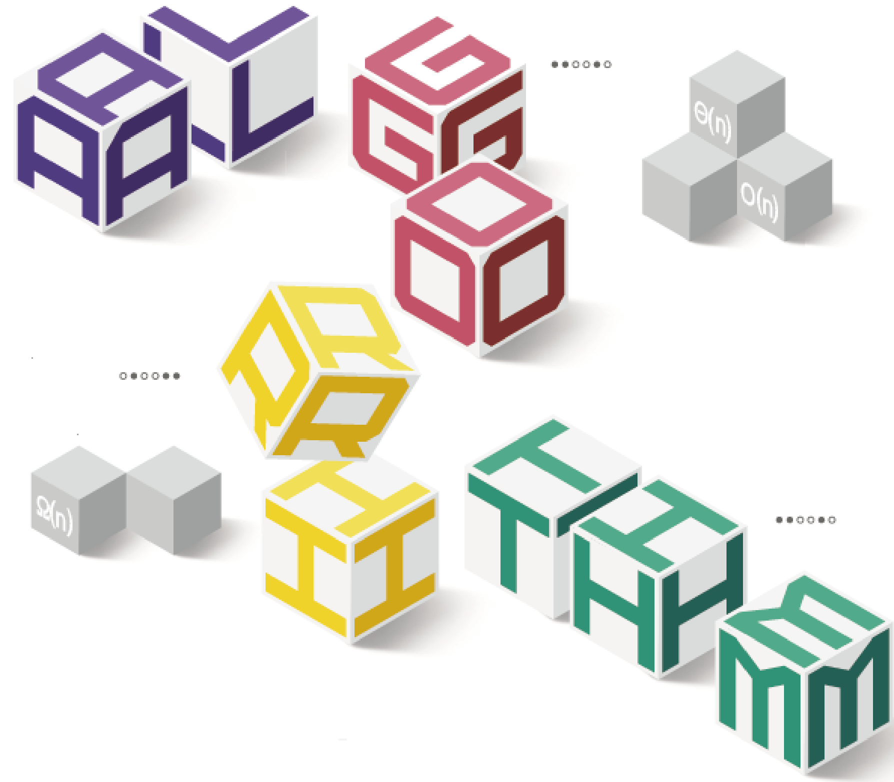


관계 중심의 사고법

쉽게 배우는 알고리즘

13장. NP-완비 NP-Completeness

NP-완비NP-Completeness

나는 그저 NP-완비 이론이 흥미로운 발상이라고만 생각했다.
그것이 지닌 잠재적 영향력은 제대로 인식하지 못했다.

-- 스티븐 쿡

따로는 어떤 일이 불가능하다는 사실이 유용할 때도 있다.

-- 레오나드 레빈

학습목표

- P와 NP를 구별한다.
- Yes/No 문제와 최적화 문제의 차이를 이해한다.
- NP-완비 의미를 이해한다.
- NP-완비 증명 방법을 이해한다.
- NP-완비라는 사실이 판명됨으로써 얻을 수 있는 이득을 이해한다.

문제의 종류

풀 수 없는 문제들

(Unsolvable)

(Undecidable)

정지 문제

힐버트의 10번째 문제

…

여기에 속할 것이라고
강력히 추정!

Presburger 산술

…

NP-완비 문제들

현실적인 시간내에
풀 수 없는 문제들

풀 수 있는 문제들

(Solvable)

(Decidable)

최소 신장 트리 문제

최단 거리 문제

…

현실적인 시간내에
풀 수 있는 문제들

현실적인 시간

- 다항식 시간을 의미
  - 입력의 크기 n의 다항식으로 표시되는 시간
  - 예: $3n^k + 5n^{k-1} + \ldots$
- 비다항식 시간의 예
  - 지수 시간
    - 예: 2^n
  - 계승시간
    - 예: $n!$

Yes/No 문제와 최적화 문제

- Yes/No 문제
  - 예: 그래프 G에서 길이가 k 이하인 해밀토니안 경로가 존재하는가?
- 최적화 문제
  - 예: 그래프 G에서 길이가 가장 짧은 해밀토니안 경로는 얼마인가?

✓ 두 문제는 동전의 앞뒷면

NP-완비 이론

- Yes/No 의 대답을 요구하는 문제에 국한
  - 그렇지만 최적화 문제와 밀접한 관계를 가지고 있다
- 문제를 현실적인 시간에 풀 수 있는가에 관한 이론
- 거대한 군을 이룸
  - 이 중 한 문제만 현실적인 시간에 풀면 다른 모든 것도 저절로 풀리는 논리적 연결관계를 가지고 있다

현재까지의 연구결과

- 어떤 문제가 NP-완비임이 확인되면

⇨ 지금까지의 연구결과로는 이 문제를 현실적인 시간에 풀 수 있는 방법은 아직 없다

- 그렇지만 이 사실이 아직 증명은 되지 않음
- 클레이수학연구소의 21세기 7대 백만불짜리 문제 중의 하나
  - P=NP 문제

NP-완비에 관한 비유

상사가 아주 어려운 문제를 해결하라고 지시했다

(b)

NP-완비 이론의 상황을 비유적으로 보여줌

(c)

다항식 시간 변환

준비

쉽다 = 현실적인 시간에 풀 수 있다

문제1: 정수 $x=x_1x_2\ldots x_n$은 3의 배수인가?

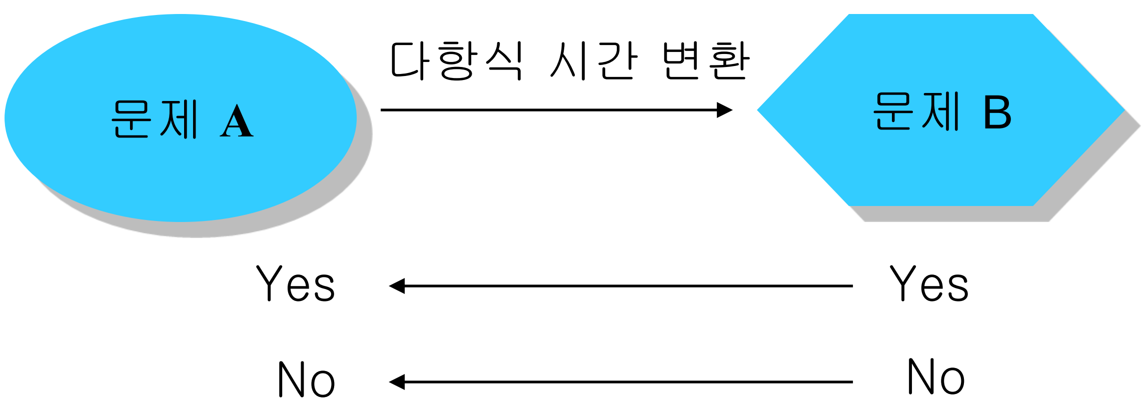
문제2: $x_1+x_2+\ldots+x_n$은 3의 배수인가?

✓ 위 두 문제의 대답은 같다
   - Yes/No 대답이 일치한다

✓ 문제 2가 쉬우면, 문제 1도 쉽다

- 상황
  - 문제 B는 쉽다
  - 문제 A는 Yes/No 대답이 일치하는 문제 B로 쉽게 변형된다

쉽다 = 현실적인 시간에 풀 수 있다



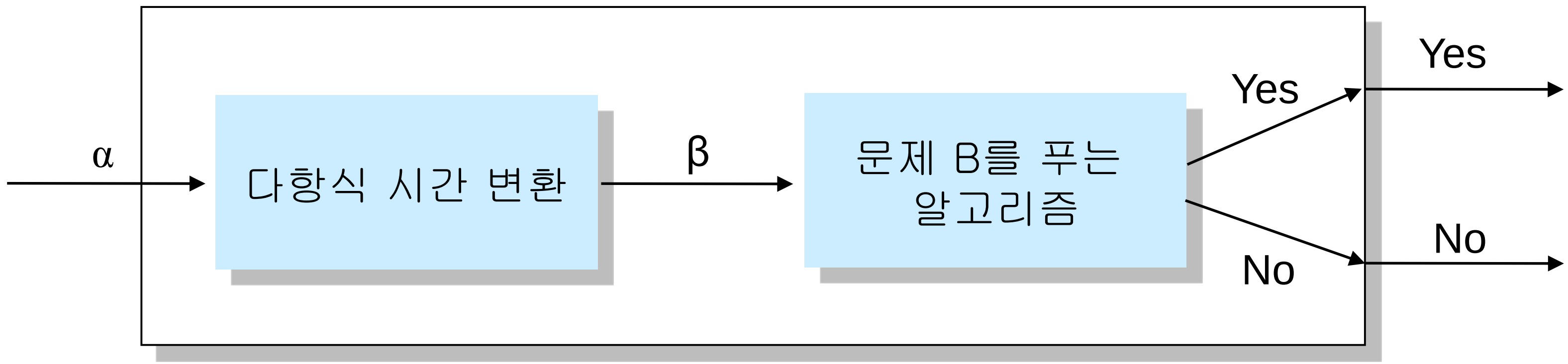
✓ 문제 A도 쉬운가?

다항식 시간 변환

- 문제 A의 사례 α를 문제 B의 사례 β로 바꾸되 아래 성질을 만족하면 다항식 시간 변환이라 하고, 이를 $\alpha \leq_p \beta$ 로 표기한다

① 변환은 다항식 시간에 이루어진다

② 두 사례의 답은 일치한다



문제 A를 푸는 알고리즘

1. 문제 A를 다항식 시간에 문제 B로 변환한다
2. 변환된 문제 B를 푼다
3. 문제 B의 대답이 Yes이면 Yes, No이면 No를 리턴한다

✓ 문제 B가 쉬운 문제라면 문제 A도 쉬운 문제이다

P와 NP

- P
  - Polynomial
  - 다항식 시간에 Yes 또는 No 대답을 할 수 있으면 P
- NP
  - Nondeterministic Polynomial
  - Non-Polynomial의 준말이 아님!
  - Yes 대답이 나오는 해를 제공했을 때,
    이것이 Yes 대답을 내는 해라는 사실을 다항식 시간에
    확인해 줄 수 있으면 NP
- 어떤 문제가 NP임을 보이는 것은 대부분 아주 쉽다
  - NP-완비 증명에서 형식적으로 확인하고 넘어가는 정도

NP-완비/하드

NP : Yes 대답이 나오는 해를 제공하면 이를 다항식 시간에 확인할 수 있으면 됨

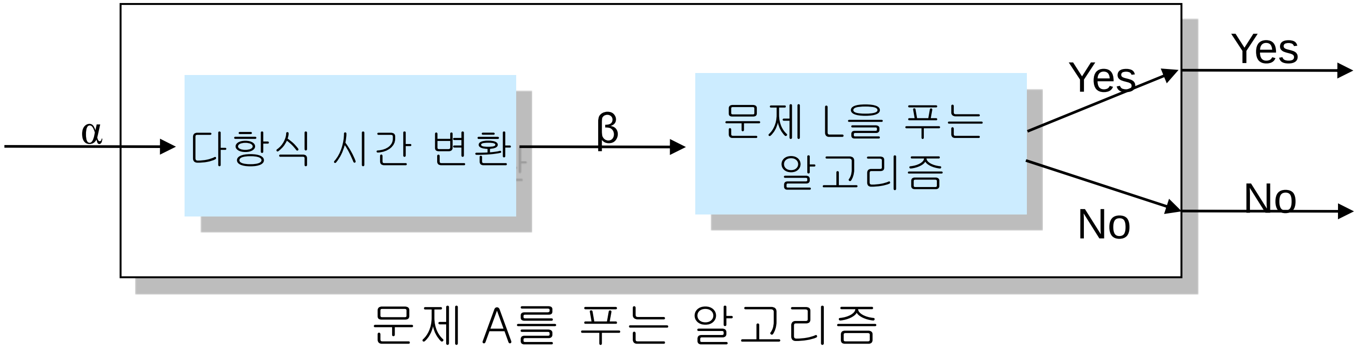
- 다음 성질을 만족하면 문제 L은 NP-하드이다
  - 모든 NP 문제가 L로 다항식 시간에 변환가능하다
- 다음의 두 성질을 만족하면 문제 L은 NP-완비이다
  1) L은 NP이다.
  2) L은 NP-하드이다

✓ NP-완비는 NP-하드의 일부이므로 NP-완비인 문제를 NP-하드라고 불러도 맞다

✓ NP-완비의 성질 1)은 대부분 자명하므로 핵심에 집중하기 위해 NP-하드에 초점을 맞추자

정리 1

- 문제 L이 다음의 성질을 만족해도 NP-하드이다
  - 알려진 임의의 NP- 하드 문제 A로부터 문제 L로 다항식 시간에 변환가능하다



✓ 만일 문제 L을 쉽게 풀 수 있다면, 문제 A도 쉽게 풀 수 있다

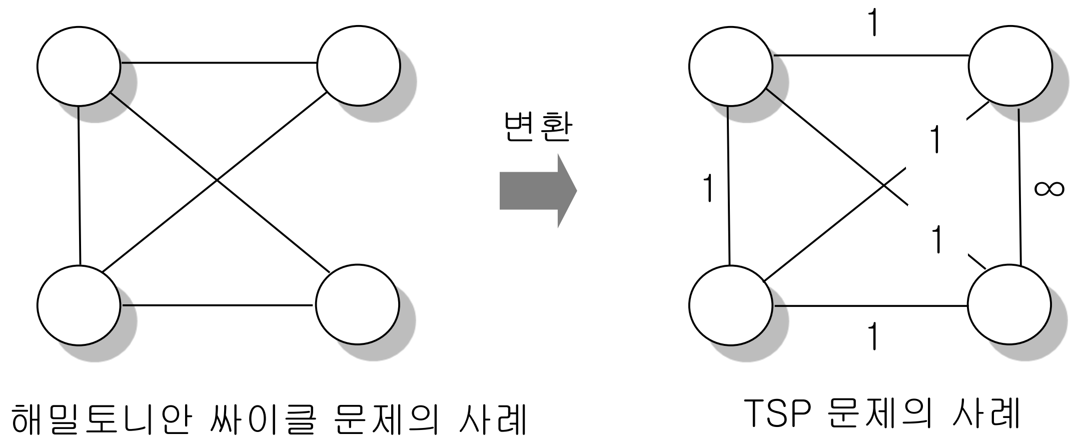
➔ 그러므로 모든 NP 문제를 쉽게 풀 수 있다

NP-하드 증명의 예

- 해밀토니안 싸이클 문제가 NP-하드임은 알고 있다 가정
- 이를 이용해서 TSP 문제가 NP-하드임을 보일 수 있다

• 해밀토니안 싸이클
  - 그래프의 모든 정점을 단 한번씩
    방문하고 돌아오는 경로
• 해밀토니안 싸이클 문제
  - 주어진 그래프에서 해밀토니안 싸이클이 존재하는가?

- 해밀토니안 싸이클 문제의 사례 A를 아래와 같이 TSP 문제의 사례 B로 다항식 시간에 변환한다

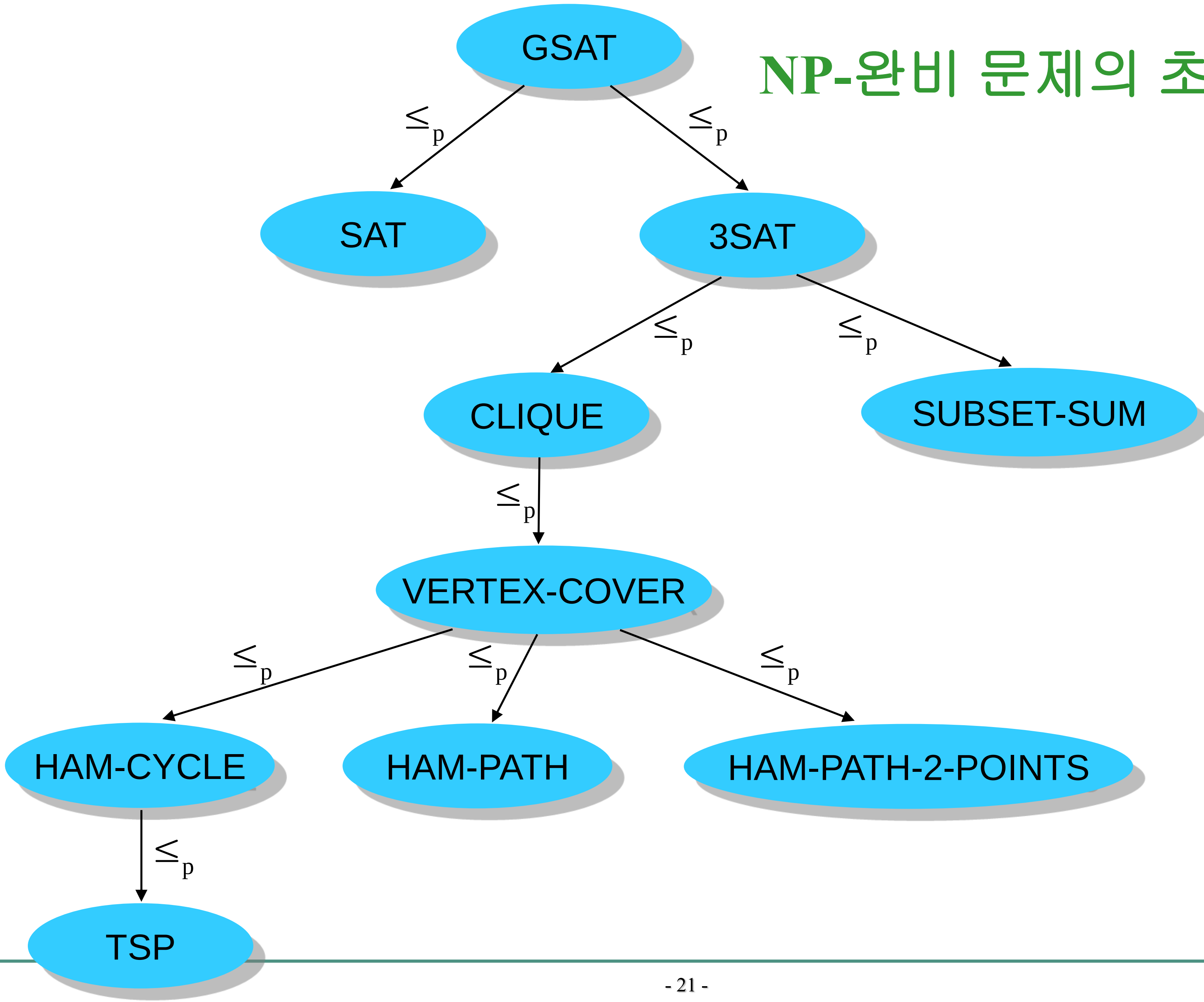


사례 A가 해밀토니안 싸이클을 갖는다
⇔ 사례 B가 길이 4 이하인 해밀토니안 싸이클을 갖는다
(그래프의 크기가 n이면 4 대신 n)

➢ 그러므로 TSP는 NP-하드이다.

정점 수와 일치

NP-완비 문제의 초기 역사



직관과 배치되는 NP-완비 문제의 예

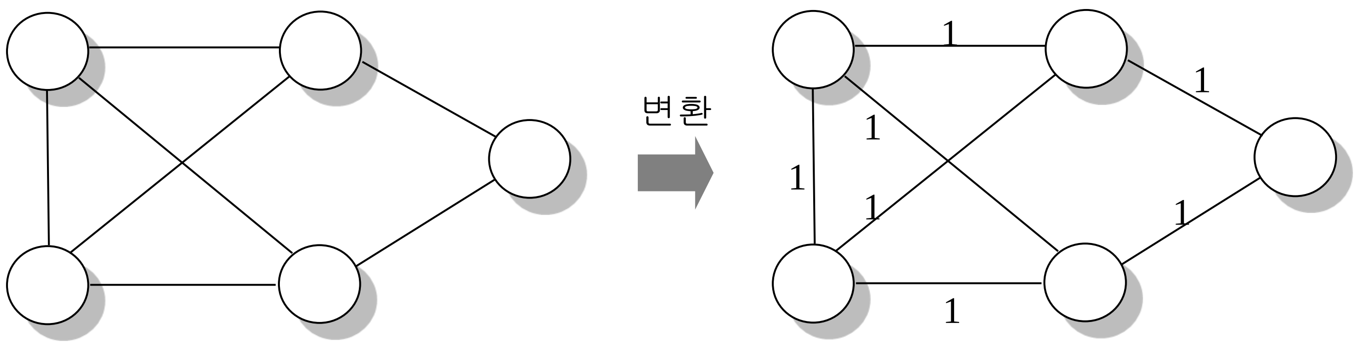
- 최단경로
  - 그래프의 정점 s에서 t로 가는 최단경로는 간단히 구할 수 있다
- 최장경로
  - 그래프의 정점 s에서 t로 가는 최장경로는 간단히 구할 수 없다
  - NP-완비

✓ 얼핏 비슷해 보이지만 위 두 문제의 난이도는 천지차이다!
(지금까지의 연구 결과로는)

- 최장경로 문제
  - 주어진 그래프에서 vertex s에서 t로 가는 길이 k 이상인 단순경로가 존재하는가?

- 두 점 사이 해밀토니안 경로 문제
  - 주어진 그래프에서 정점 s에서 t에 이르는 해밀토니안 경로가 존재하는가?
  - NP-완비

• 두 점 사이 해밀토니안 경로 문제의 사례 A로부터 Longest Path 문제의 사례 B로 다항식 시간 변환



HAM-PATH-2-POINTS 문제의 사례 LONGEST-PATH 문제의 사례

사례 A가 두 점 s와 t사이에 해밀토니안 경로를 갖는다

⇔ 사례 B가 두 점 s와 t 사이에 길이 4 이상인 (사실은 정확히 4) 단순 경로를 갖는다

➢ 그러므로 Longest Path 문제는 NP-Hard이다.

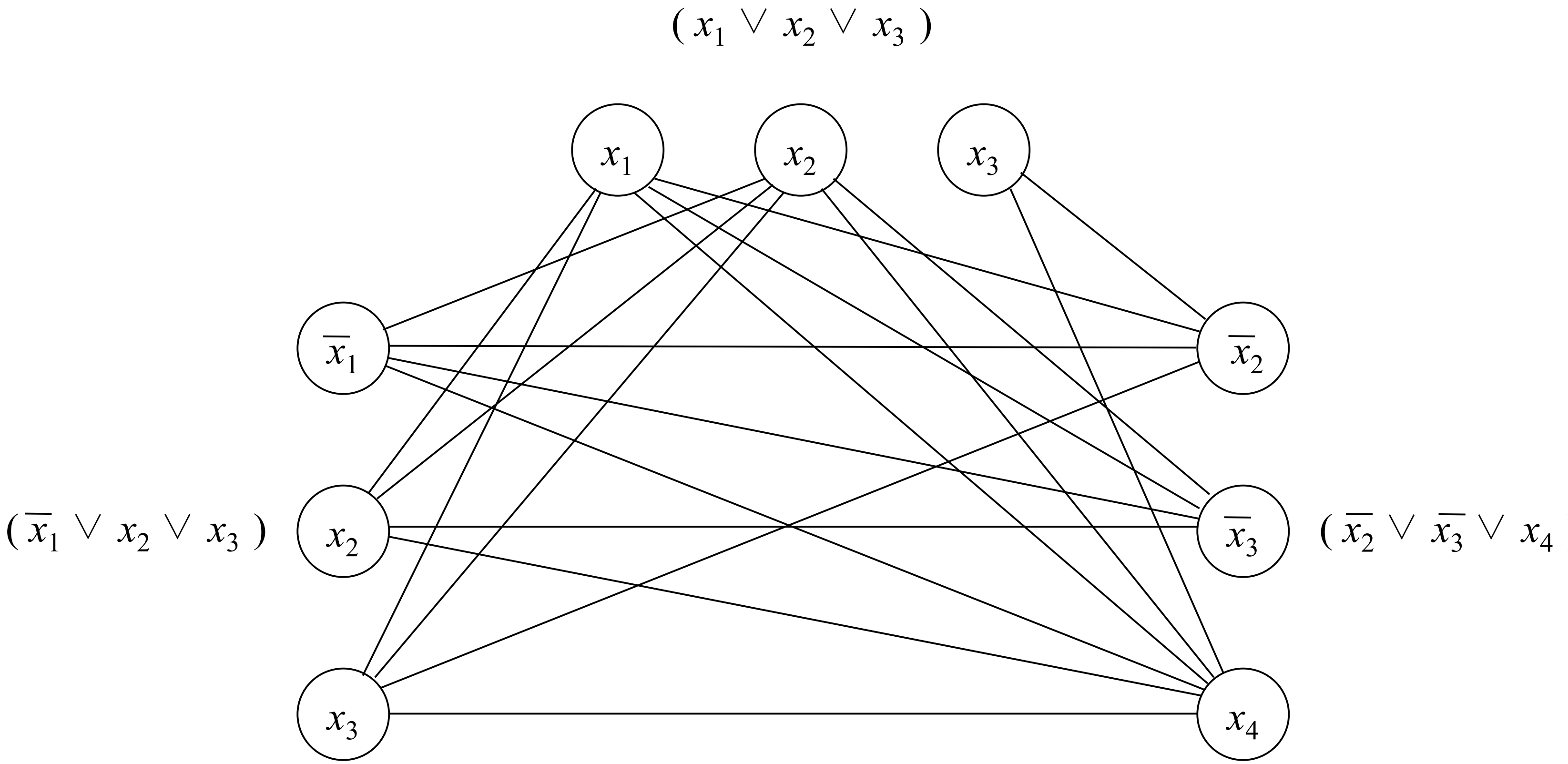
핵심에 집중하기 위해 성질 1(NP)은 일부러 누락.
추가로 성질 1을 증명해서 NP-Complete임을 보이는 것은 매우 간단하다.

CLIQUE(완전 부분 그래프 문제)

- 입력
  - 그래프 G = (V, E), 양의 정수 k
- 질문
  - 그래프 G에 크기 k 이상인 완전 부분 그래프가 존재하는가?

- CLIQUE은 NP-완비다

3SAT $\leq_p$CLIQUE임을 증명하기 위한 그림

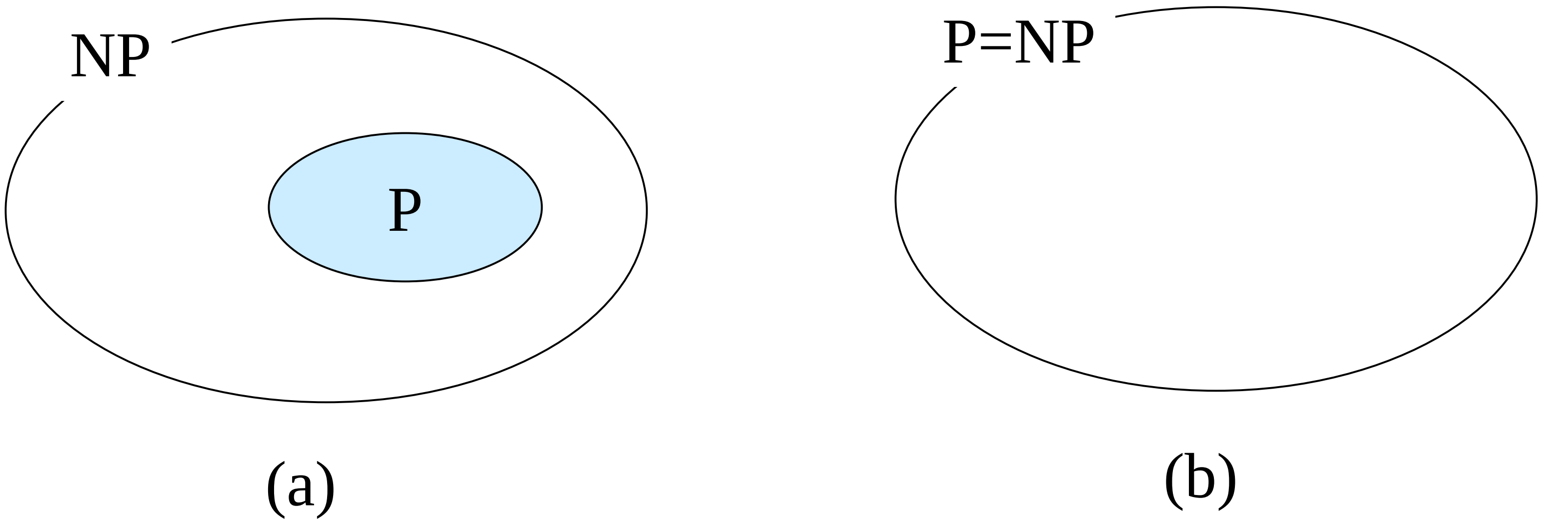


NP 이론의 유용성

- 어떤 문제가 NP-완비/하드임이 확인되면
  - ⇨쉬운 알고리즘을 찾으려는 헛된 노력은 일단 중지한다
  - ⇨주어진 시간 예산 내에서 최대한 좋은 해를 찾는 알고리즘 (휴리스틱) 개발에 집중한다

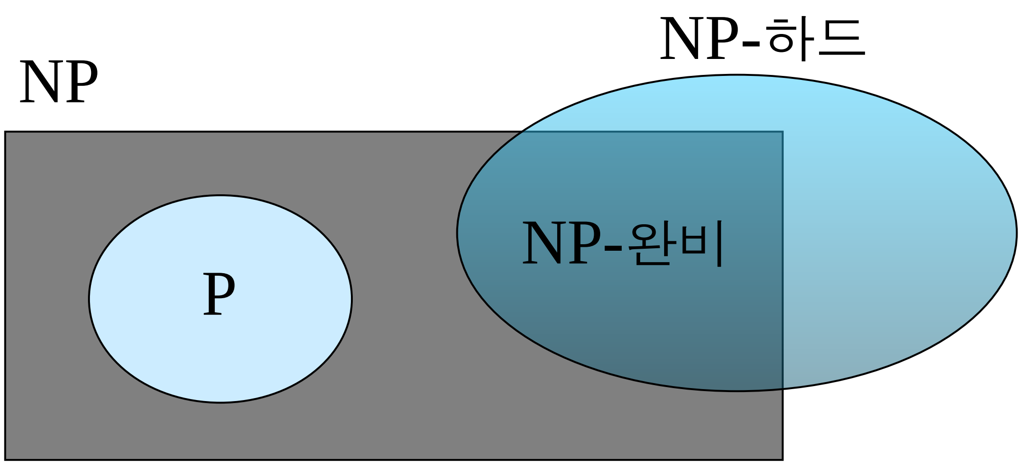
Remind: 때로는 어떤 것이 불가능하다는 사실이 유용할 때도 있다.
-- 레오나드 레빈

P와 NP의 포함 관계



✓ 위 (a)인지 (b)인지는 아직 밝혀지지 않음.
백만불의 상금이 걸려 있다.

NP와 NP-완비, NP-하드의 관계



✓ P 부분은 추정

Thank you