f(x)$ 趨近於某定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x \to a$ 的**極限**，記為

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

例題 1.1.

- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$
- $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$

1.2 單側極限與無窮極限

定義 1.2 (單側極限).

- **左極限**：$\lim_{x \to a^-} f(x)$，x 從 a 的左邊趨近
- **右極限**：$\lim_{x \to a^+} f(x)$，x 從 a 的右邊趨近

定理 1.1. 若 $L \in \mathbb{R}$，則 $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$。

例題 1.2.

- $\lim_{x \to 0} |x| = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} =$ 不存在（左極限為 -1，右極限為 1）
- $\lim_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$，$\lim_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$

1.3 極限運算法則

定理 1.2 (極限的四則運算). 設 $\lim_{x \to a} f(x) = F$，$\lim_{x \to a} g(x) = G$，且 F, G 存在（非無窮），則：

- $\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = F \pm G$
- $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$，若 $G \neq 0$
- $\lim_{x \to a} \big(f(x)\big)^{\alpha} = F^{\alpha}$，若 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 且 $F > 0$

例題 1.3.

- $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = -\frac{1}{3}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5}{3}$

定理 1.3 (夾擠定理). 若 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 對所有 $x \in [a,b]$，$c \in [a,b]$ 且 $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$，則 $\lim_{x \to c} f(x) = L$。

1.4 連續性

定義 1.3 (連續). 給定 f，$a \in \operatorname{dom} f$。

- 若 $\lim_{x \to a} f(x)$ 存在且 $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$，則稱 f 在 a **連續**。
- 若 f 在區間 I 之每一點均連續，則稱 f 在 I 連續。

定理 1.4 (中間值定理). 若 f 在 $[a,b]$ 連續，則對任意介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的數 d，存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = d$。

定理 1.5 (Bolzano 定理). 若 f 在 $[a,b]$ 連續且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，則存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c) = 0$。

2 微分

2.1 導數的定義

定義 2.1 (導數). 函數 f 在 a 的**導數**定義為：

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

若此極限存在，則稱 f 在 a **可微分**。

定理 2.1 (可微分 $\Rightarrow$ 連續). 若 f 在 a 可微分，則 f 在 a 連續。

2.2 微分規則

定理 2.2 (基本微分公式).
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$，$(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

定理 2.3 (微分運算法則). 設 f, g 可微分，c 為常數：

- **線性**：$(cf + g)' = cf' + g'$
- **乘法**：$(fg)' = f'g + fg'$
- **除法**：$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$，若 $g \neq 0$
- **連鎖律**：$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

說明 (連鎖律的意義). 連鎖律（chain rule）是複合函數的微分法則。若 $y = f(u)$，$u = g(x)$，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

這可以推廣到多層複合：若 $y = f(u)$，$u = g(v)$，$v = h(x)$，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例題 2.1. 求 $f(x) = e^{x^2+3x}$ 的導數。

解答. 令 $u = x^2 + 3x$，則 $f(x) = e^u$。

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^u) = e^u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$$

例題 2.2. 求 $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ 的導數。

解答. 令 $u = e^x + e^{-x}$，則

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

3 L'Hôpital 法則

定理 3.1 (L'Hôpital 法則)**.** 若 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，且 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例題 3.1.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

4 積分

4.1 不定積分

定義 4.1 (反導數)**.** 若 $F'(x) = f(x)$，則 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個**反導數**（antiderivative）。$f(x)$ 的所有反導數形成**不定積分**：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

定理 4.1 (基本積分公式)**.**

- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$（$n \neq -1$）
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1} x + C$

4.2 變數變換法

定理 4.2 (變數變換（代換法）)**.** 若 $u = g(x)$，則

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

例題 4.1.

- $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$：令 $u = x^2$，$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$，則 $\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C = e^{x^2} + C$
- $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$：令 $u = 1 + x^2$，則 $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

4.3 部分積分法

定理 4.3 (部分積分).

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

例題 4.2. $\int xe^x\,\mathrm{d}x$：令 $u = x$，$\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$，則 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$，$v = e^x$。

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

4.4 定積分

定理 4.4 (微積分基本定理). 若 f 在 $[a,b]$ 連續，F 為 f 的反導數，則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

定理 4.5 (Leibniz 積分法則). 若 $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$，則

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

5 多變數微分

5.1 偏導數

定義 5.1 (偏導數). 函數 $f(x,y)$ 對 x 的**偏導數**：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

類似地定義 $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$。

例題 5.1. 若 $f(x,y) = x^2y + e^{xy}$，則

- $f_x = 2xy + ye^{xy}$
- $f_y = x^2 + xe^{xy}$
- $f_{xy} = 2x + e^{xy} + xye^{xy}$

5.2 連鎖律

定理 5.1 (多變數連鎖律). 若 $z = f(x,y)$，$x = x(t)$，$y = y(t)$，則

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

更一般地，若 $z = f(x,y)$，$x = x(s,t)$，$y = y(s,t)$，則

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

例題 5.2. 若 x, y, z 滿足方程式 $x^2+y^2+z^2=1$（z 視為 x, y 的函數），求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

解答. 將方程式對 x 偏微分（y 視為常數）：

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

例題 5.3. 若 $z^5 + y^2e^z + e^{2x} = 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$。

解答. 當 $x=y=0$：$z^5+0+1=0 \implies z(0,0)=-1$

對 x 偏微分：$5z^4\frac{\partial z}{\partial x} + y^2e^z\frac{\partial z}{\partial x} + 2e^{2x} = 0$

代入 $(x,y)=(0,0)$：$5\cdot 1\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)+0+2=0 \implies \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{2}{5}$

5.3 梯度與方向導數

定義 5.2 (梯度)**.** 函數 $f(x,y)$ 的**梯度**為

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j}$$

定義 5.3 (方向導數)**.** f 在點 (a,b) 沿單位向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 的**方向導數**為

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\mathbf{u} = f_x(a,b)u_1 + f_y(a,b)u_2$$

5.4 極值問題

定理 5.2 (極值的必要條件)**.** 若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 有局部極值且 f 在該點可微分，則

$$f_x(a,b)=0 \quad 且 \quad f_y(a,b)=0$$

滿足此條件的點稱為**臨界點**（critical point）。

定理 5.3 (二階判別法)**.** 設 (a,b) 為 f 的臨界點，令

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

- 若 $D>0$ 且 $f_{xx}(a,b)>0$，則 (a,b) 為局部極小
- 若 $D>0$ 且 $f_{xx}(a,b)<0$，則 (a,b) 為局部極大
- 若 $D<0$，則 (a,b) 為鞍點
- 若 $D=0$，則無法判定

6 Lagrange 乘數法

定理 6.1 (Lagrange 乘數法)**.** 給定開集 $S\subseteq\mathbb{R}^n$，可微函數 $f: S\to\mathbb{R}$ 與 $g_j: S\to\mathbb{R}$，$j=1,\,2,\,\ldots,\,m$，$m<n$，及約束集合

$$X_0 = \left\{\mathbf{x}\in S \mid g_j(\mathbf{x})=0,\ j=1,\,2,\,\ldots,\,m\right\}$$

若 f 在 $\mathbf{x}_0\in S\cap X_0$ 有極值，則存在 $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_m$ 使得

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla g_j(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

註. 令 $\mathcal{L} \equiv f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, g_j$（Lagrangian），上述條件可寫作

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad g_j(\mathbf{x}_0) = 0,\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$$

例題 6.1. 求 $x^2 - 10x - y^2$ 在 $x^2 + 4y^2 = 16$ 上的最大值與最小值。

解答. 令 $\mathcal{L} = x^2 - 10x - y^2 + \lambda\,(x^2 + 4y^2 - 16)$，則

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x - 10 + 2\lambda x = 0 \implies (1+\lambda)x = 5 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -2y + 8\lambda y = 0 \implies (4\lambda - 1)y = 0 \end{aligned}$$

由第二式，$y = 0$ 或 $\lambda = \frac{1}{4}$。

若 $y = 0$，由約束條件 $x = \pm 4$。

若 $\lambda = \frac{1}{4}$，由第一式 $x = 4$，代入約束條件得 $y = 0$。

故極值點為 $(4, 0)$ 與 $(-4, 0)$。

$f(4, 0) = 16 - 40 = -24$（最小值），$f(-4, 0) = 16 + 40 = 56$（最大值）。

例題 6.2 (Cauchy 不等式的證明). 求 $\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ 在 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ 與 $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1$ 下之最大值。

解答. 令 $\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 1 \right)$

對任意 $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = y_i + 2\lambda_1 x_i = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} = x_i + 2\lambda_2 y_i = 0$$

由此得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$，故 $x_i = \pm y_i$。

最大值為 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$（當 $x_i = y_i$）。

推論（Cauchy 不等式）： $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}$

7 多重積分

7.1 二重積分

定義 7.1 (二重積分). 函數 $f(x, y)$ 在區域 Ω 上的**二重積分**：

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}A = \iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

定理 7.1 (Fubini 定理——逐次積分). 若 f 在矩形區域 $[a, b] \times [c, d]$ 連續，則

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

7.2 積分順序交換

定理 7.2 (積分順序交換). 對於一般區域：

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

前提是兩積分描述相同區域。

例題 7.1. 計算 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$。

解答. 原積分無法直接計算（e^{y^2} 無初等反導數）。交換積分順序：

原區域：$0 \leqslant x \leqslant 1$，$x \leqslant y \leqslant 1$

交換後：$0 \leqslant y \leqslant 1$，$0 \leqslant x \leqslant y$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y\,e^{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

例題 7.2. 計算 $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

解答. 原區域：$0 \leqslant y \leqslant 4$，$\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2$

交換後：$0 \leqslant x \leqslant 2$，$0 \leqslant y \leqslant x^2$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2(27-1)}{9} = \frac{52}{9}\end{aligned}$$

7.3 變數變換與 Jacobian

定理 7.3 (重積分變數變換). 給定 $\Omega_{\mathbf{x}}, \Omega_{\mathbf{u}} \subseteq \mathbb{R}^n$，$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) : \Omega_{\mathbf{u}} \to \Omega_{\mathbf{x}}$ 為嵌射（一對一且映成），各分量函數連續可偏微分，且 Jacobian

$$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

則

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\mathbf{u}}} f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))\,|J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})|\,\mathrm{d}\mathbf{u}$$

例題 7.3 (極座標). 令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，則

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

故 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。

例題 7.4. 計算 $\iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A$，其中 Ω 為單位圓盤 $x^2+y^2 \leqslant 1$。

解答. 使用極座標：

$$\begin{aligned}\iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1 = \pi(1-e^{-1})\end{aligned}$$

例題 7.5 (統計學重要應用：Gaussian 積分)**.** 計算 $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解答. 考慮 I^2：

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

使用極座標：

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\pi$$

故 $I=\sqrt{\pi}$。

推論：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$（標準常態分配的正規化常數）

例題 7.6 (一般線性變換)**.** 求 $\iint_\Omega (x+y)^2\,\mathrm{d}A$，$\Omega$ 為 $x+y=0$，$x+y=1$，$2x-y=0$，$2x-y=3$ 所圍之平行四邊形。

解答. 令 $u=x+y$，$v=2x-y$，則 $x=\frac{1}{3}(u+v)$，$y=\frac{1}{3}(2u-v)$。

Jacobian：

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}$$

變換後 $\Omega=\{0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 3\}$。

$$\iint_\Omega (x+y)^2\,\mathrm{d}A=\int_0^3\int_0^1 u^2\cdot\left|-\frac{1}{3}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

8 統計學相關的重要積分

8.1 Gamma 函數

定義 8.1 (Gamma 函數)**.**

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \alpha>0$$

定理 8.1 (Gamma 函數的性質)**.**

- $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$
- $\Gamma(n+1)=n!$，對正整數 n

- $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

證明 ($\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ 的證明). 使用部分積分，令 $u = x^\alpha$，$\mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^\alpha e^{-x}\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha\,\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

8.2 Beta 函數

定義 8.2 (Beta 函數).

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha,\beta > 0$$

定理 8.2 (Beta 與 Gamma 的關係).

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

證明 (概要). 利用變數變換 $x = \frac{u}{u+v}$, $y = u + v$ 及二重積分技巧可證。