

統計學講義

第一部分：機率基礎

參考書籍

Jeffrey S. Rosenthal, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*, 2nd Edition
Chapter 2: Probability

<https://utstat.utoronto.ca/mikevans/jeffrosenthal/>

1 機率公理與基本定義

機率論是統計學的數學基礎。本節介紹機率的嚴格數學定義與基本性質。

1.1 樣本空間與事件

定義 1.1 (樣本空間). 樣本空間 (Sample Space)，記為 Ω ，是一次隨機實驗所有可能結果的集合。樣本空間中的每個元素稱為樣本點 (sample point)。

例題 1.1. 不同隨機實驗的樣本空間：

- (a) 擲一枚公正硬幣： $\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}$ 或簡記為 $\Omega = \{H, T\}$
- (b) 擲一顆公正骰子： $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (c) 測量燈泡壽命： $\Omega = [0, \infty)$ (連續樣本空間)
- (d) 計算某日顧客人數： $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

定義 1.2 (事件). 事件 (Event) 是樣本空間 Ω 的子集合。若隨機實驗的結果落在事件 A 中，我們說「事件 A 發生了」。

例題 1.2. 擲骰子的事件：

- $A = \{2, 4, 6\}$ ：「擲出偶數」
- $B = \{1, 2, 3\}$ ：「擲出小於 4 的數」
- $A \cap B = \{2\}$ ：「擲出偶數且小於 4」
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ：「擲出偶數或小於 4」
- $A^c = \{1, 3, 5\}$ ：「擲出奇數」 (A 的補集)

定義 1.3 (事件的集合運算). 設 A 和 B 為樣本空間 Ω 的兩個事件：

- 聯集： $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$
- 交集： $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$
- 補集： $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
- 差集： $A \setminus B = A \cap B^c = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$

定義 1.4 (互斥事件). 若 $A \cap B = \emptyset$ (空集合)，則稱事件 A 與 B 互斥 (mutually exclusive) 或不相交 (disjoint)。

1.2 機率公理

定義 1.5 (Kolmogorov 機率公理). 機率是一個從事件到實數的函數 P ，滿足以下三條公理：

- (i) 非負性：對任意事件 A ， $P(A) \geq 0$
- (ii) 規範性： $P(\Omega) = 1$

(iii) **可加性**：若 A_1, A_2, A_3, \dots 為兩兩互斥的事件（即 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 當 $i \neq j$ ），則

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

註。這三條公理是機率論的基石。所有機率的性質都可由這三條公理推導出來。

1.3 機率的基本性質

由機率公理可推導出以下基本性質：

定理 1.1 (機率的基本性質). 設 A 和 B 為任意事件，則：

- (a) $P(\emptyset) = 0$
- (b) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- (c) 若 $A \subseteq B$ ，則 $P(A) \leq P(B)$
- (d) $0 \leq P(A) \leq 1$
- (e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (加法法則)

證明. 我們證明其中幾個重要性質：

(a) **證明** $P(\emptyset) = 0$ ：

令 $A_1 = \Omega$ ， $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ 。由於這些事件兩兩互斥，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ ，由公理 (iii)：

$$P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

由公理 (ii)， $P(\Omega) = 1$ 。若 $P(\emptyset) > 0$ ，則右式為無窮大，矛盾。故 $P(\emptyset) = 0$ 。

(b) **證明** $P(A^c) = 1 - P(A)$ ：

由於 A 與 A^c 互斥且 $A \cup A^c = \Omega$ ，由公理 (ii) 和 (iii)：

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

移項得 $P(A^c) = 1 - P(A)$ 。

(e) **證明加法法則**：

將 $A \cup B$ 分解為三個互斥部分：

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

因此：

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

同時， $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ ，故 $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$ 。

類似地， $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$ 。

將以上兩式相加：

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + 2P(A \cap B)$$

因此：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

推論 1.1 (排容原理). 對於三個事件 A 、 B 、 C ：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

例題 1.3. 一副 52 張撲克牌中隨機抽取一張。設事件 $A = \text{「抽到紅心」}$ ， $B = \text{「抽到人頭牌 (J, Q, K)」}$ 。求 $\mathbb{P}(A \cup B)$ 。

解答.

- $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (紅心有 13 張)
- $\mathbb{P}(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ (人頭牌每種花色 3 張，共 12 張)
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{52}$ (紅心的人頭牌有 3 張)

由加法法則：

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$$

2 條件機率與獨立性

2.1 條件機率的定義

在許多情況下，我們想知道「在某事件已發生的條件下，另一事件發生的機率」。

定義 2.1 (條件機率). 設 A 和 B 為兩事件，且 $\mathbb{P}(B) > 0$ 。在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的**條件機率** (conditional probability) 定義為：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

註. 直觀理解：條件機率 $\mathbb{P}(A|B)$ 是「在 B 已發生的前提下， A 也發生」的機率。分母 $\mathbb{P}(B)$ 將樣本空間「縮小」到 B ，分子 $\mathbb{P}(A \cap B)$ 則是 A 與 B 同時發生的部分。

例題 2.1. 擲兩顆公正骰子。設 $A = \text{「兩骰子點數和為 } 8\text{」}$ ， $B = \text{「第一顆骰子為 } 3\text{」}$ 。求 $\mathbb{P}(A|B)$ 。

解答. 樣本空間共有 $6 \times 6 = 36$ 個等機率的樣本點。

- $B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ ，故 $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $A \cap B = \{(3, 5)\}$ (第一顆為 3，和為 8，故第二顆為 5)，故 $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$

因此：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

驗證：在 B 發生的條件下 (第一顆為 3)，樣本空間縮小為 6 個點。其中只有 $(3, 5)$ 使和為 8，故條件機率為 $1/6$ 。

2.2 乘法法則

定理 2.1 (乘法法則). 由條件機率的定義可立即得到：

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

推廣到多個事件：

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

例題 2.2. 袋中有 5 顆紅球和 3 顆白球。不放回地連續抽取兩球。求兩球都是紅球的機率。

解答. 設 $A_1 = \text{「第一球為紅」}$, $A_2 = \text{「第二球為紅」}$ 。

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

說明：第一球為紅的機率是 $5/8$ 。若第一球為紅，剩下 7 球中有 4 顆紅球，故條件機率為 $4/7$ 。

2.3 事件的獨立性

定義 2.2 (獨立事件). 若事件 A 和 B 滿足

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

則稱 A 與 B (統計) 獨立 (independent)。

命題 2.1. 若 $\mathbb{P}(B) > 0$ ，則 A 與 B 獨立等價於

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

證明. 由條件機率定義：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

若 A 與 B 獨立，則 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ ，故：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

反之亦然。

註. 獨立性的直觀意義： B 的發生與否不影響 A 發生的機率。這是機率論中極為重要的概念。

例題 2.3. 擲一顆公正骰子。設 $A = \text{「點數為偶數」}$, $B = \text{「點數小於 4」}$ 。判斷 A 與 B 是否獨立。

解答.

- $A = \{2, 4, 6\}$, $\mathbb{P}(A) = 3/6 = 1/2$
- $B = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(B) = 3/6 = 1/2$
- $A \cap B = \{2\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$

檢驗： $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap B)$

因此 A 與 B 不獨立。

定理 2.2 (獨立性的等價條件). 若 A 與 B 獨立，則以下各對事件也獨立：

- A 與 B^c
- A^c 與 B
- A^c 與 B^c

證明. 證明 (a) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (\text{因 } A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ 且互斥}) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad (\text{因 } A \text{ 與 } B \text{ 獨立}) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

故 A 與 B^c 獨立。(b) 和 (c) 的證明類似。

定義 2.3 (多事件的獨立性). 事件 A_1, A_2, \dots, A_n 稱為**相互獨立** (mutually independent)，若對任意 $k \geq 2$ 個事件的子集 $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$ ，都有：

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

註. 注意：兩兩獨立 (pairwise independent) 不蘊含相互獨立 (mutually independent)。相互獨立的條件更強。

3 貝氏定理與全機率定理

3.1 樣本空間的分割

定義 3.1 (分割). 若事件 B_1, B_2, \dots, B_n 滿足：

- (i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ 當 $i \neq j$ (兩兩互斥)
- (ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ (覆蓋整個樣本空間)
- (iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ 對所有 i

則稱 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 為樣本空間 Ω 的一個**分割** (partition)。

3.2 全機率定理

定理 3.1 (全機率定理 (Law of Total Probability)). 設 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 為樣本空間的一個分割， A 為任意事件。則：

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

證明. 由於 $\{B_1, \dots, B_n\}$ 為分割，任何事件 A 可分解為：

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

因 B_i 兩兩互斥， $(A \cap B_i)$ 也兩兩互斥。由機率公理 (iii)：

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

例題 3.1. 某工廠有三條生產線，產量分別佔總產量的 20%、30%、50%。各生產線的不良率分別為 5%、3%、1%。隨機抽取一件產品，求其為不良品的機率。

解答. 設 B_1, B_2, B_3 分別表示產品來自生產線 1、2、3， A 表示產品為不良品。

已知：

- $\mathbb{P}(B_1) = 0.20$ ， $\mathbb{P}(B_2) = 0.30$ ， $\mathbb{P}(B_3) = 0.50$

- $P(A|B_1) = 0.05$, $P(A|B_2) = 0.03$, $P(A|B_3) = 0.01$

由全機率定理：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.05 \times 0.20 + 0.03 \times 0.30 + 0.01 \times 0.50 \\ &= 0.010 + 0.009 + 0.005 \\ &= 0.024 \end{aligned}$$

故隨機抽取的產品為不良品的機率為 2.4%。

3.3 貝氏定理

定理 3.2 (貝氏定理 (Bayes' Theorem)). 設 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 為樣本空間的一個分割， A 為任意事件且 $P(A) > 0$ 。則對任意 $j = 1, 2, \dots, n$ ：

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)}$$

證明. 由條件機率定義：

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)}$$

再由全機率定理將 $P(A)$ 展開即得。

說明 (貝氏定理術語).

- $P(B_j)$ ：先驗機率 (prior probability) ——在觀察到 A 之前，對 B_j 的機率判斷
- $P(B_j|A)$ ：後驗機率 (posterior probability) ——在觀察到 A 之後，對 B_j 的更新機率
- $P(A|B_j)$ ：似然 (likelihood) ——在 B_j 條件下觀察到 A 的機率

貝氏定理描述了「如何根據新證據更新我們的信念」。

例題 3.2 (續上例). 若隨機抽取的產品為不良品，求其來自生產線 1 的機率。

解答. 由貝氏定理：

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \times 0.20}{0.024} = \frac{0.010}{0.024} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

雖然生產線 1 只佔總產量的 20%，但因其不良率較高 (5%)，在已知產品為不良品的條件下，它來自生產線 1 的機率提高到約 41.7%。

例題 3.3. 參加多選題考試，每題有 c 個選項。你知道答案的機率為 p ；若不知道答案則隨機猜測。已知你答對了某題，求你真正知道答案的機率。

解答. 設事件：

- K = 知道答案
- C = 答對

已知條件：

- $P(K) = p$, $P(K^c) = 1 - p$
- $P(C|K) = 1$ (若知道答案，必答對)
- $P(C|K^c) = \frac{1}{c}$ (不知道答案，隨機猜中的機率)

求 $P(K|C)$ 。

步驟 1：由全機率定理求 $P(C)$ ：

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|K) \cdot P(K) + P(C|K^c) \cdot P(K^c) \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{c} \cdot (1 - p) \\ &= p + \frac{1 - p}{c} = \frac{cp + 1 - p}{c} = \frac{1 + p(c - 1)}{c} \end{aligned}$$

步驟 2：由貝氏定理求 $P(K|C)$ ：

$$P(K|C) = \frac{P(C|K) \cdot P(K)}{P(C)} = \frac{\frac{1 \cdot p}{c}}{\frac{1 + p(c - 1)}{c}} = \frac{cp}{1 + p(c - 1)}$$

驗證（特殊情形）：

- 若 $p = 1$ (總是知道答案) : $P(K|C) = \frac{c}{c} = 1 \checkmark$
- 若 $p = 0$ (完全不知道) : $P(K|C) = \frac{0}{1} = 0 \checkmark$
- 若 $c \rightarrow \infty$ (選項很多) : $P(K|C) \rightarrow 1$ (答對很可能是真知道) \checkmark

4 聯合機率與邊際機率

4.1 聯合機率

定義 4.1 (聯合機率). 對於兩個事件 A 和 B ，它們同時發生的機率 $P(A \cap B)$ 稱為 A 與 B 的**聯合機率** (joint probability)。

當處理兩個或多個隨機變數時，我們常用**聯合機率表**來呈現資料。

例題 4.1. 超市根據 86,214 次購物記錄，統計顧客養貓數量與購買貓糧數量的聯合機率（部分數據）：

	無貓	1 隻貓	2 隻貓	3 隻貓	3 隻以上
無購買貓糧	0.0487	0.0217	0.0025	0.0002	0
1–3 件	0.1698	0.0734	0.0104	0.0004	0.0002
4–6 件	0.1182	0.0516	0.0093	0.0006	0.0002
7–12 件	0.1160	0.0469	0.0113	0.0012	0.0005
12 件以上	0.2103	0.0818	0.0216	0.0021	0.0011

表格中每個數值代表「養特定數量貓」且「購買特定數量貓糧」的機率。所有格子的機率加總應等於 1。

4.2 邊際機率

定義 4.2 (邊際機率). 對於聯合機率表，將某一行或某一列的機率加總，所得的機率稱為**邊際機率** (marginal probability)。

例題 4.2 (續上例). 求「無養貓」的邊際機率。

解答. 將「無貓」那一行的所有機率加總：

$$\begin{aligned} P(\text{無貓}) &= 0.0487 + 0.1698 + 0.1182 + 0.1160 + 0.2103 \\ &= 0.6630 \end{aligned}$$

4.3 聯合機率表與獨立性

命題 4.1. 兩個類別變數 X 與 Y 獨立，若且唯若對所有可能的值 x 與 y ：

$$\text{P}(X = x, Y = y) = \text{P}(X = x) \cdot \text{P}(Y = y)$$

即聯合機率等於兩個邊際機率的乘積。

例題 4.3. 檢驗上例中「養貓數量」與「購買貓糧數量」是否獨立。

解答. 從上例計算：

- $\text{P}(\text{無貓}) = 0.6630$
- $\text{P}(3 \text{ 隻以上貓}) = 0 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0020$
- $\text{P}(\text{無購買貓糧}) = 0.0487 + 0.0217 + 0.0025 + 0.0002 + 0 = 0.0731$

若獨立，應有：

$$\text{P}(\text{無貓, 無購買貓糧}) = \text{P}(\text{無貓}) \times \text{P}(\text{無購買貓糧}) = 0.6630 \times 0.0731 = 0.0485$$

但實際觀察值為 $0.0487 \approx 0.0485$ ，非常接近。

再檢驗另一組：

$$\text{P}(3 \text{ 隻以上貓, 12 件以上}) = 0.0011$$

若獨立： $\text{P}(3 \text{ 隻以上貓}) \times \text{P}(12 \text{ 件以上}) = ?$

$$\text{需先算 } \text{P}(12 \text{ 件以上}) = 0.2103 + 0.0818 + 0.0216 + 0.0021 + 0.0011 = 0.3169$$

$$\text{若獨立} : 0.0020 \times 0.3169 = 0.00063$$

但實際值為 0.0011 ，差距較大。

結論：養貓數量與購買貓糧數量不獨立（直覺上也合理：養越多貓，越可能購買更多貓糧）。

4.4 由聯合機率計算條件機率

例題 4.4. 利用上述購物資料，求「在養 3 隻以上貓的條件下，購買超過 3 件貓糧」的條件機率。

解答. 設 $A = \text{「購買超過 3 件貓糧」}$ （即 4–6 件、7–12 件、或 12 件以上）

設 $B = \text{「養 3 隻以上貓」}$

先計算邊際機率：

$$\text{P}(B) = \text{P}(3 \text{ 隻以上貓}) = 0 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0020$$

計算聯合機率：

$$\text{P}(A \cap B) = 0.0002 + 0.0005 + 0.0011 = 0.0018$$

（養 3 隻以上貓且購買 4 件以上貓糧）

條件機率：

$$\text{P}(A|B) = \frac{\text{P}(A \cap B)}{\text{P}(B)} = \frac{0.0018}{0.0020} = 0.90 = 90\%$$

對比「無養貓」的顧客：

$$\text{P}(A|\text{無貓}) = \frac{0.1182 + 0.1160 + 0.2103}{0.6630} = \frac{0.4445}{0.6630} \approx 0.67 = 67\%$$

結論：養 3 隻以上貓的顧客購買超過 3 件貓糧的條件機率（90%）遠高於無養貓的顧客（67%）。這再次說明兩變數不獨立，且呈正相關。

5 本章習題

習題 5.1. 一個袋子裡有 4 顆紅球和 6 顆白球。隨機抽取一球後放回，再抽第二球。

- (a) 求兩球都是紅球的機率。
- (b) 求至少一球是紅球的機率。
- (c) 設 $A = \text{「第一球為紅」}$, $B = \text{「第二球為紅」}$ 。判斷 A 與 B 是否獨立。

解答.

- (a) 由於放回抽樣，每次抽到紅球的機率都是 $4/10 = 2/5$ 。

$$\mathbb{P}(\text{兩球皆紅}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

- (b) 令 $C = \text{「至少一球為紅」}$ 。則 $C^c = \text{「兩球皆白」}$ 。

$$\mathbb{P}(C^c) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

- (c) 由於是放回抽樣：

- $\mathbb{P}(A) = 4/10 = 2/5$
- $\mathbb{P}(B) = 4/10 = 2/5$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = (2/5)(2/5) = 4/25$
- $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = (2/5)(2/5) = 4/25 = \mathbb{P}(A \cap B)$

故 A 與 B 獨立。

習題 5.2. 某疾病在人群中的盛行率為 1%。有一種檢測方法，對於患病者有 99% 的機率呈陽性（敏感度），對於健康者有 95% 的機率呈陰性（特異度）。若某人檢測呈陽性，求其真正患病的機率。

解答. 設 $D = \text{「患病」}$, $T^+ = \text{「檢測陽性」}$ 。

已知：

- $\mathbb{P}(D) = 0.01$, $\mathbb{P}(D^c) = 0.99$
- $\mathbb{P}(T^+|D) = 0.99$ (敏感度)
- $\mathbb{P}(T^-|D^c) = 0.95$, 故 $\mathbb{P}(T^+|D^c) = 0.05$ (偽陽性率)

求 $\mathbb{P}(D|T^+)$ 。

由全機率定理：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T^+) &= \mathbb{P}(T^+|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T^+|D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c) \\ &= 0.99 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99 \\ &= 0.0099 + 0.0495 = 0.0594\end{aligned}$$

由貝氏定理：

$$\mathbb{P}(D|T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0594} = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167$$

結論：即使檢測呈陽性，真正患病的機率只有約 16.7%。這個看似反直覺的結果是因為疾病盛行率很低(1%)，而偽陽性(5%)相對較高。

習題 5.3. 三人 A、B、C 輪流擲硬幣，按 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \dots$ 的順序進行。最先擲出正面者獲勝。假設硬幣為公正硬幣。求三人各自獲勝的機率。

解答. 設 P_A 、 P_B 、 P_C 分別為 A、B、C 獲勝的機率。

A 獲勝的情形：A 第一輪擲出正面，或三人第一輪都擲反面後 A 再獲勝。

$$P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} P_A$$

解得：

$$P_A - \frac{1}{8} P_A = \frac{1}{2} \implies \frac{7}{8} P_A = \frac{1}{2} \implies P_A = \frac{4}{7}$$

B 獲勝的情形：A 擲反面，B 擲正面，或 A、B、C 都擲反面後 B 再獲勝。

$$P_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} P_B = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} P_B$$

解得：

$$\frac{7}{8} P_B = \frac{1}{4} \implies P_B = \frac{2}{7}$$

由 $P_A + P_B + P_C = 1$ ：

$$P_C = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

驗證：先擲的人有優勢， $P_A > P_B > P_C$ ，符合直覺。

習題 5.4. 設 $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.4$ ， $P(A|B) = 0.5$ 。求：

- (a) $P(A \cap B)$
- (b) $P(A \cup B)$
- (c) $P(B|A)$
- (d) 判斷 A 與 B 是否獨立

解答. (a) 由條件機率定義：

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

(b) 由加法法則：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$$

(c) 由條件機率定義：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

(d) 檢驗獨立性：

$$P(A) \cdot P(B) = 0.6 \times 0.4 = 0.24 \neq 0.2 = P(A \cap B)$$

故 A 與 B 不獨立。

另一種檢驗： $P(A|B) = 0.5 \neq 0.6 = P(A)$ ，同樣說明不獨立。