霍夫曼树也叫最优二叉树

树的基本概念和术语

路径：若树中存在一个结点序列k1,k2,...,kj，使得ki是ki+1的双亲，则称该结点序列是从k1到kj的一条路径。

路径长度：等于路径上的结点数减1。

结点的权：在许多应用中，常常将树中的结点赋予一个有意义的数，称为该结点的权。

结点的带权路径长度：是指该结点到树根之间的路径长度与该结点上权的乘积。

树的带权路径长度(**WPL**-Weighted Path Length)：树中所有叶子结点的带权路径长度之和，通常记作：

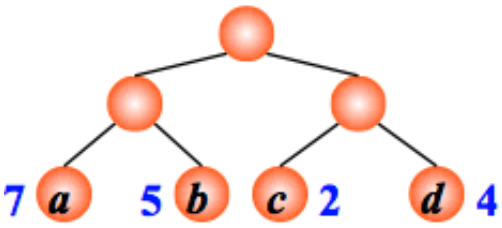
$$WPL = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$$

其中，n表示叶子结点的数目，wi和li分别表示叶子结点ki的权值和树根结点到叶子结点ki之间的路径长度。

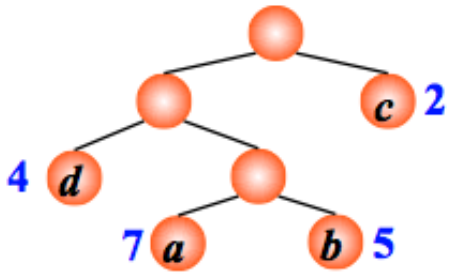
赫夫曼树（哈夫曼树，huffman树）定义：

在权为w1,w2,...,wn的n个叶子结点的所有二叉树中，带权路径长度WPL最小的二叉树称为赫夫曼树或最优二叉树。

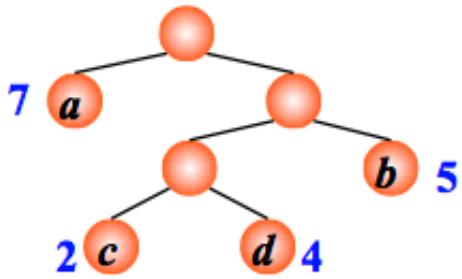
例：有4 个结点 a, b, c, d，权值分别为 7, 5, 2, 4，试构造以此 4 个结点为叶子结点的二叉树。



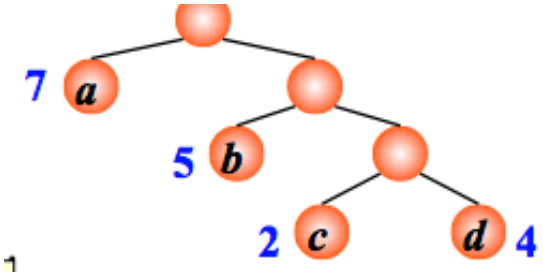
WPL=7*2+5*2+2*2+4*2= 36



WPL=7*3+5*3+2*1+4*2= 46



WPL=7*1+5*2+2*3+4*3= 35



WPL=7*1+5*2+2*3+4*3= 35

后两者其实就是霍夫曼树(最优二叉树)[说明霍夫曼树并非唯一的]

哈夫曼树的构造(哈夫曼算法)

1.根据给定的n个权值{w1,w2,…,wn}构成二叉树集合F={T1,T2,…,Tn},其中每棵二叉树Ti中只有一个带权为wi的根结点,其左右子树为空.

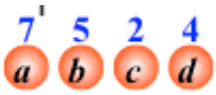
2.在F中选取两棵根结点权值最小的树作为左右子树构造一棵新的二叉树,且置新的二叉树的根结点的权值为左右子树根结点的权值之和.

3.在F中删除这两棵树,同时将新的二叉树加入F中.

4.重复2、3,直到F只含有一棵树为止.(得到哈夫曼树)

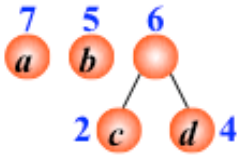
例：有4 个结点 a, b, c, d，权值分别为 7, 5, 2, 4，构造哈夫曼树。

根据给定的n个权值{w1,w2,…,wn}构成二叉树集合F={T1,T2,…,Tn},其中每棵二叉树Ti中只有一个带权为wi的根结点,其左右子树为空.

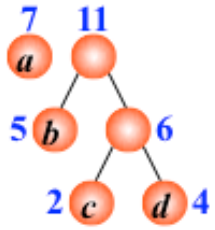


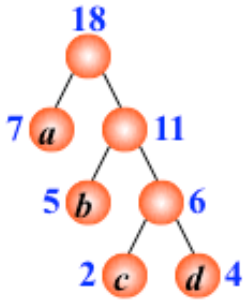
在F中选取两棵根结点权值最小的树作为左右子树构造一棵新的二叉树,且置新的二叉树的根结点的权值为左右子树根结点的权值之和.

在F中删除这两棵树,同时将新的二叉树加入F中.



重复,直到F只含有一棵树为止.(得到哈夫曼树)





关于哈夫曼树的注意点：

1、满二叉树不一定是哈夫曼树

2、哈夫曼树中权越大的叶子离根越近 （很好理解，WPL最小的二叉树）

3、具有相同带权结点的哈夫曼树不惟一

4、哈夫曼树的结点的度数为 0 或 2， 没有度为 1 的结点。

5、包含 n 个叶子结点的哈夫曼树中共有 2n – 1 个结点。

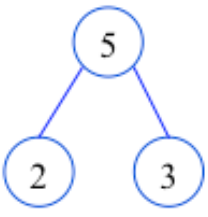
6、包含 n 棵树的森林要经过 n–1 次合并才能形成哈夫曼树，共产生 n–1 个新结点

再看一个例子：如权值集合W={7,19,2,6,32,3,21,10 }构造赫夫曼树的过程。

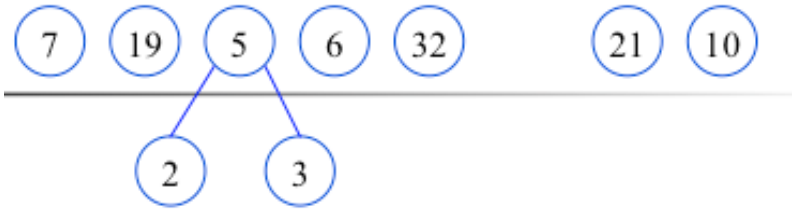
根据给定的n个权值{w1,w2,…,wn}构成二叉树集合F={T1,T2,…,Tn},其中每棵二叉树Ti中只有一个带权为wi的根结点,其左右子树为空.

在F中选取两棵根结点权值最小的树

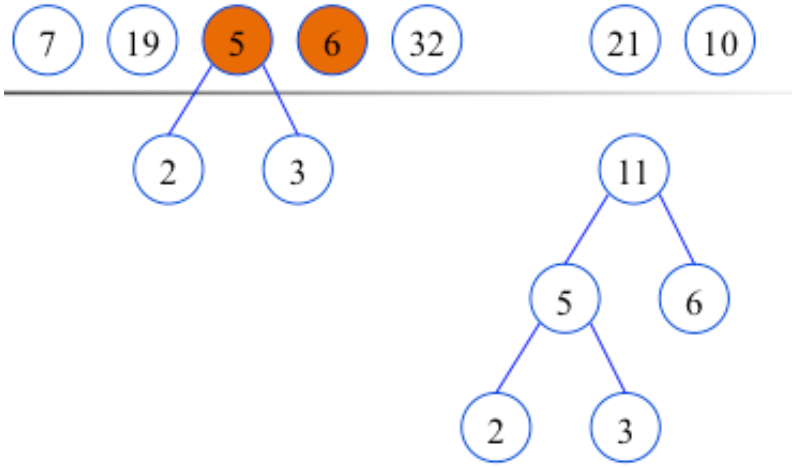
作为左右子树构造一棵新的二叉树，置新的二叉树的根结点的权值为左右子树根结点的权值之和



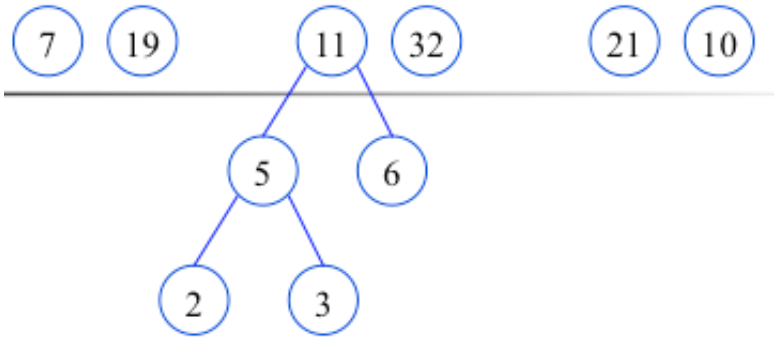
在F中删除这两棵树,同时将新的二叉树加入F中.

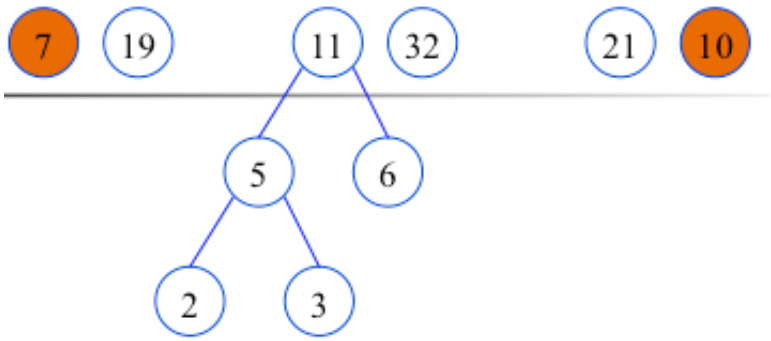


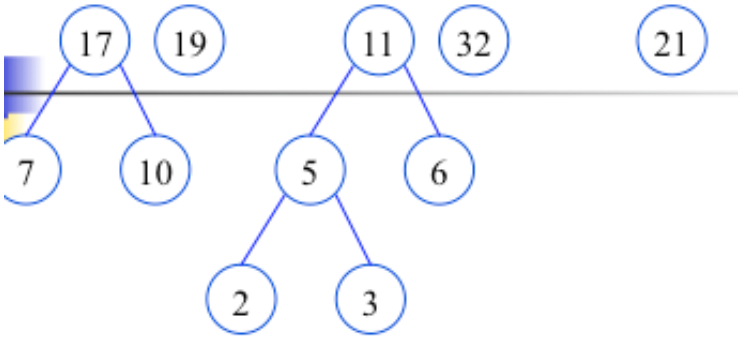
重复,直到F只含有一棵树为止.(得到哈夫曼树)

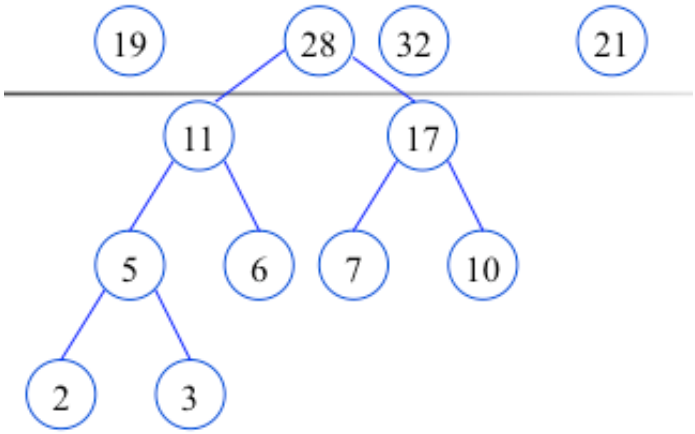


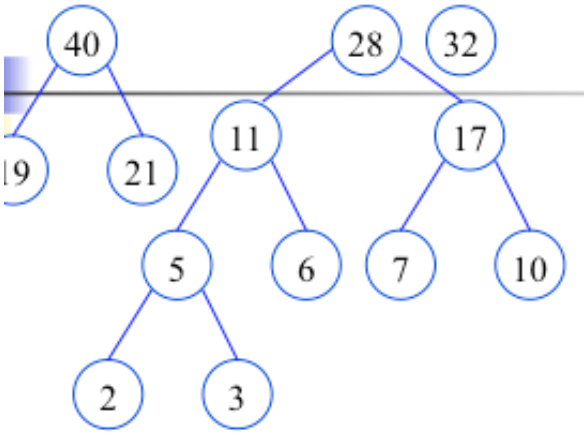
在F中删除这两棵树,同时将新的二叉树加入F中.

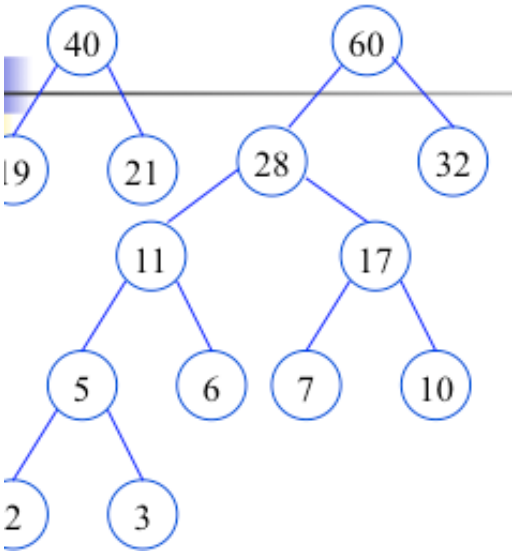


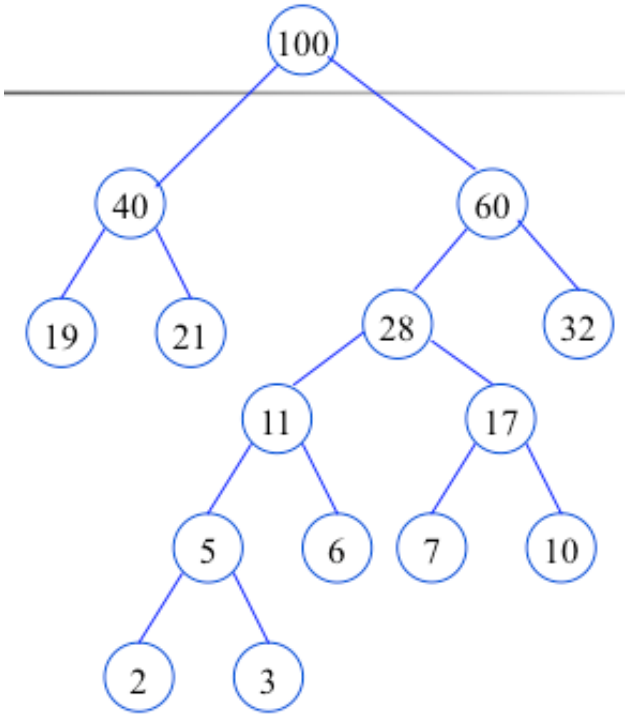



17
19
11
32
21
7
10
5
6
2
3


19
28
32
21
11
17
5
6
7
10
2
3


40
28
32
11
17
19
21
5
6
7
10
2
3





构造完毕（哈夫曼树，最有二叉树），也就是最佳判定树

哈夫曼编码

哈夫曼树的应用很广，哈夫曼编码就是其在电讯通信中的应用之一。广泛地用于数据文件压缩的十分有效的编码方法。其压缩率通常在20%～90%之间。在电讯通信业务中，通常用二进制编码来表示字母或其他字符，并用这样的编码来表示字符序列。

例：如果需传送的电文为 'ABACCDA'，它只用到四种字符，用两位二进制编码便可分辨。假设 A, B, C, D 的编码分别为 00, 01,10, 11，则上述电文便为 '00010010101100'（共 14 位），译码员按两位进行分组译码，便可恢复原来的电文。

能否使编码总长度更短呢？

实际应用中各字符的出现频度不相同，用短（长）编码表示频率大（小）的字符，使得编码序列的总长度最小，使所需总空间量最少

数据的最小冗余编码问题

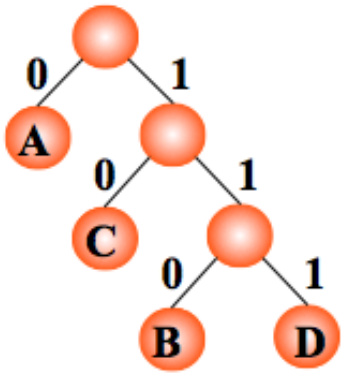
在上例中，若假设 A, B, C, D 的编码分别为 0，00，1，01，则电文 'ABACCDA' 便为 '000011010'（共 9 位），但此编码存在多义性：可译为：
'BBCCDA'、'ABACCDA'、'AAAACCACA' 等。

译码的惟一性问题

要求任一字符的编码都不能是另一字符编码的前缀，这种编码称为前缀编码（其实是非前缀码）。 在编码过程要考虑两个问题，数据的最小冗余编码问题，译码的惟一性问题，利用最优二叉树可以很好地解决上述两个问题

用二叉树设计二进制前缀编码

以电文中的字符作为叶子结点构造二叉树。然后将二叉树中结点引向其左孩子的分支标 '0'，引向其右孩子的分支标 '1'； 每个字符的编码即为从根到每个叶子的路径上得到的 0, 1 序列。如此得到的即为二进制前缀编码。



编码： A：0， C：10，B：110，D：111

任意一个叶子结点都不可能在其它叶子结点的路径中。

用哈夫曼树设计总长最短的二进制前缀编码

假设各个字符在电文中出现的次数（或频率）为 wi ，其编码长度为 li，电文中只有 n 种字符，则电文编码总长为：

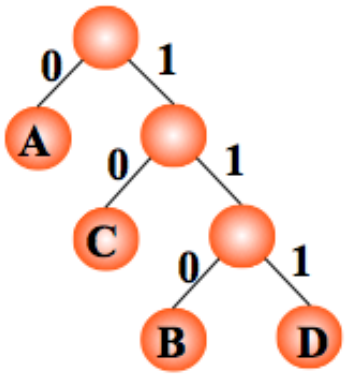
$$WPL = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$$

$w_i l_i$ ⟹ 从根到叶子的路径长度

w_i ⟹ 叶子结点的权

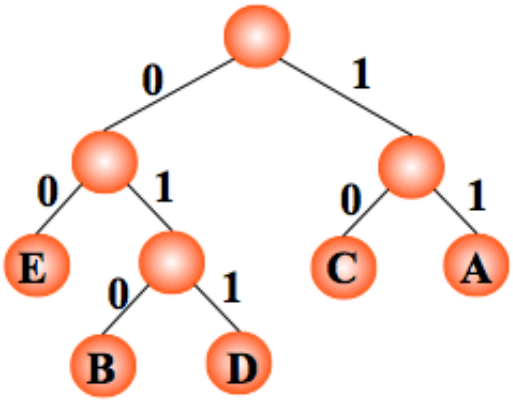
设计电文总长最短的编码，设计哈夫曼树（以 n 种字符出现的频率作权），
由哈夫曼树得到的二进制前缀编码称为哈夫曼编码

例：如果需传送的电文为 'ABACCDA'，即：A, B, C, D
的频率（即权值）分别为 0.43, 0.14, 0.29, 0.14，试构造哈夫曼编码。



编码： A：0， C：10， B：110， D：111 。电文 'ABACCDA' 便为 '0110010101110'（共 13 位）。

例：如果需传送的电文为 'ABCACCDAEAE'，即：A, B, C, D, E 的频率（即权值）分别为 0.36, 0.1, 0.27, 0.1, 0.18，试构造哈夫曼编码。

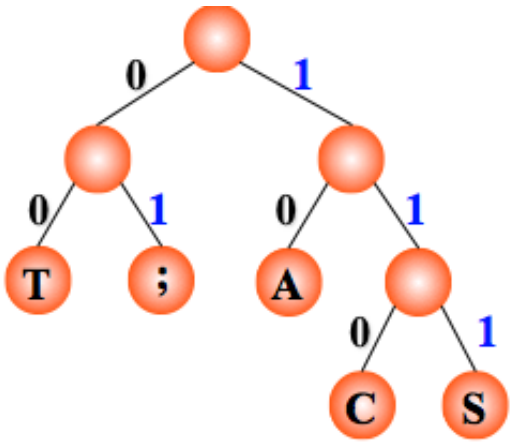


编码： A：11，C：10，E：00，B：010，D：011 ，则电文 'ABCACCDAEAE' 便为 '11 010 10 11 10 10 011 11 00 11 00'（共 24 位，比 33 位短）。

A B C A C C D A E A E

译码

从哈夫曼树根开始，对待译码电文逐位取码。若编码是"0"，则向左走；若编码是"1"，则向右走，一旦到达叶子结点，则译出一个字符；再重新从根出发，直到电文结束。



电文为“1101000”，译文只能是“CAT”

哈夫曼编码算法的实现

由于哈夫曼树中没有度为1的结点，则一棵有n个叶子的哈夫曼树共有2×n-1个结点，可以用一个大小为2×n-1 的一维数组存放哈夫曼树的各个结点。 由于每个结点同时还包含其双亲信息和孩子结点的信息，所以构成一个静态三叉链表。

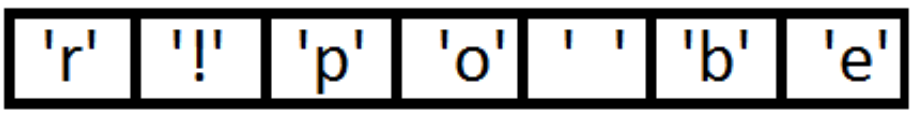
我们直接来看示例，如果我们需要来压缩下面的字符串：

“beep boop beer!”

首先，我们先计算出每个字符出现的次数，我们得到下面这样一张表：

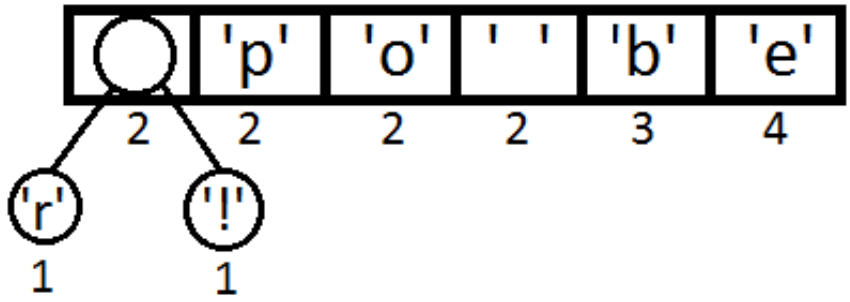
字符	次数
‘b’	3
‘e’	4
‘p’	2
‘ ’	2
‘o’	2
‘r’	1
‘!’	1

然后，我把把这些东西放到Priority Queue中（用出现的次数据当priority），我们可以看到，Priority Queue 是以Prioirry排序一个数组，如果Priority一样，会使用出现的次序排序：下面是我们得到的Priority Queue：

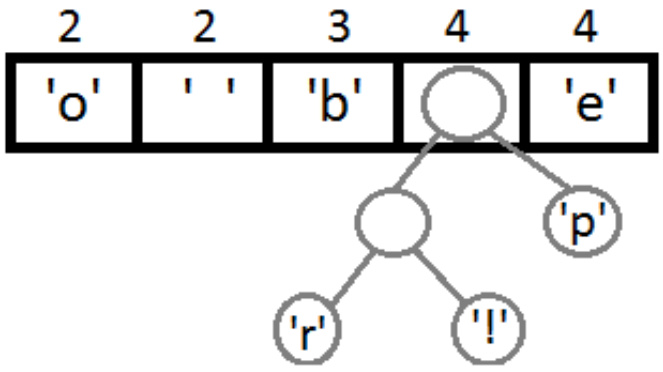


接下来就是我们的算法——把这个Priority Queue 转成二叉树。我们始终从

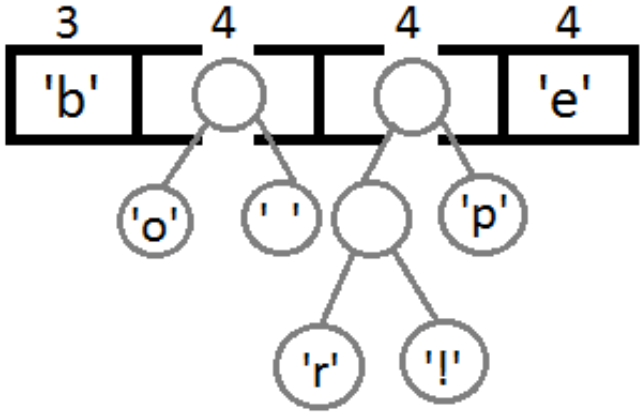
queue的头取两个元素来构造一个二叉树（第一个元素是左结点，第二个是右结点），并把这两个元素的priority相加，并放回Priority中（再次注意，这里的Priority就是字符出现的次数），然后，我们得到下面的数据图表：

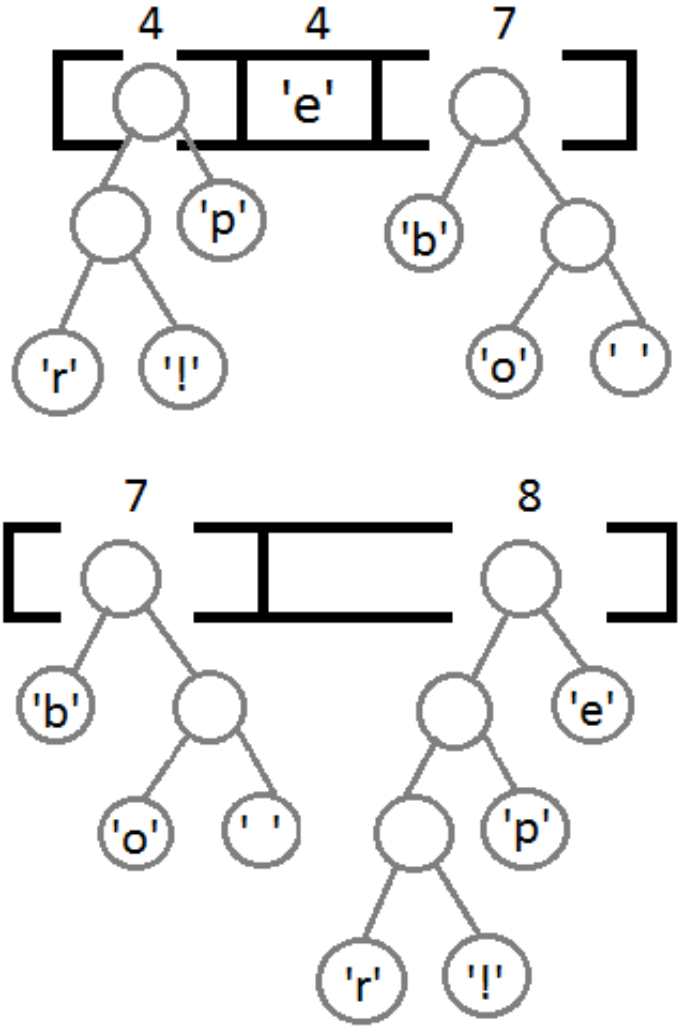


同样，我们再把前两个取出来，形成一个Priority为2+2=4的结点，然后再放回Priority Queue中：

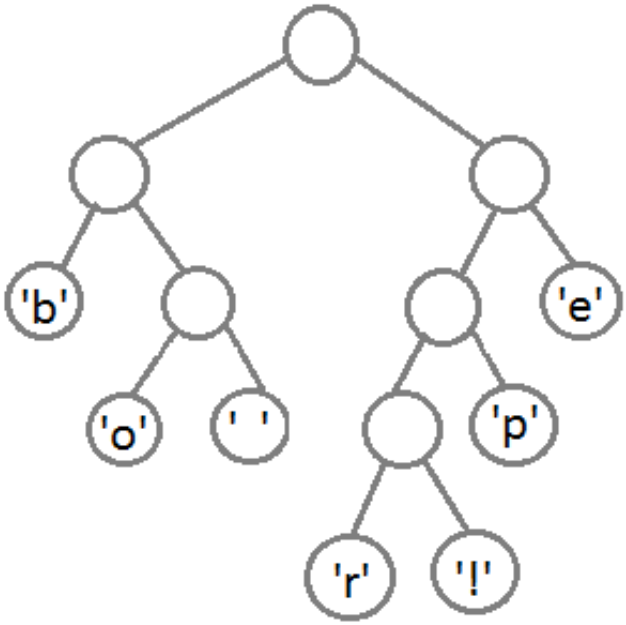


继续我们的算法（我们可以看到，这是一种自底向上的建树的过程）：

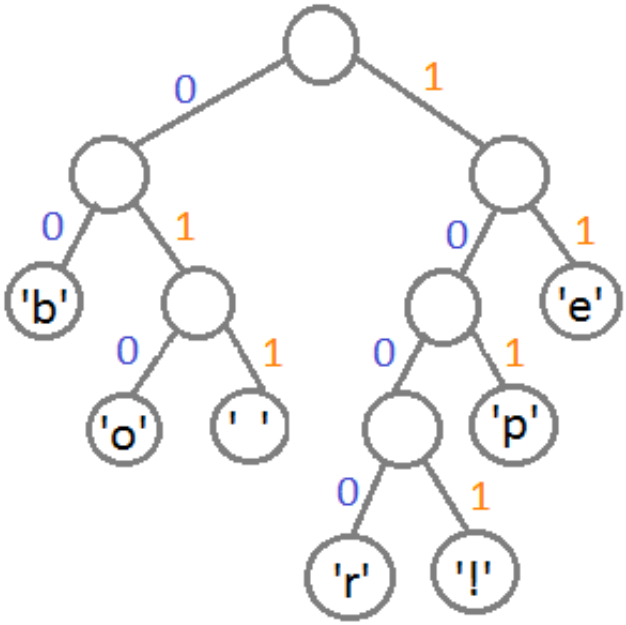




最终我们会得到下面这样一棵二叉树：



此时，我们把这个树的左支编码为0，右支编码为1，这样我们就可以遍历这棵树得到字符的编码，比如：‘b’的编码是 00，’p’的编码是101，‘r’的编码是1000。**我们可以看到出现频率越多的会越在上层，编码也越短，出现频率越少的就越在下层，编码也越长。**



最终我们可以得到下面这张编码表：

字符	编码
‘b’	00
‘e’	11
‘p’	101
‘ ‘	011

这里需要注意一点，当我们encode的时候，我们是按“bit”来encode，decode也是通过bit来完成，比如，如果我们有这样的bitset “1011110111″ 那么其解码后就是 “pepe”。所以，我们需要通过这个二叉树建立我们Huffman编码和解码的字典表。

这里需要注意的一点是，我们的Huffman对各个字符的编码是不会冲突的，也就是说，**不会存在某一个编码是另一个编码的前缀**，不然的话就会大问题了。因为encode后的编码是没有分隔符的。

于是，对于我们的原始字符串 beep boop beer!

其对就能的二进制(ASCII码,8位代表一个字符)为：

0110 0010 0110 0101 0110 0101 0111 0000 0010 0000 0110 0010 0110 1111 0110 1111 0111 0000 0010 0000 0110 0010 0110 0101 0110 0101 0111 0010 0010 0001

我们的Huffman的编码为：0011 1110 1011 0001 0010 1010 1100 1111 1000 1001

从上面的例子中，我们可以看到被压缩的比例还是很可观的。