硕士学位论文

小世界复杂网络的混沌及重构研究

作者姓名: 常博源

指导教师: 张路 副教授 四川大学数学学院

学位类别: 理学硕士

学科专业: 不确定性处理的数学

培养单位: 四川大学数学学院

2023 年 6 月

The chaos of a small world complex network and its sparse reconstruction

A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Mathematics

By

Chang Boyuan

Supervisor: Professor Zhang Lu

Institute of Mechanics, Sichuan University

June, 2023

摘　要

本文是中国科学院大学学位论文模板 ucasthesis 的使用说明文档。主要内容为介绍 LaTeX 文档类 ucasthesis 的用法，以及如何使用 LaTeX 快速高效地撰写学位论文。

关键词：中国科学院大学，学位论文，LaTeX 模板

Abstract

This paper is a help documentation for the LaTeX class ucasthesis, which is a thesis template for the University of Chinese Academy of Sciences. The main content is about how to use the ucasthesis, as well as how to write thesis efficiently by using LaTeX.

Keywords: University of Chinese Academy of Sciences (UCAS), Thesis, LaTeX Template

目 录

图形列表

表格列表

符号列表

字符

Symbol	**Description**	**Unit**
R	the gas constant	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
C_v	specific heat capacity at constant volume	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
C_p	specific heat capacity at constant pressure	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$
E	specific total energy	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$
e	specific internal energy	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$
h_T	specific total enthalpy	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$
h	specific enthalpy	$\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$
k	thermal conductivity	$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$
S_{ij}	deviatoric stress tensor	$\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$
τ_{ij}	viscous stress tensor	$\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$
δ_{ij}	Kronecker tensor	1
I_{ij}	identity tensor	1

算子

Symbol	**Description**
Δ	difference
∇	gradient operator
$\delta^{\pm}$	upwind-biased interpolation scheme

缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State

JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel’dovich-von Neumann-Doering

第 1 章　绪论

1.1　研究背景及意义

从 20 世纪七八十年代开始，在国际上形成了非线性科学和复杂性问题的研究热潮。许多复杂性问题都可以从复杂网络的角度去研究。钱学森将具有自组织、自相似、吸引子、小世界、无标度中部分或全部性质的网络统称为复杂网络。原则上，任何包含大量组成单元（或子系统）的复杂系统，当我们把构成单元抽象成节点，单元之间的相互作用抽象为边时，都可以当作复杂网络来对其进行研究。早期对复杂网络的研究主要集中在规则网络或完全随机网络上。不过，规则网络和完全随机网络都是理想化的模型，而现实世界中的系统往往没有这么理想化，很可能是有序和无序之间的网络（称为小世界网络）。早在 1998 年，Watts 及 Strogatz 教授提出了经典的 WS 小世界网络，该网络在规则网络基础上将每条边以概率 p 进行断边重连后得到。小世界网络中含有大量的局部连边，同时也有少量长程连边，而这些长程连边有效地降低了网络中任意两个节点之间的距离，这正是小世界特性的来源。

1.2　研究现状

最早的小世界网络动力学研究在 1998 年 Watts 及 Strogatz 的文章中给出，作者利用相应的小世界模型模拟传染病在人群中传播，研究表明相较于规则网络，小世界网络的传播能力明显要快得多。2001 年，Zhuo Gao 研究了小世界网络的随机共振现象，发现小世界网络的随机共振效应相比与普通网络有所增强。2002 年，H. Hong 等探讨了小世界网络同步性并发现随着重连概率的增大，小世界网络中各个振子间同步性显著提高。2001 年，Xin-She Yang 对一个非线性时滞混沌小世界网络进行研究，发现小世界混沌网络的传播要比规则网络速度更快。2012 年，Li Ning 提出了一个基于小世界网络的离散复杂网络，并研究其分叉和混沌等动力学特性后发现相较于规则网络，小世界网络的混沌现象在适当的参数下会得到控制。

此外，混沌信号由于其类噪声特性和长期不可预测性，已被广泛研究并用于保密通信、雷达信号处理、信号检测等诸多领域。但在实际情况下，混沌信号总

是会被噪声污染，而混沌信号具有非周期、宽带频谱等特性，一些现有的信号复原方法在处理混沌信号时难以获得理想的效果。因此，研究噪声污染下混沌信号的重构技术具有重要意义，有效的混沌重构技术也将大大提高各种应用的性能。以压缩感知为典型代表的稀疏理论提出：稀疏的或具有稀疏表达的有限维数的信号可以利用远少于奈奎斯特采样数量的线性、非自适应的测量值无失真地重建出来。该理论一经提出，便在信息论、信号/图像处理、医疗成像、射电天文、模式识别、光学/雷达成像和信道编码等诸多领域引起广泛关注。在信号处理领域，信号的稀疏重构理论仍是一个较新的研究方向，近年来，学者们在该方向已取得了一些显著的研究成功，但很多问题仍需进一步研究。事实上，该理论的应用前提是能够对需处理的信号进行直接或间接的稀疏建模, 合理地选取具有等距约束等限制条件的采样矩阵以及提出更高精度、更低复杂度或对噪声更鲁棒的后端恢复算法。而能否将稀疏理论用于复杂系统带噪混沌信号的重构也是一个非常值得探讨的问题。

以压缩感知为典型代表的稀疏重构理论是一个较新的研究方向，一经提出便在信息论、信号/图像处理、医疗成像、射电天文、模式识别、光学/雷达成像和信道编码等诸多领域引起广泛关注 [12,13]。稀疏理论的应用前提是能够对信号进行直接或间接的稀疏化, 合理地选取具有等距约束等限制条件的采样矩阵以及提出高精度、低复杂度和抗噪声的重构算法 [14]。含噪混沌信号的稀疏重构问题尚未有完善的研究。因此，能否将稀疏理论用于复杂网络带噪混沌信号的重构具有重要意义，有效的混沌重构算法也将大大提高混沌信号各种应用的性能。

1.3 本文主要工作和论文结构

本文提出一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网络 (简称 Duffing-WS 型小世界网络)，并研究该复杂小世界网络的混沌现象，分析复杂系统耦合强度、重连概率、邻接度等参数对其混沌特性的影响规律；同时考虑采用稀疏重构理论建立重构算法还原小世界网络生成的带噪混沌信号。利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大李雅普诺夫指数表达式，以庞加莱截面分岔图和李雅普诺夫指数为工具研究该复杂网络的混沌现象，通过微分方程数值解法进行数值仿真，使用 LE 指数衡量系统的混沌程度与振幅范围，分析小世界网络重连度，重连概率和耦合强度对此复杂网络混沌现象的影响。现有文献主要

研究复杂网络的同步、传播和共振等动力学特性，对复杂网络的混沌研究较少。本文针对一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网络，研究其混沌特性，并基于优异的并行处理计算架构相应的数值仿真算法分析各个参数对混沌的影响。已针对研究领域进行了必要的理论调研和学习了相关基础理论，针对提出的模型利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大李雅普诺夫指数表达式；此外具有并行处理能力的计算机，高性能程序开发经验，能够基于优异的并行处理计算架构给出相应的数值仿真算法。理清耦合强度、重连概率、邻接度等参数的变化对系统混沌的影响，找到控制复杂网络混沌现象的关键；基于稀疏理论给出复杂系统带噪混沌信号的重构算法。

第 2 章　基础理论

2.1　复杂网络和混沌基本理论

2.1.1　图论的基本知识

记 $G=(V,E)$ 为一个非空图，其中 V 是其顶点集，E 是边集。图中一点 v 的相邻点集记为 $N(v)$，顶点的度是指与其相连的边的个数记为 $d(v)$，一个图的平均度定义为

$$d(G) := \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v) \tag{2.1}$$

图 G 的一条路径是一个子图，其顶点集与边集描述了原图中某一点到另一点的一条通路。一个圈是指一个子图，描述了以某点为起始点与终止点的一条非平凡路径。一个含有 N 个节点、M 个边的图 G 的密度定义 ρ 为

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}N(N-1)} \tag{2.2}$$

定义 2.1. 如果非空图 G 中任意两顶点之间均有一条路相连，称图 G 为联通图。

给定子图 $A,B \subseteq V$ 和 $X \subseteq V \cup E$，如果 G 的每条 $A-B$ 路均包含 X 中的一个顶点或一条边, 称在 G 中 X 分离 (separate) 集合 A 和 B 。下面是图论中一个重要的定理

定理 2.1. *设 $G=(V,E)$ 是一个图且 $A,B \subseteq V$ 。那么，在 G 中分离 A 和 B 的顶点的最小数目等于 G 中互不相交的 $A-B$ 路的最大数目。*

证明. 对 $\|G\|$ 使用数学归纳法。若 G 不含边，则有 $|A\cap B|=k$ 并且存在 k 条平凡的 $A-B$ 路。设 G 包含边 $e=xy$ 。如果 G 无 k 条不交的 $A-B$ 路，那么 G/e 也没有; 若在 G 中 x 和 y 两顶点中存在一个顶点属于 A (或者 B)，顶点 v_e 看为 G/e 中 A (或者 B) 的元素。由归纳假设，G/e 包含一个少于 k 个顶点的 $A-B$ 分隔 Y, 其中顶点 v_e 在 Y 中; 否则，$Y \subseteq V$ 是 G 的一个 $A-B$ 分隔，矛盾。于是, $X := \left(Y/\left\{v_e\right\}\right) \cup \{x,y\}$ 是 G 的一个恰好有 k 个顶点的 $A-B$ 分隔。所以这个 $A-X$ 分隔至少有 k 个顶点。由归纳假设，$G-e$ 中存在 k 条不交的 $A-X$ 路; 同样 $G-e$ 中存在 k 条不交的 $X-B$ 路。由于 X 分离 A 和 B，这两个路系统不会在 G/X 相交，故它们可以合并成 k 条不交的 $A-B$ 路。 □

网络中节点的距离定义为连接这两个点的最小所经边数目。网络的平均长度定义为

$$L = \frac{1}{\frac{1}{2}N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij} \tag{2.3}$$

其中 d_{ij} 为节点 i, j 之间的距离。如果图本身并不联通，则只计算相连两点的距离的算术平均数。一个图的直径 D 定义为任意两个节点之间距离的最大值。

定义 2.2. 图中一个节点 i 的聚类系数 C_i 定义为

$$C_i = \frac{E_i}{\left(k_i\left(k_i-1\right)\right)/2} = \frac{2E_i}{k_i\left(k_i-1\right)} \tag{2.4}$$

其中 k_i 为该节点的度，E_i 为其 k_i 个邻节点之间存在的边的数目。还有一种聚类系数的几何定义，两个定义并不等价，一般会加以说明

$$C_i = \frac{\text{包含节点} i \text{ 的三角形的数目}}{\text{以节点} i \text{ 为中心的连通三元组的数目}} \tag{2.5}$$

图的聚类系数定义为节点的聚类系数的均值

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{2.6}$$

2.1.2　复杂网络

复杂网络是指不规则、度分布不均匀的网络模型，生成复杂网络的做法是在规则网络上做具有一定随机性的更改。本节内容会给出几种常见的复杂网络模型与其性质。

ER 随机图

ER 随机图是通过给顶点随机连边，这是随机性最强的图。

具有固定边数的 ER 随机图 $G(N, M)$ 构造算法

(1) 初始化: 给定 N 个节点和待添加的边数 M 。

(2) 随机连边:

【1】随机选取一对没有边相连的不同的节点，并在这对节点之间添加一条边。

【2】重复步骤【1】，直至在 M 对不同的节点对之间各添加了一条边。

以一定概率连接的 ER 随机图 $G(N, p)$ 构造算法

(1) 初始化: 给定 N 个节点以及连边概率 $p \in [0,1]$ 。

(2) 随机连边:

【1】选择一对没有边相连的不同的节点。

【2】生成一个随机数 $r \in (0,1)$ 。

【3】如果 $r < p$，那么在这对节点之间添加一条边; 否则就不添加边。

【4】重复步骤【1】-【3】，直至所有的节点对都被选择过一次。

主要对第二种 $G(N,M)$ 进行性质分析。首先生成的随机图恰好具有 M 条边的概率为

$$P(M) = \begin{pmatrix} C_N^2 \\ M \end{pmatrix} p^M (1-p) \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix}^{-M} \tag{2.7}$$

其中，$C_N^2 = \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C_N^2 \\ M \end{pmatrix}$ 表示具有 N 个节点和 M 条边的简单图的数量，$p^M(1-p)^{C_N^2 - M}$ 表示有 M 对节点之间添加了边，$C_N^2 - M$ 对节点之间没有添加边。边数分布的平均值为:

$$\langle M \rangle = \sum_{n=0}^{C_N^2} M P(M) = \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} p = p\frac{N(N-1)}{2} \tag{2.8}$$

边数分布的方差:

$$\sigma_M^2 = \left\langle M^2 \right\rangle - \langle M \rangle^2 = p(1-p)\frac{N(N-1)}{2} \tag{2.9}$$

$G(N\square M)$ 中节点度的概率分布符合泊松分布。

$$P(k) = \begin{pmatrix} N-1 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{N-1-k} \tag{2.10}$$

根据概率统计中的内容，其期望与方差分别为

$$\langle k \rangle = p(N-1) \tag{2.11}$$

$$\sigma_k^2 = p(1-p)(N-1) \tag{2.12}$$

由于两个节点之间不论是否具有共同的邻居节点，共连接概率均为 p，所以聚类系数为

$$C = p = \langle k \rangle/(N-1) \tag{2.13}$$

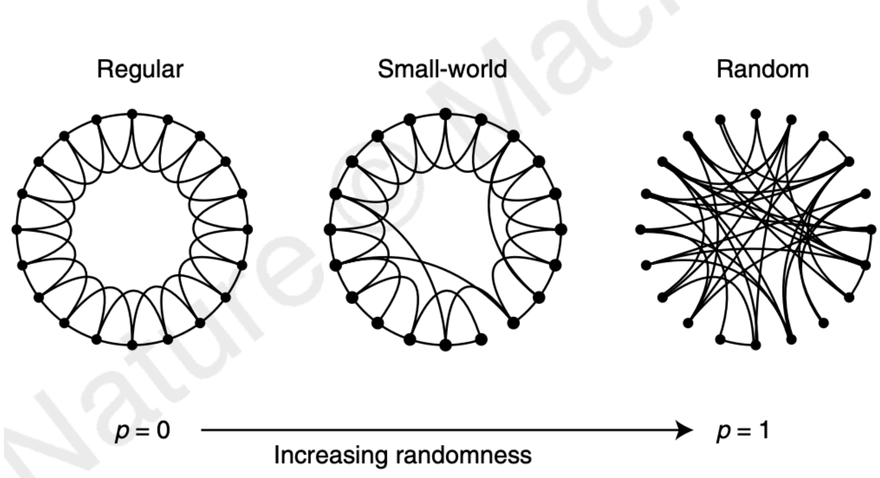
WS 小世界模型

WS 小世界模型是通过在规则图上做带有随机性的更改形成的。

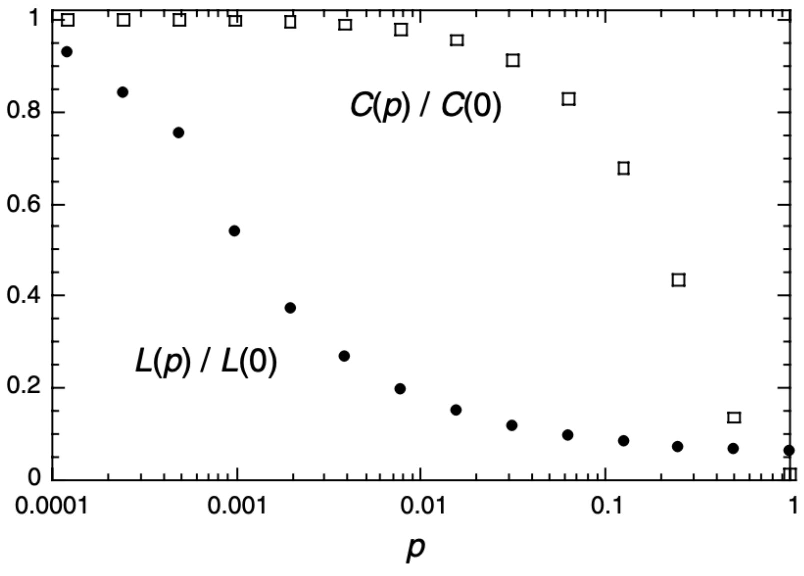
WS 模型构建算法

(1) 从规则图开始: 给定一个含有 N 个点的环状最近邻耦合网络，其中每个节点都与它左右相邻的各 $K/2$ 个节点相连，K 是偶数。

(2) 随机化重连: 以概率 p 随机地重新连接网络中原有的每条边，即把每条边的一个端点保持不变，另一个端点改取为网络中随机选择的一个节点。其中规定不得有重边和自环。



可以看出，$p = 0$ 时是完全规则的网络，$p = 1$ 时是完全随机的网络。WS 模型的聚类系数与平均路径长度时关于重连概率 p 的函数其关系如图 WS 模型的



聚类系数的估计如下

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{WS}(p) &\triangleq \frac{M_0(1-p)^3 + O(1/N)}{K(K-1)/2} \\
&= \frac{3K(K-2)/8}{K(K-1)/2}(1-p)^3 + O(1/N) \\
&= \frac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^3 + O(1/N) \\
&= C_{nc}(1-p)^3 + O(1/N)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

下面来研究 WS 模型的度分布，在 $p > 0$ 时，每个节点仍与顺时针方向的 $K/2$ 条原有的边相连, 即每个节点的度至少为 $K/2$ 。为此, 记节点 i 的度为 $k_i = s_i + K/2$。s_i 又可分为两部分: $s_i = s_i^1 + s_i^2$, s_i^1 表示在原有的与节点 i 相连的逆时针方向的 $K/2$ 条边中保持不变的边的数目，其中每条边不变的概率为 $1-p$; s_i^2 表示通过随机重连机制连接节点 i 上的长程边，每条这样的边的概率为 p/N 。有

$$
\begin{aligned}
P_1\left(s_i^1\right) &= \begin{pmatrix} K/2 \\ s_i^1 \end{pmatrix}(1-p)^{s_i^1} p^{K/2-s_i^1} \\
P_2\left(s_i^2\right) &\simeq \frac{(pK/2)^{s_i^2}}{\left(s_i^2\right)!}\mathrm{e}^{-\rho K/2} \text{ 当} N \text{ 充分大时.}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

对于任一度为 $k \geqslant K/2$ 的节点，$s_i^1 \in [0, \min(k-K/2, K/2)]$ 。当 $k < K/2$ 时，$P(k) = 0$，当 $k \geqslant K/2$ 时

$$
P(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2, K/2)} \begin{pmatrix} K/2 \\ n \end{pmatrix}(1-p)^n p^{K/2-n} \frac{(pK/2)^{k-(K/2)-n}}{(k-(K/2)-n)!}\mathrm{e}^{-pK/2} \tag{2.16}
$$

NW 小世界模型

NW 小世界模型是通过在规则图上做带有随机性的增加长程边形成的，相比 WS 模型，这是一种更常见的小世界模型。

NW 模型构建算法

(1) 从规则图开始: 给定一个含有 N 个节点的环状最近邻耦合网络，其中每个节点都与它左右相邻的各 $K/2$ 个节点相连，K 是偶数。

(2) 随机化加边: 以概率 p 在随机选取的 $NK/2$ 对节点之间添加边，其中规定不得有重边和自环。

首先讨论聚类系数，NW 模型的聚类系数采用几何聚类系数来讨论，$p = 0$ 时，网络中的三角形数量为 $\frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)$。$p > 0$ 时，现在我们需要计算在添

加了长程边之后新增加的三角形的数量。网络中长程边的平均数为 $\frac{1}{2}NKp$，这些边可以在 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个点对之间添加，每一对节点之间有长程边相连的概率为

$$\frac{\frac{1}{2}NKp}{\frac{1}{2}N(N-1)} = \frac{Kp}{N-1} \approx \frac{Kp}{N} \tag{2.17}$$

包含一条长程边的三角形数量可以近似为一个与 N 无关的常数:

$$N \times \frac{Kp}{N} = Kp \tag{2.18}$$

当网络规模趋于无穷时，这一常数与最近邻网络的三角形数量相比是可以忽略不计的。因此，对于 $0 \leqslant p \ll 1$ 模型中的三角形的数量近似为 $\frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)$ 每条长程边都可以与 N 条边的两个端点之一形成连通三元组, 因此包含一条长程边的连通三元组的平均数量为

$$\frac{1}{2}NKp \times K \times 2 = NK^2p \tag{2.19}$$

如果一个节点与 $m > 1$ 条长程边相连，那么从中任选两条长程边就构成一个连通三元组，共有 $\frac{1}{2}m(m-1)$ 种可能。平均一个节点与 Kp 条长程边相连，因此网络中以一个节点为中心的包含两条长程边的连通三元组数量的均值为

$$N \times \frac{1}{2}Kp(Kp-1) \approx \frac{1}{2}NK^2p^2 \tag{2.20}$$

因此，NW 模型中总的连通三元组的数量的均值为

$$\frac{1}{2}NK(K-1) + NK^2p + \frac{1}{2}NK^2p^2 \tag{2.21}$$

综上所述，当 $0 \leqslant p < 1$ 时，NW 小世界网络模型的聚类系数的估计值为

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{NW}(p) &= \frac{3 \times \frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)}{\frac{1}{2}NK(K-1) + NK^2p + \frac{1}{2}NK^2p^2} \\ &= \frac{3(K-2)}{4(K-1) + 4Kp(p+2)}\end{aligned} \tag{2.22}$$

小世界模型的平均路径长度具有如下形式

$$L = \frac{N}{K}f(NKp) \tag{2.23}$$

$f(x)$ 被称为普适标度函数，NW 模型的平均路径长度有如下近似

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4x}}\,\mathrm{artanh}\sqrt{\frac{x}{x+4}} \tag{2.24}$$

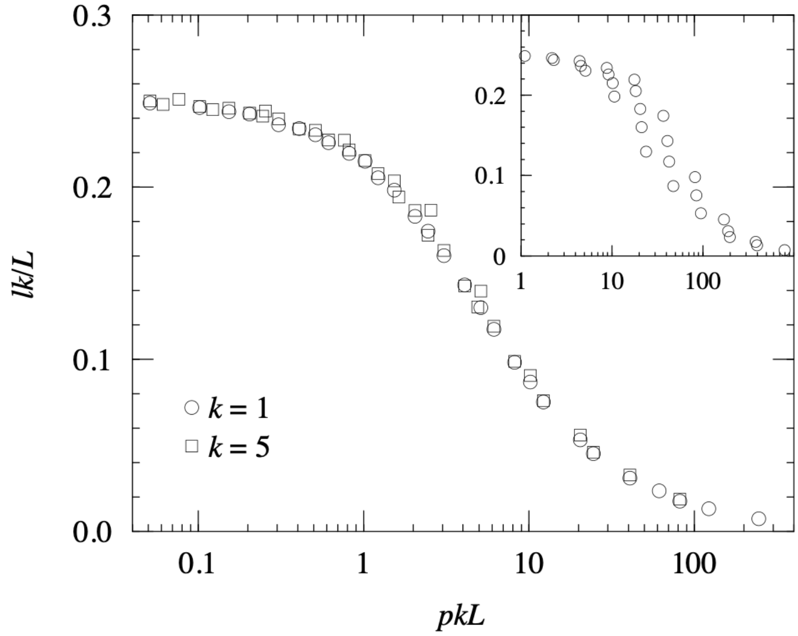
在 x 远大于 1 时，可以简化为

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} \ln \frac{\sqrt{1+4/x}+1}{\sqrt{1+4/x}-1} \simeq \frac{\ln x}{x}, \quad x >> 1 \tag{2.25}$$

将 $f(x)$ 代入，最后得出

$$L = \frac{\ln(NKp)}{K^2 p}, \quad NKp >> 1 \tag{2.26}$$

由图看出，这种近似效果优异。



下面讨论度分布，由于每对节点之间有边相连的概率为 $Kp/(N-1)$，因此

$$P(k) = \begin{pmatrix} N-1 \\ k-K \end{pmatrix} \left[\frac{Kp}{N-1}\right]^{k-K} \left[1-\frac{Kp}{N-1}\right]^{N-1-k+K} \tag{2.27}$$

NW 模型中长程边的平均数为 $\frac{1}{2}NKp$，涉及的端点数目为 NKp 。因此, 网络中长程边的数量为 Kp，即 $\langle k-K \rangle = Kp$ 。当网络中节点数 N 充分大时，可近似写为泊松分布:

$$P(k) = \frac{(Kp)^{k-K}}{(k-K)!} \mathrm{e}^{-K_p} \tag{2.28}$$

2.1.3　混沌

在刘慈欣的著作《三体》中提到了一个经典的天体物理问题——三体问题，这个问题的一个重要特点是三体系统的不稳定性，即在微小扰动的影响下，依托

于一定时间内已知的位置与运动信息预测出将来的位置具有很大的变化。现实中很难把握系统中全部的微信息，例如一个原子的微小扰动几乎是难以描述的，如果模型自身对这种微小差异敏感度极高，那意味着这个系统几乎没有可以预测的可能性，预测出的结果与现实差异会随着时间轴指数级放大。衡量非线性系统的稳定性研究主要由李雅普诺夫稳定性入手，首先来研究系统自身的稳定性。考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.29}$$

其中，$f : D \to R^n$ 是从定义域 $D \subset R^n$ 到 R^n 上的局部利普希茨映射。假定 $\bar{x} \in D$ 是其平衡点，即 $f(\bar{x}) = 0$。不失一般性，所有定义和定理都是对平衡点在 R^n 上的原点，即 $\bar{x} = 0$ 时的情况而言。因为经过变量代换总可以把平衡点变换为原点。假设 $\bar{x} \neq 0$，经 $y = x - \bar{x}$ 变换后，y 的导数为

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(y), g(0) = 0 \tag{2.30}$$

对于变量 y，系统在原点有平衡点。

定义 2.3. 对于平衡点 $x = 0$，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，满足

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.31}$$

则该平衡，点是稳定的。如果稳定，且可选择适当的 δ，满足

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{2.32}$$

则该平衡，点是渐近稳定的。

下面的李雅普诺夫稳定性定理是判断平衡点稳定的重要方法，它能够用某些其他函数代替能量以确定平衡点的稳定性。设 $V : D \to R$ 是连续可微函数，$\dot{V}(x)$ 是 $V(x)$ 沿方程轨线的导数。即

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial V}{\partial x_1}, & \frac{\partial V}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{array}\right] = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \tag{2.33}$$

定理 2.2. 设 $x = 0$ 是方程的一个平衡点，$D \subset R^n$ 是包含原点的定义域。设 $V : D \to R$ 是连续可微函数，如果

$$\begin{aligned} V(0) = 0,\quad V(x) > 0 \quad & \text{在} D - \{0\} \text{ 内} \\ \dot{V}(x) \leqslant 0 \quad & \text{在} D \text{ 内} \end{aligned} \tag{2.34}$$

那么，原点 $x = 0$ 是稳定的。此外，如果

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{在} D - \{0\} \text{ 内} \tag{2.35}$$

那么，原点 $x = 0$ 是渐近稳定的。

证明. 给定 $\varepsilon > 0$，任意 $r \in (0, \varepsilon]$，有

$$B_r = \left\{ x \in R^n \mid \|x\| \leqslant r \right\} \subset D \tag{2.36}$$

设 $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$，则由式 (2.33) 得 $\alpha > 0$ 。取 $\beta \in (0, \alpha)$，设

$$\Omega_\beta = \left\{ x \in B_r \mid V(x) \leqslant \beta \right\} \tag{2.37}$$

那么，Ω_β 在 B_r 内。集合 Ω_β 有如下的性质，当 $t \geqslant 0$ 时，在 $t = 0$ 时刻始于 Ω_β 内的任何轨线都保持在 Ω_β 内，因为

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant 0 \Rightarrow V(x(t)) \leqslant V(x(0)) \leqslant \beta, \forall t \geqslant 0 \tag{2.38}$$

由于 Ω_β 是紧集，只要 $x(0) \in \Omega_\beta$，则对于所有 $t \geqslant 0$，方程有唯一解。因为 $V(x)$ 连续且 $V(0) = 0$，故存在 $\delta > 0$ 满足

$$\|x\| \leqslant \delta \Rightarrow V(x) < \beta \tag{2.39}$$

那么

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r \tag{2.40}$$

并且

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r \tag{2.41}$$

因此

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.42}$$

因此平衡点 $x = 0$ 是稳定的。现在假设式 (2.34) 也成立, 证明渐近稳定性，即对于每个 $a > 0$，存在 $T > 0$，使对于所有 $t > T$ 都有 $\|x(t)\| < a$ 。由于对于每个 $a > 0$，可选择 $b > 0$，满足 $\Omega_b \subset B_a$，因此，t 趋于无穷时,$V(x(t))$ 趋于零所以有。

$$V(x(t)) \to c \geqslant 0 \text{ 当} t \to \infty \tag{2.43}$$

证明 $c = 0$，采用反证法。假设 $c > 0$，由 $V(x)$ 的连续性可知，存在 $d > 0$ 使 $B_d \subset \Omega_c$ 。$V(x(t)) \to c > 0$ 是指所有 $t \geqslant 0$，轨线 $x(t)$ 位于球 B_d 之外。设 $-\gamma = \max_{d\leqslant\|x\|\leqslant r} \dot{V}(x)$，因为连续函数 $\dot{V}(x)$ 在紧集 $\{d \leqslant \|x\| \leqslant r\}$ (1) 上有最大值。由式 (2.34) 可知，$-\gamma < 0$，从而有

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))d\tau \leqslant V(x(0)) - \gamma t \tag{2.44}$$

该不等式右项最终为负，故与假设相矛盾。 □

满足式 (2.33) 的连续可微函数 $V(x)$ 称为李雅普诺夫函数。对于某个 $c > 0$，曲面 $V(x) = c$ 称为李雅普诺夫面或等位面。下面是 Barbashin-Krasovski 定理。

定理 2.3. 设 $x = 0$ 是方程的平衡点，$V : R^n \to R$ 是一个连续可微函数，且满足

$$\begin{gathered} V(0) = 0 \text{ 且} V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \\ \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \end{gathered} \tag{2.45}$$

下面是 Chetaev 定理，用于确定非稳定平衡点的不稳定性。

定理 2.4. 设 $x = 0$ 是方程 (4.1) 的平衡点。设 $V : D \to R$ 是连续可微函数，满足 $V(0) = 0$，且对于任意小 $\left\|x_0\right\|$ 的某一点 x_0，有 $V\left(x_0\right) > 0$ 。定义集合 $U = \left\{x \in B_r \mid V(x) > 0\right\}$, 并假设在 U 内有 $\dot{V}(x) > 0$，那么 $x = 0$ 就是非稳定平衡点。

接下来讨论非线性系统线性化的方法，定义线性系统

$$\dot{x} = Ax \tag{2.46}$$

该系统在原点处有一个平衡点，当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 时，该平衡点是孤立的。如果 $\det(A) = 0$，则矩阵 A 有一个非平凡零空间。A 的零空间内的每一点都是系统

的平衡点，进而系统有一个平衡点子空间。线性系统不可能有多个孤立的平衡点，因为如果 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 是系统的两个平衡点，那么连接 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 两点的直线上的每一点都是系统的平衡点。原点的稳定性质由矩阵 A 的特征值位置决定。对于给定的初始状态 $x(0)$，系统的解为

$$x(t) = \exp(At)x(0) \tag{2.47}$$

转换为若尔当标准型

$$P^{-1}AP = J = \text{ block diag } \left[J_1, J_2, \cdots, J_r\right] \tag{2.48}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{2.49}$$

因此

$$\exp(At) = P\exp(Jt)P^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1}\exp\left(\lambda_i t\right) R_{ik} \tag{2.50}$$

定理 2.5. 当且仅当 A 的所有特征值都满足 $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$，对于每个 $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$，代数重数 $q_i \geqslant 2$ 的特征值满足 $\operatorname{rank}\left(A - \lambda_i I\right) = n - q_i$ 时（n 为 x 的维数），方程 $\dot{x} = Ax$ 的平衡点 $x = 0$ 是稳定的。当且仅当 A 的所有特征值满足 $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ 时，平衡点 $x = 0$ 是全局渐近稳定的。

回到非线性系统 (2.29)，$f : D \to R^n$ 是从 $D \subset R^n$ 到 R^n 的连续可微映射。假设原点 $x = 0$ 在 D 内，且为系统的一个平衡点，即 $f(0) = 0$ 。根据均值定理

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}\left(z_i\right) x \tag{2.51}$$

其中 z_i 是连接 x 与原点之间的线段上的一点。由于 $f(0) = 0$

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}\left(z_i\right) x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}\left(z_i\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right] x \tag{2.52}$$

所以

$$f(x) = Ax + g(x) \tag{2.53}$$

其中

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}\left(z_i\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right] x \tag{2.54}$$

并且

$$\left|g_i(x)\right| \leqslant \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}\left(z_i\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\| \|x\| \tag{2.55}$$

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0，当\|x\| \to 0 \tag{2.56}$$

这就是说在原点的一个小邻域内，可以用对系统在原点的线性化方程

$$\dot{x} = Ax, \quad 其中A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \tag{2.57}$$

下面定理指出当原点是非线性系统的平衡点时，其稳定性可以通过研究线性系统在该平衡点的稳定性得出。

定理 2.6. 设 $x = 0$ 是非线性系统 $\dot{x} = f(x)$ 的一个平衡点，其中 $f : D \to R^n$ 是连续可微的，且 D 为原点的一个邻域。设

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|_{x=0} \tag{2.58}$$

如果 A 的所有特征值都满足 $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$，则原点是渐近稳定的。如果 A 至少有一个特征值满足 $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$，则原点是不稳定的。

证明. 首先证明第一条，由于任何正定对称矩阵 Q，李雅普诺夫方程的解 P 都是正定的。令 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$，则

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x^{\mathrm{T}}Pf(x) + f^{\mathrm{T}}(x)Px \\
&= x^{\mathrm{T}}P[Ax + g(x)] + \left[x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + g^{\mathrm{T}}(x)\right] Px \\
&= x^{\mathrm{T}}\left(PA + A^{\mathrm{T}}P\right) x + 2x^{\mathrm{T}}Pg(x) \\
&= -x^{\mathrm{T}}Qx + 2x^{\mathrm{T}}Pg(x)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

其中

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \to 0 当\|x\|_2 \to 0 \tag{2.60}$$

对于任意 $\gamma > 0$，存在 $r > 0$，使

$$\|g(x)\|_2 < \gamma\|x\|_2, \quad \forall\|x\|_2 < r \tag{2.61}$$

因此

$$\dot{V}(x) < -x^{\mathrm{T}}Qx + 2\gamma\|P\|_2\|x\|_2^2, \quad \forall\|x\|_2 < r \tag{2.62}$$

但是

$$x^{\mathrm{T}}Qx \geqslant \lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 \tag{2.63}$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵的最小特征值。注意，由于 Q 是对称且正定的，所以 $\lambda_{\min}(Q)$ 为正实数，因此

$$\dot{V}(x) < -\left[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2\right]\|x\|_2^2, \quad \forall\|x\|_2 < r \tag{2.64}$$

选择 $\gamma < (1/2)\lambda_{\min}(Q)/\|P\|_2$，以保证 $\dot{V}(x)$ 负定，所以原点是渐近稳定的。

证明定理的第二条，先考虑 A 在虚轴上没有特征值的特例。如果 A 的特征值集中到右半开平面为一组，左半开平面为一组，那么存在一个满秩矩阵 T，满足

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

并使得 A_1, A_2 的特征值实部均小于零，令

$$z = Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

z 的分块与 A_1 和 A_2 的维数一致。进行变量代换 $z = Tx$，则系统

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{2.67}$$

被分解为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + g_2(z) \end{aligned} \tag{2.68}$$

对于任意 $\gamma > 0$，存在 $r > 0$，对函数 $g_i(z)$ 有

$$\left\|g_i(z)\right\|_2 < \gamma\|z\|_2, \quad \forall\|z\|_2 \leqslant r, i = 1, 2 \tag{2.69}$$

设 Q_1 和 Q_2 分别是 A_1 和 A_2，维数相同的正定对称短阵。则方程

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i = -Q_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.70}$$

有唯一的正定解 P_1 和 P_2 。设

$$V(z) = z_1^{\mathrm{T}} P_1 z_1 - z_2^{\mathrm{T}} P_2 z_2 = z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} z \tag{2.71}$$

在子空间 $z_2 = 0$ 内，对于任意靠近原点的点有 $V(z) > 0$ 。设

$$U = \left\{ z \in R^n \mid \|z\|_2 \leqslant r \text{ 和} V(z) > 0 \right\} \tag{2.72}$$

则在 U 内，有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z) =& - z_1^{\mathrm{T}} \left(P_1 A_1 + A_1^{\mathrm{T}} P_1 \right) z_1 + 2 z_1^{\mathrm{T}} P_1 g_1(z) \\
& - z_2^{\mathrm{T}} \left(P_2 A_2 + A_2^{\mathrm{T}} P_2 \right) z_2 - 2 z_2^{\mathrm{T}} P_2 g_2(z) \\
=& z_1^{\mathrm{T}} Q_1 z_1 + z_2^{\mathrm{T}} Q_2 z_2 + 2 z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_1 g_1(z) \\ -P_2 g_2(z) \end{bmatrix} \\
\geqslant& \lambda_{\min} \left(Q_1 \right) \left\| z_1 \right\|_2^2 + \lambda_{\min} \left(Q_2 \right) \left\| z_2 \right\|_2^2 \\
& - 2 \|z\|_2 \sqrt{ \left\| P_1 \right\|_2^2 \left\| g_1(z) \right\|_2^2 + \left\| P_2 \right\|_2^2 \left\| g_2(z) \right\|_2^2 } \\
>& (\alpha - 2\sqrt{2} \beta \gamma) \|z\|_2^2
\end{aligned} \tag{2.73}$$

其中

$$\alpha = \min \left\{ \lambda_{\min} \left(Q_1 \right), \lambda_{\min} \left(Q_2 \right) \right\}, \quad \beta = \max \left\{ \left\| P_1 \right\|_2, \left\| P_2 \right\|_2 \right\} \tag{2.74}$$

选择 $\gamma < \alpha / (2\sqrt{2}\beta)$ 保证在 U 内有 $\dot{V}(z) > 0$ 。所以原点是非稳定的。通过定义矩阵

$$P = T^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T; \quad Q = T^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} T \tag{2.75}$$

满足方程

$$PA + A^{\mathrm{T}} P = Q \tag{2.76}$$

矩阵 Q 是正定的，并且 $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ 在任意靠近原点 $x = 0$ 点上为正。现在考虑 A 在虚轴上可能有特征值，而且在右半开复平面内也有特征值。运用平移坐标轴的简单方法，将一般情况转化为特殊情况。假设 A 有 m 个特征值，且满足 $\operatorname{Re} \lambda_i > \delta > 0$ 。那么，矩阵 $[A - (\delta/2) I]$ 在右半开平面内有 m 个特征值，但在虚轴上没有特征值。存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}}$ 和 $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$，使

$$P \left[A - \frac{\delta}{2} I \right] + \left[A - \frac{\delta}{2} I \right]^{\mathrm{T}} P = Q \tag{2.77}$$

其中，$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 对任意靠近原点的点都为正，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=x^{\mathrm{T}}\left(PA+A^{\mathrm{T}}P\right)x+2x^{\mathrm{T}}Pg(x)\\&=x^{\mathrm{T}}\left[P\left(A-\frac{\delta}{2}I\right)+\left(A-\frac{\delta}{2}I\right)^{\mathrm{T}}P\right]x+\delta x^{\mathrm{T}}Px+2x^{\mathrm{T}}Pg(x)\\&=x^{\mathrm{T}}Qx+\delta V(x)+2x^{\mathrm{T}}Pg(x)\end{aligned}\tag{2.78}$$

在集合 $\left\{x\in R^n \mid \|x\|_2\leqslant r \text{ 且 } V(x)>0\right\}$ 内，当 $\|x\|_2<r$ 时，选择 r 满足 $\|g(x)\|_2\leqslant\gamma\|x\|_2$，则 $\dot{V}(x)$ 满足

$$\dot{V}(x)\geqslant\lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2-2\|P\|_2\|x\|_2\|g(x)\|_2\geqslant\left(\lambda_{\min}(Q)-2\gamma\|P\|_2\right)\|x\|_2^2\tag{2.79}$$

当 $\gamma<(1/2)\lambda_{\min}(Q)/\|P\|_2$ 时，上式为正，运用 Chetaev 定理（定理 2.4）即可证明。 □

最大 Lyapunov 指数是判断非线性时间序列是否为混沌系统的重要指标，混沌运动的基本特点是运动对初始条件的扰动极为敏感，两个靠近的初始值所产生的轨道，随时间推移按指数方式分离，Lyapunov 指数就是用以描述这一现象的量。在一维动力系统 $x_{n+1}=F\left(x_n\right)$ 中，初始两点迭代后互相分离或者靠陇，取决于导数 $\left|\frac{dF}{dx}\right|$ 的值。若 $\left|\frac{dF}{dx}\right|>1$, 则两点分开；若 $\left|\frac{dF}{dx}\right|<1$，则得两点靠拢。有时在迭代过程中，$\left|\frac{dF}{dx}\right|$ 的值也随之而变化, 呈现出时而分离时而靠笼的情况。为了从整体上看相邻两个状态，将对时间 (或迭代次数) 取平均。设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 λ, 相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后距离为

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)}=\left|F^n\left(x_0+\varepsilon\right)-F^n\left(x_0\right)\right|\tag{2.80}$$

取 $\varepsilon\to 0, n\to\infty$

$$\lambda\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{F^n\left(x_0+\varepsilon\right)-F^n\left(x_0\right)}{\varepsilon}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{dF^n(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\tag{2.81}$$

可简化为

$$\lambda\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\tag{2.82}$$

λ 与初值的选取没有关系，称为原动力系统的 Lyapunov 指数，表示系统在多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数。若 $\lambda<0$，则意味着相邻点要靠拢合并成一点，这对应于稳定的不动点和周期运动；若 $\lambda>0$，则意味着相邻

点要分离，对应于轨道的局部不稳定。对于 n 维动力系统，设 F 为 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 上的 n 维映射，设 n 维离散动力系统: $x_{n+1} = \mathrm{F}\left(x_n\right)$ 。将系统的初始条件域取为一个无穷小的 n 维小球，由于演化过程中球将变成椭球。将椭球上所有主轴按其长度顺序排列，第 i 个 Lyapunov 指数为第 i 个主轴的长度 $P_i(n)$ 的增加速率，其定义为

$$\sigma_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{P_i(n)}{P_i(0)} \right|, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.83}$$

对于系统是否存在动力学混沌，从最大 Lyapunov 指数是否大于零非常直观的判断出来：一个正的 Lyapunov 指数，意味着系统相空间中，初始接近的两条轨线，其差别都会随着时间的演化而成指数率的增加以致达到无法预测，这就是混沌现象。下面给出 LE 指数计算方法的理论依据。

设动力学系统由方程式决定: $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$ 并考虑轨道相邻两点 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}'$ $\left(\xi = \mathbf{X} - \mathbf{X}'\right)$，将系统线性化得

$$\dot{\xi} = T(\mathbf{X}(t)) \cdot \xi$$

其中 $\mathbf{T} = (\partial F/\partial \mathbf{X})$ 是雅可比矩阵, ξ 是切平面上的切矢量, 将上式积分有

$$\xi(t) = \mathbf{A}'\xi(0)$$

其中，A' 是切向量 $\xi(0)$ 到 $\xi(t)$ 的线性映射算子，因此得到平均指数增长率为

$$\lambda(\mathbf{X}(0), \xi(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{\|\xi(t)\|}{\|\xi(0)\|}$$

对于重构相空间中的某一点 $\mathbf{X}_\mathrm{i}$,与 $\mathbf{X}_\mathbf{i}$ 点距离小于 ε 的所有点记为 $\left\{\mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}}, i = 1, 2, \cdots\right\}$，位移矢量为

$$\left\{\mathbf{Y}^\mathbf{i}\right\} = \left\{\mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}} - \mathbf{X}_\mathbf{i} \mid \left\|\mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}} - \mathbf{X}_\mathbf{i}\right\| \le \varepsilon\right\}$$

经过时间 t 后，演化为 $\mathbf{X}_\mathbf{i} \to \mathbf{X}_\mathbf{i+t}, \mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}} \to \mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}+\mathbf{t}}$，因此原位移矢量 $\left\{\mathbf{Y}^\mathrm{i}\right\}$ 映射为

$$\left\{\mathbf{Z}^\mathbf{i}\right\} = \left\{\mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}+\mathbf{t}} - \mathbf{X}_\mathbf{i+t} \mid \left\|\mathbf{X}_{\mathbf{k}_\mathbf{i}} - \mathbf{X}_\mathbf{i}\right\| \le \varepsilon\right\}$$

如果半径 ε 足够小，位移矢量 $\left\{\mathbf{Y}^\mathrm{i}\right\}$ 和 $\left\{\mathbf{Z}^\mathrm{i}\right\}$ 可以近似为切平面上的切矢量，从 $\mathbf{Y}^\mathrm{i}$ 到 $\mathbf{Z}^\mathbf{i}$ 的矩阵 $\mathbf{A}_\mathbf{j}$ 满足

$$\mathbf{Z}^\mathbf{i} = \mathbf{A}_\mathbf{j}\mathbf{Y}^\mathbf{i}$$

使用最小二乘法，可以矩阵 $\mathbf{A}$, QR 分解矩阵 $\mathbf{A}$，在不同的时间段内进行 Gram-Schmidt 正交化，即可得到所需的 lyapunov 指数 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, d$。

2.2 稀疏重构基本理论和算法

2.2.1 稀疏重构基本理论

该节介绍了压缩感知理论的定义以及基础数学知识，通过探寻不同的限制与不同的感应矩阵性质给出稀疏重构问题解的唯一性与存在性的等价条件。如若未说明，本节内容只讨论实向量空间，可拓展至复数的会单独指明。

2.2.1.1 稀疏重构问题的定义

假设信号 $x = \left(x_i\right)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ 具有稀疏性质，或者在一个正交变换后具有这样的性质即 $\|x\|_0 := \#\{i : x_i \neq 0\}$ 远小于 n 或 $x = \Phi c$，Φ 是正交矩阵且 c 稀疏。取 $m \times n$ 的矩阵 A，其中 $m < n$。令

$$y = Ax, y = A\Phi c \tag{2.84}$$

稀疏重构问题是指在已知原向量 x 中零元素足够多的情况下从 y 与 A 中还原出 x，矩阵 A 被称为感应矩阵。

2.2.1.2 最优化理论

在 x 本身是稀疏的条件下还原条件在优化问题中的表述为

$$\left(P_0\right) \qquad \min_x \|x\|_0 \quad s.t. \quad y = Ax \tag{2.85}$$

这个问题是 NP 难问题，无法在有限迭代找出最优解，但是问题

$$\left(P_1\right) \qquad \min_x \|x\|_1 \quad s.t. \quad y = Ax \tag{2.86}$$

有解，并且 l_1 的减小可以促进稀疏性，因此 $l_1 = l_0$ 何时成立是稀疏还原的一个核心问题，这取决于 x 本身的稀疏度与感应矩阵 A，并且对于超大数据量的情况，最小化 l_1 的方法也无法解决问题，本文会介绍在这种情况下启发式算法的应用与性能。接下来给出 NP 困难的证明，下面定理说明了 (P_0) 问题可以在多项式时间复杂度内约化为集合的精确覆盖，这是一个经典的 NP-hard 问题。

定理 2.7. 对于任意的 $\eta \geq 0$ 问题

$$\min_x \|x\|_0 \quad s.t. \quad \|Ax - y\|_2 \leq \eta \tag{2.87}$$

对于一般的矩阵 $A = \in \mathbb{C}^{m\times N}$ 与向量 $y \in \mathbb{C}^m$ 都是 *NP-hard* 的。也就是说，找不到多项式时间复杂度的算法解决这一问题。

证明. 不妨设 $\eta < 1$，令 $\left\{C_i, i \in [N]\right\}$ 是一簇 $[m]$ 的三元素子集，即 C_i 都是由 $[m]$ 中三个元素构成的。定义向量 $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{C}^m$

$$\left(a_i\right)_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j \in C_i \\ 0 & \text{if } j \notin C_i \end{cases} \tag{2.88}$$

定义矩阵 A 与向量 y

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_N \end{array}\right], \quad y = [1, 1, \ldots, 1]^\top \tag{2.89}$$

由于 $N \leq \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$，这种构造可以在多项式时间内完成，若向量 $z \in \mathbb{C}^N$ 满足 $\|Az - y\|_2 \leq \eta$，则对于 Az 中所有 m 个元素与 1 的距离都不会超过 η，所以均非零且 $\|Az\|_0 = m$ 但是因为 a_i 有 3 个非零元，$Az = \sum_{j=1}^N z_j a_j$ 有至多 $3\|z\|_0$ 个非零元，$\|Az\|_0 \leq 3\|z\|_0$。因此，如若满足条件 $\|Az - y\|_2 \leq \eta$，向量 z 一定有 $\|z\|_0 \geq m/3$。下面将算法输出定义为 $x \in \mathbb{C}^N$ ，分为两种情况讨论：

1. 若 $\|x\|_0 = m/3$，则集合 $\left\{C_j | j \in \mathrm{supp}(x)\right\}$ 组成了 $[m]$ 的一个精确覆盖，否则 $Ax = \sum_{j=1}^N x_j a_j$ 的 m 个元不可能全部非零。

2. 若 $\|x\|_0 > m/3$，则不存在精确覆盖 $\left\{C_j, j \in J\right\}$，否则定义向量 $z \in \mathbb{C}^N$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j \in J \\ 0 & \text{if } j \notin J \end{cases}$$

有 $Az = y, \|z\|_0 = m/3$，矛盾。

因此，(P_0) 在多项式时间复杂度内可以约化为精确覆盖问题。 □

2.2.1.3　稀疏度的定义

本节会介绍稀疏度的定义与可压缩性的度量，并给出它们基础的性质。

定义 2.4. 向量 $x = \left(x_i\right)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ 称为有 k 阶稀疏度，如果

$$\|x\|_0 := \#\{i : x_i \neq 0\} \leq k \tag{2.90}$$

稀疏向量的支撑定义为其非零元素的位置

$$\mathrm{supp}(x) := \left\{j \in [N] : x_j \neq 0\right\} \tag{2.91}$$

将有 k 阶稀疏度的向量集合记为 Σ_k。在一般应用场景中，k 阶稀疏度的条件仍然苛刻，一般采取如下定义来说明可压缩的程度。

定义 2.5. 令 $1 < p < \infty, r > 0$，向量 $x = \left(x_i\right)_{i=1}^{N} \in \mathbb{R}^N$ 称为可在常数 C 和比率 r 下依 p 范数压缩，如果对于任意的 $k \in 1, 2, \dots, N$

$$\sigma_k(x)_p := \min_{\tilde{x} \in \Sigma_k} \|x - \tilde{x}\|_p \leq C \cdot k^{-r} \tag{2.92}$$

同时也称使最小值取得的 z 为 ℓ_p 空间中最佳 k 项近似。

称 x 为可压缩的若 $\sigma_k(x)_p$ 随着 k 增大而迅速减小。下面的性质说明在 ℓ_p 单位球内均是可压缩的。

命题 2.8. $\forall q > p > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$，有不等式

$$\sigma_k(x)_q \leq \frac{1}{k^{1/p-1/q}} \|x\|_p \tag{2.93}$$

证明这个性质之前，引入非减重排的定义。

定义 2.6. x 的非减重排 x^*，是指其每个元素

$$x_1^* \geq x_2^* \geq \dots \geq x_N^* \geq 0 \tag{2.94}$$

并且 x_i^* 同样是 x 中的所有元素。

下面给出命题的证明

证明. 引入非减重排 x^*，由下列不等式

$$\begin{aligned} \sigma_k(x)_q^q &= \sum_{j=k+1}^{N} \left(x_j^*\right)^q \leq \left(x_k^*\right)^{q-p} \sum_{j=k+1}^{N} \left(x_j^*\right)^p \leq \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^*\right)^p\right)^{\frac{q-p}{p}} \left(\sum_{j=k+1}^{N} \left(x_j^*\right)^p\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{k} \|x\|_p^p\right)^{\frac{q-p}{p}} \|x\|_p^p = \frac{1}{k^{q/p-1}} \|x\|_p^q \end{aligned} \tag{2.95}$$

两边取 $1/p$ 次幂可得。 □

该定理有一个加强版本, 证明篇幅长故略。

定理 2.9. $\forall q > p > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$，有不等式

$$\sigma_k(x)_q \le \frac{c_{p,q}}{k^{1/p-1/q}} \|x\|_p \tag{2.96}$$

其中

$$c_{p,q} := \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{p/q} \left(1 - \frac{p}{q} \right)^{1-p/q} \right]^{1/p} \le 1 \tag{2.97}$$

还有一种手段来说明向量的可压缩程度，如果向量中有大量的小数值元素（非零），仅有少部分重要的元素。即

$$\operatorname{card}\left(\left\{ j \in [N] : \left| x_j \right| \ge t \right\} \right)$$

很小，其中 card 为集合的势。下面来讨论弱 ℓ_p 空间。

定义 2.7. 对于 $p > 0$，弱空间 $w\ell_p^N$ 是以

$$\|x\|_{p,\infty} := \inf \left\{ M \ge 0 : \operatorname{card}\left(\left\{ j \in [N] : \left| x_j \right| \ge t \right\} \right) \le \frac{M^p}{t^p}, \forall t > 0 \right\} \tag{2.98}$$

为准范数的向量空间。

这个空间有一个弱化的三角不等式法则。

命题 2.10. $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^N, p > 0$ 有

$$\left\| x^1 + \cdots + x^k \right\|_{p,\infty} \le k^{\max\{1,1/p\}} \left(\left\| x^1 \right\|_{p,\infty} + \cdots + \left\| x^k \right\|_{p,\infty} \right) \tag{2.99}$$

下面是弱范数的另一种形式。

命题 2.11. 令 x^* 是 x 的非减重排。

$$\|x\|_{p,\infty} = \max_{i \in [N]} k^{1/p} x_i^* \tag{2.100}$$

下面命题可以说明弱范数比原范数更小。

命题 2.12. 对于 $p > 0$ 与 $x \in \mathbb{R}^N$，

$$\|x\|_{p,\infty} \le \|x\|_p \tag{2.101}$$

证明. 对于任意的 $j \in [N]$，有

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^* \right)^p \ge \sum_{i=1}^{j} \left(x_i^* \right)^p \ge j \left(x_j^* \right)^p \tag{2.102}$$

两边取 $1/p$ 次幂可得。 □

接下来运用弱范数可以给出压缩性的另一种控制了。

定理 2.13. $\forall q > p > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$，有不等式

$$\sigma_k(x)_q \leq \frac{d_{p,q}}{k^{1/p-1/q}} \|x\|_{p,\infty} \tag{2.103}$$

其中

$$d_{p,q} := \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q} \tag{2.104}$$

证明. 不失一般性设 $\|x\|_{p,\infty} \leq 1$，因此 $x_j^* \leq 1/j^{1/p}$，有

$$\begin{aligned}\sigma_k(x)_q^q &= \sum_{j=k+1}^{N} \left(x_j^*\right)^q \leq \sum_{j=k+1}^{N} \frac{1}{j^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}}\bigg|_{t=k}^{t=N} \\ &\leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{k^{q/p-1}}\end{aligned} \tag{2.105}$$

两边取 $1/p$ 次幂可得。 □

2.2.1.4 稀疏重构解的唯一性的条件

这里对 0 范数和 1 范数分别给出其等价条件。

定义 2.8. 取 $m \times N$ 的矩阵 A，spark(A) 是 A 的列向量线性相关的最小向量数目。

引理 2.14. 记 $\mathcal{N}(A)$ 为矩阵 A 的零空间，则

$$\operatorname{spark}(A) = \min\left\{k : \mathcal{N}(A) \cap \Sigma_k \neq \{0\}\right\} \tag{2.106}$$

并且 $\operatorname{spark}(A) \in [2, m+1]$。

下面是 0 范意义 P_0 下解的唯一性的等价条件。

定理 2.15. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，且 $k \in \mathbb{N}$，则下述 2 个条件等价

（i）若存在 P_0 下解使得 $\|x\|_0 \leq k$，则解唯一。

（ii）$k < \operatorname{spark}(A)/2$。

证明. $(i) \Rightarrow (ii)$，采用反证法，若 (ii) 不成立，则 $\exists h \in \mathcal{N}(A), h \neq 0$，同时 $\|h\|_0 \leq 2k$。因此存在 x 和 $\tilde{x}$ 满足 $h = x - \tilde{x}$ 并且 $\|x\|_0, \|\tilde{x}\|_0 \leq k$，但是 $Ax = A\tilde{x}$，矛盾。

$(ii) \Rightarrow (i)$，令 x 和 $\tilde{x}$ 是满足条件的两个解，则有 $x - \tilde{x} \in \mathcal{N}(A)$，并且有 $\|x - \tilde{x}\|_0 \leq 2k < \operatorname{spark}(A)$，由引理得，$x - \tilde{x} = 0$。 □

现在引入一个记号 1_Λ，其中 Λ 是 $1, 2, \ldots, N$ 的一个子集。

$$\left(1_\Lambda x\right)_i = \begin{cases} x_i & : i \in \Lambda, \\ 0 & : i \notin \Lambda, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.107}$$

定义 2.9. 令 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，称 A 具有 k 阶空空间性质（NSP），如果对于 $\forall h \in \mathcal{N}(A)$,$h \neq 0$ 且对于 $\forall |\Lambda| \leq k$，均有

$$\left\|1_\Lambda h\right\|_1 < \frac{1}{2}\|h\|_1 \tag{2.108}$$

下面是 1 范意义 P_1 下解的唯一性的等价条件。

定理 2.16. *令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，且 $k \in \mathbb{N}$，则下述 2 个条件等价*

（i）*若存在 P_1 下解使得 $\|x\|_0 \leq k$，则解唯一。*

（ii）*矩阵 A 具有 k 阶空空间性质。*

2.2.1.5　稀疏重构解存在的充分性条件

本节内容旨在讨论稀疏重构问题中 0 范数与 1 范数的解存在条件与一致时的条件，首先是 P_0 问题。

定理 2.17. *对于任意的 $N \leq 2k$，存在矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$，其中 $m = 2k$，使得 k 稀疏的条件下 P_0 有解。*

证明. 取范德蒙矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{2k-1} & t_2^{2k-1} & \cdots & t_N^{2k-1} \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

令 $S = \left\{j_1 < \cdots < j_{2k}\right\}$ 是指标集，构造方阵 A_S，行列式为

$$\det\left(A_S\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_{j_1} & t_{j_2} & \cdots & t_{j_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{j_1}^{2k-1} & t_{j_2}^{2k-1} & \cdots & t_{j_{2k}}^{2k-1} \end{vmatrix} = \prod_{s<\ell}\left(t_{j_\ell} - t_{j_s}\right) > 0 \tag{2.110}$$

根据定理 2.8 与矩阵 A_S 的可逆性可以得出问题 P_0 的存在唯一性的条件，A 的解只需根据指标集 S 按位置取出即可。 □

定义 2.10. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，a_i 为其第 i 个列向量，矩阵相关性指数 $\mu(A)$ 定义为

$$\mu(A) = \max_{i \neq j} \frac{\left|\left\langle a_i, a_j \right\rangle\right|}{\left\|a_i\right\|_2 \left\|a_j\right\|_2}. \tag{2.111}$$

显然当 A 有两列成比例时，相关性指数达到最大值 1。

引理 2.18. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，那么

$$\mu(A) \in \left[\sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}\text{▯}1\right] \tag{2.112}$$

通过这个结果可以给出一个使 0 范数与 1 范数的一致的充分条件。

定理 2.19. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，$x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ 是 (P_0) 问题的一个解，并且有

$$\|x\|_0 < \frac{1}{2}\left(1 + \mu(A)^{-1}\right). \tag{2.113}$$

那么 x 是 (P_0) 和 (P_1) 问题的唯一解。

定义 2.11. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，称 A 具有 k 阶有限等距性质（RIP），如果 $\exists \delta_k \in (0,1)$，使得 $\forall x \in \Sigma_k$，均有

$$\left(1 - \delta_k\right) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq \left(1 + \delta_k\right) \|x\|_2^2 \tag{2.114}$$

定理 2.20. 令 A 是 $m \times N$ 阶具有 $2k$ 阶有限等距性质的矩阵，其中 $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$。令 $x \in \mathbb{R}^n$，$\hat{x}$ 是 (P_1) 的一个解，那么

$$\|x - \hat{x}\|_2 \leq C \cdot \left(\frac{\sigma_k(x)_1}{\sqrt{k}}\right) \tag{2.115}$$

其中 C 是某个关于 δ_{2k} 的常数。

目前已知条件下，$\delta_{2k} < 0.473$ 是必要的。

2.2.1.6　稀疏重构解存在的必要性条件

本节内容旨在讨论稀疏重构问题中 0 范数与 1 范数的解一致时的必要条件，主要思路是利用凸多面体理论推导等价。先引出 n 阶实心单位多面体的定义。

$$C^n = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 \leq 1\right\} \tag{2.116}$$

定理 2.21. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵，多面体 $P = AC^N \subseteq \mathbb{R}^m$，下述条件等价。

（i）P 的 k 面数与 C^N 的 k 面数相等。

（ii）$(P_0) = (P_1)$

2.2.1.7　感应矩阵的性质

在介绍了稀疏度、RIP 性质、相关性指数后，本节谈论他们之间的联系。

定理 2.22. 令 A 是 $m\times N$ 阶矩阵，并且每个列向量都是归一化的。

(i)$\operatorname{spark}(A)\geq 1+\frac{1}{\mu(A)}$。

(ii)A 满足 k 阶 *RIP* 性质，其中 $\delta_k=k\mu(A),\forall k<\mu(A)^{-1}$。

(iii) 假设 A 具有 $2k$ 阶 *RIP* 性质，其中 $\delta_{2k}<\sqrt{2}-1$，如果

$$\frac{\sqrt{2}\delta_{2k}}{1-(1+\sqrt{2})\delta_{2k}}<\sqrt{\frac{k}{N}} \tag{2.117}$$

则 A 有 $2k$ 阶 *NSP* 性质。

下面来总结一些特殊感应矩阵的稀疏度与相关性指数。首先是 $m\times N$ 阶范德蒙矩阵 A，它的稀疏度是

$$\operatorname{spark}(A)=m+1 \tag{2.118}$$

如果是由两个相互无偏正交基构成的矩阵，则其相关性指数为

$$\mu\left(\left[\Phi_1\mid\Phi_2\right]\right)=\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{2.119}$$

从一些已知结构生成的矩阵，如 Alltop 序列或格拉斯曼框架生成出的 $m\times m^2$ 阶矩阵，则其相关性指数为

$$\mu(A)=\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{2.120}$$

下面给出了一种生成具有 RIP 性质的矩阵的方法。

引理 2.23. 令 $\epsilon\in(0,1)$，$x_1,x_2,...,x_p\in\mathbb{R}^N$，并且 $m=O\left(\epsilon^2\log p\right)$ 是一个正整数。则存在一个李普希茨映射 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^m$，使得

$$(1-\varepsilon)\left\|x_i-x_j\right\|_2^2\leq\left\|f\left(x_i\right)-f\left(x_j\right)\right\|_2^2\leq(1+\varepsilon)\left\|x_i-x_j\right\|_2^2\quad\forall i,j\in\{1,\ldots,p\} \tag{2.121}$$

对于 $\forall x\in\mathbb{R}^N$，由某个概率分布产生的随机矩阵 A 对应的变换满足引理条件的概率为

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\|x\|_2^2\leq\|Ax\|_2^2\leq(1+\varepsilon)\|x\|_2^2\right)\leq 1-2e^{-c_0\varepsilon^2 m} \tag{2.122}$$

定理 2.24. 令 $\delta \in (0,1)$，若由某个概率分布产生的随机矩阵 A 在 $\varepsilon = \delta$ 时满足上式中的条件，那么存在两个常数 c_1, c_2，在概率不大于 $1 - 2e^{-c_2\delta^2 m}$ 的条件下，A 满足 $k \leq \frac{c_1\delta^2 m}{\log(n/k)}$ 阶 *RIP* 性质。

由此可见，通过随机构建一个列数够大的矩阵，即 $m > \delta^{-2} k \log(N/k)$ 就可以满足 RIP 性质的要求。

2.2.2 稀疏重构算法

经过上节的讨论得知，某些情况下 P_0 问题可以转换为 P_1 问题，而 P_1 是经典的基追踪问题，首先说明这种情况。

定理 2.25. 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times N}$，其列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$，假设存在唯一的解 $\mathbf{x}^\sharp$ 使得

$$\underset{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \textit{subject to}\ \mathbf{Az} = \mathbf{y} \tag{2.123}$$

则 $\left\{\mathbf{a}_j, j \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{x}^\sharp\right)\right\}$ 是线性无关的，并且

$$\left\|\mathbf{x}^\sharp\right\|_0 = \operatorname{card}\left(\operatorname{supp}\left(\mathbf{x}^\sharp\right)\right) \leq m \tag{2.124}$$

证明. 使用反证法，假设 $\{\mathbf{a}_j \,|\, j \in S\}$ 是线性相关的，其中 $S = \operatorname{supp}\left(\mathbf{x}^\sharp\right)$，也就是说，存在非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 使得 $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ 并且支撑在 S 上。对任意 $t \neq 0$

$$\left\|\mathbf{x}^\sharp\right\|_1 < \left\|\mathbf{x}^\sharp + t\mathbf{v}\right\|_1 = \sum_{j\in S}\left|x_j^\sharp + tv_j\right| = \sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp + tv_j\right)\left(x_j^\sharp + tv_j\right) \tag{2.125}$$

如果 $|t| < \min_{j\in S}\left|x_j^\sharp\right| / \|\mathbf{v}\|_\infty$，有

$$\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp + tv_j\right) = \operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right) \quad \text{for all } j \in S \tag{2.126}$$

因此，在这种情形下

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{x}^\sharp\right\|_1 &< \sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right)\left(x_j^\sharp + tv_j\right) = \sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right)x_j^\sharp + t\sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right)v_j \\ &= \left\|\mathbf{x}^\sharp\right\|_1 + t\sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right)v_j.\end{aligned} \tag{2.127}$$

由于总能找到 $t \neq 0$ 使得 $t\sum_{j\in S}\operatorname{sgn}\left(x_j^\sharp\right)v_j \leq 0$，产生矛盾。 □

Basis pursuit

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$.
Instruction:

$$\mathbf{x}^\sharp = \operatorname{argmin} \|\mathbf{z}\|_1 \qquad \text{subject to } \mathbf{Az} = \mathbf{y}. \tag{BP}$$

Output: the vector $\mathbf{x}^\sharp$.

基追踪问题可以转换为线性规划问题。

$$\min_{x,u} \sum_i u_i \quad \text{subject to} \begin{cases} x_i - u_i \leq 0 \\ -x_i - u_i \leq 0 \\ Ax = b \end{cases} \tag{2.128}$$

进而用下述算法求解。

Primal–Dual Algorithm

Input: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$, convex functions F, G.
Parameters: $\theta \in [0,1], \tau, \sigma > 0$ such that $\tau\sigma\|\mathbf{A}\|_{2\to 2}^2 < 1$.
Initialization: $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{C}^N, \boldsymbol{\xi}^0 \in \mathbb{C}^m, \bar{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{x}^0$.
Iteration: repeat until a stopping criterion is met at $n = \bar{n}$:

$$\boldsymbol{\xi}^{n+1} := P_{F^*}(\sigma; \boldsymbol{\xi}^n + \sigma\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^n), \tag{PD$_1$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} := P_G(\tau; \mathbf{x}^n - \tau\mathbf{A}^*\boldsymbol{\xi}^{n+1}), \tag{PD$_2$}$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{n+1} := \mathbf{x}^{n+1} + \theta(\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n). \tag{PD$_3$}$$

Output: Approximation $\boldsymbol{\xi}^\sharp = \boldsymbol{\xi}^{\bar{n}}$ to a solution of the dual problem (15.16),
Approximation $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ to a solution of the primal problem (15.15).

下面是采用贪心策略的启发式算法，并不一定能收敛到最优解，首先是最经典的正交追踪。

下面的引理指出 $\operatorname*{argmax}_{j\in[N]} \left\{ \left| \left(\mathbf{A}^* \left(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n\right)\right)_j \right| \right\}$ 确实是一个好的贪心策略。

引理 2.26. 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ 是列归一化矩阵，给定的 $S \subset [N]$，$\mathbf{v}$ 支撑在 S 上，并且 $j \in [N]$，如果

$$\mathbf{w} := \operatorname*{argmin}_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{Az}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S \cup \{j\} \right\} \tag{2.129}$$

Orthogonal matching pursuit (OMP)

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$.
Initialization: $S^0 = \emptyset$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
Iteration: repeat until a stopping criterion is met at $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = S^n \cup \{j_{n+1}\}, \quad j_{n+1} := \underset{j \in [N]}{\operatorname{argmax}} \left\{ \left| (\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j \right| \right\}, \tag{OMP$_1$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \underset{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1} \right\}. \tag{OMP$_2$}$$

Output: the $\bar{n}$-sparse vector $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

那么有

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \le \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - \left| \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \right)_j \right|^2 \tag{2.130}$$

证明. 任取 $t \in \mathbb{C}$，形如 $\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j$ 的向量都支撑在 $S \cup \{j\}$ 上，并且

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \le \min_{t \in \mathbb{C}} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{A}\left(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j \right) \right\|_2^2 \tag{2.131}$$

设 $t = \rho e^{i\theta}$，有

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{A}\left(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j \right) \right\|_2^2 &= \left\| \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v} - t\mathbf{A}\mathbf{e}_j \right\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + |t|^2 \left\| \mathbf{A}\mathbf{e}_j \right\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\left(\bar{t} \left\langle \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{e}_j \right\rangle \right) \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\operatorname{Re}\left(\rho e^{-i\theta} \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \right)_j \right) \\ &\ge \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho \left| \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \right)_j \right| \end{aligned} \tag{2.132}$$

最后一式在 $\rho = \left| \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \right)_j \right|$ 时取最小，即

$$\min_{t \in \mathbb{C}} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{A}\left(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j \right) \right\|_2^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - \left| \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \right)_j \right|^2 \tag{2.133}$$

□

正交匹配追踪算法有一个问题，一旦选择了不正确的索引，它就会保留下去，在 s 次迭代内没有办法修正。下面的 CoSaMP 算法增加了迭代次数，并且采用了更有意义的索引。设 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$

$$L_s(\mathbf{z}) := s\text{个最大绝对条目的索引集} \tag{2.134}$$

$$H_s(\mathbf{z}) := \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})} \tag{2.135}$$

其中非线性算子 H_s 称为 s 阶硬阈值运算符，它将保留绝对值最大的前 s 项，并将其他项置为 0。

Compressive sampling matching pursuit (CoSaMP)

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$, sparsity level s.
Initialization: s-sparse vector $\mathbf{x}^0$, typically $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
Iteration: repeat until a stopping criterion is met at $n = \bar{n}$:

$$U^{n+1} = \mathrm{supp}(\mathbf{x}^n) \cup L_{2s}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)) \,, \tag{CoSaMP$_1$}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}{\mathrm{argmin}} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset U^{n+1} \right\} \,, \tag{CoSaMP$_2$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = H_s(\mathbf{u}^{n+1}). \tag{CoSaMP$_3$}$$

Output: the s-sparse vector $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

通过硬阈值的引入，可以将基追踪法的选取数量放宽，转变成基阈值法。

Basic thresholding

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$, sparsity level s.
Instruction:

$$S^\sharp = L_s(\mathbf{A}^*\mathbf{y}), \tag{BT$_1$}$$

$$\mathbf{x}^\sharp = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}{\mathrm{argmin}} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S^\sharp \right\}. \tag{BT$_2$}$$

Output: the s-sparse vector $\mathbf{x}^\sharp$.

阈值法有一个重要的性质。

命题 2.27. 向量可被阈值法还原的充要条件是

$$\min_{j\in S} \left| \left(\mathbf{A}^*\mathbf{y}\right)_j \right| > \max_{\ell\in\bar{S}} \left| \left(\mathbf{A}^*\mathbf{y}\right)_\ell \right| \tag{2.136}$$

接下来是阈值法的两个变种。

Iterative hard thresholding (IHT)

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$, sparsity level s.
Initialization: s-sparse vector $\mathbf{x}^0$, typically $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
Iteration: repeat until a stopping criterion is met at $n = \bar{n}$:

$$\mathbf{x}^{n+1} = H_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)). \tag{IHT}$$

Output: the s-sparse vector $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Hard thresholding pursuit (HTP)

Input: measurement matrix $\mathbf{A}$, measurement vector $\mathbf{y}$, sparsity level s.
Initialization: s-sparse vector $\mathbf{x}^0$, typically $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
Iteration: repeat until a stopping criterion is met at $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = L_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)), \tag{HTP$_1$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1} \right\}. \tag{HTP$_2$}$$

Output: the s-sparse vector $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

2.3　小结

第 3 章　小世界复杂网络的混沌、同步动力学

本章针对一种新型的 Duffing-WS 型小世界网络，首先利用变分法推导其最大李雅普诺夫指数表达式，并以李雅普诺夫指数作为混沌现象的判断标准研究该复杂网络的混沌现象，同时讨论了网络混沌现象对网络各个参数的依赖关系。接着分析同步。。。。研究表明，Duffing-WS 型小世界网络具有比单个 Duffing-方程更为复杂的混沌特性。。。

3.1　Duffing-WS 型小世界网络基本模型

Duffing 方程作为研究最为充分的混沌连续动力系统模型之一，具有丰富的非线性动力学行为 [15]。早在 1918 年，Duffing 首次引入 Duffing 方程用来描述机械问题中具有硬弹簧效应的非线性振子。后来到 1979 年，牧恩 (Moon) 和霍尔姆斯 (Holmes) 将其修改为描述处在两个永久磁铁非均匀场中的支架梁的强迫振动。一般的 Duffing 振子可由如下的方程描述：

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial V(x)/\partial x = f(t) \tag{3.1}$$

其中, $\gamma > 0$ 为阻尼系数，$V(x)$ 表示物体所受势场力，$f(t)$ 表示外激励力。当 $V(x)$ 和 $f(t)$ 取不同的形式时，便可得不同形式的 Duffing 方程。

规范化的 Holmes 型 Duffing 方程如下：

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + ax - bx^3 + A\sin(\Omega t) \tag{3.2}$$

令 $y = \dot{x}$，则上述方程可以改写为：

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ax - bx^3 - \gamma y + A\sin(\Omega t), \end{cases} \tag{3.3}$$

当周期振幅为 0 时，通过令方程组 (*) 右式为 0 可得 Holmes 型 Duffing 方程（*）具有三个平衡点：$S = (0,0), F_1 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right), F_2 = \left(-\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right)$。其中 F_1, F_2 是稳定的焦点，而 S 是不稳定的鞍点。

此外，它的相空间体积为：

$$divV = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(ax - bx^3 - \gamma y)}{\partial y} = -\gamma < 0 \tag{3.4}$$

所以上述 Duffing 系统是一个耗散动力系统。

当外加周期驱动力不存在 (即 $A = 0$) 时，受迫的 Holmes 型 Duffing 方程 (*) 退化为无摄动的 Duffing 方程，方程的解 $x(t)$ 将以螺旋形式 (衰减振荡) 趋于两稳定焦点之一，并且初始条件决定着系统将最终趋于哪一焦点。在其他参数固定的条件下，周期驱动力的幅值 A 从 0 开始逐渐增加到 1 时，方程的解会经历同宿轨道、分岔、混沌和大尺度周期等各个状态。图 * 给出了当 A 取不同值时 Duffing 方程输出响应的时域图，图 * 则给出了其输出的相图，展示了 Duffing 振子从吸引子状态，再通过倍周期分岔走向混沌的过程。

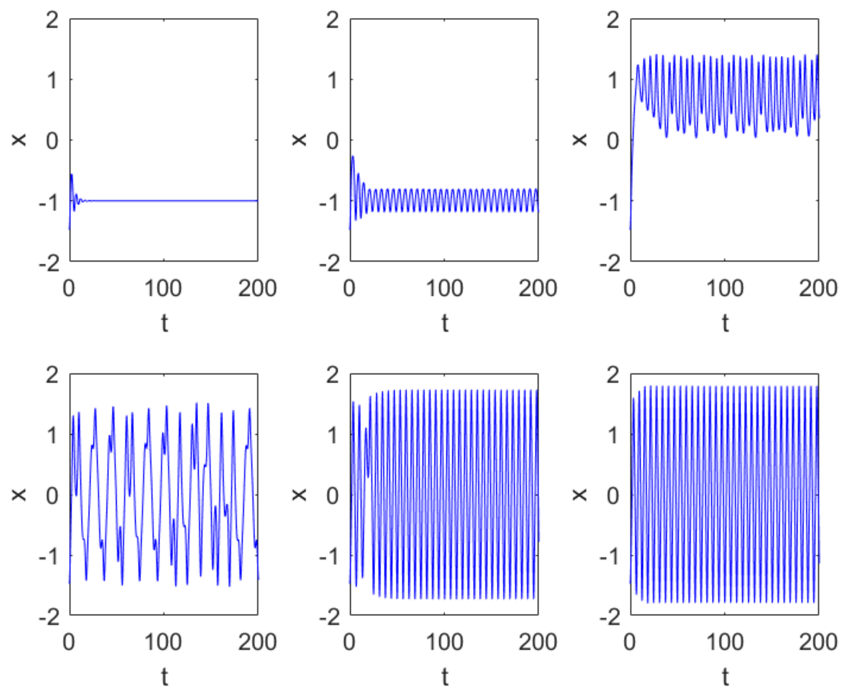


图 3.1 不同周期振幅 A 取值时，Duffing 方程输出时域图

所谓分岔是指对于含参数的系统，当参数变动并经过某些临界值时，系统的定态性质（如平衡状态或者周期运动的数目和稳定性）会发生突然的变化。分岔图则绘制了系统的庞加莱截面输出随参数的变化图，可用于比较微小参数扰动对系统指标的影响，是系统稳定性的直观衡量。下图 * 给出了 Duffing 方程输出 x 随周期驱动幅度 A 变化的分岔图（借助庞加莱截面），也可以看到随着周期驱动幅度 A 的变化，Duffing 方程从吸引子走向混沌、大周期运动的过程。

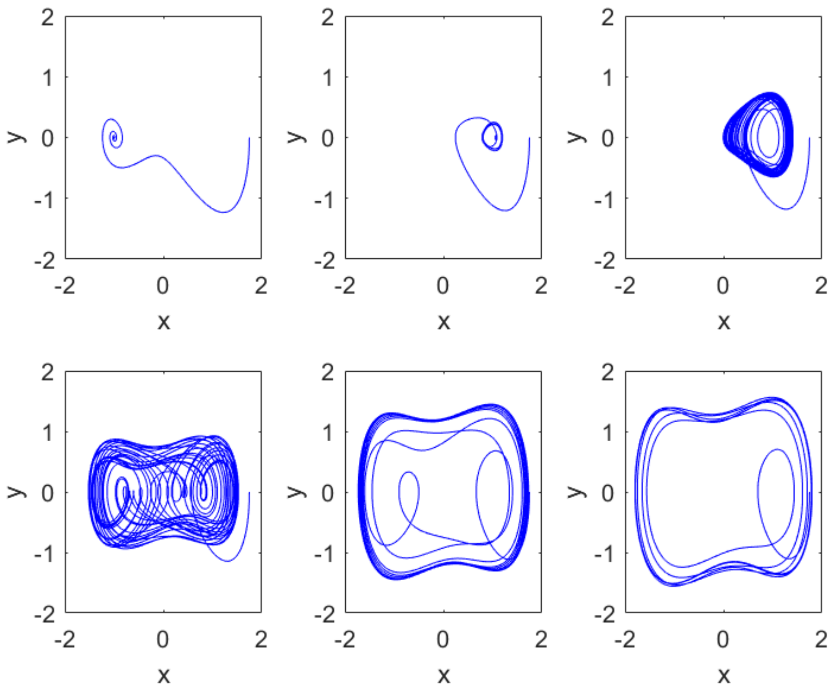


图 3.2 不同周期振幅 *A* 取值时，**Duffing** 方程输出相图

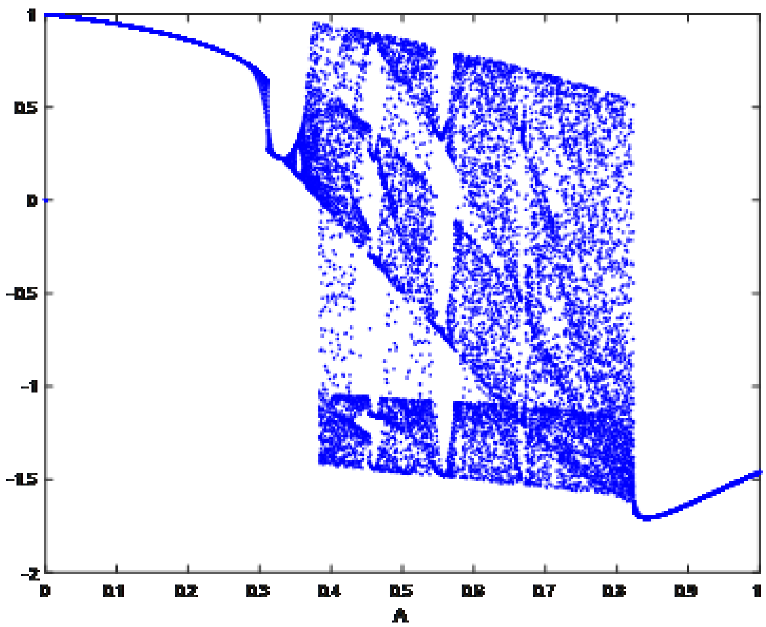


图 3.3 **Duffing** 方程随周期振幅 *A* 变化的分叉图

3.1.1　Duffing-WS 型小世界网络基本模型

基于上述经典的 Holmes 型 Duffing 方程 (3.1)，本文提出如下具有 N 个节点的以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网，即 Duffing- WS 型小世界网络，其动力学方程为：

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + a x_i - b {x_i}^3 + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(x_j - x_i\right) + A\sin(\Omega t), i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.5}$$

其中，$x_i(t)$ 为第 i 个节点的输出状态变量，$i = 1, 2, \ldots, N$。$A\sin(\Omega t)$ 为周期驱动力，$\varepsilon \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(x_j - x_i\right)$ 表示其它节点对第 i 个节点的耦合作用项, 称为耦合项，ε 为网络耦合强度，$\left(a_{ij}\right)_{N\times N}$ 为网络的邻接矩阵。一般的，对于一个无权无向的简单连通网络来说，如果第 i 个节点和第 j 个节点之间有连接，则 $a_{ij} = 1$；否则 $a_{ij} = 0$。

这里我们采用 Watts 和 Strogatz 提出的 WS 小世界网络作为网络连接拓扑结构 [3]，其连接方式按如下方式进行：

（1）首先, N 个节点连接形成一个规则的相邻网络，每个节点与它最近邻的 K 个节点相连，这里 K 称为重连度; （2）而后以概率 p (称为重连概率) 随机地重新连接网络中的每条边, 即将边的一个端点保持不变, 而另一个端点取为随机选择的一个节点, 且规定任意两个不同的节点之间至多只能有一条边, 每一个节点都不能有边与自身相连。

对于 WS 小世界网络而言，当 $p = 0$，模型为规则网；当 $p = 1$ 时则为随机网；当 $0 < p < 1$，则得到介于规则网与随机网之间的小世界网络。

图 * 给出了节点数为 $N = 50$，连接度为 $K = 4$，重连概率 $p = 0.5$ 的 Duffing-WS 型小世界网络的连接拓扑结构图。通过引入 Laplacian 矩阵为 $L = \left(l_{ij}\right)_{N\times N}, l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, i \neq j \\ \sum_{j\neq i} a_{ij}, i = j \end{cases}$ ，则方程 (3.2) 可以改写为如下形式：

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + a x_i - b x_i^3 + A\sin(\Omega t) - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} l_{ij} x_j \tag{3.6}$$

由 Laplacian 矩阵的性质可知，L 是一个实对称的弱对角占优矩阵，且对角元均非负，所以是半正定的。事实上，复杂网络的邻接矩阵或 Laplacian 矩阵全面地刻画了网络节点之间的相互关系，其特征值和特征向量则揭示了网络拓扑及其整体行为的信息。

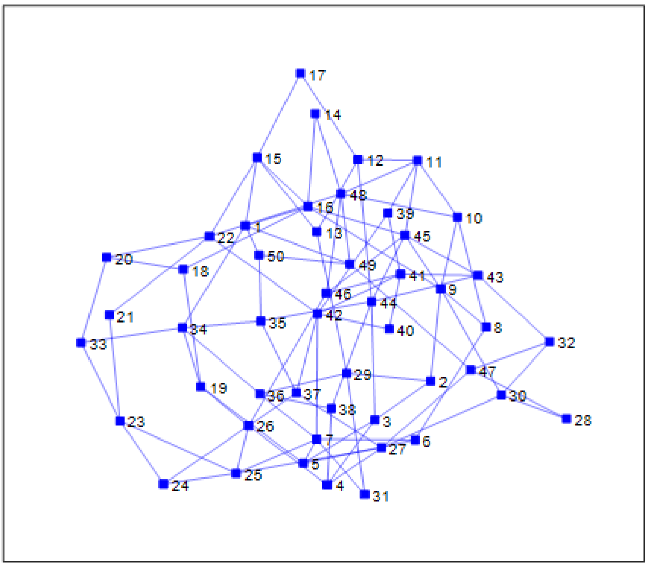


图 3.4 Duffing-WS 型小世界网络的连接拓扑结构图

3.2 Duffing-WS 型小世界网络基本动力学特性研究

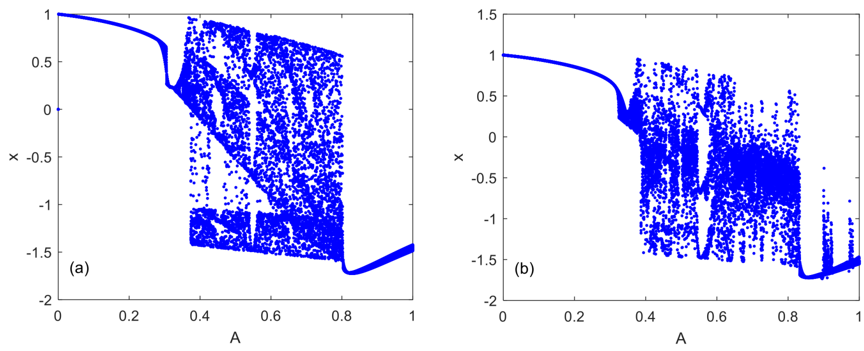
3.2.1 分岔图分析

我们的研究发现，当驱动力幅度 A 值在 (0,1) 范围变化时，随着 A 值的变化，Duffing-WS 小世界网络的各个粒子输出也将呈现小尺度周期运动、我们的研究发现，当驱动力幅度 A 值在 (0,1) 范围变化时，随着 A 值的变化，Duffing-WS 小世界复杂网络 (*) 的各个节点输出也将呈现小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等状态。我们首先借助庞加莱截面给出 Duffing-WS 小世界网络的分岔图。分岔图绘制了系统的庞加莱截面输出随参数的变化图，可用于比较微小参数扰动对系统指标的影响，在本文中用来衡量混沌现象。

取庞加莱截面为 $t = jT, T = 2\pi/\Omega$，在此截面上引入如下宏观变量 $\sigma(jT)$ 来描述系统的集体行为：

$$\sigma(jT) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(jT) \tag{3.7}$$

图（a）中给出了借助庞加莱截面单个 Duffing 方程的解随驱动力幅度 A 变化的分岔图。图（b）给出了借助 $\sigma(jT)$, 节点个数为 $N = 100$ 的 Duffing-WS 型小世界网络关于幅度 A 的变化的分岔图。和图 1 中单个 Duffing 方程关于幅度 A 的分岔图对比可知, Duffing-WS 型小世界网络的分岔图事实上也历经了小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等状态, 在大尺度周期状态之后又进入了短暂的混沌状态, 因此其分岔图具有更为复杂的特性。



3.2.2　基于最大李雅普诺夫指数的混沌动力学分析

从 3.1 节可以看出，通过分岔图并不容易定量分析复杂系统的混沌行为，而对耦合系统混沌进行分析的另外一个指标为系统的最大 Lyapunov 指数 (LE 指数)。LE 指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标，表现了系统在相空间中相邻轨道间收缩或发散的平均指数率。

这一节我们利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大 LE 指数表达式, 利用最大 LE 指数来研究其混沌现象，并分析小世界网络重连度 K，重连概率 p 和耦合强度 ε 等对复杂系统处于混沌运动状态参数范围的影响。其中，LE 指数采用数值模拟的方式给出，其计算方法的理论依据已在第二章给出。通过令

$$z_i = \Omega t,\ z_i\big|_{t=0} = 0$$

可将 Duffing-WS 型小世界网络模型 (*) 的非自治方程变成如下的自治方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = -\gamma y_i + a x_i - b x_i^3 + A\sin\left(z_i\right) - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} l_{ij} x_j \\ \dot{z}_i = \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

假设 $s(t)$ 是单个 Duffing 方程 (1) 的解, 引入变分:

$$\delta_{xi} = x_i(t) - s(t), \delta_{yi} = y_i(t) - \dot{s}(t), \tag{3.9}$$

并结合自治方程组 (*) 可得到 Duffing-WS 小世界网络的变分方程为:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{xi} = \delta_{yi} \\ \dot{\delta}_{yi} = -\gamma\delta_{yi} + a\delta_{xi} - 3bx_i^2\delta_{xi} + A\cos\left(z_i\right)\delta_{zi} - \varepsilon \sum_{j=1}^{N} l_{ij}\delta_{xj} \\ \dot{\delta}_{zi} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

在不失去普遍性的情况下, 在上述变分方程中令集合 $\delta_{zi}=0$, 则变分方程可以简化为:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{xi}=\delta_{yi} \\ \dot{\delta}_{yi}=-\gamma\delta_{yi}+a\delta_{xi}-3bx_i^2\delta_{xi}-\varepsilon\sum_{j=1}^{N}l_{ij}\delta_{xj} \end{cases} \tag{3.11}$$

则根据定义，本章所提 Duffing-WS 型小世界网络的最大 LE 指数表达式为:

$$\lambda_{\max}=\lim_{T\to\infty}\frac{\log\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|\delta_{xi}(T)\right|+\left|\delta_{yi}(T)\right|}\right)}{T} \tag{3.12}$$

在下面的章节中，我们利用上式计算不同参数情况下的 Duffing- WS 型小世界网络平均最大 LE 指数关于周期幅度变化的曲线, 其中 LE 指数大于 0 的区域被视为系统处于混沌运动的区域。网络的粒子个数固定为 $N=100$, 每条曲线均是对 50 个样本轨道平均后所得。Duffing 方程中的参数固定为 $a=1, b=1, \gamma=0.5, \Omega=1$。此外，本文 Duffing- WS 型小世界网络 (*) 及其对于变分方程组 (*) 的数值模拟均基于我们在第 * 节给出的微分方程四阶龙格库塔算法。

耦合强度 ε 对混沌的影响

图 (a)-(c) 给出了不同的耦合强度 ε 下平均最大 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 重连概率均为 $p=0.5$ 。在图 (a) 中 $K=2$, 当耦合强度 ε 较小时 (如 $\varepsilon=0, 0.2, 0.4$), 随着 ε 的增大, LE 指数大于 0 的混沌区域扩大; 当耦合强度 ε 较大时 (如 $\varepsilon=0.6, 0.8, 1, 2$), 随着 ε 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域则逐渐收缩, 混沌受到抑制。在这种情况下, 由于重连度非常小节点之间的连接程度不够, 小的耦合强度的增强反而增强系统的混沌运动; 而只有耦合强度大到一定程度, 更大的耦合强度使得系统协同性增强, 才能抑制系统的混沌运动。

在图 (b) 中 $K=20$, 可以看到, 当 $\varepsilon=0$ 时, 小世界网络退化成独立的 N 个 Duffing 系统, 此时混沌区域最大, 而当 $\varepsilon>0$ 时, 小世界网络各个节点之间存在耦合作用, 网络的混沌区域收缩; 而此时由于重连度 K 值较大, 平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线在不同的耦合强度 ε 下基本一致, 也就是说此时小世界网络的混沌运动区域对耦合强度 ε 具有鲁棒性。同样, 在图 (c) 中 $K=48$, 可以看到, 随着 ε 增加, 混沌区域的变化同样不明显。综上可以看到, 和传统的规则网络不同, 本文所提 Duffing-WS 型小世界网络的耦合强度 ε 对混沌区域的影响并不是线性的, 当重连度 K 较小时, 随着耦合强度的增加混沌区域呈现出先扩大后缩小的变化, K 较大时 ε 的增强对混沌区域影响不明显。在图 (a) 中 $K=2$, 当耦合强度 ε 较

小时 (如 $\varepsilon = 0, 0.2, 0.4$), 随着 ε 的增大, LE 指数大于 0 的混沌区域扩大; 当耦合强度 ε 较大时 (如 $\varepsilon = 0.6, 0.8, 1, 2$), 随着 ε 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域则逐渐收缩, 混沌受到抑制。在这种情况下, 由于重连度非常小节点之间的连接程度不够, 小的耦合强度的增强反而增强系统的混沌运动; 而只有耦合强度大到一定程度, 更大的耦合强度使得系统协同性增强, 才能抑制系统的混沌运动。

在图 (b) 中 $K = 20$, 可以看到, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 小世界网络退化成独立的 N 个 Duffing 系统, 此时混沌区域最大, 而当 $\varepsilon > 0$ 时, 小世界网络各个节点之间存在耦合作用, 网络的混沌区域收缩; 而此时由于重连度 K 值较大, 平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线在不同的耦合强度 ε 下基本一致, 也就是说此时小世界网络的混沌运动区域对耦合强度 ε 具有鲁棒性。

同样, 在图 (c) 中 $K = 48$, 可以看到, 随着 ε 增加, 混沌区域的变化同样不明显。综上可以看到, 和传统的规则网络不同, 本文所提 Duffing-WS 型小世界网络的耦合强度 ε 对混沌区域的影响并不是线性的, 当重连度 K 较小时, 随着耦合强度的增加混沌区域呈现出先扩大后缩小的变化, K 较大时 ε 的增强对混沌区域影响不明显。

重连度 K 对混沌的影响

我们接着分析重连度 K 对 Duffing- WS 型小世界网络混沌现象的影响。图 (a)-(c) 给出了不同的重连度 K 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\varepsilon = 0.5$ 。

可以看出, 在图 (a) 中 $p = 0$, 耦合网络为规则的最近邻耦合网络, 当重连度 K 较小时 ($K = 2, 4, 6, 8, 10$), 随着重连度 K 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域先扩大再收缩, 当 $K = 4$ 时混沌区域达到最大; 随后, 随着重连度 K 增加到一定程度以后 ($K = 20, 30, 40, 48$), 混沌区域随着 K 值的增加而有略微地缩小, 但总体上差异不大。这说明对于规则网络, 只有足够大的重连度才会抑制系统混沌, 较小的重连度反而增加系统的混沌运动。ZL 注：在这里把你原文三幅横排放的图分开并放大，分别放在图 (a),(b),(c）仿真分析文字的下面

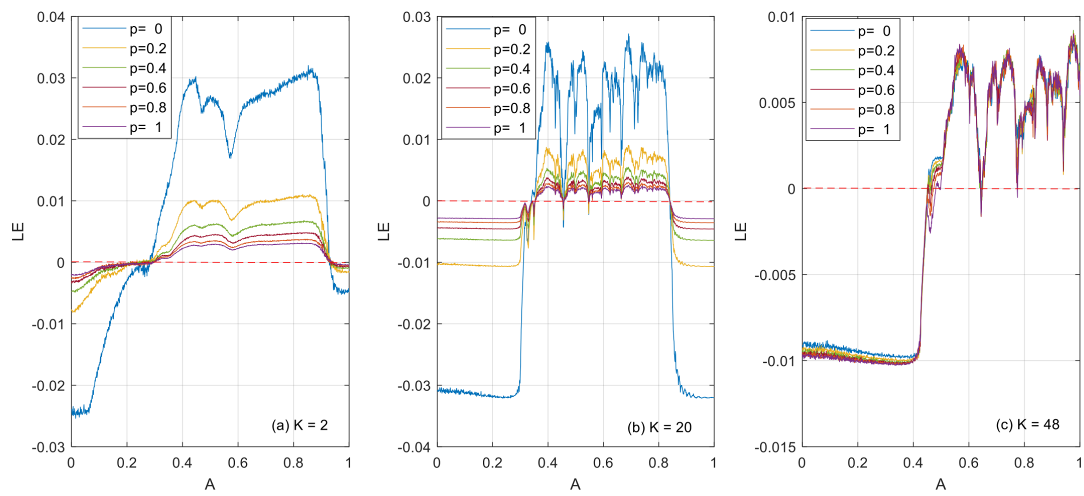
在图 (b) 中 $p = 0.5$, 此时网络为标准的小世界模型。$K = 2$ 与 K 值 LE 曲线有显著不同, 所对应的混沌区域最大, LE 指数在各个振幅处的值都最高, 可见重连度 K 较低时更容易产生较大的混沌范围。$K = 4, 6$ 比起 $K = 2$ 的 LE 曲线, 其大于 0 的区域明显缩小, 即重连度的增加明显抑制了网络混沌运动; 随着 K 值进

一步增加, 系统 LE 曲线几乎没有变化, 这是因为当重连度足够高时, 系统各节点输出间差异很小, 混沌区域几乎一致。ZL 注：在这里把你原文三幅横排放的图分开并放大，分别放在图 (a),(b),(c）仿真分析文字的下面

在图 (c) 中 $p = 1$, 此时网络为完全的随机网络。可以看出, K 足够大时 LE 曲线的一致性会被打破, 重连度对混沌区域的控制不再呈现明显的规律。当 $K = 2$ 时混沌区域反而最小, 而中间大小的重连度 ($K = 4, 6, 8, 10$) 混沌区域却最大。同时, 对比完全规则网络 ($p = 0$) 与小世界网络 ($p = 0.5$), 完全随机网络的混沌区域更大且 LE 指数更低。

重连概率 p 对混沌的影响

最后我们分析重连概率 p 对 Duffing- WS 型小世界网络混沌现象的影响。图 (a)-(c) 给出了不同的重连概率 p 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\epsilon = 0.5$。图 (a)-(c) 给出了不同的重连概率 p 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\epsilon = 0.5$ 。在图 (a) 中 $K = 2$, 在图 (b) 中 $K = 20$, 可以看出, 不同重连概率 p 对混沌区域的影响不明显, 差异主要体现在 LE 指数的高低上, 重连概率 p 越大, LE 指数值越小。在图中 $K = 48$, 在这种情形下混沌区域明显后移。总的来说，此时小世界网络的混沌区域对重连概率 p 具有鲁棒性。



3.2.3 同步性分析

事实上，大量耦合粒子的同步化问题最早由 1998 年给出的基于变分方程的主稳定函数方法而得到妥善地解决 [*]。下面我们仍然基于变分法给出本章所提 Duffing-WS 小世界网络 (*) 的主稳定函数，并由此分析 Duffing-WS 小世界网络

的同步性。Duffing-WS 小世界网络的变分方程已由 (*) 式给出，令

$$\boldsymbol{\delta}_i = \left[\delta_{xi}, \delta_{yi}, \delta_{zi}\right]^T,$$

则 Duffing-WS 小世界网络的变分方程（*）可以简化为如下的矢量形式:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_i = Df(\mathbf{S})\boldsymbol{\delta}_i - c\sum_{j=1}^{N} l_{ij} H\boldsymbol{\delta}_j, i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.13}$$

其对应的孤立节点动力学函数为

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} y \\ -\gamma y + ax - bx^3 + A\sin(z) \\ \Omega \end{bmatrix},$$

节点内连矩阵为:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令同步流形为 $\mathbf{S}(t) = (s(t), \dot{s}(t), \Omega t)^T$, 即孤立节点动力学方程 $\dot{\mathbf{S}}(t) = f(\mathbf{S})$ 的解。$Df(\mathbf{S})$ 则为单节点动力学函数在同步流形 $\mathbf{S}(t) = (s(t), \dot{s}(t), \Omega t)^T$ 处的雅可比矩阵, 有

$$Df(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a - 3bs^2(t) & -\gamma & A\cos(\Omega t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

令 $\boldsymbol{\delta} = \left(\boldsymbol{\delta}_1, \ldots, \boldsymbol{\delta}_N\right)$, 则 (3.11) 式可以改写为

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = Df(\mathbf{S})\boldsymbol{\delta} - cH\boldsymbol{\delta}L^T \tag{3.15}$$

不妨假设 Laplacian 矩阵可对角化 (即为无向图情况)), $L^T = P\Lambda P^{-1}, \Lambda = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_N\right)$, 令 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\delta}P$, 则方程组又等价于如下的方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 &= Df(\mathbf{S})\boldsymbol{\eta}_1, k = 1, 2, \ldots, N \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_k &= \left[Df(\mathbf{S}) - c\lambda_k H\right]\boldsymbol{\eta}_k, k = 2, \ldots, N \end{aligned} \tag{3.16}$$

第一式对应于与同步流形平行方向的扰动，为保证同步流形的稳定性，需要第二式描述的 $N-1$ 个子系统是渐近稳定的。注意到除非 $s(t)$ 是平衡点，否则第二式

中的每个子系统都是时变系统，判断同步流形稳定的一个常用判据是要求主稳定方程的所有 Lyapunov 指数全为负值。方程组 (*) 所对应的主稳定方程可以写为：

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}(\alpha)\boldsymbol{y} \tag{3.17}$$

其中 $\boldsymbol{M}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a - 3bs^2(t) - \alpha & -\gamma & A\cos(\Omega t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha = c\lambda_k$。这里假设主稳定方程的最大李亚普洛夫指数为 $LE(\alpha)$。

将主稳定方程和单个节点的 Duffing 方程联立，得到

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \\ \dot{s}_2 = -\gamma s_2 + as_1 - bs_1^3 + A\sin(\Omega t) \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \left(a - 3bs_1^2 - \alpha\right) y_1 - \gamma y_2 + A\sin(\Omega t) y_3 \\ \dot{y}_3 = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

于是，其最大 Lyapunov 指数由下式给出：

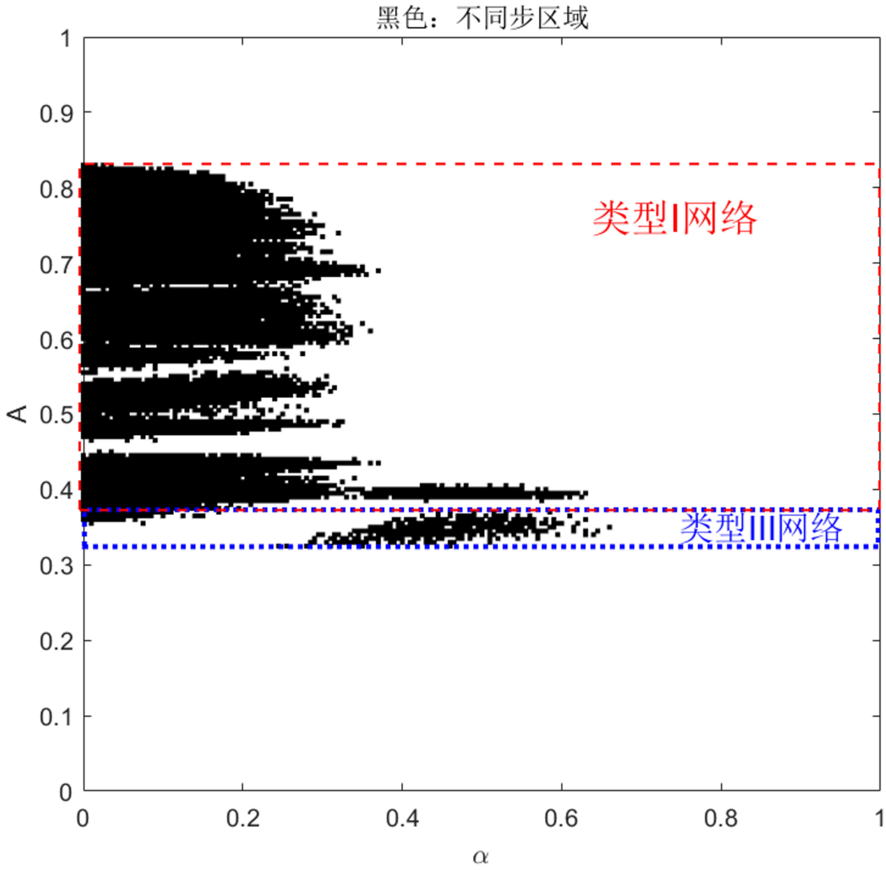
$$LE(\alpha) = \lim_{T\to+\infty} \frac{\ln\left(\left|y_1(T)\right| + \left|y_2(T)\right|\right)}{T} \tag{3.19}$$

下面的图绘制了当周期驱动幅度 A 在 [0,1] 范围内时，主稳定方程 (*) 平面 Lyapunov 指数的相图，即其最大 Lyapunov 指数关于参数 α 和振幅 A 的变化图，其中黑色区域为最大 Lyapunov 指数非负即不同步的区域。同样，我们按照不同初始值取了 50 次平均得到最后的结果。

分析图 (*)，我们可以得出如下结论：

(1) 当 $A \in [0, 0.32] \cup [0.83, 1]$ 时, 主稳定方程的最大 LE 指数全为负数, 即我们考虑的 Duffing-WS 小世界网络 (*) 的同步化区域为全区域 $SR = (0, +\infty)$, 这时候的系统总是可以达到完全同步 (和耦合网络结构小世界特性无关);

(2) 当 $A \in [0.33, 0.37]$ 时, 网络属于类型 III 的网络, 其同步化区域为不连通的多区域 $SR = \left(0, \alpha_1\right) \cup \left(\alpha_2, +\infty\right)$, 这时候系统要达到完全同步, 必须满足 $c\lambda_k \in SR, k = 2, 3, \ldots, N$, 而要同时调整耦合强度和所有特征值全部落入不连通的同步化区域 SR。此时, 如果满足 $c\lambda_2 > \alpha_2$, 则 $\alpha_2 < c\lambda_2 \leq \ldots \leq c\lambda_N$ 时, 都有 $LE(\alpha) < 0$, 同步流形总是稳定的, 系统总能同步。



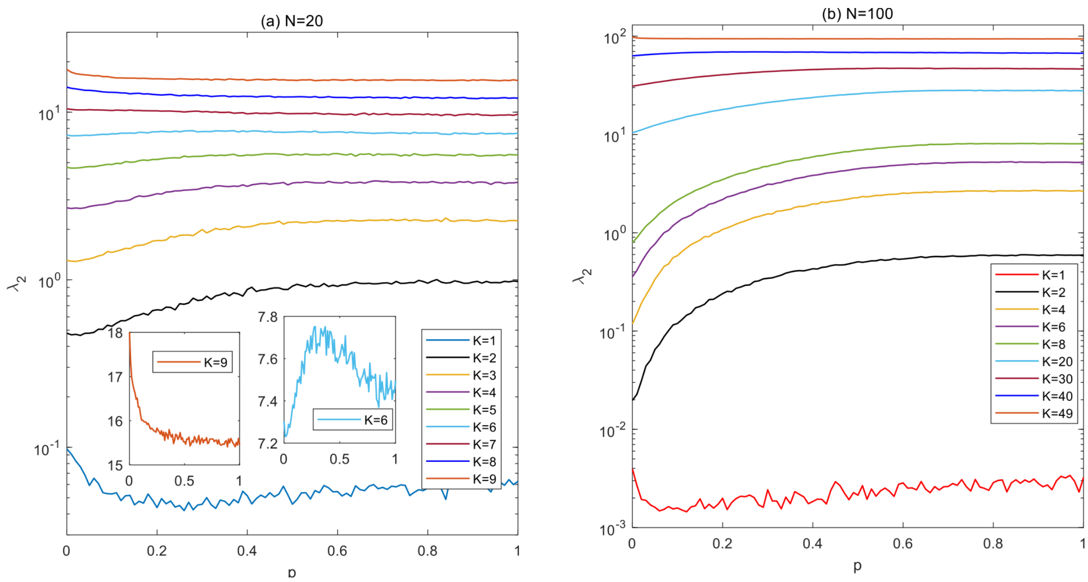
在这种情况下, 网络 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 的大小可以作为衡量网络同步化能力的指标, λ_2 越大则系统越容易达到同步, 也就是系统的同步化能力越强。如果 $\alpha_1 < c\lambda_2 < \alpha_2$, 则同步流形不稳定, 系统不能同步。如果 $c\lambda_2 < \alpha_1$, 则要求 $c\lambda_N < \alpha_1$ $\left(\lambda_N/\lambda_2 < c\right)$ 或者 $\alpha_2 < c\lambda_3$, 则同步流形稳定, 此时系统同步相对于前面两种情况更不容易实现。

(3) 当 $A \in [0.38, 0.82]$ 时, 网络属于类型 I 的网络, 其同步化区域为无界区域 $SR = \left(\alpha_3, +\infty\right)$, 即当 $\alpha_3 < c\lambda_2 \leq \ldots \leq c\lambda_N$ 时, 都有 $LE(\alpha) < 0$, 即 $c\lambda_2 > \alpha_3$, 同步流形总是稳定的, 系统总能同步。在这种情况下, Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 的大小也是可以作为衡量网络同步化能力的指标。

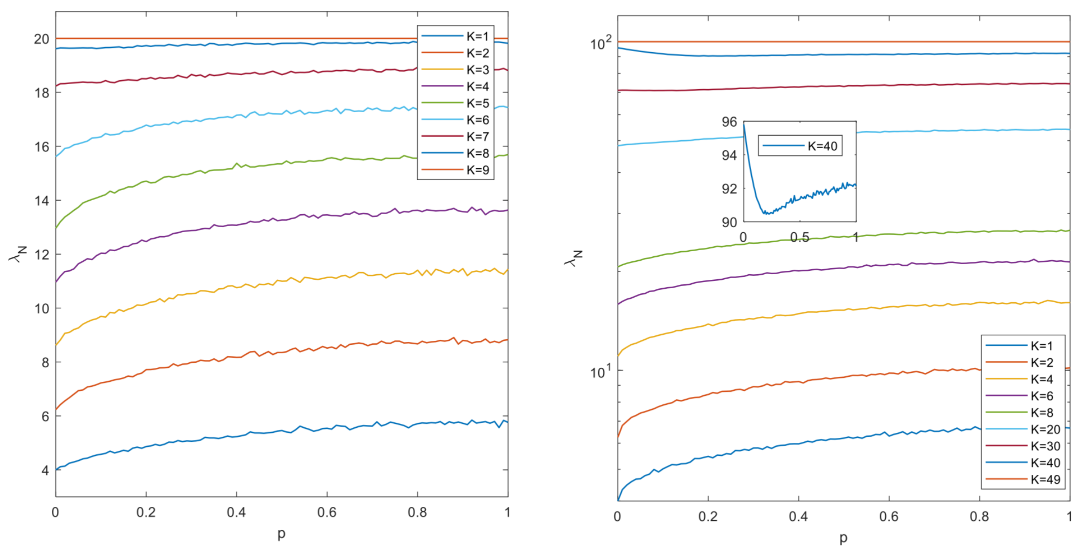
综上可知, 对于不同的 A 值, 当 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 和耦合系数的乘积 $c\lambda_2$ 充分大时, 系统总能实现同步; 给定耦合系数 c, Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 决定了系统的同步能力, 当 λ_2 的值较小时, 系统则很有可能不能同步。但是当增加耦合系数 c 大于某个值时, 对于系统也总能实现同步。

下图给出了粒子个数为 $\mathrm{N} = 20, 100$ 时, Duffing-WS 小世界网络 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 在不同的 K 值下随重连概率 p 变化的曲线 (平均 100 次)。

可以看到当连接度较小 (K = 1) 时, 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加先减小后增加, 说明此时较小或较大的重连概率均有利于增加系统同步; 随着连接度增加 (左图, $K = 2, 3, 4, 5, 6$), 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加先增加后减小, 说明此时适当大小的重连概率有利于增加系统的同步; 当连接度继续增加而接近 N/2 时, 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加而减小, 说明较小的重连概率有利于增加系统的同步。



下图则给出了粒子个数为 N = 20, 100 时, Duffing-WS 小世界网络 Laplacian 矩阵的最大特征值 λ_N 在不同的 K 值下随重连概率 p 变化的曲线 (平均 100 次)。



3.3　小结

本文基于经典的 Duffing 振子，提出了一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 型复杂网络 (简称 Duffing-WS 型小世界网络)，利用变分法推导该网络的最大李雅普诺夫指数表达式，以庞加莱截面分岔图和李雅普诺夫指数为工具研究其混沌现象，并分析小世界网络重连度，重连概率和耦合强度等参数对其混沌运动状态参数范围的影响。研究表明，Duffing-WS 小世界网络的各个粒子输出也呈现出小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等多种状态，其混沌的参数范围较单个 Duffing 方程更为复杂。网络重连度，重连概率和耦合强度等参数对其混沌区域的影响也较传统规则网络有明显不同。

第 4 章　混沌信号的稀疏重构算法

4.1　基于稀疏重构的混沌信号重构算法

设 Duffing-WS 小世界网络某个节点输出的离散化带噪混沌信号序列为:

$$u[n] = x[n] + w[n], n = 1, 2, \ldots, N \tag{4.1}$$

其中 $x[n]$ 为原始混沌序列, $w[n]$ 为零均值和方差为 σ 的高斯白噪声。写成矢量形式为:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \tag{4.2}$$

我们知道 Duffing-WS 小世界网络输出的混沌信号在时域上并不是稀疏信号, 但它可能具有某类特定的变换基 $\boldsymbol{\Psi}$, 使得在此基上的变换系数服从幂指数递减, 这也说明该信号在此变换域中具有较强的可压缩性。这里不妨假设 $\boldsymbol{x} = \Psi\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}$ 为稀疏表示系数, 我们保留所有系数中绝对值最大的 s 个系数得到真正的稀疏系数 $\hat{\boldsymbol{a}}_s$, 基于稀疏重构理论的混沌信号重构问题便是需要求解如下的 l_1 范数最优化问题:

$$\min \left\|\hat{\boldsymbol{a}}_s\right\|_1, \text{ s.t., } \left\|\Psi\hat{\boldsymbol{a}}_s - \boldsymbol{y}\right\|_2 \leq \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.3}$$

l_1 范数最小化算法有利于保持信号的稀疏性，也称为基追踪算法。目前针对该问题的重构算法主要可归为凸优化算法、贪婪算法和组合算法三大类。其中，贪婪算法通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号，简单、易于理解且快速方便。典型的贪婪算法有匹配追踪 (MP) 算法，改进的有正交匹配追踪 (OMP) 算法和压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算法等。其中，压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算法是由 Needell 与 Tropp 提出的一个针对 OMP 的改进算法，具有比 MP 和 OMP 更好的数值表现，该算法是结合 OMP 思想与采样技巧，在每次迭代中将一些随机样本加入到选定的支撑集中，并采用最小二乘法对所选支撑集进行解的估计。本文考虑基于 CoSaMP 算法对带噪的混沌信号进行重构, 其中稀疏变换基选择离散傅里叶变换基。

算法的输入为采样矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ (这里设置为高斯随机矩阵) 和采样信号 $\boldsymbol{u}$ (即 Duffing-WS 小世界网络某个节点输出的带噪混沌信号), 并假设采样信号截断处理后的傅里叶基表示系数 $\boldsymbol{a}$ 的稀疏度为 s; 算法的输出为 s 维的压缩后的信号 $\boldsymbol{a}$,

利用傅里叶逆变换即可重构原始混沌信号。其中, 本文采用的 CoSaMP 算法流程如下:

(1)初始化输出信号 $\boldsymbol{a}^0 \leftarrow \mathbf{0}$，将当前的采样信号作为初始值$\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{u}$

(2)迭代变量$k \leftarrow 0$

(3)进入循环: $k \leftarrow k+1$

计算内积$\boldsymbol{y} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}^* \boldsymbol{v}$

确定支撑集（2 倍稀疏度）$\boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathrm{supp}(\mathbf{y}_{2s}), \boldsymbol{T} \leftarrow \boldsymbol{\Omega} \cup \mathrm{supp}(\boldsymbol{a}^{k-1})$

运用最小二乘法给出取值$\boldsymbol{b}|_T \leftarrow \boldsymbol{\Phi}_T \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}|_{T^c} \leftarrow \mathbf{0}$

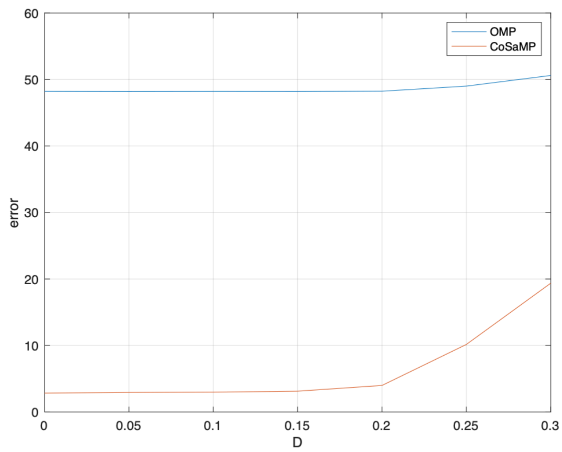
更新输出信号$\boldsymbol{a}^k \leftarrow \boldsymbol{b}_s$

更新残差$\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{a}^k$

直至$k = s$跳出，输出$\boldsymbol{a}$。

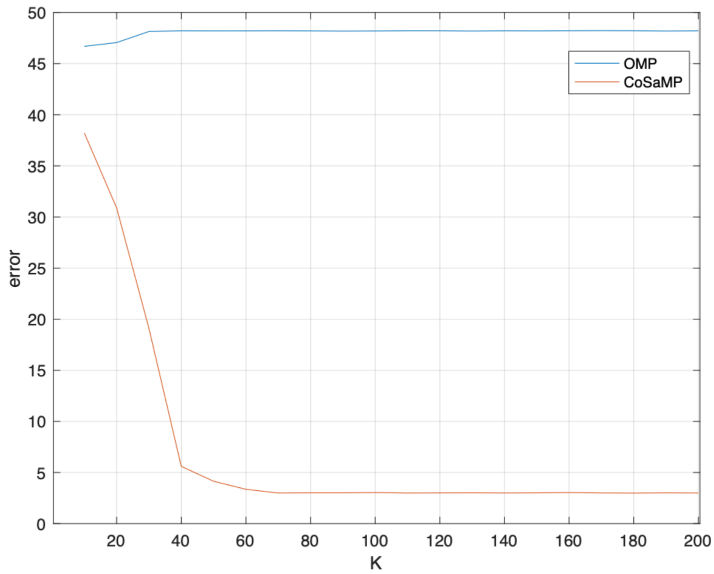
4.2　仿真分析

这一节我们给出用 OMP 和 CoSaMP 两种稀疏重构算法对混沌信号的稀疏采样后还原的仿真结果和分析，其中混沌信号选择为模型 Duffing-WS 小世界网络第一个节点的输出，并叠加高斯白噪声。下图给出了 OMP 和 CoSaMP 两种算法的重构误差关于噪声强度的变化图。可以看到，CoSaMP 算法在噪声强度小于 0.2 时具有非常低的重构误差，即较好的抗噪重构性能，但之后因噪声强度的增加其误差有快速增长，但其重构性能始终优于经典的 OMP 算法。经典的 OMP 算法对于混沌信号始终存在较大的重构误差。由此可见，CoSaMP 算法相较于传统 OMP 算法有更出色的重构抗噪声能力。下图则给出了选择不同稀疏度 K 值



时，OMP 和 CoSaMP 两种算法相应的重构误差。可以看出，CoSaMP 算法在稀

疏度增加时重构误差显著减小，在 K = 60 左右趋于稳定，也说明该混沌信号经过离散傅里叶变换之后的稀疏系数取为 60 即可较为稳健地恢复该信号，而 OMP 算法对该混沌信号的重构能力一直不佳。由此可见，含噪声的混沌信号稀疏重构



问题目前尚未有完善的研究，常规的稀疏重构算法也对混沌信号的重构性能不佳，以 OMP 算法为例，该算法在常规情况有很好的性能，但是在混沌信号情形的效果不佳。因此对混沌信号重构对传统稀疏重构算法提出了新的挑战。

4.3 小结

第 5 章　结论与展望

致　谢

感激 casthesis 作者吴凌云学长，gbt7714-bibtex-style 开发者 zepinglee，和 ctex 众多开发者们。若没有他们的辛勤付出和非凡工作，LaTeX 菜鸟的我是无法完成此国科大学位论文 LaTeX 模板 ucasthesis 的。在 LaTeX 中的一点一滴的成长源于开源社区的众多优秀资料和教程，在此对所有 LaTeX 社区的贡献者表示感谢！

ucasthesis 国科大学位论文 LaTeX 模板的最终成型离不开以霍明虹老师和丁云云老师为代表的国科大学位办公室老师们制定的官方指导文件和众多 ucasthesis 用户的热心测试和耐心反馈，在此对他们的认真付出表示感谢。特别对国科大的赵永明同学的众多有效反馈意见和建议表示感谢，对国科大本科部的陆晴老师和本科部学位办的丁云云老师的细致审核和建议表示感谢。谢谢大家的共同努力和支持，让 ucasthesis 为国科大学子使用 LaTeX 撰写学位论文提供便利和高效这一目标成为可能。