統計學講義

第二部分：隨機變數與常用分配

參考書籍

Jeffrey S. Rosenthal, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*, 2nd Edition
Chapter 3: Random Variables and Distributions
Chapter 4: More about Distributions (Sections 4.1–4.2)
Chapter 5: Special Distributions

https://utstat.utoronto.ca/mikevans/jeffrosenthal/

1 隨機變數的基本概念

1.1 隨機變數的定義

定義 1.1 (隨機變數). **隨機變數**（random variable）是一個從樣本空間 Ω 到實數 $\mathbb{R}$ 的函數：

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

對於樣本空間中的每個結果 ω，隨機變數 X 指定一個實數值 $X(\omega)$。

註. 隨機變數通常用大寫字母 X、Y、Z 表示，其取值用小寫字母 x、y、z 表示。

例題 1.1. 擲兩顆骰子，令 X 為兩骰子點數之和。則 X 是一個隨機變數，可能取值為 $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$。

定義 1.2 (離散型與連續型隨機變數).
- **離散型隨機變數**（discrete random variable）：取值為有限個或可數無限個數值。
- **連續型隨機變數**（continuous random variable）：取值為某區間內的任意實數。

1.2 機率質量函數（PMF）

定義 1.3 (機率質量函數). 對於離散型隨機變數 X，其**機率質量函數**（probability mass function, PMF）定義為：

$$p(x) = p_X(x) = \mathsf{P}(X = x)$$

即 X 取值為 x 的機率。

性質 1.1 (PMF 的性質).
(i) $p(x) \geqslant 0$ 對所有 x
(ii) $\displaystyle\sum_{\text{所有可能的}x} p(x) = 1$
(iii) $\mathsf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$

例題 1.2. 擲一顆公正骰子，令 X 為點數。則 PMF 為：

$$p(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

驗證：$\displaystyle\sum_{x=1}^{6} p(x) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$ ✓

1.3 機率密度函數（PDF）

定義 1.4 (機率密度函數)**.** 對於連續型隨機變數 X，其**機率密度函數**（probability density function, PDF）$f(x)$ 滿足：

$$\mathsf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

性質 1.2 (PDF 的性質)**.**
(i) $f(x) \geqslant 0$ 對所有 x
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
(iii) $\mathsf{P}(X = a) = 0$ 對任意單點 a（連續型隨機變數取特定值的機率為 0）
(iv) $\mathsf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leqslant X < b) = \mathsf{P}(a < X \leqslant b)$

註. 注意：$f(x)$ 本身不是機率！$f(x)$ 可以大於 1。只有 $f(x)$ 在區間上的積分才代表機率。

1.4 累積分配函數（CDF）

定義 1.5 (累積分配函數)**.** 隨機變數 X 的**累積分配函數**（cumulative distribution function, CDF）定義為：

$$F(x) = F_X(x) = \mathsf{P}(X \leqslant x)$$

性質 1.3 (CDF 的性質)**.**
(i) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ 對所有 x
(ii) F 為**單調非遞減**函數：若 $x_1 < x_2$，則 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$
(iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
(iv) $\mathsf{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
(v) 對連續型隨機變數：$f(x) = F'(x)$（PDF 是 CDF 的導數）

例題 1.3. 設連續型隨機變數 X 的 PDF 為 $f(x) = 2x$，$0 \leqslant x \leqslant 1$。求 CDF。

解答. 對於 $0 \leqslant x \leqslant 1$：

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leqslant x) = \int_0^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2$$

完整的 CDF 為：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

2 期望值與變異數

2.1 期望值

定義 2.1 (期望值)**.** 隨機變數 X 的**期望值**（expected value）或**平均數**（mean），記為 $\mathsf{E}[X]$ 或 μ：

離散型：

$$\mathsf{E}[X] = \sum_x x \cdot p(x)$$

連續型：

$$\mathsf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

例題 2.1. 擲一顆公正骰子，求點數的期望值。

解答.

$$\mathsf{E}[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

定理 2.1 (函數的期望值)**.** 若 $g(X)$ 為隨機變數 X 的函數，則：

離散型：$\mathsf{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p(x)$

連續型：$\mathsf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$

性質 2.1 (期望值的性質)**.** 設 a、b 為常數，X、Y 為隨機變數：

(i) $\mathsf{E}[a] = a$
(ii) $\mathsf{E}[aX] = aE[X]$
(iii) $\mathsf{E}[aX+b] = aE[X]+b$（線性性質）
(iv) $\mathsf{E}[X+Y] = \mathsf{E}[X]+\mathsf{E}[Y]$（無論 X、Y 是否獨立）
(v) 若 X 與 Y **獨立**，則 $\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X] \cdot \mathsf{E}[Y]$
(vi) $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}[X_i]$

例題 2.2. 設 $\mathsf{E}[X] = 5$，$\mathsf{E}[Y] = 3$。求 $\mathsf{E}[2X-3Y+7]$。

解答. 利用期望值的線性性質：

$$\mathsf{E}[2X-3Y+7] = 2\mathsf{E}[X] - 3\mathsf{E}[Y] + 7 = 2(5) - 3(3) + 7 = 10 - 9 + 7 = 8$$

2.2 變異數與標準差

定義 2.2 (變異數)**.** 隨機變數 X 的**變異數**（variance），記為 $\mathrm{var}(X)$ 或 σ^2，定義為：

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \mathsf{E}\left[(X-\mathsf{E}[X])^2\right]$$

其中 $\mu = \mathsf{E}[X]$。

定理 2.2 (變異數的計算公式)**.**

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = \mathsf{E}[X^2] - \mu^2$$

證明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathsf{E}[(X-\mu)^2] \\
&= \mathsf{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= \mathsf{E}[X^2] - 2\mu\mathsf{E}[X] + \mu^2 \\
&= \mathsf{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\
&= \mathsf{E}[X^2] - \mu^2 = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2
\end{aligned}$$

定義 2.3 (標準差)**.** 隨機變數 X 的**標準差**（standard deviation）為變異數的平方根：

$$\sigma = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

標準差與 X 有相同的單位。

性質 2.2 (變異數的性質)**.** 設 a、b 為常數：

(i) $\mathrm{var}(a) = 0$
(ii) $\mathrm{var}(aX) = a^2 \mathrm{var}(X)$
(iii) $\mathrm{var}(X + b) = \mathrm{var}(X)$（平移不影響變異數）
(iv) $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X)$
(v) 若 X 與 Y **獨立**，則 $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
(vi) 若 X 與 Y **獨立**，則 $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
(vii) $\mathrm{var}(X) \geqslant 0$，且 $\mathrm{var}(X) = 0 \iff X = c$（常數）

例題 2.3. 擲一顆公正骰子，求點數的變異數。

解答. 由前例，$\mathsf{E}[X] = 3.5$。

計算 $\mathsf{E}[X^2]$：

$$\mathsf{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}$$

因此：

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.917$$

標準差：$\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.708$

2.3 共變異數與相關係數

定義 2.4 (共變異數)**.** 兩個隨機變數 X 與 Y 的**共變異數**（covariance）定義為：

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$$

性質 2.3 (共變異數的性質)**.**
(i) $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}(X)$
(ii) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$
(iii) $\mathrm{cov}(aX, bY) = ab \cdot \mathrm{cov}(X, Y)$
(iv) $\mathrm{cov}(X + a, Y + b) = \mathrm{cov}(X, Y)$
(v) $\mathrm{cov}(X + Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$
(vi) 若 X 與 Y 獨立，則 $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$
(vii) $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$
(viii) $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) - 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$

註. 注意：$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ 不一定意味著 X 與 Y 獨立！獨立 $\Rightarrow$ $\mathrm{cov} = 0$，但反向不成立。

定義 2.5 (相關係數)**.** 兩個隨機變數 X 與 Y 的**（Pearson）相關係數**（correlation coefficient）定義為：

$$\rho_{XY} = \mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}}$$

性質 2.4 (相關係數的性質)**.**
(i) $-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$
(ii) $\rho_{XY} = 1 \iff Y = aX + b$，其中 $a > 0$（完全正相關）
(iii) $\rho_{XY} = -1 \iff Y = aX + b$，其中 $a < 0$（完全負相關）
(iv) $\rho_{XY} = 0$ 表示 X 與 Y 無**線性**相關
(v) $\mathrm{corr}(aX + b, cY + d) = \mathrm{sgn}(ac) \cdot \mathrm{corr}(X, Y)$

例題 2.4. 設 (X, Y) 的聯合 PMF 如下表：

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0.1	0.1

求 $\text{cov}(X, Y)$ 與 ρ_{XY}。

解答. 步驟 1：計算邊際分配

X 的邊際 PMF：$\mathsf{P}(X=0)=0.3$，$\mathsf{P}(X=1)=0.4$，$\mathsf{P}(X=2)=0.3$

Y 的邊際 PMF：$\mathsf{P}(Y=0)=0.3$，$\mathsf{P}(Y=1)=0.4$，$\mathsf{P}(Y=2)=0.3$

步驟 2：計算期望值

$$\mathsf{E}[X]=0(0.3)+1(0.4)+2(0.3)=1$$
$$\mathsf{E}[Y]=0(0.3)+1(0.4)+2(0.3)=1$$

步驟 3：計算 $\mathsf{E}[XY]$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[XY]&=\sum_x\sum_y xy\cdot\mathsf{P}(X=x,Y=y)\\&=0\cdot0\cdot0.1+0\cdot1\cdot0.1+\cdots+1\cdot1\cdot0.2+\cdots+2\cdot2\cdot0.1\\&=0+0+0+0+0.2+0.2+0+0.2+0.4=1.0\end{aligned}$$

步驟 4：計算共變異數

$$\text{cov}(X,Y)=\mathsf{E}[XY]-\mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]=1.0-1\times1=0$$

步驟 5：計算變異數

$$\mathsf{E}[X^2]=0^2(0.3)+1^2(0.4)+2^2(0.3)=0+0.4+1.2=1.6$$
$$\text{var}(X)=\mathsf{E}[X^2]-(\mathsf{E}[X])^2=1.6-1=0.6$$

同理，$\text{var}(Y)=0.6$。

步驟 6：計算相關係數

$$\rho_{XY}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\,\text{var}(Y)}}=\frac{0}{\sqrt{0.6\times0.6}}=0$$

X 與 Y 無線性相關。

3 常用離散分配

3.1 伯努利分配

定義 3.1 (伯努利分配). 若隨機變數 X 只取 0 或 1 兩個值，且

$$\mathsf{P}(X=1)=p,\quad \mathsf{P}(X=0)=1-p=q$$

則稱 X 服從參數為 p 的**伯努利分配**（Bernoulli distribution），記為 $X\sim\text{Bernoulli}(p)$。

性質 3.1 (伯努利分配的期望值與變異數). 若 $X\sim\text{Bernoulli}(p)$，則：

$$\mathsf{E}[X]=p,\quad \text{var}(X)=p(1-p)=pq$$

證明.

$$\mathsf{E}[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$\mathsf{E}[X^2] = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$
$$\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

3.2 二項分配

定義 3.2 (二項分配). 若 X 表示 n 次獨立伯努利試驗中成功的次數，每次成功機率為 p，則 X 服從**二項分配**（binomial distribution），記為 $X \sim \text{Binomial}(n,p)$ 或 $X \sim B(n,p)$。

PMF：

$$\mathsf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

性質 3.2 (二項分配的期望值與變異數). 若 $X \sim B(n,p)$，則：

$$\mathsf{E}[X] = np, \quad \operatorname{var}(X) = np(1-p)$$

證明. 令 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，其中 $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ 獨立。

$$\mathsf{E}[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}[X_i] = np$$

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i) = np(1-p)$$

（因獨立，變異數可相加）

例題 3.1. 某商店每天有 100 位顧客，每位顧客購買商品的機率為 0.3。求：

(a) 恰好 30 位顧客購買的機率
(b) 購買顧客數的期望值與標準差
(c) 至少 25 位顧客購買的機率（使用常態近似）

解答. 令 $X =$ 購買商品的顧客數，$X \sim B(100, 0.3)$。

(a) $\mathsf{P}(X=30) = \binom{100}{30}(0.3)^{30}(0.7)^{70} \approx 0.0868$
(b) $\mathsf{E}[X] = np = 100 \times 0.3 = 30$
$\operatorname{var}(X) = np(1-p) = 100 \times 0.3 \times 0.7 = 21$
$\text{SD}(X) = \sqrt{21} \approx 4.58$
(c) 檢驗常態近似條件：$np = 30 > 5$，$n(1-p) = 70 > 5$ ✓
使用連續性校正（continuity correction）：

$$\mathsf{P}(X \geqslant 25) \approx P\left(Z \geqslant \frac{24.5 - 30}{\sqrt{21}}\right) = \mathsf{P}(Z \geqslant -1.20) = \Phi(1.20) \approx 0.885$$

3.3 Poisson 分配

定義 3.3 (Poisson 分配). 若隨機變數 X 的 PMF 為：

$$\mathsf{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

其中 $\lambda > 0$，則稱 X 服從參數為 λ 的 **Poisson 分配**，記為 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$。

性質 3.3 (Poisson 分配的期望值與變異數)**.** 若 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，則：

$$\mathsf{E}[X] = \lambda, \quad \text{var}(X) = \lambda$$

證明. 期望值：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda\end{aligned}$$

變異數：可先證明 $\mathsf{E}[X(X-1)] = \lambda^2$，然後

$$\mathsf{E}[X^2] = \mathsf{E}[X(X-1)] + \mathsf{E}[X] = \lambda^2 + \lambda$$
$$\text{var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

定理 3.1 (Poisson 近似)**.** 當 n 大、p 小、且 $\lambda = np$ 固定時：

$$\text{Binomial}(n, p) \approx \text{Poisson}(\lambda)$$

經驗法則：當 $n \geqslant 20$ 且 $p \leqslant 0.05$ 時，近似效果良好。

例題 3.2. 某網站平均每分鐘有 3 次點擊。假設點擊次數服從 Poisson 分配。

(a) 求某分鐘恰好有 5 次點擊的機率
(b) 求某分鐘至少有 1 次點擊的機率

解答. 設 X = 每分鐘點擊次數，$X \sim \text{Poisson}(3)$。

(a) $\mathsf{P}(X=5) = \dfrac{e^{-3} \cdot 3^5}{5!} = \dfrac{e^{-3} \cdot 243}{120} = \dfrac{243e^{-3}}{120} \approx 0.1008$

(b) $\mathsf{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathsf{P}(X=0) = 1 - \dfrac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = 1 - e^{-3} \approx 1 - 0.0498 = 0.9502$

3.4 常用離散分配比較表

分配	符號	PMF	$\mathsf{E}[X]$	$\text{var}(X)$
伯努利	$\text{Bernoulli}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
二項	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\text{Poisson}(\lambda)$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ

表 1: 常用離散分配摘要

4 常用連續分配

4.1 均勻分配

定義 4.1 (均勻分配)**.** 若隨機變數 X 在區間 $[a,b]$ 上均勻分布，則其 PDF 為：

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

記為 $X \sim \text{Uniform}(a,b)$ 或 $X \sim U(a,b)$。

性質 4.1 (均勻分配的 CDF、期望值與變異數)**.**

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$\mathsf{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

證明. 期望值：

$$\mathsf{E}[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

變異數：

$$\mathsf{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2 指數分配

定義 4.2 (指數分配)**.** 若隨機變數 X 的 PDF 為：

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$$

其中 $\lambda > 0$，則稱 X 服從參數為 λ 的**指數分配**（exponential distribution），記為 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$。

性質 4.2 (指數分配的 CDF、期望值與變異數)**.**

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$$

$$\mathsf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

證明 (期望值的證明)**.**

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

使用分部積分，令 $u = x$，$dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X] &= \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 + \Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big]_0^\infty = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

定理 4.1 (指數分配的中位數)**.** 若 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，則中位數為：

$$m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

證明. 中位數 m 滿足 $F(m) = 0.5$：

$$\begin{gathered}1 - e^{-\lambda m} = 0.5 \\ e^{-\lambda m} = 0.5 \\ -\lambda m = \ln(0.5) = -\ln 2 \\ m = \frac{\ln 2}{\lambda}\end{gathered}$$

定理 4.2 (無記憶性). 指數分配具有**無記憶性**（memoryless property）：

$$\mathsf{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathsf{P}(X > t)$$

證明.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathsf{P}(X > s + t \text{ 且} X > s)}{\mathsf{P}(X > s)} = \frac{\mathsf{P}(X > s + t)}{\mathsf{P}(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathsf{P}(X > t)\end{aligned}$$

註. 無記憶性的直觀意義：如果設備已經運作了 s 小時還沒壞，那麼它再運作 t 小時才壞的機率，與一個全新設備運作 t 小時才壞的機率相同。過去不影響未來。

例題 4.1. 某電子元件的壽命 X（小時）服從 Exp(0.001)。求：

(a) 元件壽命的期望值
(b) 元件壽命的中位數
(c) 元件壽命超過 1000 小時的機率
(d) 已知元件已運作 500 小時，求它再運作至少 500 小時的機率

解答. $X \sim \text{Exp}(0.001)$，$\lambda = 0.001$。

(a) $\mathsf{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0.001} = 1000$ 小時
(b) $m = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = \dfrac{0.693}{0.001} = 693$ 小時
(c) $\mathsf{P}(X > 1000) = e^{-\lambda \cdot 1000} = e^{-1} \approx 0.368$
(d) 由無記憶性：

$$\mathsf{P}(X > 1000 \mid X > 500) = \mathsf{P}(X > 500) = e^{-0.001\times 500} = e^{-0.5} \approx 0.607$$

4.3 常態分配

定義 4.3 (常態分配). 若隨機變數 X 的 PDF 為：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$，$\sigma > 0$，則稱 X 服從**常態分配**（normal distribution）或**高斯分配**（Gaussian distribution），記為 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

性質 4.3 (常態分配的期望值與變異數). 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則：

$$\mathsf{E}[X] = \mu, \quad \operatorname{var}(X) = \sigma^2$$

定義 4.4 (標準常態分配). 當 $\mu = 0$、$\sigma = 1$ 時，稱為**標準常態分配**（standard normal distribution），記為 $Z \sim N(0, 1)$。

PDF：$\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

CDF：$\Phi(z) = \mathsf{P}(Z \leqslant z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \phi(t)\, dt$

定理 4.3 (標準化). 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

性質 4.4 (標準常態分配的對稱性).
(i) $\phi(-z) = \phi(z)$（PDF 對稱）
(ii) $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
(iii) $\mathsf{P}(Z > z) = 1 - \Phi(z)$
(iv) $\mathsf{P}(|Z| \leqslant z) = 2\Phi(z) - 1$
(v) $\mathsf{P}(-z \leqslant Z \leqslant z) = 2\Phi(z) - 1$

性質 4.5 (常態分配的線性組合). 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為獨立常態隨機變數，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，則：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

信賴水準	雙尾 α	單尾 $\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
90%	0.10	0.05	1.645
95%	0.05	0.025	1.96
99%	0.01	0.005	2.576

表 2: 常用標準常態分位數

例題 4.2. 設 $X \sim N(100, 225)$（即 $\mu = 100$，$\sigma = 15$）。求：
(a) $\mathsf{P}(X > 115)$
(b) $\mathsf{P}(85 < X < 130)$
(c) 求 c 使得 $\mathsf{P}(X > c) = 0.10$

解答. (a) 標準化：$Z = \dfrac{X - 100}{15}$

$$\mathsf{P}(X > 115) = P\left(Z > \frac{115 - 100}{15}\right) = \mathsf{P}(Z > 1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(85 < X < 130) &= P\left(\frac{85 - 100}{15} < Z < \frac{130 - 100}{15}\right)\\ &= \mathsf{P}(-1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1)\\ &= \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185\end{aligned}$$

(c) 需要 $\mathsf{P}(X > c) = 0.10$，即 $\mathsf{P}(X \leqslant c) = 0.90$。
標準化後：$\mathsf{P}(Z \leqslant z) = 0.90 \Rightarrow z = z_{0.10} \approx 1.28$
因此：$\dfrac{c - 100}{15} = 1.28 \Rightarrow c = 100 + 15(1.28) = 119.2$

4.4 常用連續分配比較表

分配	符號	PDF	$\mathsf{E}[X]$	$\mathrm{var}(X)$
均勻	$U(a,b)$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指數	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
常態	$N(\mu,\sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

表 3: 常用連續分配摘要

5 本章習題

習題 5.1. 設離散型隨機變數 X 的 PMF 為：$\mathsf{P}(X=0)=0.1$，$\mathsf{P}(X=1)=0.3$，$\mathsf{P}(X=2)=0.4$，$\mathsf{P}(X=3)=0.2$。

(a) 求 $\mathsf{E}[X]$ 與 $\mathrm{var}(X)$
(b) 求 CDF $F(x)$
(c) 求 $\mathsf{P}(1\leqslant X<3)$

解答. (a) $\mathsf{E}[X]=0(0.1)+1(0.3)+2(0.4)+3(0.2)=0+0.3+0.8+0.6=1.7$
$\mathsf{E}[X^2]=0^2(0.1)+1^2(0.3)+2^2(0.4)+3^2(0.2)=0+0.3+1.6+1.8=3.7$
$\mathrm{var}(X)=\mathsf{E}[X^2]-(\mathsf{E}[X])^2=3.7-(1.7)^2=3.7-2.89=0.81$

(b) CDF：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.1 & 0\leqslant x<1\\ 0.4 & 1\leqslant x<2\\ 0.8 & 2\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$$

(c) $\mathsf{P}(1\leqslant X<3)=\mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)=0.3+0.4=0.7$

習題 5.2. 某產品的不良率為 5%。隨機抽取 20 件產品檢驗。

(a) 求恰好有 2 件不良品的機率
(b) 求不良品數的期望值與標準差
(c) 求至少有 1 件不良品的機率

解答. 設 $X=$ 不良品數，$X\sim B(20,0.05)$。

(a) $\mathsf{P}(X=2)=\binom{20}{2}(0.05)^2(0.95)^{18}=190\times 0.0025\times 0.3972\approx 0.189$
(b) $\mathsf{E}[X]=np=20\times 0.05=1$
$\mathrm{var}(X)=np(1-p)=20\times 0.05\times 0.95=0.95$
$\mathrm{SD}(X)=\sqrt{0.95}\approx 0.975$
(c) $\mathsf{P}(X\geqslant 1)=1-\mathsf{P}(X=0)=1-(0.95)^{20}\approx 1-0.358=0.642$

習題 5.3. 某電話交換機平均每小時接到 4 通電話。假設電話數服從 Poisson 分配。

(a) 求 1 小時內恰好接到 3 通電話的機率
(b) 求 1 小時內接到超過 5 通電話的機率
(c) 求 30 分鐘內沒有電話的機率

解答. 設 $X=$ 每小時電話數，$X\sim\mathrm{Poisson}(4)$。

(a) $\mathsf{P}(X=3)=\dfrac{e^{-4}\cdot 4^3}{3!}=\dfrac{64e^{-4}}{6}\approx 0.195$
(b) $\mathsf{P}(X>5)=1-\mathsf{P}(X\leqslant 5)=1-\sum_{k=0}^{5}\dfrac{e^{-4}\cdot 4^k}{k!}$
計算：$\mathsf{P}(X\leqslant 5)=e^{-4}(1+4+8+10.67+10.67+8.53)\approx e^{-4}\times 42.87\approx 0.785$
故 $\mathsf{P}(X>5)\approx 1-0.785=0.215$
(c) 30 分鐘的平均電話數為 $\lambda=4/2=2$。
設 $Y=30$ 分鐘電話數，$Y\sim \text{Poisson}(2)$。
$\mathsf{P}(Y=0)=e^{-2}\approx 0.135$

習題 5.4. 設隨機變數 X 服從 $\text{Exp}(2)$。

(a) 求 $\mathsf{E}[X]$ 與 $\text{var}(X)$
(b) 求 $\mathsf{P}(X>1)$
(c) 求中位數 m
(d) 驗證無記憶性：計算 $\mathsf{P}(X>1.5\mid X>0.5)$

解答. $X\sim\text{Exp}(2)$，$\lambda=2$。

(a) $\mathsf{E}[X]=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}=0.5$
$\text{var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{4}=0.25$
(b) $\mathsf{P}(X>1)=e^{-\lambda\cdot 1}=e^{-2}\approx 0.135$
(c) $m=\dfrac{\ln 2}{\lambda}=\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{0.693}{2}\approx 0.347$
(d) 由無記憶性：

$$\mathsf{P}(X>1.5\mid X>0.5)=\mathsf{P}(X>1)=e^{-2}\approx 0.135$$

驗證：

$$\mathsf{P}(X>1.5\mid X>0.5)=\frac{\mathsf{P}(X>1.5)}{\mathsf{P}(X>0.5)}=\frac{e^{-3}}{e^{-1}}=e^{-2}\approx 0.135$$

結果相同，驗證了無記憶性。

習題 5.5. 設 $X\sim N(50,100)$（即 $\mu=50$，$\sigma=10$）。

(a) 求 $\mathsf{P}(X<65)$
(b) 求 $\mathsf{P}(35<X<60)$
(c) 求 $\mathsf{P}(|X-50|>15)$
(d) 求 x_0 使得 $\mathsf{P}(X>x_0)=0.05$

解答. $X\sim N(50,100)$，標準化 $Z=\dfrac{X-50}{10}$。

(a) $\mathsf{P}(X<65)=P\left(Z<\dfrac{65-50}{10}\right)=\mathsf{P}(Z<1.5)=\Phi(1.5)\approx 0.9332$
(b) $\mathsf{P}(35<X<60)=P\left(\dfrac{35-50}{10}<Z<\dfrac{60-50}{10}\right)$
$=\mathsf{P}(-1.5<Z<1)=\Phi(1)-\Phi(-1.5)=0.8413-0.0668=0.7745$
(c) $\mathsf{P}(|X-50|>15)=\mathsf{P}(X<35\text{ 或}X>65)$
$=\mathsf{P}(Z<-1.5)+\mathsf{P}(Z>1.5)=2\times(1-\Phi(1.5))=2\times 0.0668=0.1336$
(d) 需要 $\mathsf{P}(X>x_0)=0.05$，即 $\mathsf{P}(Z>z_0)=0.05$。
查表：$z_0=z_{0.05}=1.645$
因此：$x_0=50+10(1.645)=66.45$

習題 5.6. 設隨機變數 X 與 Y 滿足：$\mathsf{E}[X]=2$，$\mathsf{E}[Y]=3$，$\text{var}(X)=4$，$\text{var}(Y)=9$，$\mathsf{E}[XY]=10$。

(a) 求 $\text{cov}(X,Y)$

(b) 求 ρ_{XY}
(c) 求 $\operatorname{var}(2X-Y+5)$
(d) 求 $\operatorname{cov}(X+Y, X-Y)$

解答. (a) $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] = 10 - 2\times 3 = 4$

(b) $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \dfrac{4}{\sqrt{4\times 9}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

(c) 使用公式 $\operatorname{var}(aX+bY+c) = a^2\operatorname{var}(X) + b^2\operatorname{var}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$：
$\operatorname{var}(2X-Y+5) = 4\cdot\operatorname{var}(X) + 1\cdot\operatorname{var}(Y) + 2(2)(-1)\operatorname{cov}(X,Y)$
$= 4(4) + 9 - 4(4) = 16 + 9 - 16 = 9$

(d) $\operatorname{cov}(X+Y, X-Y) = \operatorname{cov}(X,X) - \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(Y,X) - \operatorname{cov}(Y,Y)$
$= \operatorname{var}(X) - \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(X,Y) - \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(X) - \operatorname{var}(Y) = 4 - 9 = -5$