

統計學講義

第六部分：迴歸分析

1 多元線性迴歸模型

1.1 模型設定

定義 1.1 (多元線性迴歸模型). 設有 n 個觀測值，每個觀測包含一個依變數 Y_i 和 k 個自變數 X_{i1}, \dots, X_{ik} 。多元線性迴歸模型假設：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

其中 β_0 為截距， β_1, \dots, β_k 為斜率係數， ε_i 為誤差項。

定義 1.2 (矩陣表示法). 將模型寫成矩陣形式：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

其中：

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{pmatrix}_{n \times (k+1)}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}_{(k+1) \times 1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

\mathbf{X} 稱為**設計矩陣** (design matrix)，第一行全為 1 對應截距項。

性質 1.1 (古典假設). (A1) **線性關係**： $E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$

(A2) **誤差期望為零**： $E[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$

(A3) **球面誤差** (spherical errors)： $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$

- 同質變異數 (homoscedasticity)： $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (常數)
- 誤差不相關： $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ 對 $i \neq j$

(A4) **滿秩假設**： $\text{rank}(\mathbf{X}) = k + 1$ (\mathbf{X} 的行向量線性獨立)

(A5) **常態假設** (用於精確推論)： $\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$

註. 假設 (A1)–(A4) 稱為 **Gauss-Markov 假設**，保證 OLS 為 BLUE：

- **OLS**：Ordinary Least Squares，普通最小平方法
- **BLUE**：Best Linear Unbiased Estimator，最佳線性不偏估計量

假設 (A5) 用於有限樣本下的精確 t 和 F 檢定。

2 最小平方法

2.1 OLS 估計量

定義 2.1 (最小平方法). **普通最小平方法** (Ordinary Least Squares, OLS) 選擇 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 以最小化殘差平方和：

$$\text{SSE}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

引理 2.1 (矩陣微分公式). 設 $\boldsymbol{\beta}$ 為 $p \times 1$ 向量， \mathbf{a} 為 $p \times 1$ 常數向量， \mathbf{A} 為 $p \times p$ 常數矩陣。則：

$$(i) \frac{\partial}{\partial \beta}(\mathbf{a}^\top \beta) = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^\top \mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

$$(ii) \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^\top \mathbf{A} \beta) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \beta$$

當 \mathbf{A} 為對稱矩陣 ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$) 時，簡化為 $2\mathbf{A}\beta$ 。

證明 (i) 設 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^\top$ ，則 $\mathbf{a}^\top \beta = \sum_{j=1}^p a_j \beta_j$ 。對 β_i 微分： $\frac{\partial}{\partial \beta_i}(\mathbf{a}^\top \beta) = a_i$ 。故 $\frac{\partial}{\partial \beta}(\mathbf{a}^\top \beta) = \mathbf{a}$ 。

(ii) 設 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ，則 $\beta^\top \mathbf{A} \beta = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} \beta_i \beta_j$ 。對 β_ℓ 微分：

$$\frac{\partial}{\partial \beta_\ell}(\beta^\top \mathbf{A} \beta) = \sum_{j=1}^p a_{\ell j} \beta_j + \sum_{i=1}^p a_{i\ell} \beta_i = (\mathbf{A}\beta)_\ell + (\mathbf{A}^\top \beta)_\ell$$

故 $\frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^\top \mathbf{A} \beta) = \mathbf{A}\beta + \mathbf{A}^\top \beta = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \beta$ 。

當 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ 時， $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \beta = 2\mathbf{A}\beta$ 。□

定理 2.1 (OLS 估計量). 在假設 (A4) 下，OLS 估計量為：

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$$

證明 方法一：微分法

展開 SSE：

$$\begin{aligned} \text{SSE}(\beta) &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^\top \mathbf{X}\beta - \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} + \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta \\ &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - 2\beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} + \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta \end{aligned}$$

(第二步利用 $\mathbf{Y}^\top \mathbf{X}\beta$ 為純量，故等於其轉置 $\beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ 。)

對 β 微分。由引理 2.1， $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 為對稱矩陣，故：

$$\frac{\partial \text{SSE}}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}^\top \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta = \mathbf{0}$$

這給出正規方程式 (normal equations)：

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$$

由假設 (A4)， $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 可逆，故：

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$$

二階條件：Hessian 矩陣 $\frac{\partial^2 \text{SSE}}{\partial \beta \partial \beta^\top} = 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 為正定 (當 $\text{rank}(\mathbf{X}) = k + 1$ 時)，確認為最小值。

方法二：投影法

$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\beta}$ 是 \mathbf{Y} 在 \mathbf{X} 的行空間 (column space) 上的正交投影。正交條件要求殘差 $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ 與 \mathbf{X} 的每一行正交：

$$\mathbf{X}^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\beta} \implies \hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$$

□

定義 2.2 (帽子矩陣與殘差製造矩陣). 定義**帽子矩陣** (hat matrix) :

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$$

則擬合值為 $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}\mathbf{Y}$ ，殘差為 $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$ ，其中 $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$ 為**殘差製造矩陣** (residual maker matrix)。

定義 2.3 (冪等矩陣). 矩陣 \mathbf{A} 稱為**冪等矩陣** (idempotent matrix)，若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 。

引理 2.2 (冪等矩陣的跡與秩). 設 \mathbf{A} 為 $n \times n$ 冪等矩陣，則 $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$ 。

證明 由於 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ， \mathbf{A} 的特徵值 λ 滿足 $\lambda^2 = \lambda$ ，即 $\lambda(\lambda - 1) = 0$ ，故 $\lambda \in \{0, 1\}$ 。

設 \mathbf{A} 有 r 個特徵值為 1，其餘 $n - r$ 個為 0。則：

- $\text{tr}(\mathbf{A}) = r \cdot 1 + (n - r) \cdot 0 = r$
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ (等於非零特徵值個數)

故 $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$ 。□

定理 2.2 (標準常態向量的二次型分配). 設 $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ ， \mathbf{A} 為 $n \times n$ 對稱冪等矩陣 ($\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ ， $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$)。則：

$$\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} \sim \chi_r^2, \quad \text{其中 } r = \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$$

證明 步驟一：對稱冪等矩陣的譜分解

由於 \mathbf{A} 對稱，存在正交矩陣 \mathbf{P} ($\mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^\top = \mathbf{I}$) 使得：

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^\top$$

其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 為特徵值對角矩陣。

由引理 2.2， \mathbf{A} 的特徵值只能是 0 或 1。設有 r 個特徵值為 1，不失一般性令：

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 個}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ 個}})$$

步驟二：正交變換保持標準常態性

令 $\mathbf{w} = \mathbf{P}^\top \mathbf{z}$ 。由於 $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ ：

- $E[\mathbf{w}] = \mathbf{P}^\top E[\mathbf{z}] = \mathbf{0}$
- $\text{var}(\mathbf{w}) = \mathbf{P}^\top \text{var}(\mathbf{z}) \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \mathbf{I} \mathbf{P} = \mathbf{I}_n$

故 $\mathbf{w} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ ，即 w_1, \dots, w_n 為獨立標準常態變數。

步驟三：計算二次型

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} &= \mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^\top \mathbf{z} \\ &= (\mathbf{P}^\top \mathbf{z})^\top \mathbf{\Lambda} (\mathbf{P}^\top \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{w}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{w} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^r 1 \cdot w_i^2 + \sum_{i=r+1}^n 0 \cdot w_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^r w_i^2 \end{aligned}$$

步驟四：結論

由於 w_1, \dots, w_r 為獨立標準常態變數， $\sum_{i=1}^r w_i^2 \sim \chi_r^2$ 。

□

性質 2.1 (**H** 和 **M** 的性質).

- (i) **H** 和 **M** 皆為對稱幂等矩陣 (symmetric idempotent) : $\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$; $\mathbf{M}^\top = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$
- (ii) $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}$, $\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$
- (iii) $\mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{H} = \mathbf{0}$
- (iv) $\text{tr}(\mathbf{H}) = k + 1$, $\text{tr}(\mathbf{M}) = n - k - 1$

證明 (i) **H** 的對稱性：

$$\mathbf{H}^\top = [\mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top]^\top = \mathbf{X}[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]^\top \mathbf{X}^\top = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top = \mathbf{H}$$

(利用 $(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$ 對稱，因為 $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 對稱。)

H 的幂等性：

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top = \mathbf{H}$$

M = **I** - **H** 的對稱性和幂等性由 **H** 直接推得。

$$(ii) \mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{I} = \mathbf{X}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$(iii) \mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^2 = \mathbf{H} - \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

(iv) $\text{tr}(\mathbf{H})$ 的計算：

由引理 2.2， $\text{tr}(\mathbf{H}) = \text{rank}(\mathbf{H})$ 。

H 將任意向量投影到 **X** 的行空間（維度 $k + 1$ ），故 $\text{rank}(\mathbf{H}) = k + 1$ 。

因此 $\text{tr}(\mathbf{H}) = k + 1$ 。

$\text{tr}(\mathbf{M})$ 的計算：

$$\text{tr}(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) = \text{tr}(\mathbf{I}) - \text{tr}(\mathbf{H}) = n - (k + 1) = n - k - 1$$

□

性質 2.2 (正規方程式的意涵). OLS 殘差滿足：

- (i) $\mathbf{X}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0}$ (殘差與所有自變數正交)
- (ii) $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ (殘差和為零，因為 **X** 包含截距項)
- (iii) $\hat{\mathbf{Y}}^\top \mathbf{e} = 0$ (殘差與擬合值正交)

2.2 OLS 估計量的統計性質

定理 2.3 (不偏性). 在假設 (A1)–(A2) 下：

$$\boxed{E[\hat{\beta}|\mathbf{X}] = \beta}$$

證明 將 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ 代入 $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ ：

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\mathbf{X}\beta + \varepsilon) \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \\ &= \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \end{aligned}$$

取條件期望：

$$E[\hat{\beta}|\mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top E[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{0} = \beta$$

□

定理 2.4 (變異數-共變異數矩陣). 在假設 (A1)–(A4) 下：

$$\text{var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$$

證明 由 $\hat{\beta} - \beta = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\varepsilon}$ ：

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^\top | \mathbf{X}] \\ &= E[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} | \mathbf{X}] \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^\top | \mathbf{X}] \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \quad (\text{由假設 A3}) \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

□

註. $(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$ 的對角元素乘以 σ^2 給出各 $\hat{\beta}_j$ 的變異數，非對角元素乘以 σ^2 給出共變異數。

定理 2.5 (Gauss-Markov 定理). 在假設 (A1)–(A4) 下，OLS 估計量 $\hat{\beta}$ 是 β 的最佳線性不偏估計量 (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE)。

即：對於任意線性不偏估計量 $\tilde{\beta} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$ (其中 \mathbf{C} 為常數矩陣)，有

$$\text{var}(\tilde{\beta}_j) \geq \text{var}(\hat{\beta}_j), \quad \forall j$$

或更一般地， $\text{var}(\tilde{\beta}) - \text{var}(\hat{\beta})$ 為半正定矩陣。

證明 設 $\tilde{\beta} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$ 為 β 的線性不偏估計量，其中 \mathbf{C} 為 $(k+1) \times n$ 常數矩陣。

步驟一：不偏性的必要條件

$E[\tilde{\beta}] = \mathbf{C}E[\mathbf{Y}] = \mathbf{C}\mathbf{X}\beta = \beta$ 對所有 β 成立，故必須 $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{I}_{k+1}$ 。

步驟二：分解 \mathbf{C}

令 $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top + \mathbf{D}$ ，其中 $\mathbf{D} = \mathbf{C} - (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ 。

由 $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ ：

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{X} - (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

步驟三：計算 $\text{var}(\tilde{\beta})$

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{\beta}) &= \text{var}(\mathbf{C}\mathbf{Y}) = \mathbf{C} \text{var}(\mathbf{Y}) \mathbf{C}^\top = \sigma^2 \mathbf{C}\mathbf{C}^\top \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top + \mathbf{D}] [\mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{D}^\top] \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}^\top + \mathbf{D}\mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{D}^\top] \end{aligned}$$

由 $\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ，中間兩項為零 ($(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}^\top = [(\mathbf{D}\mathbf{X})(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]^\top = \mathbf{0}$)：

$$\text{var}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} + \sigma^2 \mathbf{D}\mathbf{D}^\top = \text{var}(\hat{\beta}) + \sigma^2 \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$$

由於 $\mathbf{D}\mathbf{D}^\top$ 為半正定矩陣， $\text{var}(\tilde{\beta}) - \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \mathbf{D}\mathbf{D}^\top \succeq \mathbf{0}$ 。

等號成立當且僅當 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ，即 $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ ，此時 $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$ 。

□

2.3 σ^2 的估計

引理 2.3 (二次型的期望值). 設 \mathbf{z} 為 $n \times 1$ 隨機向量, $E[\mathbf{z}] = \boldsymbol{\mu}$, $\text{var}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\Sigma}$ 。設 \mathbf{A} 為 $n \times n$ 常數矩陣。則：

$$E[\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}] = \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$$

特別地, 當 $E[\mathbf{z}] = \mathbf{0}$ 時, $E[\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}] = \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma})$ 。

證明 $\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i z_j$ 為純量。取期望：

$$E[\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E[z_i z_j]$$

由 $\text{cov}(z_i, z_j) = E[z_i z_j] - \mu_i \mu_j$, 得 $E[z_i z_j] = \Sigma_{ij} + \mu_i \mu_j$ 。代入：

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}] &= \sum_{i,j} a_{ij} (\Sigma_{ij} + \mu_i \mu_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \Sigma_{ij} + \sum_{i,j} a_{ij} \mu_i \mu_j \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

(第一項利用 $\text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) = \sum_i (\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma})_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} \Sigma_{ji} = \sum_{i,j} a_{ij} \Sigma_{ij}$, 因 $\boldsymbol{\Sigma}$ 對稱。)

□

定理 2.6 (MSE 的不偏性).

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n - k - 1} = \frac{\mathbf{e}^\top \mathbf{e}}{n - k - 1}$$

是 σ^2 的不偏估計量。

證明 步驟一：將 SSE 表示為誤差的二次型

由 $\mathbf{e} = \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{M}(\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{M} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}$ (因為 $\mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{0}$)。

故：

$$\text{SSE} = \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = (\mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon})^\top (\mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}$$

(最後一步利用 \mathbf{M} 對稱幂等： $\mathbf{M}^\top \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M} = \mathbf{M}$)。

步驟二：計算 $E[\text{SSE}]$

應用引理 2.3, 取 $\mathbf{z} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ 。

由假設 (A2), $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}$ (即 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$)。由假設 (A3), $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ (即 $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$)。

由引理 2.3：

$$\begin{aligned} E[\text{SSE}] &= E[\boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}] \\ &= \text{tr}(\mathbf{M} \cdot \sigma^2 \mathbf{I}) + \mathbf{0}^\top \mathbf{M} \mathbf{0} \\ &= \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}) + 0 \\ &= \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}) \end{aligned}$$

步驟三：計算 $\text{tr}(\mathbf{M})$

由性質 2.1(iv), $\text{tr}(\mathbf{M}) = n - k - 1$ 。

故 $E[\text{SSE}] = \sigma^2(n - k - 1)$ 。

步驟四：結論

$$E[\text{MSE}] = E\left[\frac{\text{SSE}}{n-k-1}\right] = \frac{E[\text{SSE}]}{n-k-1} = \frac{\sigma^2(n-k-1)}{n-k-1} = \sigma^2$$

故 MSE 是 σ^2 的不偏估計量。

□

3 簡單線性迴歸： $k = 1$ 的特例

當只有一個自變數時 ($k = 1$)，多元迴歸退化為簡單線性迴歸：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

此時設計矩陣為：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}$$

定理 3.1 (簡單迴歸的顯式公式). 當 $k = 1$ 時，OLS 估計量為：

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

其中 $S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2$ ， $S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ 。

證明 計算 $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ ：

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n\bar{X} \\ n\bar{X} & \sum X_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\bar{Y} \\ \sum X_i Y_i \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ 的行列式： $\det(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}) = n \sum X_i^2 - n^2 \bar{X}^2 = n(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2) = n \cdot S_{XX}$

$$(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{n \cdot S_{XX}} \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -n\bar{X} \\ -n\bar{X} & n \end{pmatrix}$$

由 $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ ：

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n \cdot S_{XX}} \left[-n\bar{X} \cdot n\bar{Y} + n \sum X_i Y_i \right] = \frac{n(\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y})}{n \cdot S_{XX}} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

由正規方程式第一列： $n\hat{\beta}_0 + n\bar{X}\hat{\beta}_1 = n\bar{Y} \implies \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ 。

□

推論 3.1 (簡單迴歸估計量的變異數).

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}, \quad \text{var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right)$$

證明 由 $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n \cdot S_{XX}} \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -n\bar{X} \\ -n\bar{X} & n \end{pmatrix}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n \cdot S_{XX}} = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{n \cdot S_{XX}} = \frac{\sigma^2 (\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2)}{n \cdot S_{XX}} = \frac{\sigma^2 S_{XX}}{n \cdot S_{XX}} + \frac{\sigma^2 n\bar{X}^2}{n \cdot S_{XX}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right)$$

□

4 判定係數與 ANOVA

4.1 平方和分解

定理 4.1 (變異數分解).

$$\boxed{\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}}$$

其中：

- $\text{SST} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{M}_0 \mathbf{Y} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ (總平方和, Total Sum of Squares) , $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$
- $\text{SSR} = \hat{\mathbf{Y}}^\top \mathbf{M}_0 \hat{\mathbf{Y}} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ (迴歸平方和, Regression Sum of Squares)
- $\text{SSE} = \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ (殘差平方和, Error Sum of Squares)

證明 $\mathbf{Y} - \bar{Y}\mathbf{1} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) + (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1}) = \mathbf{e} + (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1})$

平方展開： $\text{SST} = \mathbf{e}^\top \mathbf{e} + (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1})^\top (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1}) + 2\mathbf{e}^\top (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1})$

交叉項： $\mathbf{e}^\top (\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1}) = \mathbf{e}^\top \hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y} \mathbf{e}^\top \mathbf{1} = 0 - \bar{Y} \cdot 0 = 0$ (由正規方程式)

故 $\text{SST} = \text{SSE} + \text{SSR}$ 。

□

4.2 判定係數

定義 4.1 (判定係數 R^2).

$$\boxed{R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}}$$

R^2 表示自變數能解釋依變數總變異的比例， $0 \leq R^2 \leq 1$ 。

定義 4.2 (調整後判定係數).

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2) = 1 - \frac{\text{SSE}/(n-k-1)}{\text{SST}/(n-1)} = 1 - \frac{\text{MSE}}{s_Y^2}}$$

其中 $s_Y^2 = \text{SST}/(n-1)$ 為 Y 的樣本變異數。

註 (自由度的來源). 調整後 R^2 的分子分母分別除以相應的自由度：

- **分母** $n-1$ ： $\text{SST} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ 有 n 項，但受到一個約束 $\sum (Y_i - \bar{Y}) = 0$ ，故自由度為 $n-1$ 。
- **分子** $n-k-1$ ： $\text{SSE} = \sum e_i^2$ 有 n 項，但受到 $k+1$ 個約束 (正規方程式 $\mathbf{X}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0}$ 有 $k+1$ 個方程)，故自由度為 $n - (k+1) = n-k-1$ 。

調整後 R^2 對增加的自變數進行懲罰。若增加不顯著變數， \bar{R}^2 可能下降。 \bar{R}^2 可為負。

定理 4.2 (簡單迴歸中 $R^2 = r^2$). 在簡單線性迴歸 ($k=1$) 中， $R^2 = r_{XY}^2$ ，其中 r_{XY} 為 X 與 Y 的樣本相關係數。

證明 $R^2 = \text{SSR}/\text{SST} = \hat{\beta}_1^2 S_{XX}/S_{YY} = (S_{XY}/S_{XX})^2 \cdot S_{XX}/S_{YY} = S_{XY}^2/(S_{XX}S_{YY}) = r_{XY}^2$

□

5 假設檢定

5.1 抽樣分配

定理 5.1 (OLS 估計量的抽樣分配). 在假設 (A1)–(A5) 下：

$$\hat{\beta}|\mathbf{X} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1})$$

證明 由 $\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon$ ， $\hat{\beta}$ 是 ε 的線性變換。

在假設 (A5) 下， $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ 。

常態分配的線性變換仍為常態：若 $\mathbf{z} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ，則 $\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} \sim N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^\top)$ 。

取 $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ ， $\mathbf{z} = \varepsilon$ ， $\mathbf{b} = \beta$ ：

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \sim N(\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{0}, (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}) \\ &= N(\beta, \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}) \end{aligned}$$

□

定理 5.2 (SSE/ σ^2 的分配). 在假設 (A1)–(A5) 下：

$$\frac{\text{SSE}}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

且 SSE 與 $\hat{\beta}$ 獨立。

證明 步驟一：標準化

令 $\mathbf{z} = \varepsilon/\sigma$ ，則 $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ （標準常態向量）。

由 $\mathbf{e} = \mathbf{M}\varepsilon$ ：

$$\frac{\text{SSE}}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon^\top \mathbf{M} \varepsilon}{\sigma^2} = \mathbf{z}^\top \mathbf{M} \mathbf{z}$$

步驟二：二次型的分配

由定理 2.2，若 $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ 且 \mathbf{A} 為對稱幂等矩陣，則 $\mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z} \sim \chi_r^2$ ，其中 $r = \text{tr}(\mathbf{A})$ 。

\mathbf{M} 為對稱幂等矩陣， $\text{tr}(\mathbf{M}) = n - k - 1$ ，故：

$$\frac{\text{SSE}}{\sigma^2} = \mathbf{z}^\top \mathbf{M} \mathbf{z} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

步驟三：獨立性

$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon$ 與 $\mathbf{e} = \mathbf{M}\varepsilon$ 的獨立性：

兩者皆為 ε 的線性變換。由常態分配的性質，獨立性等價於共變異數為零：

$$\begin{aligned} \text{cov}((\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon, \mathbf{M} \varepsilon) &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \text{var}(\varepsilon) \mathbf{M}^\top \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{M} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{M} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(最後一步利用 $\mathbf{X}^\top \mathbf{M} = (\mathbf{M}\mathbf{X})^\top = \mathbf{0}^\top = \mathbf{0}$)

□

5.2 整體 F 檢定

表 1: 多元迴歸 ANOVA 表

來源	SS	df	MS	F
迴歸	SSR	k	$MSR = SSR/k$	$F = MSR/MSE$
殘差	SSE	$n - k - 1$	$MSE = SSE/(n - k - 1)$	
總和	SST	$n - 1$		

定理 5.3 (整體 F 檢定). 檢定 $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$:

$$F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/(n - k - 1)} \sim F_{k, n-k-1} \quad (\text{在 } H_0 \text{ 下})$$

證明 F 統計量的公式：

$F = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)}$ 。由 $R^2 = SSR/SST$ 和 $1 - R^2 = SSE/SST$ ：

$$F = \frac{R^2 \cdot SST/k}{(1 - R^2) \cdot SST/(n - k - 1)} = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/(n - k - 1)}$$

F 分配的推導：

在 H_0 下，可以證明 $SSR/\sigma^2 \sim \chi_k^2$ 且與 SSE 獨立。由定理 5.2， $SSE/\sigma^2 \sim \chi_{n-k-1}^2$ 。

F 分配的定義：若 $U \sim \chi_m^2$ ， $V \sim \chi_n^2$ 獨立，則 $(U/m)/(V/n) \sim F_{m,n}$ 。

故：

$$F = \frac{(SSR/\sigma^2)/k}{(SSE/\sigma^2)/(n - k - 1)} = \frac{SSR/k}{SSE/(n - k - 1)} \sim F_{k, n-k-1}$$

□

5.3 個別係數 t 檢定

定理 5.4 (個別係數檢定). 對於 $H_0: \beta_j = 0$ ：

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

其中 $SE(\hat{\beta}_j) = s\sqrt{[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}$ ， $s = \sqrt{MSE}$ 。

證明 由定理 5.1， $\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj})$ 。

標準化： $Z = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma\sqrt{[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}} \sim N(0, 1)$

由定理 5.2， $SSE/\sigma^2 \sim \chi_{n-k-1}^2$ ，且與 $\hat{\beta}_j$ 獨立。

t 分配的定義：若 $Z \sim N(0, 1)$ ， $V \sim \chi_\nu^2$ 獨立，則 $Z/\sqrt{V/\nu} \sim t_\nu$ 。

令 $V = \text{SSE}/\sigma^2$, $\nu = n - k - 1$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} = \frac{\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma \sqrt{[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}}}{\sqrt{\frac{\text{SSE}/\sigma^2}{n-k-1}}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{\text{SSE}}{n-k-1}} \cdot \sqrt{[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s \sqrt{[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}} \sim t_{n-k-1} \end{aligned}$$

在 $H_0: \beta_j = 0$ 下, $t = \hat{\beta}_j/\text{SE}(\hat{\beta}_j)$ 。

□

定理 5.5 (簡單迴歸中 $t^2 = F$). 在簡單線性迴歸 ($k = 1$) 中, 檢定 $H_0: \beta_1 = 0$ 時:

$$t^2 = F$$

證明 $t = \hat{\beta}_1/(s/\sqrt{S_{XX}})$, 故 $t^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{XX}/s^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{XX}/\text{MSE} = \text{SSR}/\text{MSE} = F$

□

6 進階主題

6.1 含交互作用項的模型

定義 6.1 (交互作用). 模型 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$ 中, X_1 對 Y 的邊際效應為:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \beta_1 + \beta_3 X_2$$

此效應取決於 X_2 的值——這就是「交互作用」的含義。

例題 6.1 (廣告與定價的交互作用). 模型: $Y = 20 + 2.5X_1 - 1.2X_2 + 0.04X_1X_2$ (Y : 銷售, X_1 : 廣告, X_2 : 定價)

廣告的邊際效應 $= 2.5 + 0.04X_2$ 。當定價 X_2 越高, 廣告效果越強。

6.2 無截距模型

定義 6.2 (無截距迴歸——多元形式). 考慮模型 $Y_i = \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$ (無截距項), 矩陣形式為 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, 其中 \mathbf{X} 為 $n \times k$ 矩陣 (不含全 1 的行)。

OLS 估計量仍為 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ 。

性質 6.1 (無截距模型的特性).

- (i) $\sum_{i=1}^n e_i$ 不一定為零 (因為 \mathbf{X} 不包含截距項, 正規方程式不含 $\sum e_i = 0$)
- (ii) $\mathbf{X}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0}$ 仍成立 (這是正規方程式的直接結果)
- (iii) Centered- $R^2 = 1 - \text{SSE}/\text{SST}$ 可能為負, 因為 $\text{SST} + \text{SSE}$ 不一定等於 SSR
- (iv) 使用 Uncentered- $R^2 = 1 - \text{SSE}/\sum Y_i^2$ 較為適當

例題 6.2 (CAPM 模型). 資本資產定價模型 (Capital Asset Pricing Model, CAPM) 的實證形式為:

$$R_{it} - R_f = \beta_i (R_{mt} - R_f) + \varepsilon_{it}$$

其中 $R_{it} - R_f$ 為資產 i 的超額報酬, $R_{mt} - R_f$ 為市場超額報酬。這是典型的無截距迴歸。

若加入截距項 (Jensen's alpha): $R_{it} - R_f = \alpha_i + \beta_i (R_{mt} - R_f) + \varepsilon_{it}$, 則 $\alpha_i \neq 0$ 表示該資產的表現優於 ($\alpha > 0$) 或劣於 ($\alpha < 0$) 市場基準。

7 計算範例

例題 7.1. 某分析師研究家庭垃圾產量的決定因素。資料： $n = 440$ ， $k = 3$ （房屋大小、兒童數、成人數）， $R^2 = 0.170$ ， $F = 29.80$ 。

- (a) 計算調整後 R^2
- (b) 計算殘差自由度
- (c) 進行整體 F 檢定 ($\alpha = 0.05$)

解答. (a) 調整後 R^2 ：

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2) = 1 - \frac{439}{436}(0.830) = 1 - 1.0069 \times 0.830 = 1 - 0.836 = \boxed{0.164}$$

(b) 殘差自由度： $df_{\text{殘差}} = n - k - 1 = 440 - 3 - 1 = \boxed{436}$

(c) F 檢定：

$$\text{驗算：} F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0.170/3}{0.830/436} = \frac{0.0567}{0.00190} = 29.8 \checkmark$$

臨界值： $F_{0.05,3,436} \approx 2.63$

決策： $29.80 > 2.63$ ，拒絕 H_0 。模型整體顯著。

例題 7.2. $n = 100$ ， $k = 4$ ， $R^2 = 0.36$ 。

解答. $F = \frac{0.36/4}{0.64/95} = \frac{0.09}{0.00674} = 13.35$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{99}{95}(0.64) = 1 - 0.667 = 0.333$$

例題 7.3. Y 對 X 迴歸得 $\hat{Y} = 2 + 0.5X$ ， $R^2 = 0.64$ 。求 X 對 Y 迴歸的斜率。

解答. $r^2 = R^2 = 0.64$ ， $\hat{\beta}_1 = 0.5 > 0$ ，故 $r = 0.8$ 。

由 $\hat{\beta}_1 \cdot \hat{\gamma}_1 = r^2$ ： $\hat{\gamma}_1 = 0.64/0.5 = 1.28$

8 習題

習題 8.1. 已知 $SST = 100$ ， $SSE = 36$ ， $n = 12$ ， $k = 1$ 。求 R^2 、 \bar{R}^2 、 F 。

解答. $R^2 = 1 - 36/100 = 0.64$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{11}{10}(0.36) = 1 - 0.396 = 0.604$$

$$F = \frac{0.64/1}{0.36/10} = \frac{0.64}{0.036} = 17.78$$

習題 8.2. 迴歸輸出： $n = 200$ ， $k = 3$ ， $R^2 = 0.72$ ，截距 $\hat{\beta}_0 = 7.19$ ， $SE(\hat{\beta}_0) = 1.09$ 。

(a) 計算 \bar{R}^2

(b) 計算截距的 t 值

(c) 在 $\alpha = 0.05$ 下檢定整體模型顯著性

解答. (a) $\bar{R}^2 = 1 - \frac{199}{196}(0.28) = 1 - 0.284 = 0.716$

(b) $t = 7.19/1.09 = 6.59$

(c) $F = \frac{0.72/3}{0.28/196} = \frac{0.24}{0.00143} = 168$

$F_{0.05,3,196} \approx 2.65$ 。 $168 > 2.65$ ，拒絕 H_0 ，模型整體顯著。