統計學講義

第四部分：點估計與區間估計

參考書籍

Jeffrey S. Rosenthal, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*, 2nd Edition
Chapter 7: Estimation

https://utstat.utoronto.ca/mikevans/jeffrosenthal/

1 點估計的基本概念

1.1 估計量與估計值

定義 1.1 (估計量與估計值).

- **估計量**（estimator）：用樣本 $X_1, \ldots, X_n$ 計算的統計量，用來估計未知母體參數 θ，記為 $\hat{\theta}$ 或 $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$。
- **估計值**（estimate）：將特定樣本觀測值代入估計量後得到的數值。

例題 1.1. 設 $X_1, \ldots, X_n$ 為來自母體（平均數 μ，變異數 σ^2）的隨機樣本。

- $\hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的估計量。
- $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的估計量。
- 若樣本觀測值為 $3, 5, 7, 9, 11$，則 $\hat{\mu} = 7$，$\hat{\sigma}^2 = 10$ 為估計值。

1.2 良好估計量的性質

定義 1.2 (不偏性). 若估計量 $\hat{\theta}$ 滿足

$$\mathsf{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

則稱 $\hat{\theta}$ 為 θ 的**不偏估計量**（unbiased estimator）。

若 $\mathsf{E}[\hat{\theta}] \neq \theta$，則稱 $\hat{\theta}$ 為**有偏估計量**（biased estimator），**偏誤**（bias）定義為：

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \mathsf{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

定理 1.1 (常見的不偏估計量). 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F$，其中 $\mathsf{E}[X_i] = \mu$，$\text{var}(X_i) = \sigma^2$。則：

(i) $\bar{X}$ 是 μ 的不偏估計量：$\mathsf{E}[\bar{X}] = \mu$
(ii) S^2 是 σ^2 的不偏估計量：$\mathsf{E}[S^2] = \sigma^2$

註. 注意：$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的**有偏**估計量：

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

偏誤為 $-\sigma^2/n$，但當 $n \to \infty$ 時偏誤趨近 0（漸近不偏）。

定義 1.3 (有效性). 在所有不偏估計量中，**變異數最小**的估計量稱為**最小變異數不偏估計量**（Minimum Variance Unbiased Estimator, MVUE）或**最佳不偏估計量**。

若 $\hat{\theta}_1$ 與 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的不偏估計量，且 $\text{var}(\hat{\theta}_1) < \text{var}(\hat{\theta}_2)$，則稱 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **更有效**（more efficient）。

相對效率（relative efficiency）：

$$\text{eff}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\text{var}(\hat{\theta}_2)}{\text{var}(\hat{\theta}_1)}$$

定義 1.4 (均方誤差)**.** 估計量 $\hat{\theta}$ 的**均方誤差**（Mean Squared Error, MSE）定義為：

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathsf{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

定理 1.2 (MSE 分解公式)**.**

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + \left[\text{Bias}(\hat{\theta})\right]^2$$

證明. 令 $b = \mathsf{E}[\hat{\theta}] - \theta = \text{Bias}(\hat{\theta})$。

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathsf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\
&= \mathsf{E}[(\hat{\theta} - \mathsf{E}[\hat{\theta}] + \mathsf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\
&= \mathsf{E}[(\hat{\theta} - \mathsf{E}[\hat{\theta}])^2] + 2\mathsf{E}[(\hat{\theta} - \mathsf{E}[\hat{\theta}])](\mathsf{E}[\hat{\theta}] - \theta) + (\mathsf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \\
&= \text{var}(\hat{\theta}) + 2 \cdot 0 \cdot b + b^2 \\
&= \text{var}(\hat{\theta}) + [\text{Bias}(\hat{\theta})]^2
\end{aligned}$$

註. 對於不偏估計量，$\text{Bias} = 0$，故 $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta})$。

定義 1.5 (一致性)**.** 若估計量序列 $\{\hat{\theta}_n\}$ 滿足：對所有 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0$$

則稱 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 的**一致估計量**（consistent estimator），記為 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$。

定理 1.3 (一致性的充分條件)**.** 若 $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$ 且 $\lim_{n\to\infty} \text{var}(\hat{\theta}_n) = 0$，則 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估計量。

證明. 由 Chebyshev 不等式：

$$\mathsf{P}(|\hat{\theta}_n - \mathsf{E}[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \leqslant \frac{\text{var}(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}$$

當 $n \to \infty$，$\text{var}(\hat{\theta}_n) \to 0$，故右邊趨近 0。

又 $\mathsf{E}[\hat{\theta}_n] \to \theta$，故 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$。

例題 1.2. 證明 $\bar{X}$ 是 μ 的一致估計量。

解答. $\mathsf{E}[\bar{X}] = \mu$（不偏）

$\text{var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} \to 0$ 當 $n \to \infty$

由定理 1.4，$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$，故 $\bar{X}$ 是一致估計量。

2　最大概似估計法

2.1　概似函數

定義 2.1 (概似函數). 設 $X_1, \ldots, X_n$ 為來自機率分配 $f(x;\theta)$ 的隨機樣本。**概似函數**（likelihood function）定義為：

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

對數概似函數（log-likelihood function）：

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$$

註. 概似函數是將樣本觀測值視為固定，將 θ 視為變數的函數。它衡量在不同參數值下，觀測到這組樣本的「可能性」。

2.2　最大概似估計量

定義 2.2 (最大概似估計量). 使概似函數 $L(\theta)$（或等價地，對數概似函數 $\ell(\theta)$）達到最大的 θ 值，稱為**最大概似估計量**（Maximum Likelihood Estimator, MLE），記為 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$：

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \arg\max_{\theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta} \ell(\theta)$$

性質 2.1 (求 MLE 的步驟).

1. 寫出概似函數 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$
2. 取對數得 $\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$
3. 對 θ 微分，令 $\dfrac{d\ell}{d\theta} = 0$（或 $\dfrac{\partial \ell}{\partial \theta_j} = 0$ 對所有參數）
4. 解方程得 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$
5. 確認為最大值（檢查二階導數或邊界條件）

例題 2.1 (常態分配的 MLE). 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，求 μ 和 σ^2 的 MLE。

解答. 步驟 1：概似函數

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

步驟 2：對數概似函數

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

步驟 3：對 μ 微分

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \implies \hat{\mu}_{\text{MLE}} = \bar{x}$$

步驟 4：對 σ^2 微分

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

代入 $\hat{\mu} = \bar{x}$：

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

結論：

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

注意：$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}}$ 是有偏的（分母為 n 而非 $n-1$），但為一致估計量。

例題 2.2 (指數分配的 MLE)**.** 設 $X_1,\ldots,X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$，PDF 為 $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$，$x > 0$。求 λ 的 MLE。

解答. 概似函數：

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

對數概似函數：

$$\ell(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

微分：

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}x_i = 0$$

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

驗證最大值：$\dfrac{d^2\ell}{d\lambda^2} = -\dfrac{n}{\lambda^2} < 0$，確認為最大值。

例題 2.3 (Poisson 分配的 MLE)**.** 設 $X_1,\ldots,X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Poisson}(\lambda)$。求 λ 的 MLE。

解答. 概似函數：

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

對數概似函數：

$$\ell(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

微分：

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda} = 0$$

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = \bar{x}$$

例題 2.4 (伯努利分配的 MLE)**.** 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$。求 p 的 MLE。

解答. 概似函數：

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

對數概似函數：

$$\ell(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

微分：

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = 0$$

$$(1-p)\sum x_i = p(n - \sum x_i)$$

$$\sum x_i = np \implies \hat{p}_{\text{MLE}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

即樣本比例 $\hat{p} = \dfrac{\text{成功次數}}{n}$。

2.3 MLE 的性質

定理 2.1 (MLE 的不變性)**.** 若 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ 是 θ 的 MLE，且 g 是一對一函數，則 $g(\hat{\theta}_{\text{MLE}})$ 是 $g(\theta)$ 的 MLE。

例題 2.5. 若 $\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$ 是 σ^2 的 MLE，則 $\hat{\sigma}_{\text{MLE}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}}$ 是 σ 的 MLE。

定理 2.2 (MLE 的漸近性質)**.** 在適當的正則條件下，MLE 具有以下漸近性質：

(i) **一致性**：當樣本數 $n \to \infty$ 時，$\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ 依機率收斂至 θ
(ii) **漸近常態性**：當 n 夠大時，MLE 近似服從常態分配
(iii) **漸近有效性**：MLE 在大樣本下達到最小可能的變異數

說明. 上述「依機率收斂」的嚴格定義需要機率論課程的知識。直觀上，它表示 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ 會越來越接近真實的 θ。

3 區間估計的基本概念

3.1 信賴區間的定義

定義 3.1 (信賴區間)**.** 設 θ 為未知母體參數，$X_1, \ldots, X_n$ 為隨機樣本。若統計量 $L = L(X_1, \ldots, X_n)$ 與 $U = U(X_1, \ldots, X_n)$ 滿足：

$$\mathsf{P}(L \leqslant \theta \leqslant U) = 1 - \alpha$$

則稱隨機區間 $[L, U]$ 為 θ 的 $(1-\alpha) \times 100\%$ **信賴區間**（confidence interval），$1-\alpha$ 稱為**信賴水準**（confidence level）。

註. 信賴區間的正確解釋：

- 信賴區間是**隨機的**——由隨機樣本計算得到。
- 母體參數 θ 是**固定的**（雖然未知）。
- 「95% 信賴區間」的意義：若重複抽樣很多次，每次計算一個信賴區間，則約有 95% 的區間會包含真正的 θ。
- **錯誤解釋**：「θ 有 95% 的機率落在此區間內」——這是錯的，因為 θ 是固定值，不是隨機變數。

3.2 樞紐量

定義 3.2 (樞紐量). **樞紐量**（pivotal quantity）是樣本與參數的函數，其分配不依賴任何未知參數。

例題 3.1. 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知。則

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

是樞紐量，因為其分配（標準常態）不依賴未知參數 μ。

性質 3.1 (用樞紐量建構信賴區間).

1. 找到包含 θ 的樞紐量 Q，其分配已知
2. 找 a 和 b 使得 $\mathsf{P}(a \leqslant Q \leqslant b) = 1 - \alpha$
3. 將不等式 $a \leqslant Q \leqslant b$ 改寫為 $L \leqslant \theta \leqslant U$ 的形式
4. $[L, U]$ 即為 $(1 - \alpha)$ 信賴區間

4 母體平均數的信賴區間

4.1 σ 已知的情況

定理 4.1 (σ 已知時 μ 的信賴區間). 設 $X_1, \ldots, X_n$ 為來自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，σ^2 已知。則 μ 的 $(1 - \alpha) \times 100\%$ 信賴區間為：

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

即 $\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

證明. 樞紐量：$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

由標準常態分配的對稱性：

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

將中間的不等式改寫：

$$-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_{\alpha/2}$$

$$-z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X} - \mu \leqslant z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

定義 4.1 (誤差界限). 信賴區間的**誤差界限**（margin of error）或**半寬**：

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

信賴區間可寫為 $\bar{X} \pm E$。

例題 4.1. 某工廠生產的電池壽命服從常態分配，已知標準差 $\sigma = 10$ 小時。隨機抽取 25 顆電池，測得平均壽命 $\bar{x} = 48$ 小時。求 μ 的 95% 信賴區間。

解答. $n = 25$，$\bar{x} = 48$，$\sigma = 10$，$\alpha = 0.05$，$z_{0.025} = 1.96$

誤差界限：$E = 1.96 \times \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 1.96 \times 2 = 3.92$

95% 信賴區間：$48 \pm 3.92 = (44.08, 51.92)$

解釋：我們有 95% 的信心認為母體平均壽命介於 44.08 到 51.92 小時之間。

4.2 σ 未知的情況

定理 4.2 (σ 未知時 μ 的信賴區間)**.** 設 $X_1, \ldots, X_n$ 為來自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，σ^2 未知。則 μ 的 $(1-\alpha) \times 100\%$ 信賴區間為：

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

其中 $t_{\alpha/2,n-1}$ 是自由度為 $n-1$ 的 t 分配的上 $\alpha/2$ 分位數。

證明. 樞紐量：$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

由 t 分配的對稱性：

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leqslant t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

改寫不等式：

$$\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

例題 4.2. 隨機抽取 16 名學生，測得其統計學成績平均為 72 分，樣本標準差為 8 分。假設成績服從常態分配，求母體平均成績的 95% 信賴區間。

解答. $n = 16$，$\bar{x} = 72$，$s = 8$，$\alpha = 0.05$

自由度 $df = 16 - 1 = 15$，查表 $t_{0.025,15} = 2.131$

95% 信賴區間：

$$72 \pm 2.131 \times \frac{8}{\sqrt{16}} = 72 \pm 2.131 \times 2 = 72 \pm 4.262$$

即 $(67.74, 76.26)$

信賴水準	90%	95%	99%
α	0.10	0.05	0.01
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.96	2.576

表 1: 常用的 $z_{\alpha/2}$ 值

4.3 大樣本情況

定理 4.3 (大樣本時 μ 的近似信賴區間)**.** 當樣本量 n 足夠大時（通常 $n \geqslant 30$），無論母體分配為何，μ 的 $(1-\alpha)$ 近似信賴區間為：

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

證明. 由中央極限定理，當 n 大時 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0, 1)$。

5 母體變異數的信賴區間

定理 5.1 (σ^2 的信賴區間). 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$。則 σ^2 的 $(1-\alpha) \times 100\%$ 信賴區間為：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \right)$$

其中 $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ 和 $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ 分別是 χ^2_{n-1} 分配的上 $\alpha/2$ 和上 $1-\alpha/2$ 分位數。

證明. 樞紐量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{\alpha/2,n-1} \right) = 1 - \alpha$$

注意 χ^2 分配不對稱，故 $\chi^2_{1-\alpha/2} < \chi^2_{\alpha/2}$。

改寫不等式（取倒數時不等號方向改變）：

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

例題 5.1. 設 $n = 20$，$s^2 = 25$。求 σ^2 的 95% 信賴區間。

解答. $n = 20$，$df = 19$，$\alpha = 0.05$

查表：$\chi^2_{0.025,19} = 32.85$，$\chi^2_{0.975,19} = 8.91$

95% 信賴區間：

$$\left(\frac{19 \times 25}{32.85}, \frac{19 \times 25}{8.91} \right) = \left(\frac{475}{32.85}, \frac{475}{8.91} \right) = (14.46, 53.31)$$

σ 的 95% 信賴區間：$(\sqrt{14.46}, \sqrt{53.31}) = (3.80, 7.30)$

6 母體比例的信賴區間

定理 6.1 (母體比例的信賴區間). 設 X 為 n 次獨立伯努利試驗中成功的次數，$X \sim B(n, p)$。樣本比例 $\hat{p} = X/n$。當 n 夠大（$n\hat{p} \geqslant 5$ 且 $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$）時，p 的 $(1-\alpha)$ 近似信賴區間為：

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

證明. 由中央極限定理，當 n 大時：

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0, 1)$$

用 $\hat{p}$ 估計 p：

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0, 1)$$

故：

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leqslant z_{\alpha/2} \right) \approx 1 - \alpha$$

改寫得信賴區間。

例題 6.1. 某民調隨機抽取 400 位選民，其中 220 人支持某候選人。求支持率的 95% 信賴區間。

解答. $n = 400$，$x = 220$，$\hat{p} = 220/400 = 0.55$

檢驗條件：$n\hat{p} = 220 \geqslant 5$，$n(1-\hat{p}) = 180 \geqslant 5$ ✓

標準誤：$\sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{400}} = \sqrt{\frac{0.2475}{400}} = 0.0249$

95% 信賴區間：$0.55 \pm 1.96 \times 0.0249 = 0.55 \pm 0.049$

即 $(0.501, 0.599)$ 或約 $(50.1\%, 59.9\%)$

7 兩母體的信賴區間

7.1 兩母體平均數差的信賴區間

定理 7.1 (獨立樣本，σ_1^2、σ_2^2 已知)**.** 設兩獨立樣本 $X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$。則 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間為：

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

定理 7.2 (獨立樣本，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知（合併變異數）)**.** 若假設 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（未知），則使用**合併樣本變異數**：

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間為：

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

證明. 樞紐量：

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

由此推導信賴區間。

例題 7.1. 兩組獨立樣本：第一組 $n_1 = 10$，$\bar{x}_1 = 85$，$s_1^2 = 16$；第二組 $n_2 = 12$，$\bar{x}_2 = 78$，$s_2^2 = 20$。假設兩母體變異數相等，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 信賴區間。

解答. 合併變異數：

$$S_p^2 = \frac{(10-1)(16) + (12-1)(20)}{10 + 12 - 2} = \frac{144 + 220}{20} = \frac{364}{20} = 18.2$$

$S_p = \sqrt{18.2} = 4.266$

自由度 $df = 10 + 12 - 2 = 20$，$t_{0.025,20} = 2.086$

標準誤：$S_p\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 4.266 \times \sqrt{0.1 + 0.0833} = 4.266 \times 0.428 = 1.826$

95% 信賴區間：

$$(85-78) \pm 2.086 \times 1.826 = 7 \pm 3.81$$

即 $(3.19, 10.81)$

由於區間不包含 0，可認為兩母體平均數有顯著差異。

7.2 兩母體比例差的信賴區間

定理 7.3 (兩母體比例差的信賴區間)**.** 設兩獨立樣本的樣本比例為 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$，樣本量分別為 n_1 和 n_2。當樣本量夠大時，$p_1 - p_2$ 的 $(1-\alpha)$ 近似信賴區間為：

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

8 樣本大小的決定

8.1 估計平均數所需的樣本量

定理 8.1 (估計 μ 所需的樣本量)**.** 若要使誤差界限不超過 E，即 $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant E$，則所需樣本量為：

$$n \geqslant \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

證明. 由 $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant E$：

$$\sqrt{n} \geqslant \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \implies n \geqslant \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

例題 8.1. 已知 $\sigma = 10$。若要以 95% 信心水準估計 μ，且誤差界限不超過 2，需要多少樣本？

解答. $z_{0.025} = 1.96$，$\sigma = 10$，$E = 2$

$$n \geqslant \left(\frac{1.96 \times 10}{2}\right)^2 = (9.8)^2 = 96.04$$

故至少需要 $n = 97$ 個樣本。

8.2 估計比例所需的樣本量

定理 8.2 (估計 p 所需的樣本量)**.** 若要使誤差界限不超過 E，則所需樣本量為：

$$n \geqslant \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p(1-p)$$

若 p 未知，使用**保守估計** $p = 0.5$（使 $p(1-p)$ 最大）：

$$n \geqslant \frac{(z_{\alpha/2})^2}{4E^2}$$

證明. $p(1-p)$ 在 $p = 0.5$ 時達到最大值 0.25。使用此值可確保無論真實 p 為何，所需樣本量都足夠。

例題 8.2. 某金融公司想調查顧客對新產品的偏好比例。若要以 95% 信心水準，使誤差界限不超過 3%，需要多少樣本？

解答. $z_{0.025} = 1.96$，$E = 0.03$

使用保守估計 $p = 0.5$：

$$n \geqslant \frac{(1.96)^2}{4 \times (0.03)^2} = \frac{3.8416}{0.0036} = 1067.1$$

故至少需要 $n = 1068$ 個樣本。

若有先驗資訊：若預估 $p \approx 0.3$，則：

$$n \geqslant \frac{(1.96)^2 \times 0.3 \times 0.7}{(0.03)^2} = \frac{3.8416 \times 0.21}{0.0009} = 896.4$$

需要 897 個樣本（較少）。

9 本章習題

習題 9.1. 設 $Y_1, \ldots, Y_T$ 為 i.i.d. 樣本，$\mathsf{E}[Y_i] = \mu$，$\mathrm{var}(Y_i) = \sigma^2$。令 $m = \frac{\sum g(i) Y_i}{\sum g(i)}$，其中 $g(i) = 1 + (i \bmod 5)$，T 為 5 的倍數。

(a) 證明 m 為 μ 的不偏估計量。

(b) 求 $\mathrm{var}(m)$ 並與 $\mathrm{var}(\bar{Y})$ 比較。

解答. (a) $g(i)$ 以週期 5 循環，取值 $\{2, 3, 4, 5, 1\}$，每週期和為 15。設 $T = 5N$，則 $\sum g(i) = 15N = 3T$。
$\mathsf{E}[m] = \frac{1}{3T} \sum g(i) \mathsf{E}[Y_i] = \frac{\mu}{3T} \cdot 3T = \mu$ ✓

(b) 每週期平方和 $= 4 + 9 + 16 + 25 + 1 = 55$，$\sum [g(i)]^2 = 55N = 11T$。

$\mathrm{var}(m) = \frac{\sigma^2}{9T^2} \cdot 11T = \frac{11\sigma^2}{9T}$

$\mathrm{var}(\bar{Y}) = \sigma^2 / T$

$\mathrm{var}(m) / \mathrm{var}(\bar{Y}) = 11/9 \approx 1.22 > 1$

m 效率較低，因為非等權重平均。

習題 9.2. 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Uniform}(0, \theta)$，PDF 為 $f(x; \theta) = 1/\theta$，$0 < x < \theta$。求 θ 的 MLE。

解答. 概似函數：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot \mathbf{1}_{(0 < x_i < \theta)} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbf{1}_{(\theta > \max_i x_i)}$$

對於 $\theta \geqslant \max_i x_i$，$L(\theta) = 1/\theta^n$ 是 θ 的遞減函數。

因此 $L(\theta)$ 在 $\theta = \max_i x_i$ 時達到最大。

$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

習題 9.3. 設 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$。考慮 σ^2 的兩個估計量：

- $\hat{\sigma}_1^2 = S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$
- $\hat{\sigma}_2^2 = \dfrac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$

(a) 證明 $\hat{\sigma}_1^2$ 是不偏的，$\hat{\sigma}_2^2$ 是有偏的
(b) 求 $\hat{\sigma}_2^2$ 的偏誤

解答. (a) 由第三部分已證 $\mathsf{E}[S^2] = \sigma^2$，故 $\hat{\sigma}_1^2$ 不偏。
$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{n-1}{n}S^2$，故：

$$\mathsf{E}[\hat{\sigma}_2^2] = \frac{n-1}{n}\mathsf{E}[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

故 $\hat{\sigma}_2^2$ 有偏。

(b) $\text{Bias}(\hat{\sigma}_2^2) = \mathsf{E}[\hat{\sigma}_2^2] - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$

習題 9.4. 某廠商宣稱其產品平均重量為 500 克。品管人員隨機抽取 25 件產品，測得平均重量 496 克，樣本標準差 10 克。假設重量服從常態分配。

(a) 求母體平均重量的 95% 信賴區間
(b) 根據信賴區間，廠商的宣稱是否可信？

解答. $n = 25$，$\bar{x} = 496$，$s = 10$

(a) σ 未知，使用 t 分配。$df = 24$，$t_{0.025,24} = 2.064$
95% 信賴區間：

$$496 \pm 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 496 \pm 2.064 \times 2 = 496 \pm 4.13$$

即 $(491.87, 500.13)$

(b) 500 落在信賴區間內，故在 95% 信心水準下，廠商的宣稱可信。

習題 9.5. 比較兩種教學法的效果。A 法：$n_1 = 15$，$\bar{x}_1 = 78$，$s_1 = 8$；B 法：$n_2 = 18$，$\bar{x}_2 = 72$，$s_2 = 10$。假設成績服從常態分配且變異數相等。求 $\mu_A - \mu_B$ 的 95% 信賴區間。

解答. 合併變異數：

$$S_p^2 = \frac{14 \times 64 + 17 \times 100}{15 + 18 - 2} = \frac{896 + 1700}{31} = \frac{2596}{31} = 83.74$$

$S_p = 9.15$

$df = 31$，$t_{0.025,31} \approx 2.04$

標準誤：$9.15 \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{18}} = 9.15 \times \sqrt{0.1222} = 9.15 \times 0.350 = 3.20$

95% 信賴區間：

$$(78 - 72) \pm 2.04 \times 3.20 = 6 \pm 6.53$$

即 $(-0.53, 12.53)$

區間包含 0，故在 95% 信心水準下，無法斷定兩種教學法有顯著差異。

習題 9.6. 某研究者想估計大學生每天使用手機的平均時間。預估標準差約為 1.5 小時。若要以 99% 信心水準，使誤差界限不超過 0.5 小時，需要多少樣本？

解答. $z_{0.005} = 2.576$，$\sigma = 1.5$，$E = 0.5$

$$n \geqslant \left(\frac{2.576 \times 1.5}{0.5}\right)^2 = \left(\frac{3.864}{0.5}\right)^2 = (7.728)^2 = 59.72$$

故至少需要 60 個樣本。