

硕士学位论文

小世界复杂网络的混沌、同步及重构研究

作者姓名: 常博源

指导教师: 张路 副教授 四川大学数学学院

学位类别: 理学硕士

学科专业: 不确定性处理的数学

培养单位: 四川大学数学学院

2023 年 6 月

**The chaos of a small world complex network and its sparse
reconstruction**

**A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Mathematics**

By

Chang Boyuan

Supervisor: Professor Zhang Lu

Institute of Mechanics, Sichuan University

June, 2023

摘 要

复杂网络是一种由大量节点和连接构成的网络，它们通常具有非线性、非均匀、动态、随机等特性。复杂网络的研究涉及多个领域，包括计算机科学、物理学、数学、生物学、社会学等。网络控制是复杂网络研究的一个重要方向，研究如何通过改变网络的节点或边的状态来影响网络的行为和性质，包括研究网络的同步、稳定性和鲁棒性等方面。

本文利用 **Duffing** 方程产生混沌现象，构造大规模的 **WS** 小世界模型将不同的 **Duffing** 振子耦合连接，借此探讨复杂网络的混沌特性及其在噪声干扰下的重构方法，提出了一种新的 **Duffing-WS** 型小世界网络模型，通过变分法计算出最大李雅普诺夫指数（**LE** 指数）作为衡量网络混沌的标准，并分析了不同参数对网络混沌区域的影响。

研究表明，**Duffing-WS** 小世界网络具有比单个 **Duffing**-方程更为复杂的混沌特性，网络重连概率、连接度以及耦合强度对系统混沌区域的影响也有别于传统规则网络。我们主要研究了 **Duffing** 方程中，一定振幅范围下产生的混沌现象。其中在小世界模型中 ($p=0.5$)，合适的连接度与耦合强度在一定程度上可以控制系统的混沌行为，重联概率对混沌是否出现的指标（**LE** 指数）影响不大，但是对同步性指标有影响。所有参数均对 **LE** 指数的数值有较大影响，随着重连概率的增加，**LE** 指数有着显著的控制现象。

此外，本文还对小世界网络模型的同步性进行了初步研究，研究表明复杂网络的随机性相较于完全规则的网络有助于系统更快的完成同步。并对混沌信号进行稀疏重构算法的适应性研究，通过对比两种常用稀疏重构方法，发现 **CoSaMP** 算法在混沌信号的稀疏重构能力极大强于 **OMP** 算法同时良好的降噪效果并没有因混沌信号的原因减弱。

关键词：混沌现象，复杂网络，**LE** 指数，稀疏重构，小世界网络

Abstract

Complex networks are networks consisting of a large number of nodes and connections, which typically exhibit nonlinear, non-uniform, dynamic, and random characteristics. The study of complex networks involves multiple fields, including computer science, physics, mathematics, biology, sociology, and others.

Network control is an important direction of research in complex network studies, which investigates how to influence the behavior and properties of networks by changing the state of nodes or edges, including the study of network synchronization, stability, and robustness.

This paper explores the chaotic characteristics of complex networks and their reconstruction methods under noise interference, and proposes a new Duffing-WS small-world network model. The study shows that the Duffing-WS small-world network has more complex chaotic characteristics than a single Duffing equation, and the impact of network rewiring probability, connectivity, and coupling strength on the chaotic region of the system is different from that of traditional regular networks. Appropriate connectivity and coupling strength can control the chaotic behavior of the system to some extent, and the rewiring probability has little impact on the indicator of chaos (LE exponent) but has an effect on the indicator of synchronization.

In addition, this paper also conducts a preliminary study on the synchronization of small-world network models, which shows that the randomness of complex networks compared to completely regular networks helps the system to synchronize faster. The adaptability of the sparse reconstruction algorithm for chaotic signals is also studied, and by comparing two commonly used sparse reconstruction methods, it is found that the CoSaMP algorithm has much stronger ability than the OMP algorithm in the sparse reconstruction of chaotic signals, and its good denoising effect is not weakened due to the chaotic nature of the signal.

Keywords: chaos, complex network, LE exponent, sparse reconstruction, small world

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 研究现状	2
1.2.1 复杂网络混沌、同步动力学研究现状	2
1.2.2 信号的稀疏重构研究现状	3
1.3 本文主要工作和论文结构	4
第 2 章 基础理论	6
2.1 复杂网络基本概念	6
2.1.1 图论的基本知识	6
2.1.2 规则网络	8
2.1.3 复杂网络	8
2.2 非线性系统的稳定性和混沌	14
2.2.1 非线性系统的稳定性	15
2.2.2 混沌基本理论	18
2.3 复杂网络的同步	22
2.4 稀疏重构基本理论和算法	24
2.4.1 稀疏重构基本理论	24
2.4.2 稀疏重构算法	27
2.5 小结	29
第 3 章 Duffing-WS 型小世界复杂网络的混沌、同步动力学 ...	30
3.1 Duffing-WS 型小世界网络基本模型	30
3.2 Duffing-WS 型小世界网络基本动力学特性研究	34
3.2.1 分岔图分析	34
3.2.2 基于 LE 指数的混沌动力学分析	35
3.2.3 同步性分析	41
3.3 小结	45
第 4 章 混沌信号的稀疏重构算法	46
4.1 基于稀疏重构的混沌信号重构算法	46
4.2 仿真分析	47
4.3 小结	49

第 5 章 结论	50
参考文献	51
致谢	51

图形列表

2.1 规则网络	8
2.2 WS 随机网络的构造	11
2.3 WS 随机网络的聚类系数与重连概率	11
2.4 NW 随机网络的平均路径长度	14
3.1 不同周期振幅 A 取值时, Duffing 方程输出时域图	31
3.2 不同周期振幅 A 取值时, Duffing 方程输出相图	32
3.3 Duffing 方程随周期振幅 A 变化的分岔图	32
3.4 Duffing-WS 型小世界网络的连接拓扑结构图	33
3.5 分叉图演示	35
3.6 $K = 2$ 时耦合强度对混沌的影响	37
3.7 $K = 20$ 时耦合强度对混沌的影响	37
3.8 $K = 48$ 时耦合强度对混沌的影响	38
3.9 $p = 0$ 时连接度对混沌的影响	39
3.10 $p = 0.5$ 时连接度对混沌的影响	39
3.11 $p = 1$ 时连接度对混沌的影响	40
3.12 重连概率对混沌的影响	41
3.13 不同类型网络混沌的振幅范围	43
3.14 第二大特征值与重连概率的关系	44
3.15 最大特征值与重连概率的关系	45
4.1 OMP 和 CoSaMP 两种算法的去噪能力	48
4.2 OMP 和 CoSaMP 两种算法的重构误差	48

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

从 20 世纪七八十年代开始, 随着以互联网为代表的网络信息技术的迅速发展, 人类社会已经迈入了复杂网络的时代。人类的生活与生产活动也越来越多地依赖于各种复杂网络的安全可靠和有效运行。同时, 许多复杂性问题也都可以从复杂网络的角度去研究, 因此在国际上形成了非线性科学和复杂性问题的研究热潮。现在, 许多发达国家的科学界和工程界都将这个复杂网络这个新兴领域提上了国家科技发展规划的议事日程。在中国, 复杂网络作为基础研究也已列入《国家中长期科学和技术发展规划纲要 (2006-2020 年)》。

系统是由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合的具有特定功能的有机整体。而网络 and 系统通常是密切联系的, 如果用节点表示系统的各个组成部分即系统的元素, 两个节点之间的连线表示系统元素之间的相互作用, 那么网络就为研究系统提供了一种新的描述方式。钱学森将具有自组织、自相似、吸引子、小世界、无标度中部分或全部性质的网络统称为复杂网络。原则上, 任何包含大量组成单元 (或子系统) 的复杂系统, 当我们把构成单元抽象成节点, 单元之间的相互作用抽象为边时, 都可以当作复杂网络来对其进行研究。用数学的语言来说, 复杂网络就是一个有着足够复杂的拓扑结构特征的图。

目前, 学者们已在复杂网络的形成机制、网络演化的统计规律和动力学机制、网络结构的稳定性、网络传播以及网络的同步和控制等方面展开研究, 取得了大量研究成果。早期对复杂网络的研究主要集中在规则网络或完全随机网络上。不过, 规则网络和完全随机网络都是理想化的模型, 而现实世界中的系统往往没有这么理想化, 很可能是有序和无序之间的网络 (称为小世界网络)。直到 1998 年, Watts 及 Strogatz 教授提出了经典的 Watts-Strogatz (WS) 小世界网络, 该网络在规则网络基础上将每条边以概率 p 进行断边重连后得到。小世界网络中含有大量的局部连边, 同时也有少量长程连边, 而这些长程连边有效地降低了网络中任意两个节点之间的距离, 这正是小世界特性的来源。

随后, 研究学者们围绕各种小世界网络的动力学特性展开了研究, 包括相应网络演化的统计规律和动力学机制、网络结构的稳定性、网络传播以及网络的同

步和控制等,取得了大量研究成果。事实上,混沌作为确定性系统中出现的一种类随机现象,揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性。但由于混沌现象的非线性性以及复杂网络的复杂性,现有文献对小世界网络或者说复杂网络的混沌现象研究较少。以小世界网络方式连接的复杂网络会具有怎样的动力学特性尤其是混沌现象,是非常值得研究的一个问题。与此同时,同步现象作为复杂网络最重要的动力学特性之一普遍存在于各类复杂网络中,对复杂动态网络的同步控制是复杂网络研究和应用的关键环节。对小世界复杂网络的同步现象进行研究,无疑也具有重大的现实研究意义和广阔的应用前景,

此外,混沌信号由于其类噪声特性和长期不可预测性,已被广泛研究并用于保密通信、雷达信号处理、信号检测等诸多领域。但在实际情况下,混沌信号总是会被噪声污染,而混沌信号具有非周期、宽带频谱等特性,一些现有的信号复原方法在处理混沌信号时难以获得理想的效果。因此,研究噪声污染下混沌信号的重构技术具有重要意义,有效的混沌重构技术也将大大提高各种应用的性能。

以压缩感知为典型代表的稀疏理论提出:稀疏的或具有稀疏表达的有限维数的信号可以利用远少于奈奎斯特采样数量的线性、非自适应的测量值无失真地重建出来。该理论一经提出,便在信息论、信号/图像处理、医疗成像、射电天文、模式识别、光学/雷达成像和信道编码等诸多领域引起广泛关注。在信号处理领域,信号的稀疏重构理论仍是一个较新的研究方向,近年来,学者们在该方向已取得了一些显著的研究成功,但很多问题仍需进一步研究。事实上,该理论的应用前提是能够对需处理的信号进行直接或间接的稀疏建模,合理地选取具有等距约束等限制条件的采样矩阵以及提出更高精度、更低复杂度或对噪声更鲁棒的后端恢复算法。此外,含噪混沌信号的稀疏重构问题尚未有完善的研究。因此,能否将稀疏理论用于复杂网络带噪混沌信号的重构具有重要意义,有效的混沌重构算法也将大大提高混沌信号各种应用的性能。

1.2 研究现状

1.2.1 复杂网络混沌、同步动力学研究现状

20 世纪中叶以来,网络系统的科学研究日益受到重视。但是,直至世纪末,关于网络结构的假设基本上是两个极端:完全规则的结构或者完全随机的拓扑。例如,在 20 世纪的非线性动力学研究中,绝大多数网络动态系统模型均假设网

络具有规则而且固定的拓扑结构,把重点放在由节点的非线性动力学行为所产生的复杂性,如斑图的涌现和时空混沌的产生等。典型的例子包括耦合映象格子和非线性网络。采用简单的规则结构的主要好处是使人们可以集中精力研究节点的复杂动力学行为对整个网络复杂性的影响,并且规则的网络结构也便于用集成电路实现。而20世纪50年代末由两位匈牙利数学家 Erdos 和 Renyi 建立的随机图理论被公认为是上开创复杂网络拓扑结构的系统性研究,至今仍然在网络分析中起着重要作用。

最早的小世界网络动力学研究在1998年 Watts 及 Strogatz 的文章中给出,他们利用相应的小世界模型模拟传染病在人群中传播,研究表明相较于规则网络,小世界网络的传播能力明显要快得多。随后,研究学者们围绕各种小世界网络的动力学特性展开了研究。2001年, Zhuo Gao 研究了小世界网络的随机共振现象,发现小世界网络的随机共振效应相比与普通网络有所增强。2002年, H. Hong 等探讨了小世界网络同步性并发现随着重连概率的增大,小世界网络中各个振子间同步性显著提高。2001年, Xin-She Yang 对一个非线性时滞混沌小世界网络进行研究,发现小世界混沌网络的传播要比规则网络速度更快。2012年, Li Ning 提出了一个基于小世界网络的离散复杂网络,并研究其分叉和混沌等动力学特性后发现相较于规则网络,小世界网络的混沌现象在适当的参数下会得到控制。

21世纪是复杂性和网络化的世纪。从20世纪七八十年代开始,在国际上形成了非线性科学和复杂性问题的研究热潮。尤其是20世纪90年代以来,人类已经生活在一个充满各种各样复杂网络的世界中,许多复杂性问题都可以从复杂网络的角度去研究。随着以互联网为代表的网络信息技术的迅速发展,人类社会已经迈入了复杂网络时代。人类的生活与生产活动越来越多地依赖于各种复杂网络系统安全可靠和有效的运行。作为一个跨学科的新兴领域,“网络科学与工程”已经逐步形成并获得了迅猛发展。现在,许多发达国家的科学界和工程界都将这个新兴领域提上了国家科技发展规划的议事日程。在中国,复杂系统包括复杂网络作为基础研究也已列入《国家中长期科学和技术发展规划纲要(2006-2020年)》。

1.2.2 信号的稀疏重构研究现状

稀疏重构是目前最优化领域中非常热门的研究课题,最早是由美国科学院院士 David Donoho 等人于1998年提出来的,它的本质思想是结合解的稀疏性结

构来构建数学模型,克服欠定线性反问题的不适定性,进而提升模型的稳定性和准确性。2005 年,数学家 Emmanuel Candès 与陶哲轩给出了稀疏重构理论的数学理论,证明在已知信号的稀疏性情况下,稀疏重构优化模型能够利用极少数的采样数(显著优于奈奎斯特采样定理)来重建原信号,奠定了稀疏优化模型的理论根基。在过去的 10 多年中,稀疏优化模型吸引了学术界与业界的大量关注,并且在诸如压缩感知、图像科学、机器学习、统计建模和基因组学数据分析等很多领域都取得了成功的应用。

目前已有的稀疏重构求解算法主要可归为三大类:

(1) 凸优化算法:这类方法是将非凸问题转化为凸问题求解以找到信号的逼近,如基追踪 (Basis Pursuit, BP) 算法,梯度投影方法等。这类算法的核心思想是将 NP-hard 的 0 范数优化问题转换为可解的凸优化问题,即 1 范数问题,随后使用一般的凸优化方法来解决。这种做法需要具备一定的条件与限制,并且算法复杂度高,迭代时间久。

(2) 贪婪算法:这类算法是通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号,典型的贪婪算法是匹配追踪算法 (MP),通过一定的选择标准来确定信号的支撑集,逐步提高其稀疏度。最常见的是正交匹配追踪法 OMP,又发展出了 StOMP, CoSaMP 等改良算法。总的来说,贪婪类稀疏重构算法速度快,然而需要的测量数据多且精度低。

(3) 组合算法:这类方法要求信号的采样支持通过分组测试快速重建,如代表性方法稀疏贝叶斯学习方法 (SBL)。该类方法位于前两者之间,具有强于优化算法的适应性与优于贪婪算法的最终结果。

1.3 本文主要工作和论文结构

本文在经典 Duffing 振子的基础上,提出一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网络(简称 Duffing-WS 型小世界网络),并研究该复杂小世界网络的混沌现象,分析复杂系统耦合强度、重连概率、邻接度等参数对其混沌特性的影响规律;同时考虑采用稀疏重构理论建立重构算法还原小世界网络生成的带噪混沌信号。

本文的主要工作和论文结构如下:

第 1 章介绍本文的研究背景及意义和研究现状。

第 2 章介绍本文工作涉及内容所需的基础理论。首先介绍复杂网络及小世界网络的基本概念和性质,接着介绍非线性动力系统的混沌以及同步基本理论,最后梳理稀疏重构的基本理论,包括稀疏重构的基本数学模型、实现稀疏重构所需基本条件,以及稀疏重构常见数值算法。

第 3 章针对所提 Duffing-WS 型小世界网络,研究该网络的混沌、同步等基本动力学特性。

(1) 首先在经典 Duffing 振子的基础上,提出一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网络(简称 Duffing-WS 型小世界网络),利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大李雅普诺夫指数表达式,以庞加莱截面分岔图和李雅普诺夫指数为工具研究该复杂网络的混沌现象,通过微分方程数值解法进行数值仿真,使用 LE 指数衡量系统的混沌程度与振幅范围,分析小世界网络重连度,重连概率和耦合强度对此复杂网络混沌现象的影响。相应的仿真分析表明,本文所提 Duffing-WS 小世界网络的各个粒子输出也呈现出小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等多种状态,其混沌的参数范围较单个 Duffing 方程更为复杂。网络重连度,重连概率和耦合强度等参数对其混沌区域的影响也较传统规则网络有明显不同。

(2) 接着,同样基于变分法给出本文所提 Duffing-WS 小世界网络 (3.5) 变法方程所对应的主稳定函数,并由此分析 Duffing-WS 小世界网络的同步性。分析表明,本文所提 Duffing-WS 小世界网络的同步性主要受到小世界网络连接拓扑矩阵 Laplacian 特征值和耦合强度等参数影响。

第 4 章基于稀疏重构理论提出了一种针对被噪声污染混沌信号的重构算法,仿真实验表明,该方法能较为稳健地恢复受噪声干扰的 Duffing-WS 型小世界网络输出的带噪混沌信号,不仅较具有更高的输出信噪比,而原始信号的混沌特性也能得到较大程度的恢复,这是一般稀疏重构算法不具有的。

第 5 章总结全文。

第2章 基础理论

2.1 复杂网络基本概念

复杂网络科学与工程重点研究自然科学技术和社会政治经济中各种复杂系统微观性态与宏观现象之间的密切联系，特别是其网络结构的形成机理与演化方式、结构模式与动态行为、运动规律与调控策略，以及多关联复杂系统在不同尺度下行为之间的相关性等。网络科学与工程融合了数学、统计物理、计算机科学及各类工程技术科学，探索采用复杂系统自组织演化发展的思想去建立全新的理论和方法，其中的网络拓扑学拓展了人们对复杂系统的认识，而网络动力学则更深入地刻画了复杂系统的本质。网络科学既是数学中经典图论和随机图论的自然延伸，也是系统科学和复杂性科学的创新发展。

图论是一种强有力的研究工具和研究方法。图 (Graph) 提供了一种用抽象的点和线表示各种实际网络的统一方法，因而也成为目前研究复杂网络的一种共同的语言。下面我们给出图论的几个基本概念。

2.1.1 图论的基本知识

图是对系统中基本单元（称为节点）集合，以及每两个基本单元之间关系（边）集合之间关系的描述。图可以定义为一个三元组 $G = (V, E, \phi)$ 集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 称为节点集；集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 称为边集；

ϕ 是边集 E 到节点集 V 的一个映射，称为关联函数。 V 中的元素称为节点或顶点 (node 或 vertex)， E 中的元素称为边、弧或连线 (edge, arc 或 line)，且 E 中的每条边 e_m 都有 V 的一对节点 (v_i, v_j) 与之对应。用计算机分析实际网络的性质面临的第一个问题就是如何在计算机中表示一个网络。图的矩阵表示架起了图论与矩阵论之间的桥梁，通过这种表示方法就能借助于矩阵的理论和分析方法来研究图论中的问题。邻接矩阵描述了节点与节点之间的邻接关系，通常会用一个方阵 A 来表示，方阵中的元素用 a_{ij} 表示。

记 $G = (V, E)$ 为一个非空图，其中 V 是其顶点集， E 是边集。图中一点 v 的相邻点集记为 $N(v)$ ，顶点的度是指与其相连的边的个数记为 $d(v)$ ，一个图的

平均度定义为

$$d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) \quad (2.1)$$

图 G 的一条路径是一个子图，其顶点集与边集描述了原图中某一点到另一点的一条通路。一个圈是指一个子图，描述了以某点为起始点与终止点的一条非平凡路径。一个含有 N 个节点、 M 个边的图 G 的密度定义 ρ 为

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}N(N-1)} \quad (2.2)$$

定义 2.1. 如果非空图 G 中任意两顶点之间均有一条路相连，称图 G 为联通图。

给定子图 $A, B \subseteq V$ 和 $X \subseteq V \cup E$ ，如果 G 的每条 $A-B$ 路均包含 X 中的一个顶点或一条边，称在 G 中 X 分离 (separate) 集合 A 和 B 。下面是图论中一个重要的定理。

定理 2.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个图且 $A, B \subseteq V$ 。那么，在 G 中分离 A 和 B 的顶点的最小数目等于 G 中互不相交的 $A-B$ 路的最大数目。

网络中节点的距离定义为连接这两个点的最小所经边数目。网络的平均长度定义为

$$L = \frac{1}{\frac{1}{2}N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij} \quad (2.3)$$

其中 d_{ij} 为节点 i, j 之间的距离。如果图本身并不联通，则只计算相连两点的距离的算术平均数。一个图的直径 D 定义为任意两个节点之间距离的最大值。

定义 2.2. 图中一个节点 i 的聚类系数 C_i 定义为

$$C_i = \frac{E_i}{(k_i(k_i-1))/2} = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)} \quad (2.4)$$

其中 k_i 为该节点的度， E_i 为其 k_i 个邻节点之间存在的边的数目。还有一种聚类系数的几何定义，两个定义并不等价，一般会加以说明

$$C_i = \frac{\text{包含节点 } i \text{ 的三角形的数目}}{\text{以节点 } i \text{ 为中心的连通三元组的数目}} \quad (2.5)$$

图的聚类系数定义为节点的聚类系数的均值

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.6)$$

2.1.2 规则网络

如果系统中节点及其与边的关系是固定的，每个节点都有相同的度数，就可以用规则图来表示这个系统。这样的网络就称为规则网络。常见的规则网络包括：全局耦合网络、最近邻耦合网络和星形耦合网络等。他们的结构示意图如下：

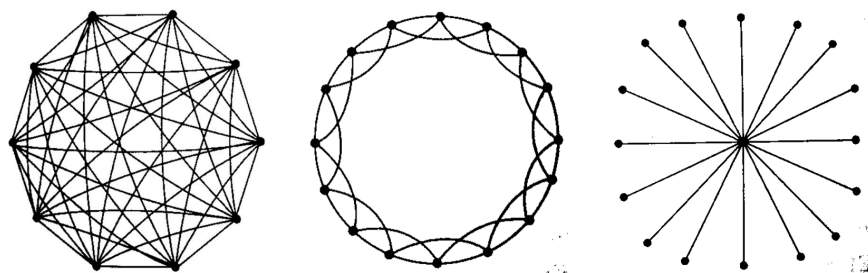


图 2.1 规则网络

2.1.3 复杂网络

系统是由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合的具有特定功能的有机整体。从三个方面理解系统的概念：① 系统是由若干要素（部分）组成的。② 系统有一定的结构。③ 系统有一定的功能。系统有如下的属性：集合性、相关性、层次性、整体性、涌现性、对环境的适应性。从图论意义上理解网络，网络是指由节点和连线构成的图。有时用带箭头的连线表示从一个节点到另一个节点存在的某种顺序关系。有时在节点或连线旁标出数值，称为点权或线权，有时不标任何数。网络 and 系统通常是密切联系的，如果用节点表示系统的各个组成部分即系统的元素，两个节点之间的连线表示系统元素之间的相互作用，那么网络就为研究系统提供了一种新的描述方式。一般认为复杂系统具有以下特征：非线性与动态性、非周期性和开放性、奇怪吸引性、结构自相似性（分形）。另外，复杂系统还具有突现性、不稳性、不确定性、不可预测性等特征。复杂网络可以看作由一些具有独立特征的又与其他个体相互连接的节点的集合，每个个体可视为图中一个节点，节点间的相互连接视为图中的边。复杂网络包括两个层面：作为其连接拓扑结构的图和作为其状态和功能的系统。

钱学森给出了复杂网络的一个较严格的定义：具有自组织、自相似、吸引子、小世界、无标度中部分或全部性质的网络称为复杂网络。原则上说，任何包含大

量组成单元（或子系统）的复杂系统，当我们把构成单元抽象成节点，单元之间的相互作用抽象为边时，都可以当作复杂网络来研究。

复杂网络是指不规则、度分布不均匀的网络模型，常见的复杂网络模型有全随机方式生成的 ER 随机图，在规则网络上进行修改的小世界模型。本节内容会给出这几种的复杂网络模型的生成方法与其性质。

2.1.3.1 ER 随机图

与完全规则网络相反的是完全随机网络。典型的模型是 Erdős 和 Rényi 于 40 多年前开始研究的 ER 随机图模型，其顶点采用完全随机连边的方式进行连接，它是一种完全随机图，是随机性最强的图。下面我们首先给出具有固定次数连接独立两点的 ER 随机图 $G(N, M)$ 的构造算法：

(1) 初始化: 给定 N 个节点和待添加的边数 M 。

(2) 随机连边:

- 1) 随机选取一对没有边相连的不同的节点，并在这对节点之间添加一条边。
- 2) 重复步骤 1)，直至在 M 对不同的节点对之间各添加了一条边。

然后给出以一定概率连接各独立顶点的 ER 随机图 $G(N, p)$ 构造算法：

(1) 初始化: 给定 N 个节点以及连边概率 $p \in [0, 1]$ 。

(2) 随机连边:

- 1) 选择一对没有边相连的不同的节点。
- 2) 生成一个随机数 $r \in (0, 1)$ 。
- 3) 如果 $r < p$ ，那么在这对节点之间添加一条边；否则就不添加边。
- 4) 重复步骤 1)-3)，直至所有的节点对都被选择过一次。

对第二种 $G(N, M)$ 进行性质分析。首先生成的随机图恰好具有 M 条边的概率为

$$P(M) = \binom{C_N^2}{M} p^M (1-p)^{\binom{N}{2} - M} \quad (2.7)$$

其中， $C_N^2 = \binom{N}{2}$ ， $\binom{C_N^2}{M}$ 表示具有 N 个节点和 M 条边的简单图的数量， $p^M (1-p)^{C_N^2 - M}$ 表示有 M 对节点之间添加了边， $C_N^2 - M$ 对节点之间没有添加

边。边数分布的平均值为:

$$\langle M \rangle = \sum_{n=0}^{C_N^2} M P(M) = \binom{N}{2} p = p \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.8)$$

边数分布的方差:

$$\sigma_M^2 = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 = p(1-p) \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.9)$$

$G(N, M)$ 中节点度的概率分布符合泊松分布。

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (2.10)$$

根据概率统计中的内容, 其期望与方差分别为

$$\langle k \rangle = p(N-1) \quad (2.11)$$

$$\sigma_k^2 = p(1-p)(N-1) \quad (2.12)$$

由于两个节点之间不论是否具有共同的邻居节点, 共连接概率均为 p , 所以聚类系数为

$$C = p = \langle k \rangle / (N-1) \quad (2.13)$$

2.1.3.2 WS 小世界模型

WS 小世界模型是通过在规则图上做带有随机性的更改形成的。下面给出 WS 模型构建算法如下:

- (1) 从规则图开始: 给定一个含有 N 个点的环状最近邻耦合网络, 其中每个节点都与它左右相邻的各 $K/2$ 个节点相连, K 是偶数。
- (2) 随机化重连: 以概率 p 随机地重新连接网络中原有的每条边, 即把每条边的一个端点保持不变, 另一个端点改取为网络中随机选择的一个节点。其中规定不得有重边和自环。

可以看出, $p = 0$ 时是完全规则的网络, $p = 1$ 时是完全随机的网络。WS 模型的聚类系数与平均路径长度是关于重连概率 p 的函数, 其关系如下图

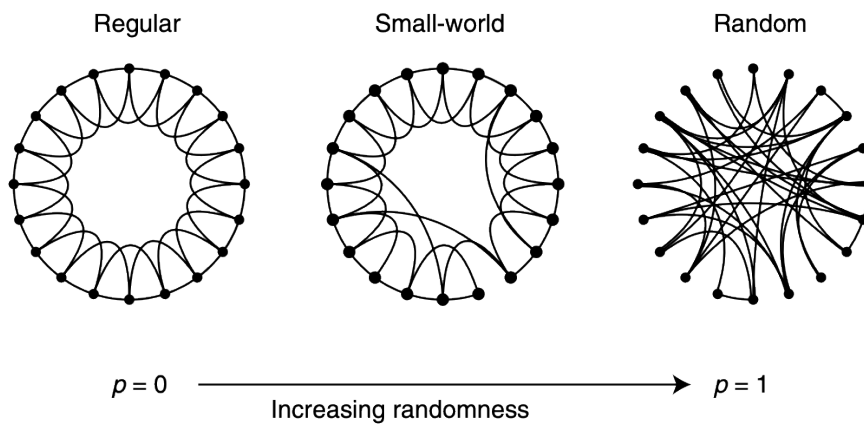


图 2.2 WS 随机网络的构造

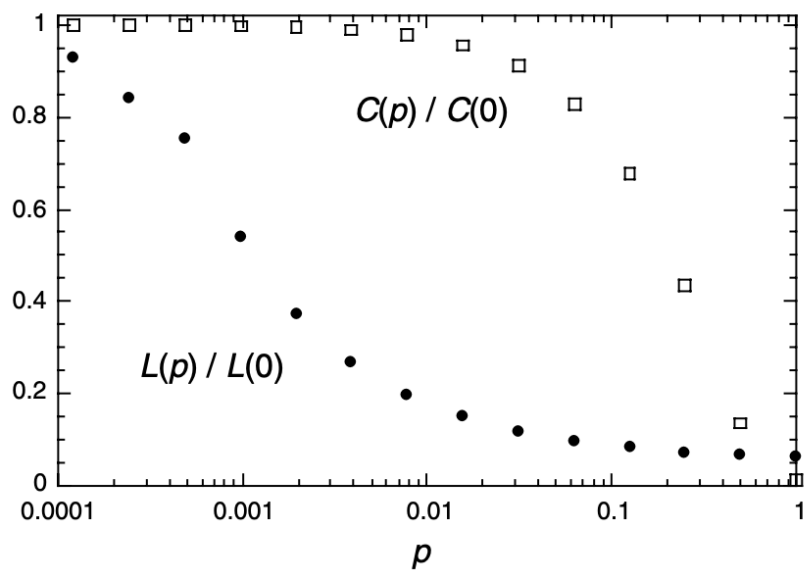


图 2.3 WS 随机网络的聚类系数与重连概率

WS 模型的聚类系数的估计如下

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{WS}(p) &\triangleq \frac{M_0(1-p)^3 + O(1/N)}{K(K-1)/2} \\
 &= \frac{3K(K-2)/8}{K(K-1)/2}(1-p)^3 + O(1/N) \\
 &= \frac{3(K-2)}{4(K-1)}(1-p)^3 + O(1/N) \\
 &= C_{nc}(1-p)^3 + O(1/N)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

下面来研究 WS 模型的度分布, 在 $p > 0$ 时, 每个节点仍与顺时针方向的 $K/2$ 条原有的边相连, 即每个节点的度至少为 $K/2$ 。为此, 记节点 i 的度为 $k_i = s_i + K/2$ 。 s_i 又可分为两部分: $s_i = s_i^1 + s_i^2$, s_i^1 表示在原有的与节点 i 相连的逆时针方向的 $K/2$ 条边中保持不变的边的数目, 其中每条边不变的概率为 $1-p$; s_i^2 表示通过随机重连机制连接节点 i 上的长程边, 每条这样的边的概率为 p/N 。有

$$\begin{aligned}
 P_1(s_i^1) &= \binom{K/2}{s_i^1} (1-p)^{s_i^1} p^{K/2-s_i^1} \\
 P_2(s_i^2) &\simeq \frac{(pK/2)^{s_i^2}}{(s_i^2)!} e^{-pK/2} \text{ 当 } N \text{ 充分大时.}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于任一度为 $k \geq K/2$ 的节点, $s_i^1 \in [0, \min(k - K/2, K/2)]$ 。当 $k < K/2$ 时, $P(k) = 0$, 当 $k \geq K/2$ 时

$$P(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2, K/2)} \binom{K/2}{n} (1-p)^n p^{K/2-n} \frac{(pK/2)^{k-(K/2)-n}}{(k-(K/2)-n)!} e^{-pK/2} \tag{2.16}$$

2.1.3.3 NW 小世界模型

NW 小世界模型是通过在规则图上有随机性的增加长程边形成的, 相比 WS 模型, 这是一种更常见的小世界模型。下面给出 NW 模型构建算法如下

- (1) 从规则图开始: 给定一个含有 N 个节点的环状最近邻耦合网络, 其中每个节点都与它左右相邻的各 $K/2$ 个节点相连, K 是偶数。
- (2) 随机化加边: 以概率 p 在随机选取的 $NK/2$ 对节点之间添加边, 其中规定不得有重边和自环。

首先讨论 NW 模型的聚类系数, NW 模型的聚类系数采用几何聚类系数来讨论, $p = 0$ 时, 网络中的三角形数量为 $\frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)$ 。 $p > 0$ 时, 现在我们需要

要计算在添加了长程边之后新增加的三角形的数量。网络中长程边的平均数为 $\frac{1}{2}NKp$ ，这些边可以在 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个点对之间添加，每一对节点之间有长程边相连的概率为

$$\frac{\frac{1}{2}NKp}{\frac{1}{2}N(N-1)} = \frac{Kp}{N-1} \approx \frac{Kp}{N} \quad (2.17)$$

包含一条长程边的三角形数量可以近似为一个与 N 无关的常数:

$$N \times \frac{Kp}{N} = Kp \quad (2.18)$$

当网络规模趋于无穷时，这一常数与最近邻网络的三角形数量相比是可以忽略不计的。因此，对于 $0 \leq p \ll 1$ 模型中的三角形的数量近似为 $\frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)$ 每条长程边都可以与 N 条边的两个端点之一形成连通三元组，因此包含一条长程边的连通三元组的平均数量为

$$\frac{1}{2}NKp \times K \times 2 = NK^2p \quad (2.19)$$

如果一个节点与 $m > 1$ 条长程边相连，那么从中任选两条长程边就构成一个连通三元组，共有 $\frac{1}{2}m(m-1)$ 种可能。平均一个节点与 Kp 条长程边相连，因此网络中以一个节点为中心的包含两条长程边的连通三元组数量的均值为

$$N \times \frac{1}{2}Kp(Kp-1) \approx \frac{1}{2}NK^2p^2 \quad (2.20)$$

因此，NW 模型中总的连通三元组的数量的均值为

$$\frac{1}{2}NK(K-1) + NK^2p + \frac{1}{2}NK^2p^2 \quad (2.21)$$

综上所述，当 $0 \leq p < 1$ 时，NW 小世界网络模型的聚类系数的估计值为

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{NW}(p) &= \frac{3 \times \frac{1}{4}NK\left(\frac{1}{2}K-1\right)}{\frac{1}{2}NK(K-1) + NK^2p + \frac{1}{2}NK^2p^2} \\ &= \frac{3(K-2)}{4(K-1) + 4Kp(p+2)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

小世界模型的平均路径长度具有如下形式

$$L = \frac{N}{K} f(NKp) \quad (2.23)$$

$f(x)$ 被称为普适标度函数，NW 模型的平均路径长度有如下近似

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4x}} \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{x}{x+4}} \quad (2.24)$$

在 x 远大于 1 时, 可以简化为

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \ln \frac{\sqrt{1 + 4/x} + 1}{\sqrt{1 + 4/x} - 1} \simeq \frac{\ln x}{x}, \quad x \gg 1 \quad (2.25)$$

将 $f(x)$ 代入, 最后得出

$$L = \frac{\ln(NKp)}{K^2 p}, \quad NKp \gg 1 \quad (2.26)$$

由图看出, 这种近似效果优异。

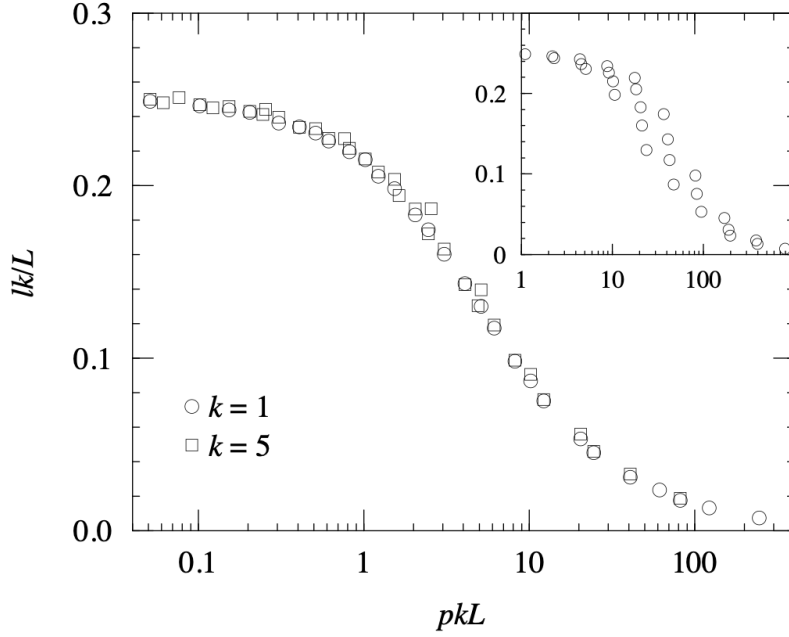


图 2.4 NW 随机网络的平均路径长度

下面讨论度分布, 由于每对节点之间有边相连的概率为 $Kp/(N-1)$, 因此

$$P(k) = \binom{N-1}{k-K} \left[\frac{Kp}{N-1} \right]^{k-K} \left[1 - \frac{Kp}{N-1} \right]^{N-1-k+K} \quad (2.27)$$

NW 模型中长程边的平均数为 $\frac{1}{2}NKp$, 涉及的端点数目为 NKp 。因此, 网络中长程边的数量为 Kp , 即 $\langle k-K \rangle = Kp$ 。当网络中节点数 N 充分大时, 可近似写为泊松分布:

$$P(k) = \frac{(Kp)^{k-K}}{(k-K)!} e^{-Kp} \quad (2.28)$$

2.2 非线性系统的稳定性和混沌

在刘慈欣的著作《三体》中提到了一个经典的天体物理问题——三体问题, 这个问题的一个重要特点是三体系统的不稳定性, 即在微小扰动的影响下, 依托

于一定时间内已知的位置与运动信息预测出将来的位置具有很大的变化。现实中很难把握系统中全部的微信息，例如一个原子的微小扰动几乎是难以描述的，如果模型自身对这种微小差异敏感度极高，那意味着这个系统几乎没有可以预测的可能性，预测出的结果与现实差异会随着时间轴指数级放大。衡量非线性系统的稳定性研究主要由李雅普诺夫稳定性入手。

2.2.1 非线性系统的稳定性

考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.29)$$

其中, $f : D \rightarrow R^n$ 是从定义域 $D \subset R^n$ 到 R^n 上的局部利普希茨映射。假定 $\bar{x} \in D$ 是其平衡点, 即 $f(\bar{x}) = 0$ 。不失一般性, 所有定义和定理都是对平衡点在 R^n 上的原点, 即 $\bar{x} = 0$ 时的情况而言。因为经过变量代换总可以把平衡点变换为原点。假设 $\bar{x} \neq 0$, 经 $y = x - \bar{x}$ 变换后, y 的导数为

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(y), g(0) = 0 \quad (2.30)$$

对于变量 y , 系统在原点有平衡点。

定义 2.3. 对于平衡点 $x = 0$, 如果对于每个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 满足

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.31)$$

则该平衡, 点是稳定的。如果稳定, 且可选择适当的 δ , 满足

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.32)$$

则该平衡, 点是渐近稳定的。

下面的李雅普诺夫稳定性定理是判断平衡点稳定的重要方法, 它能够用某些其他函数代替能量以确定平衡点的稳定性。设 $V : D \rightarrow R$ 是连续可微函数, $\dot{V}(x)$ 是 $V(x)$ 沿方程轨线的导数。即

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (2.33)$$

定理 2.2. 设 $x = 0$ 是方程的一个平衡点, $D \subset R^n$ 是包含原点的定义域。设 $V : D \rightarrow R$ 是连续可微函数, 如果

$$\begin{aligned} V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad & \text{在 } D - \{0\} \text{ 内} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \quad & \text{在 } D \text{ 内} \end{aligned} \quad (2.34)$$

那么, 原点 $x = 0$ 是稳定的。此外, 如果

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{在 } D - \{0\} \text{ 内} \quad (2.35)$$

那么, 原点 $x = 0$ 是渐近稳定的。

满足式 (2.33) 的连续可微函数 $V(x)$ 称为李雅普诺夫函数。对于某个 $c > 0$, 曲面 $V(x) = c$ 称为李雅普诺夫面或等位面。下面是 Chetaev 定理, 用于确定非稳定平衡点的不稳定性。

定理 2.3. 设 $x = 0$ 是方程 (4.1) 的平衡点。设 $V : D \rightarrow R$ 是连续可微函数, 满足 $V(0) = 0$, 且对于任意小 $\|x_0\|$ 的某一点 x_0 , 有 $V(x_0) > 0$ 。定义集合 $U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$, 并假设在 U 内有 $\dot{V}(x) > 0$, 那么 $x = 0$ 就是非稳定平衡点。

接下来讨论非线性系统线性化的方法, 定义线性系统

$$\dot{x} = Ax \quad (2.36)$$

该系统在原点处有一个平衡点, 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 时, 该平衡点是孤立的。如果 $\det(A) = 0$, 则矩阵 A 有一个非平凡零空间。 A 的零空间内的每一点都是系统的平衡点, 进而系统有一个平衡点子空间。线性系统不可能有多个孤立的平衡点, 因为如果 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 是系统的两个平衡点, 那么连接 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 两点的直线上的每一点都是系统的平衡点。原点的稳定性质由矩阵 A 的特征值位置决定。对于给定的初始状态 $x(0)$, 系统的解为

$$x(t) = \exp(At)x(0) \quad (2.37)$$

转换为若尔当标准型

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_r] \quad (2.38)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (2.39)$$

因此

$$\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik} \quad (2.40)$$

定理 2.4. 当且仅当 A 的所有特征值都满足 $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, 对于每个 $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, 代数重数 $q_i \geq 2$ 的特征值满足 $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$ 时 (n 为 x 的维数), 方程 $\dot{x} = Ax$ 的平衡点 $x = 0$ 是稳定的。当且仅当 A 的所有特征值满足 $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ 时, 平衡点 $x = 0$ 是全局渐近稳定的。

回到非线性系统 (2.29), $f : D \rightarrow R^n$ 是从 $D \subset R^n$ 到 R^n 的连续可微映射。假设原点 $x = 0$ 在 D 内, 且为系统的一个平衡点, 即 $f(0) = 0$ 。根据均值定理

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) x \quad (2.41)$$

其中 z_i 是连接 x 与原点之间的线段上的一点。由于 $f(0) = 0$

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \quad (2.42)$$

所以

$$f(x) = Ax + g(x) \quad (2.43)$$

其中

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x \quad (2.44)$$

并且

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\| \quad (2.45)$$

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \|x\| \rightarrow 0 \quad (2.46)$$

这就是说在原点的一个小邻域内, 可以用对系统在原点的线性化方程

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{其中 } A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad (2.47)$$

下面定理指出当原点是非线性系统的平衡点时，其稳定性可以通过研究线性系统在该平衡点的稳定性得出。

定理 2.5. 设 $x = 0$ 是非线性系统 $\dot{x} = f(x)$ 的一个平衡点，其中 $f : D \rightarrow R^n$ 是连续可微的，且 D 为原点的一个邻域。设

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \quad (2.48)$$

如果 A 的所有特征值都满足 $\text{Re } \lambda_i < 0$ ，则原点是渐近稳定的。如果 A 至少有一个特征值满足 $\text{Re } \lambda_i > 0$ ，则原点是不稳定的。

2.2.2 混沌基本理论

2.2.2.1 混沌定义

从牛顿力学创立之初，人们就坚信 Laplace 确定论思想，即对确定性动力系统施加确定性输入，将得到确定性的输出。这一结论对于线性系统是正确的，但对于非线性系统，则可能出现一种不可预测的、类随机的运动，即混沌 (chaos)。由于混沌的奇异性、复杂性尚未被彻底揭示，其定义至今尚不统一。首先来介绍 Li-Yorke 定义。

定理 2.6. (Li-Yorke) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续自映射，且 $f(x)$ 有 3 周期点，则 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, f(x)$ 存在 n 周期点。

定义 2.4. (Li-Yorke) 区间 I 上的连续自映射 $f(x)$ 具有混沌现象，若其满足：

- (1) f 的周期点的周期无上界，
- (2) I 上存在不可数子集 S ，有
 - (i) 对任意 $x, y \in S, x \neq y$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0$;
 - (ii) 对任意 $x, y \in S, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0$;
 - (iii) 对任意 $x \in S$ 和 f 的任意周期点 y ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0$ 。

由定义可知：闭区间 I 上的连续函数 $f(x)$ ，若存在 3 周期点，则必存在任意正整数周期点，即存在混沌现象。定义中，条件 (i)、(ii) 表明子集中的点 x 与 y 相当分散又相当集中，条件 (iii) 意味着子集不会趋近于任意周期点。Li-Yorke 定义准确刻画了混沌运动的三个重要特征：(1) 存在不可数无穷多稳定非周期轨道；(2) 至少存在一个不稳定的非周期轨道；(3) 存在可数无穷多稳定周期轨道。

接下来是下一种定义混沌的方法——Devaney 混沌定义。

定义 2.5. (Devaney) 设 V 是一度量空间, 称映射 $f : V \rightarrow V$ 为混沌的, 若其满足:

- (1) 初值敏感性, $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ 与 $\forall x \in V, \exists y \in O_x(\varepsilon)$ 与 $n \in \mathbb{N}$, s.t. $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$;
- (2) 拓扑传递性, 对 V 上任意开集 $X, Y, \exists k > 0, f^k(X) \cap Y \neq \emptyset$ (如映射有稠轨道, 则其显然是拓扑传递的);
- (3) f 的周期点集在 V 中稠密。

Devaney 定义从另外的角度刻画了混沌的重要特征, 包括:(1) 初值敏感性: 任意两点 x, y 即使非常靠拢, 它们之间的距离在 f 作用多次后都将扩大到一定的程度, 任意微小的初始误差, 经多次迭代后都将导致计算 f 轨道的失败;(2) 拓扑传递性: 在 f 的作用下, 任意点的邻域将遍及整个度量空间 V , 表明 f 无法分解为在 f 下互不相影响的两个子系统;(3) 周期点集稠密性: 意味系统具有很强规律性与确定性, 形似混乱实则有序。

混沌的复杂运动状态为非线性动力系统所特有, 但非共有, 只有在适当的系统参数下才可能出现混沌运动, 此外系统仍表现为通常的确定性运动。系统进入混沌运动主要有以下三种途径: 倍周期分岔、Hopf 分岔以及 Hamilton 系统的 KAM 环面破裂。

2.2.2.2 混沌的特征

1976 年, P.Myrberg 发表的《具有极复杂动力学的简单数学模型》对混沌理论研究起到了重要作用, 文中指出了一些具有分岔、混沌等极为复杂的动力学行为的简单数学模型。随后 M.Feigenbaum 发现了倍周期分岔中的标度性和普适常数, 即通过周期不断地加倍而产生混沌, 途径为: 不动点 \rightarrow 2 周期点 \rightarrow 4 周期点 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 极限点 \rightarrow 奇异吸引子。

20 世纪 40 年代, andau 与 Hopf 先后独立提出了一种湍流发生的机制, 其基本思想是: 在雷诺数 Re 由极小逐渐增大的过程中, 流体依次经历与时间无关的层流状态, 此时对应相空间的稳定不动点; 一次 Hopf 分岔, 流体因频率为 ω_1 的振荡出现失稳; 二次 Hopf 分岔, 出现新的频率为 ω_2 的振荡, 这种准周期运动使流体运动更加复杂; 随着 Re 继续增大, 将出现更多频率的准周期运动, 最后出现极复杂的准周期运动, 即为湍流。然而, 试验证明该湍流理论并不符合实际。

为此, Ruelle 与 Takens 对上述湍流发生机制作出了修正, 将湍流看作具有无数个频率耦合而成的振荡现象, 且只需经过 4 次分岔, 而非 Landau 和 Hopf 所认为的需经过无数次。4 维环面上具有 4 个不可公约的频率的准周期运动通常并不稳定, 经扰动后转变为奇异吸引子, 即著名的 $T^4 \rightarrow$ 混沌道路。随后, 代之以 $T^2 \rightarrow$ 混沌道路, 其典型途径为: 不动点 (平衡态) \rightarrow 极限环 (周期运动) \rightarrow 二维环面 (准周期运动) \rightarrow 奇异吸引子 (混沌运动)。KAM 定理指出: 近 Hamilton 系统的轨线分布在一些层层相套的环面 (KAM 环面), 而混沌区充满了两个环面之间。若为可积 Hamilton 系统, 双曲平衡点与椭圆平衡点交替出现, 相平面被鞍点连续分割, 各部分运动互不相混; 若为不可积 Hamilton 系统, 鞍点连线破断, 剧烈振荡出现在鞍点附近, 这种振荡与 Smale 马蹄结构等价, 从而导致混沌运动。

2.2.2.3 研究混沌常用方法

考虑几个基本问题: 能否判定一个系统将出现混沌; 可否对混沌作定量刻画; 可否在某些非线性系统因混沌而无法长期预报的同时, 得到混沌信号中的有用信息。分析系统混沌运动常用的方法有: 观测法、相空间重构法、分频采样法、Poincaré 截面法等等, 以下主要介绍自功率谱密度分析与 Lyapunov 指数法。首先来看自功率谱密度分析。设周期信号 $x(t)$ 的周期为 T , 其 Fourier 级数展开形式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.49)$$

式中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.50)$$

其物理意义表明: 任意周期运动可由基频 $\omega_0 = 2\pi/T$ 与谐振 $n\omega_0$ 叠加而成。而准周期运动也可分解为一系列频率不可约的正弦谐波地叠加, 两者的频率谱均为离散谱。设 $x(t)$ 为非周期信号, 若满足绝对可积条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (2.51)$$

则其 Fourier 积分的展开式为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.52)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.53)$$

表明非周期信号具有连续谱。可通过混沌信号自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的 Fourier 变换反映其频域特性，并根据所得的自功率谱密度函数 $S_{xx}(f)$ 对混沌的频域特征进行分析。

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{-j2\pi f\tau} df \end{aligned} \quad (2.54)$$

混沌运动的功率谱为噪声背景宽峰的连续谱，其中的尖峰与周期运动相对应，反映出混沌轨道访问各混沌带的平均周期；而周期运动的功率谱中，尖峰只出现在基频及其倍频处；对于准周期的功率谱，尖峰在几个不可公约的基频及其频率叠加处出现；发生倍周期分岔时，功率谱图中的尖峰将在分频及其倍频频点上出现；由此，可判别运动的混沌、随机、周期、准周期特征。

2.2.2.4 LE 指数

最大 LE 指数是判断非线性时间序列是否为混沌系统的重要指标，混沌运动的基本特点是运动对初始条件的扰动极为敏感，两个靠近的初始值所产生的轨道，随时间推移按指数方式分离，LE 指数就是用以描述这一现象的量。在一维动力系统 $x_{n+1} = F(x_n)$ 中，初始两点迭代后互相分离或者靠拢，取决于导数 $\left| \frac{dF}{dx} \right|$ 的值。若 $\left| \frac{dF}{dx} \right| > 1$ ，则两点分开；若 $\left| \frac{dF}{dx} \right| < 1$ ，则得两点靠拢。有时在迭代过程中， $\left| \frac{dF}{dx} \right|$ 的值也随之而变化，呈现出时而分离时而靠拢的情况。为了从整体上看相邻两个状态，将对时间（或迭代次数）取平均。设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 λ ，相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后距离为

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)| \quad (2.55)$$

取 $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (2.56)$$

可简化为

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (2.57)$$

λ 与初值的选取没有关系，称为原动力系统的 LE 指数，表示系统在多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数。若 $\lambda < 0$ ，则意味着相邻点要靠拢合

并成一点，这对应于稳定的不动点和周期运动；若 $\lambda > 0$ ，则意味着相邻点要分离，对应于轨道的局部不稳定。

对于 n 维动力系统，设 F 为 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 上的 n 维映射，设 n 维离散动力系统： $x_{n+1} = F(x_n)$ 。将系统的初始条件域取为一个无穷小的 n 维小球，由于演化过程中球将变成椭球。将椭球上所有主轴按其长度顺序排列，第 i 个 LE 指数为第 i 个主轴的长度 $P_i(n)$ 的增加速率，其定义为

$$\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{P_i(n)}{P_i(0)} \right|, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.58)$$

对于系统是否存在动力学混沌，从最大 LE 指数是否大于零非常直观的判断出来：一个正的 LE 指数，意味着系统相空间中，初始接近的两条轨线，其差别都会随着时间的演化而成指数率的增加以致达到无法预测，这就是混沌现象。

2.3 复杂网络的同步

本节内容来探讨复杂网络中一个重要性质，网络中不同节点的同步性，在一些条件下，原本不协调的各个节点会彼此同步，首先需要有一个衡量同步性的指标。考虑如下动力方程

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} (H(x_j) - H(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.59)$$

其中 x_i 与 $H(x_i)$ 分别是节点 i 的状态与输出， c 为耦合强度， A 为网络模型的邻接矩阵。记

$$l_{ij} = -a_{ij} (i \neq j), \quad l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (2.60)$$

则动力学方程改写为

$$\dot{x}_i = f(x_i) - c \sum_{j=1}^N l_{ij} H(x_j) \quad (2.61)$$

记 $L = l - ij$ ，称为该网络的 Laplacian 矩阵，其每行的元素之和为 0，即

$$\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0 \quad (2.62)$$

记矩阵 L 的特征根为

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N \quad (2.63)$$

那么有

$$\lambda_2 \leq \frac{N}{N-1} k_{\min} \leq \frac{N}{N-1} k_{\max} \leq \lambda_N \leq 2k_{\max} \quad (2.64)$$

如果 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$x_i(t) - x_j(t) \rightarrow 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.65)$$

则称网络是完全同步的, 若有 $s(t)$ 使得

$$x_i(t) \rightarrow s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.66)$$

则称网络的所有节点同步于 $s(t)$, 称 $s(t)$ 为同步状态。将状态方程运用 $s(t)$ 线性化, 令 ξ_i 为该节点的度, i 的变分, 有

$$\dot{\xi}_i = \mathbf{D}f(s)\xi_i - \sum_{j=1}^N c l_{ij} \mathbf{D}H(s)\xi_j \quad (2.67)$$

这里 $\mathbf{D}f(s)$ 和 $\mathbf{D}H(s)$ 分别是 $f(s)$ 和 $H(s)$ 关于 s 的 Jacobi 矩阵, 再令 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_N]$, 则上式可以写为

$$\dot{\xi} = \mathbf{D}f(s)\xi - c \mathbf{D}H(s)\xi \mathbf{L}^T \quad (2.68)$$

记 $\mathbf{L}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ 为矩阵的对角分解, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 。再令 $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_N] = \xi \mathbf{U}$, 则有

$$\dot{\eta} = \mathbf{D}f(s)\eta - c \mathbf{D}H(s)\eta \mathbf{\Lambda} \quad (2.69)$$

上式等价于

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \mathbf{D}f(s)\eta_1, \\ \dot{\eta}_k &= [\mathbf{D}f(s) - c \lambda_k \mathbf{D}H(s)] \eta_k, \quad k = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.70)$$

定义主稳定方程

$$\dot{y} = [\mathbf{D}f(s) - \alpha \mathbf{D}H(s)]y \quad (2.71)$$

该方程的最大 LE 指数 L_{\max} 是关于实变量 α 的函数, 称为网络系统的主稳定函数。把使得主稳定函数 L_{\max} 为负的实数 α 的取值范围 S 称为网络系统的同步化区域, 它是由孤立节点的动力学函数 $f(\cdot)$ 和输出函数 $H(\cdot)$ 确定的。如果耦合强度与 Laplacian 矩阵的每个非零特征值之积都属于同步化区域, 即

$$c \lambda_k \subseteq S, \quad k = 2, \dots, N \quad (2.72)$$

那么同步流形是渐近稳定的。

2.4 稀疏重构基本理论和算法

2.4.1 稀疏重构基本理论

该节介绍了压缩感知理论的定义以及基础数学知识，通过探寻不同的限制与不同的感应矩阵性质给出稀疏重构问题解的唯一性与存在性的等价条件。如若未说明，本节内容只讨论实向量空间，可拓展至复数的会单独指明。

2.4.1.1 稀疏重构问题的定义

假设信号 $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ 具有稀疏性质，或者在一个正交变换后具有这样的性质即 $\|x\|_0 := \#\{i : x_i \neq 0\}$ 远小于 n 或 $x = \Phi c$ ， Φ 是正交矩阵且 c 稀疏。取 $m \times n$ 的矩阵 A ，其中 $m < n$ 。令

$$y = Ax \text{ 或 } y = A\Phi c \quad (2.73)$$

稀疏重构问题是指在已知原向量 x 中零元素足够多的情况下从 y 与 A 中还原出 x ，矩阵 A 被称为感应矩阵。

2.4.1.2 最优化理论

在 x 本身是稀疏的条件下还原条件在优化问题中的表述为

$$(P_0) \quad \min_x \|x\|_0 \quad s.t. \quad y = Ax \quad (2.74)$$

这个问题是 NP 难问题，无法在有限迭代找出最优解，但是问题

$$(P_1) \quad \min_x \|x\|_1 \quad s.t. \quad y = Ax \quad (2.75)$$

有解，并且 l_1 的减小可以促进稀疏性，因此 $l_1 = l_0$ 何时成立是稀疏还原的一个核心问题，这取决于 x 本身的稀疏度与感应矩阵 A ，并且对于超大数据量的情况，最小化 l_1 的方法也无法解决问题，本文会介绍在这种情况下启发式算法的应用与性能。接下来给出 NP 困难的证明，下面定理说明了 (P_0) 问题可以在多项式时间复杂度内约化为集合的精确覆盖，这是一个经典的 NP-hard 问题。

定理 2.7. 对于任意的 $\eta \geq 0$ 问题

$$\min_x \|x\|_0 \quad s.t. \quad \|Ax - y\|_2 \leq \eta \quad (2.76)$$

对于一般的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ 与向量 $y \in \mathbb{C}^m$ 都是 NP-hard 的。也就是说，找不到多项式时间复杂度的算法解决这一问题。

2.4.1.3 稀疏重构解的唯一性的条件

这里对 l_0 和 l_1 范数分别给出其等价条件。

定义 2.6. 取 $m \times N$ 的矩阵 A , $\text{spark}(A)$ 是 A 的列向量线性相关的最小向量数目。

引理 2.8. 记 $\mathcal{N}(A)$ 为矩阵 A 的零空间, 则

$$\text{spark}(A) = \min \{k : \mathcal{N}(A) \cap \Sigma_k \neq \{0\}\} \quad (2.77)$$

并且 $\text{spark}(A) \in [2, m+1]$ 。

下面是 l_0 范意义 P_0 下解的唯一性的等价条件。

定理 2.9. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵, 且 $k \in \mathbb{N}$, 则下述 2 个条件等价

- (i) 若存在 P_0 下解使得 $\|x\|_0 \leq k$, 则解唯一。
- (ii) $k < \text{spark}(A)/2$ 。

证明. (i) \Rightarrow (ii), 采用反证法, 若 (ii) 不成立, 则 $\exists h \in \mathcal{N}(A), h \neq 0$, 同时 $\|h\|_0 \leq 2k$ 。因此存在 x 和 \tilde{x} 满足 $h = x - \tilde{x}$ 并且 $\|x\|_0, \|\tilde{x}\|_0 \leq k$, 但是 $Ax = A\tilde{x}$, 矛盾。

(ii) \Rightarrow (i), 令 x 和 \tilde{x} 是满足条件的两个解, 则有 $x - \tilde{x} \in \mathcal{N}(A)$, 并且有 $\|x - \tilde{x}\|_0 \leq 2k < \text{spark}(A)$, 由引理得, $x - \tilde{x} = 0$ 。 \square

现在引入一个记号 1_Λ , 其中 Λ 是 $1, 2, \dots, N$ 的一个子集。

$$(1_\Lambda x)_i = \begin{cases} x_i & : i \in \Lambda, \\ 0 & : i \notin \Lambda, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.78)$$

定义 2.7. 令 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 称 A 具有 k 阶空空间性质 (NSP), 如果对于 $\forall h \in \mathcal{N}(A), h \neq 0$ 且对于 $\forall |\Lambda| \leq k$, 均有

$$\|1_\Lambda h\|_1 < \frac{1}{2} \|h\|_1 \quad (2.79)$$

下面是 l_1 范意义 P_1 下解的唯一性的等价条件。

定理 2.10. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵, 且 $k \in \mathbb{N}$, 则下述 2 个条件等价

- (i) 若存在 P_1 下解使得 $\|x\|_0 \leq k$, 则解唯一。
- (ii) 矩阵 A 具有 k 阶空空间性质。

2.4.1.4 稀疏重构解存在的充分性条件

本节内容旨在分析 P_0 与 P_1 的解的一致性, 首先讨论 P_0 问题的解的存在性问题。

定理 2.11. 对于任意的 $N \leq 2k$, 存在矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, 其中 $m = 2k$, 使得 k 稀疏的条件下 P_0 有解。

证明. 取范德蒙矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{2k-1} & t_2^{2k-1} & \cdots & t_N^{2k-1} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

令 $S = \{j_1 < \cdots < j_{2k}\}$ 是指标集, 构造方阵 A_S , 行列式为

$$\det(A_S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_{j_1} & t_{j_2} & \cdots & t_{j_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{j_1}^{2k-1} & t_{j_2}^{2k-1} & \cdots & t_{j_{2k}}^{2k-1} \end{vmatrix} = \prod_{s < \ell} (t_{j_\ell} - t_{j_s}) > 0 \quad (2.81)$$

根据定理 2.8 与矩阵 A_S 的可逆性可以得出问题 P_0 的存在唯一性的条件, A 的解只需根据指标集 S 按位置取出即可。□

定义 2.8. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵, a_i 为其第 i 个列向量, 矩阵相关性指数 $\mu(A)$ 定义为

$$\mu(A) = \max_{i \neq j} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2}. \quad (2.82)$$

显然当 A 有两列成比例时, 相关性指数达到最大值 1。

引理 2.12. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵, 那么

$$\mu(A) \in \left[\sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}, 1 \right] \quad (2.83)$$

通过这个结果可以给出一个使 l_0 范数与 l_1 范数的一致充分条件。

定理 2.13. 令 A 是 $m \times N$ 阶矩阵, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 是 (P_0) 问题的一个解, 并且有

$$\|x\|_0 < \frac{1}{2} (1 + \mu(A)^{-1}). \quad (2.84)$$

那么 x 是 (P_0) 和 (P_1) 问题的唯一解。

2.4.2 稀疏重构算法

经过上节的讨论得知, 某些情况下 P_0 问题可以转换为 P_1 问题, 而 P_1 是经典的基追踪问题, 是可解的, 首先说明这种情况, 下述定理从理论上说明了若找的 P_1 的唯一解, 则这个解的稀疏度可以得到控制。

定理 2.14. 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$, 其列向量为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$, 假设存在唯一的解 $\mathbf{x}^\#$ 使得

$$\underset{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (2.85)$$

则 $\{\mathbf{a}_j, j \in \text{supp}(\mathbf{x}^\#)\}$ 是线性无关的, 并且

$$\|\mathbf{x}^\#\|_0 = \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x}^\#)) \leq m \quad (2.86)$$

证明. 使用反证法, 假设 $\{\mathbf{a}_j, j \in S\}$ 是线性相关的, 其中 $S = \text{supp}(\mathbf{x}^\#)$, 也就是说, 存在非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 使得 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 并且支撑在 S 上。对任意 $t \neq 0$

$$\|\mathbf{x}^\#\|_1 < \|\mathbf{x}^\# + t\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j \in S} |x_j^\# + tv_j| = \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\# + tv_j) (x_j^\# + tv_j) \quad (2.87)$$

如果 $|t| < \min_{j \in S} |x_j^\#| / \|\mathbf{v}\|_\infty$, 有

$$\text{sgn}(x_j^\# + tv_j) = \text{sgn}(x_j^\#) \quad \text{for all } j \in S \quad (2.88)$$

因此, 在这种情形下

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^\#\|_1 &< \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\#) (x_j^\# + tv_j) = \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\#) x_j^\# + t \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\#) v_j \\ &= \|\mathbf{x}^\#\|_1 + t \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\#) v_j. \end{aligned} \quad (2.89)$$

由于总能找到 $t \neq 0$ 使得 $t \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\#) v_j \leq 0$, 产生矛盾。 \square

所以可以转化为经典的基追踪问题如下

$$\mathbf{x}^\# = \underset{\mathbf{z}}{\text{argmin}} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (2.90)$$

基追踪问题可以转换为线性规划问题。

$$\min_{x, u} \sum_i u_i \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} x_i - u_i \leq 0 \\ -x_i - u_i \leq 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (2.91)$$

进而用一般的线性规划算法求解即可。

另一类稀疏重构算法是采用贪心策略算法，并不一定能收敛到最优解，但是对条件的适应性强，同时有令人满意的速度。首先是最经典的正交追踪算法 (OMP)，这个算法通过不断引入在我们期望的方向上投影最大的向量，逐步达到问题条件的同时满足构造较小的支撑集。

现在来介绍 OMP 算法，我们假定初始的支撑集为 S^0 ，初始输出结果为 \mathbf{x}^0 ，最终的输出结果为 $\mathbf{x}^\#$ 。一直重复以下过程直到达到我们需要的稀疏度 \bar{n} ，得到结果 $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ 。

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= S^n \cup \{j_{n+1}\}, \quad j_{n+1} := \operatorname{argmax}_{j \in [N]} \left\{ \left| (\mathbf{A}^* (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j \right| \right\}, \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

下面的引理指出上述 OMP 算法中采用的策略 $\operatorname{argmax}_{j \in [N]} \left\{ \left| (\mathbf{A}^* (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j \right| \right\}$ 确实是一个好的贪心策略，确实满足了条件在欧氏距离下的最佳逼近。

引理 2.15. 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ 是列归一化矩阵，给定的 $S \subset [N]$ ， \mathbf{v} 支撑在 S 上，并且 $j \in [N]$ ，如果

$$\mathbf{w} := \operatorname{argmin}_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S \cup \{j\} \right\} \quad (2.93)$$

那么有

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - \left| (\mathbf{A}^* (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j \right|^2 \quad (2.94)$$

证明. 任取 $t \in \mathbb{C}$ ，形如 $\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j$ 的向量都支撑在 $S \cup \{j\}$ 上，并且

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \min_{t \in \mathbb{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 \quad (2.95)$$

设 $t = \rho e^{i\theta}$ ，有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v} - t\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + |t|^2 \|\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{t} \langle \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{e}_j \rangle) \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2 \operatorname{Re}(\rho e^{-i\theta} (\mathbf{A}^* (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j) \\ &\geq \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho \left| (\mathbf{A}^* (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j \right| \end{aligned} \quad (2.96)$$

最后一式在 $\rho = \left| (\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{u}))_j \right|$ 时取最小, 即

$$\min_{t \in \mathbb{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - \left| (\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{u}))_j \right|^2 \quad (2.97)$$

□

正交匹配追踪算法有一个问题, 一旦选择了不正确的索引, 它就会保留下去, 在 s 次迭代内没有办法修正。下面的 **CoSaMP** 算法增加了迭代次数, 通过阈值的引入增加了每次选取的个数, 采用了更有意义的索引机制来减小陷入局部解的可能性。设 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, 令

$$L_s(\mathbf{z}) := s \text{ 个最大绝对条目的索引集} \quad (2.98)$$

$$H_s(\mathbf{z}) := \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})} \quad (2.99)$$

其中非线性算子 H_s 称为 s 阶硬阈值运算符, 它将保留绝对值最大的前 s 项, 并将其他项置为 0。

以下是 **CoSaMP** 算法的迭代过程, 同样在达到固定的稀疏度后停止。

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \text{supp}(\mathbf{x}^n) \cup L_{2s}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)) \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \underset{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset U^{n+1} \}, \\ \mathbf{x}^{n+1} &= H_s(\mathbf{u}^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.100)$$

2.5 小结

本节我们首先详细介绍了复杂网络的基础内容, 给出了 **ER** 随机图与小世界网络模型的构造方法, 讨论了经典复杂网络模型的拓扑性质。随后介绍了非线性系统的经典问题, 平衡点稳定性问题, 并由此引出了动力系统混沌现象的产生与量化。最后给出了稀疏重构问题的定义与基本理论, 并给出了两种经典的稀疏重构算法。

第3章 Duffing-WS 型小世界复杂网络的混沌、同步动力学

本章针对一种新型的 Duffing-WS 型小世界网络，首先利用变分法推导其最大李雅普诺夫指数表达式，并以李雅普诺夫指数作为混沌现象的判断标准研究该复杂网络的混沌现象，同时讨论了网络混沌现象对网络各个参数的依赖关系，接着分析了振子间的同步特性。研究表明，Duffing-WS 型小世界网络具有比单个 Duffing-方程更为复杂的混沌特性。

3.1 Duffing-WS 型小世界网络基本模型

Duffing 方程作为研究最为充分的混沌连续动力系统模型之一，具有丰富的非线性动力学行为。早在 1918 年，Duffing 首次引入 Duffing 方程用来描述机械问题中具有硬弹簧效应的非线性振子。后来到 1979 年，牧恩 (Moon) 和霍尔姆斯 (Holmes) 将其修改为描述处在两个永久磁铁非均匀场中的支架梁的强迫振动。一般的 Duffing 振子可由如下的方程描述：

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \partial V(x)/\partial x = f(t) \quad (3.1)$$

其中, $\gamma > 0$ 为阻尼系数, $V(x)$ 表示物体所受势场力, $f(t)$ 表示外激励力。当 $V(x)$ 和 $f(t)$ 取不同的形式时, 便可得不同形式的 Duffing 方程。

规范化的 Holmes 型 Duffing 方程如下：

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + ax - bx^3 + A \sin(\Omega t) \quad (3.2)$$

令 $y = \dot{x}$, 则上述方程可以改写为：

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ax - bx^3 - \gamma y + A \sin(\Omega t), \end{cases} \quad (3.3)$$

当周期振幅为 0 时, 通过令方程组 (3.3) 右式为 0 可得 Holmes 型 Duffing 方程 (3.2) 具有三个平衡点: $S = (0, 0)$, $F_1 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right)$, $F_2 = \left(-\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right)$ 。其中 F_1, F_2 是稳定的焦点, 而 S 是不稳定的鞍点。

此外, 它的相空间体积为：

$$\text{div}V = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(ax - bx^3 - \gamma y)}{\partial y} = -\gamma < 0 \quad (3.4)$$

所以上述 Duffing 系统是一个耗散动力系统。

当外加周期驱动力不存在 (即 $A = 0$) 时, 受迫的 Holmes 型 Duffing 方程退化为无摄动的 Duffing 方程, 方程的解 $x(t)$ 将以螺旋形式 (衰减振荡) 趋于两稳定焦点之一, 并且初始条件决定着系统将最终趋于哪一焦点。在其他参数固定的条件下, 周期驱动力的幅值 A 从 0 开始逐渐增加到 1 时, 方程的解会经历同宿轨道、分岔、混沌和大尺度周期等各个状态。图 3.1 给出了当 A 取不同值时 Duffing 方程输出响应的时域图, 图 3.2 则给出了其输出的相图, 展示了 Duffing 振子从吸引子状态, 再通过倍周期分岔走向混沌的过程。

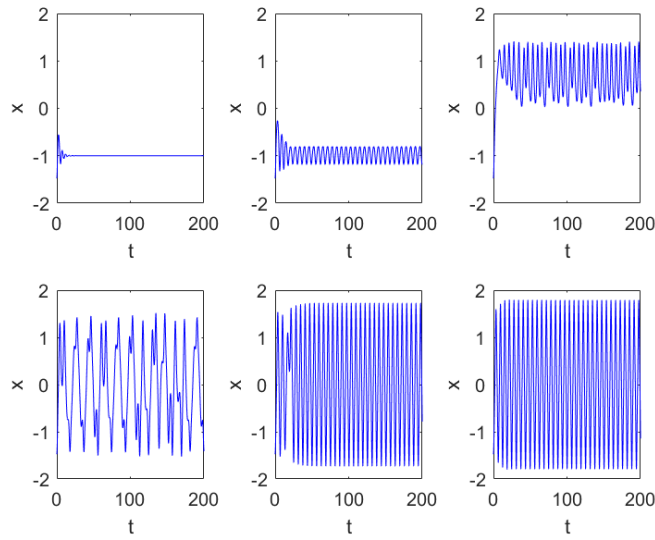


图 3.1 不同周期振幅 A 取值时, Duffing 方程输出时域图

所谓分岔是指对于含参数的系统, 当参数变动并经过某些临界值时, 系统的定态性质 (如平衡状态或者周期运动的数目和稳定性) 会发生突然的变化。分岔图则绘制了系统的庞加莱截面输出随参数的变化图, 可用于比较微小参数扰动对系统指标的影响, 是系统稳定性的直观衡量。下图 * 给出了 Duffing 方程输出 x 随周期驱动幅度 A 变化的分岔图 (借助庞加莱截面), 也可以看到随着周期驱动幅度 A 的变化, Duffing 方程从吸引子走向混沌、大周期运动的过程。

基于上述经典的 Holmes 型 Duffing 方程 (3.1), 本文提出如下具有 N 个节点的以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网, 即 Duffing-WS 型小世界网络, 其动力学方程为:

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + ax_i - bx_i^3 + \epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) + A \sin(\Omega t), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

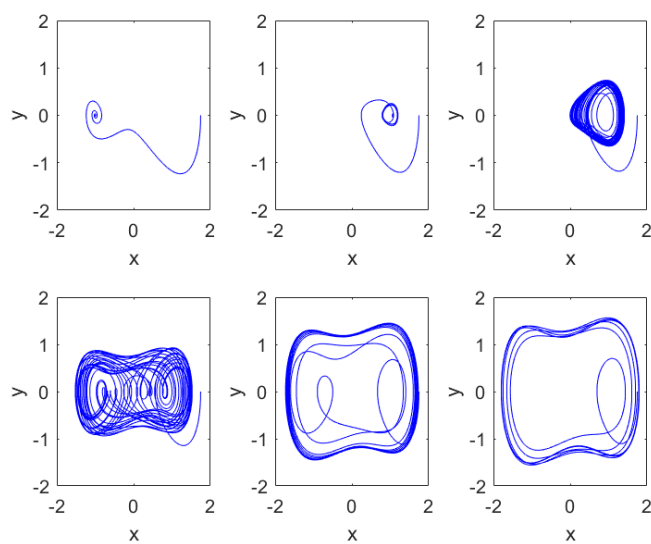


图 3.2 不同周期振幅 A 取值时，Duffing 方程输出相图

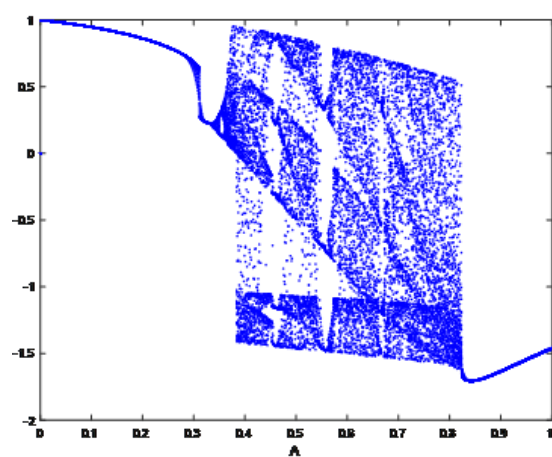


图 3.3 Duffing 方程随周期振幅 A 变化的分岔图

其中, $x_i(t)$ 为第 i 个节点的输出状态变量, $i = 1, 2, \dots, N$ 。 $A \sin(\Omega t)$ 为周期驱动力, $\epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i)$ 表示其它节点对第 i 个节点的耦合作用项, 称为耦合项, ϵ 为网络耦合强度, $(a_{ij})_{N \times N}$ 为网络的邻接矩阵。一般的, 对于一个无权无向的简单连通网络来说, 如果第 i 个节点和第 j 个节点之间有连接, 则 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$ 。

这里我们采用 Watts 和 Strogatz 提出的 WS 小世界网络作为网络连接拓扑结构 [3], 其连接方式按如下方式进行:

(1) 首先, N 个节点连接形成一个规则的相邻网络, 每个节点与它最近邻的 K 个节点相连, 这里 K 称为重连度; (2) 而后以概率 p (称为重连概率) 随机地重新连接网络中的每条边, 即将边的一个端点保持不变, 而另一个端点取为随机选择的一个节点, 且规定任意两个不同的节点之间至多只能有一条边, 每一个节点都不能有边与自身相连。

对于 WS 小世界网络而言, 当 $p = 0$, 模型为规则网; 当 $p = 1$ 时则为随机网; 当 $0 < p < 1$, 则得到介于规则网与随机网之间的小世界网络。

图 * 给出了节点数为 $N = 50$, 连接度为 $K = 4$, 重连概率 $p = 0.5$ 的 Duffing-WS 型小世界网络的连接拓扑结构图。通过引入 Laplacian 矩阵为 $L =$

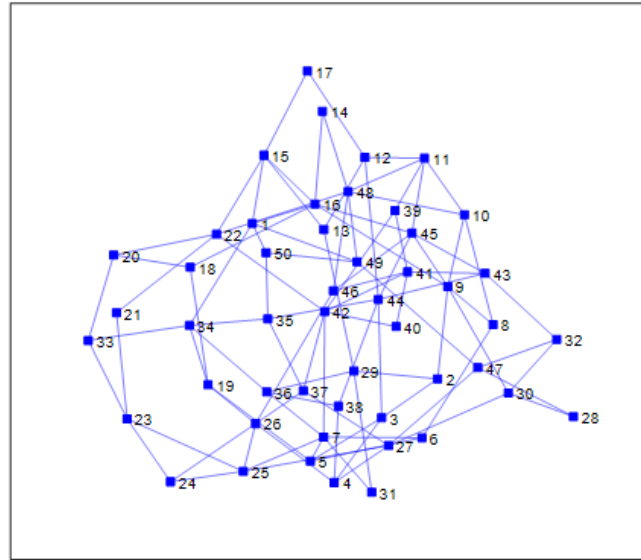


图 3.4 Duffing-WS 型小世界网络的连接拓扑结构图

$$(l_{ij})_{N \times N}, l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, i \neq j \\ \sum_{j \neq i} a_{ij}, i = j \end{cases}, \text{ 则方程 (3.2) 可以改写为如下形式:}$$

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + ax_i - bx_i^3 + A \sin(\Omega t) - \varepsilon \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j \quad (3.6)$$

由 Laplacian 矩阵的性质可知, L 是一个实对称的弱对角占优矩阵, 且对角元均非负, 所以是半正定的。事实上, 复杂网络的邻接矩阵或 Laplacian 矩阵全面地刻画了网络节点之间的相互关系, 其特征值和特征向量则揭示了网络拓扑及其整体行为的信息。

3.2 Duffing-WS 型小世界网络基本动力学特性研究

3.2.1 分岔图分析

我们的研究发现, 当驱动力幅度 A 值在 $(0,1)$ 范围变化时, 随着 A 值的变化, Duffing-WS 小世界网络的各个粒子输出也将呈现小尺度周期运动、我们的研究发现, 当驱动力幅度 A 值在 $(0,1)$ 范围变化时, 随着 A 值的变化, Duffing-WS 小世界复杂网络 (*) 的各个节点输出也将呈现小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等状态。我们首先借助庞加莱截面给出 Duffing-WS 小世界网络的分岔图。分岔图绘制了系统的庞加莱截面输出随参数的变化图, 可用于比较微小参数扰动对系统指标的影响, 在本文中用来衡量混沌现象。

取庞加莱截面为 $t = jT, T = 2\pi/\Omega$, 在此截面上引入如下宏观变量 $\sigma(jT)$ 来描述系统的集体行为:

$$\sigma(jT) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(jT) \quad (3.7)$$

图 (a) 中给出了借助庞加莱截面单个 Duffing 方程的解随驱动力幅度 A 变化的分岔图。图 (b) 给出了借助 $\sigma(jT)$, 节点个数为 $N = 100$ 的 Duffing-WS 型小世界网络关于幅度 A 的变化的分岔图。和图 1 中单个 Duffing 方程关于幅度 A 的分岔图对比可知, Duffing-WS 型小世界网络的分岔图事实上也历经了小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等状态, 在大尺度周期状态之后又进入了短暂的混沌状态, 因此其分岔图具有更为复杂的特性。

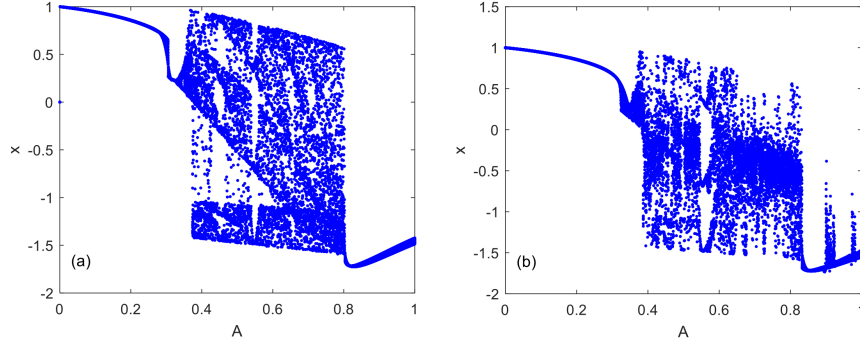


图 3.5 分叉图演示

3.2.2 基于 LE 指数的混沌动力学分析

从 3.1 节可以看出, 通过分岔图并不容易定量分析复杂系统的混沌行为, 而对耦合系统混沌进行分析的另外一个指标为系统的 LE 指数。LE 指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标, 表现了系统在相空间中相邻轨道间收缩或发散的平均指数率。

这一节我们利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大 LE 指数表达式, 利用最大 LE 指数来研究其混沌现象, 并分析小世界网络重连度 K , 重连概率 p 和耦合强度 ϵ 等对复杂系统处于混沌运动状态参数范围的影响。其中, LE 指数采用数值模拟的方式给出, 其计算方法的理论依据已在第二章给出。通过令

$$z_i = \Omega t, z_i|_{t=0} = 0$$

可将 Duffing-WS 型小世界网络模型 (*) 的非自治方程变成如下的自治方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = -\gamma y_i + ax_i - bx_i^3 + A \sin(z_i) - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j \\ \dot{z}_i = \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

假设 $s(t)$ 是单个 Duffing 方程 (1) 的解, 引入变分:

$$\delta_{xi} = x_i(t) - s(t), \delta_{yi} = y_i(t) - \dot{s}(t), \quad (3.9)$$

并结合自治方程组 (*) 可得到 Duffing-WS 小世界网络的变分方程为:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{xi} = \delta_{yi} \\ \dot{\delta}_{yi} = -\gamma \delta_{yi} + a \delta_{xi} - 3bx_i^2 \delta_{xi} + A \cos(z_i) \delta_{zi} - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_{xj} \\ \dot{\delta}_{zi} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

在不失去普遍性的情况下,在上述变分方程中令集合 $\delta_{zi} = 0$, 则变分方程可以简化为:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{xi} = \delta_{yi} \\ \dot{\delta}_{yi} = -\gamma\delta_{yi} + a\delta_{xi} - 3bx_i^2\delta_{xi} - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_{xj} \end{cases} \quad (3.11)$$

则根据定义, 本章所提 Duffing-WS 型小世界网络的最大 LE 指数表达式为:

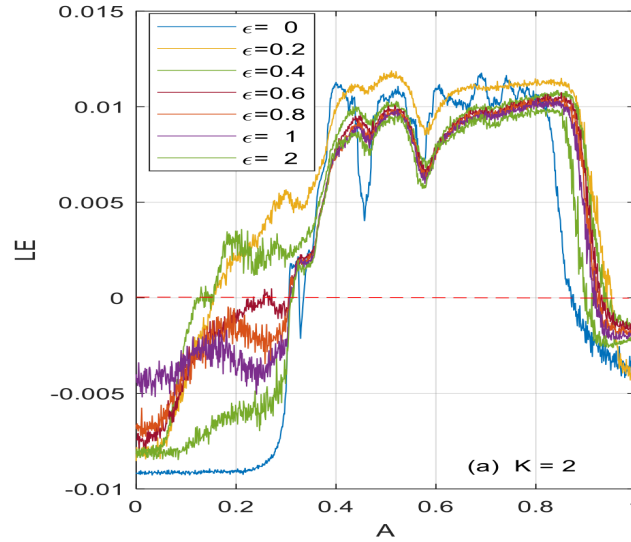
$$\lambda_{\max} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N |\delta_{xi}(T)| + |\delta_{yi}(T)|} \right)}{T} \quad (3.12)$$

在下面的章节中, 我们利用上式计算不同参数情况下的 Duffing-WS 型小世界网络平均最大 LE 指数关于周期幅度变化的曲线, 其中 LE 指数大于 0 的区域被视为系统处于混沌运动的区域。网络的粒子个数固定为 $N = 100$, 每条曲线均是对 50 个样本轨道平均后所得。Duffing 方程中的参数固定为 $a = 1, b = 1, \gamma = 0.5, \Omega = 1$ 。此外, 本文 Duffing-WS 型小世界网络及其对于变分方程组的数值模拟均基于我们给出的微分方程四阶龙格库塔算法。

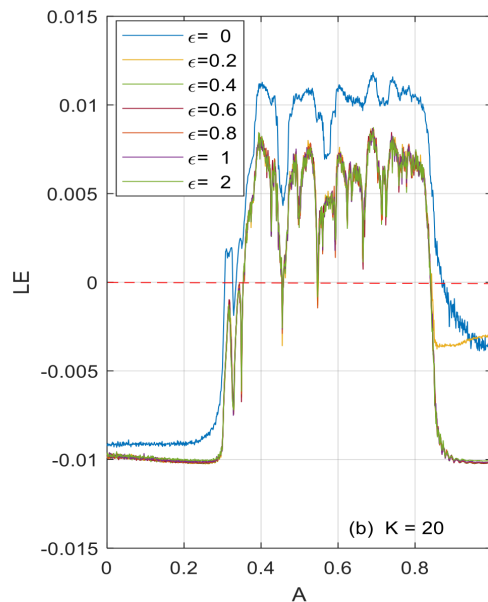
3.2.2.1 耦合强度对混沌的影响

图 (a)-(c) 给出了不同的耦合强度 ϵ 下平均最大 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 重连概率均为 $p = 0.5$ 。在图 (a) 中 $K = 2$, 当耦合强度 ϵ 较小时 (如 $\epsilon = 0, 0.2, 0.4$), 随着 ϵ 的增大, LE 指数大于 0 的混沌区域扩大; 当耦合强度 ϵ 较大时 (如 $\epsilon = 0.6, 0.8, 1, 2$), 随着 ϵ 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域则逐渐收缩, 混沌受到抑制。在这种情况下, 由于重连度非常小节点之间的连接程度不够, 小的耦合强度的增强反而增强系统的混沌运动; 而只有耦合强度大到一定程度, 更大的耦合强度使得系统协同性增强, 才能抑制系统的混沌运动。

在图 (b) 中 $K = 20$, 可以看到, 当 $\epsilon = 0$ 时, 小世界网络退化成独立的 N 个 Duffing 系统, 此时混沌区域最大, 而当 $\epsilon > 0$ 时, 小世界网络各个节点之间存在耦合作用, 网络的混沌区域收缩; 而此时由于重连度 K 值较大, 平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线在不同的耦合强度 ϵ 下基本一致, 也就是说此时小世界网络的混沌运动区域对耦合强度 ϵ 具有鲁棒性。同样, 在图 (c) 中 $K = 48$, 可以看到, 随着 ϵ 增加, 混沌区域的变化同样不明显。综上可以看到, 和传统的规则网络不同, 本文所提 Duffing-WS 型小世界网络的耦合强度 ϵ 对混沌区域的影响并不是线性的, 当重连度 K 较小时, 随着耦合强度的增加混沌区域呈现出先扩大后缩小的变化, K 较大时 ϵ 的增强对混沌区域影响不明显。

图 3.6 $K = 2$ 时耦合强度对混沌的影响

在图 (a) 中 $K = 2$, 当耦合强度 ϵ 较小时 (如 $\epsilon = 0, 0.2, 0.4$), 随着 ϵ 的增大, LE 指数大于 0 的混沌区域扩大; 当耦合强度 ϵ 较大时 (如 $\epsilon = 0.6, 0.8, 1, 2$), 随着 ϵ 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域则逐渐收缩, 混沌受到抑制。在这种情况下, 由于重连度非常小节点之间的连接程度不够, 小的耦合强度的增强反而增强系统的混沌运动; 而只有耦合强度大到一定程度, 更大的耦合强度使得系统协同性增强, 才能抑制系统的混沌运动。

图 3.7 $K = 20$ 时耦合强度对混沌的影响

在图 (b) 中 $K = 20$, 可以看到, 当 $\epsilon = 0$ 时, 小世界网络退化成独立的 N 个

Duffing 系统, 此时混沌区域最大, 而当 $\epsilon > 0$ 时, 小世界网络各个节点之间存在耦合作用, 网络的混沌区域收缩; 而此时由于重连度 K 值较大, 平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线在不同的耦合强度 ϵ 下基本一致, 也就是说此时小世界网络的混沌运动区域对耦合强度 ϵ 具有鲁棒性。

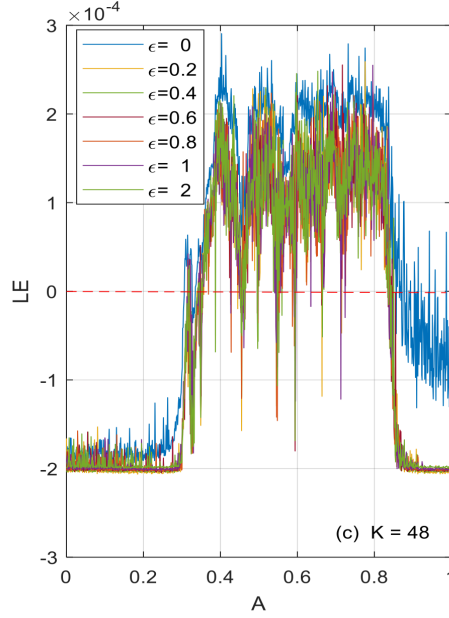


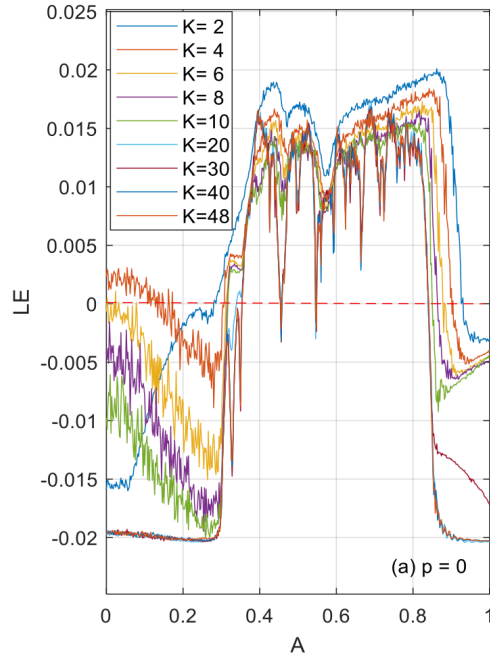
图 3.8 $K = 48$ 时耦合强度对混沌的影响

同样, 在图 (c) 中 $K = 48$, 可以看到, 随着 ϵ 增加, 混沌区域的变化同样不明显。综上可以看到, 和传统的规则网络不同, 本文所提 Duffing-WS 型小世界网络的耦合强度 ϵ 对混沌区域的影响并不是线性的, 当重连度 K 较小时, 随着耦合强度的增加混沌区域呈现出先扩大后缩小的变化, K 较大时 ϵ 的增强对混沌区域影响不明显。

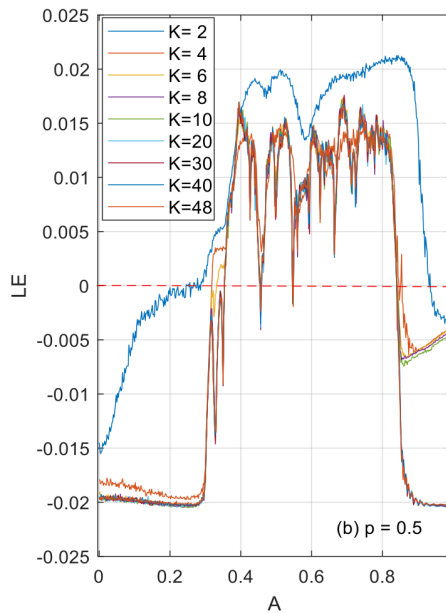
3.2.2.2 重连度 K 对混沌的影响

我们接着分析重连度 K 对 Duffing-WS 型小世界网络混沌现象的影响。图 (a)-(c) 给出了不同的重连度 K 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\epsilon = 0.5$ 。

可以看出, 在图 (a) 中 $p = 0$, 耦合网络为规则的最近邻耦合网络, 当重连度 K 较小时 ($K = 2, 4, 6, 8, 10$), 随着重连度 K 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区域先扩大再收缩, 当 $K = 4$ 时混沌区域达到最大; 随后, 随着重连度 K 增加到一定程度以后 ($K = 20, 30, 40, 48$), 混沌区域随着 K 值的增加而有略微地缩小, 但总体上差

图 3.9 $p = 0$ 时连接度对混沌的影响

异不大。这说明对于规则网络, 只有足够大的重连度才会抑制系统混沌, 较小的重连度反而增加系统的混沌运动。

图 3.10 $p = 0.5$ 时连接度对混沌的影响

在图 (b) 中 $p = 0.5$, 此时网络为标准的小世界模型。 $K = 2$ 与 K 值 LE 曲线有显著不同, 所对应的混沌区域最大, LE 指数在各个振幅处的值都最高, 可见重

连度 K 较低时更容易产生较大的混沌范围。 $K = 4, 6$ 比起 $K = 2$ 的 LE 曲线, 其大于 0 的区域明显缩小, 即重连度的增加明显抑制了网络混沌运动; 随着 K 值进一步增加, 系统 LE 曲线几乎没有变化, 这是因为当重连度足够高时, 系统各节点输出间差异很小, 混沌区域几乎一致。

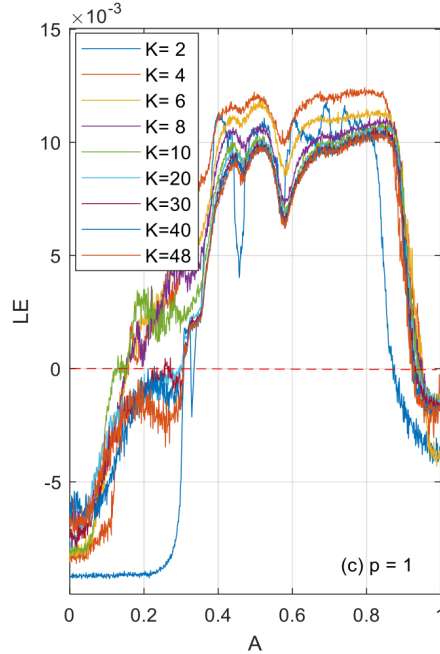


图 3.11 $p = 1$ 时连接度对混沌的影响

在图 (c) 中 $p = 1$, 此时网络为完全的随机网络。可以看出, K 足够大时 LE 曲线的一致性会被打破, 重连度对混沌区域的控制不再呈现明显的规律。当 $K = 2$ 时混沌区域反而最小, 而中间大小的重连度 ($K = 4, 6, 8, 10$) 混沌区域却最大。同时, 对比完全规则网络 ($p = 0$) 与小世界网络 ($p = 0.5$), 完全随机网络的混沌区域更大且 LE 指数更低。

3.2.2.3 重连概率 p 对混沌的影响

最后我们分析重连概率 p 对 Duffing-WS 型小世界网络混沌现象的影响。图 (a)-(c) 给出了不同的重连概率 p 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\varepsilon = 0.5$ 。图 (a)-(c) 给出了不同的重连概率 p 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\varepsilon = 0.5$ 。在图 (a) 中 $K = 2$, 在图 (b) 中 $K = 20$, 可以看出, 不同重连概率 p 对混沌区域的影响不明显, 差异主要体现在 LE 指数的高低上, 重连概率 p 越大, LE 指数值越小。在图中 $K = 48$, 在这种情形下混沌区域明显后移。总的来说, 此时小世界网络的混沌区域对重连概率 p 具有鲁棒性。

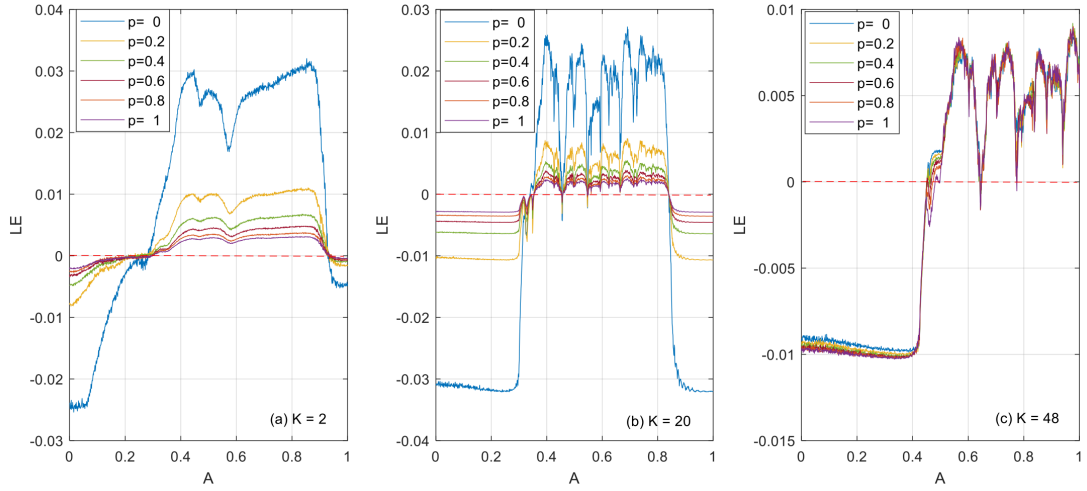


图 3.12 重连概率对混沌的影响

3.2.3 同步性分析

事实上，大量耦合粒子的同步化问题最早由 1998 年给出的基于变分方程的主稳定函数方法而得到妥善地解决 [*]。下面我们仍然基于变分法给出本章所提 Duffing-WS 小世界网络 (*) 的主稳定函数，并由此分析 Duffing-WS 小世界网络的同步性。Duffing-WS 小世界网络的变分方程已由 (*) 式给出，令

$$\delta_i = [\delta_{xi}, \delta_{yi}, \delta_{zi}]^T,$$

则 Duffing-WS 小世界网络的变分方程 (*) 可以简化为如下的矢量形式：

$$\dot{\delta}_i = Df(\mathbf{S})\delta_i - c \sum_{j=1}^N l_{ij} H \delta_j, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

其对应的孤立节点动力学函数为

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} y \\ -\gamma y + ax - bx^3 + A \sin(z) \\ \Omega \end{bmatrix},$$

节点内连矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令同步流形为 $\mathbf{S}(t) = (s(t), \dot{s}(t), \Omega t)^T$, 即孤立节点动力学方程 $\dot{\mathbf{S}}(t) = f(\mathbf{S})$ 的解。 $Df(\mathbf{S})$ 则为单节点动力学函数在同步流形 $\mathbf{S}(t) = (s(t), \dot{s}(t), \Omega t)^T$ 处的雅可比矩阵, 有

$$Df(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a - 3bs^2(t) & -\gamma & A \cos(\Omega t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

令 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$, 则 (3.11) 式可以改写为

$$\dot{\delta} = Df(\mathbf{S})\delta - cH\delta L^T \quad (3.15)$$

不妨假设 Laplacian 矩阵可对角化 (即为无向图情况), $L^T = P\Lambda P^{-1}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, 令 $\eta = \delta P$, 则方程组又等价于如下的方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= Df(\mathbf{S})\eta_1, k = 1, 2, \dots, N \\ \dot{\eta}_k &= [Df(\mathbf{S}) - c\lambda_k H]\eta_k, k = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.16)$$

第一式对应于与同步流形平行方向的扰动, 为保证同步流形的稳定性, 需要第二式描述的 $N-1$ 个子系统是渐近稳定的。注意到除非 $s(t)$ 是平衡点, 否则第二式中的每个子系统都是时变系统, 判断同步流形稳定的一个常用判据是要求主稳定方程的所有 Lyapunov 指数全为负值。方程组 (*) 所对应的主稳定方程可以写为:

$$\dot{y} = \mathbf{M}(\alpha)y \quad (3.17)$$

其中 $\mathbf{M}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a - 3bs^2(t) - \alpha & -\gamma & A \cos(\Omega t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = c\lambda_k$ 。这里假设主稳定方程的最大李亚普洛夫指数为 $LE(\alpha)$ 。

将主稳定方程和单个节点的 Duffing 方程联立, 得到

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \\ \dot{s}_2 = -\gamma s_2 + as_1 - bs_1^3 + A \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = (a - 3bs_1^2 - \alpha)y_1 - \gamma y_2 + A \sin(\Omega t)y_3 \\ \dot{y}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

于是，其最大 Lyapunov 指数由下式给出：

$$LE(\alpha) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|y_1(T)| + |y_2(T)|)}{T} \quad (3.19)$$

下面的图绘制了当周期驱动幅度 A 在 $[0,1]$ 范围内时，主稳定方程 (*) 平面 Lyapunov 指数的相图，即其最大 Lyapunov 指数关于参数 α 和振幅 A 的变化图，其中黑色区域为最大 Lyapunov 指数非负即不同步的区域。同样，我们按照不同初始值取了 50 次平均得到最后的结果。

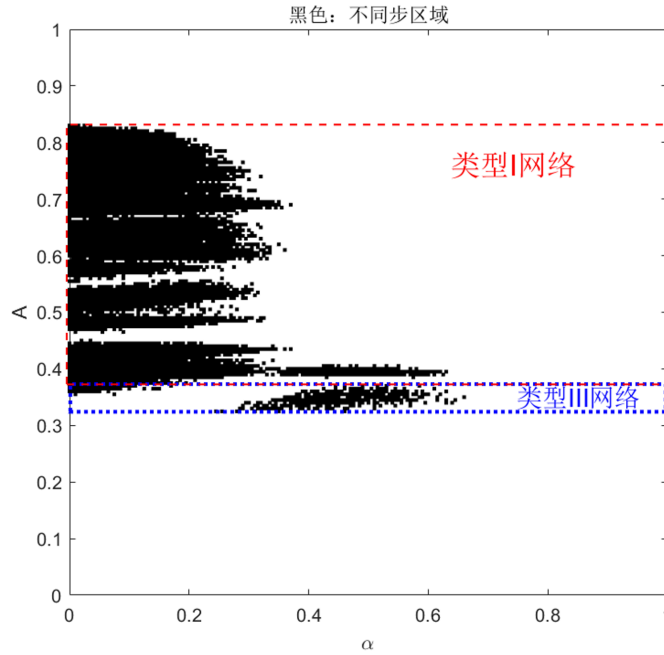


图 3.13 不同类型网络混沌的振幅范围

分析图 (*), 我们可以得出如下结论：

(1) 当 $A \in [0, 0.32] \cup [0.83, 1]$ 时，主稳定方程的最大 LE 指数全为负数，即我们考虑的 Duffing-WS 小世界网络的同步化区域为全区域 $SR = (0, +\infty)$ ，这时候的系统总是可以达到完全同步 (和耦合网络结构小世界特性无关)；

(2) 当 $A \in [0.33, 0.37]$ 时，网络属于类型 III 的网络，其同步化区域为不连通的多区域 $SR = (0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$ ，这时候系统要达到完全同步，必须满足 $c\lambda_k \in SR, k = 2, 3, \dots, N$ ，而要同时调整耦合强度和所有特征值全部落入不连通的同步化区域 SR 。此时，如果满足 $c\lambda_2 > \alpha_2$ ，则 $\alpha_2 < c\lambda_2 \leq \dots \leq c\lambda_N$ 时，都有 $LE(\alpha) < 0$ ，同步流形总是稳定的，系统总能同步。

在这种情况下，网络 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 的大小可以作为衡量网络同步化能力的指标， λ_2 越大则系统越容易达到同步，也就是系统的同步化能

力越强。如果 $\alpha_1 < c\lambda_2 < \alpha_2$, 则同步流形不稳定, 系统不能同步。如果 $c\lambda_2 < \alpha_1$, 则要求 $c\lambda_N < \alpha_1$ ($\lambda_N/\lambda_2 < c$) 或者 $\alpha_2 < c\lambda_3$, 则同步流形稳定, 此时系统同步相对于前面两种情况更不容易实现。

(3) 当 $A \in [0.38, 0.82]$ 时, 网络属于类型 I 的网络, 其同步化区域为无界区域 $SR = (\alpha_3, +\infty)$, 即当 $\alpha_3 < c\lambda_2 \leq \dots \leq c\lambda_N$ 时, 都有 $LE(\alpha) < 0$, 即 $c\lambda_2 > \alpha_3$, 同步流形总是稳定的, 系统总能同步。在这种情况下, Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 的大小也是可以作为衡量网络同步化能力的指标。

综上可知, 对于不同的 A 值, 当 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 和耦合系数的乘积 $c\lambda_2$ 充分大时, 系统总能实现同步; 给定耦合系数 c , Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 决定了系统的同步能力, 当 λ_2 的值较小时, 系统则很有可能不能同步。但是当增加耦合系数 c 大于某个值时, 对于系统也总能实现同步。

下图给出了粒子个数为 $N = 20, 100$ 时, Duffing-WS 小世界网络 Laplacian 矩阵的第二大特征值 λ_2 在不同的 K 值下随重连概率 p 变化的曲线 (平均 100 次)。可以看到当连接度较小 ($K = 1$) 时, 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加先减小后增加, 说明此时较小或较大的重连概率均有利于增加系统同步; 随着连接度增加 (左图, $K = 2, 3, 4, 5, 6$), 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加先增加后减小, 说明此时适当大小的重连概率有利于增加系统的同步; 当连接度继续增加而接近 $N/2$ 时, 第二大特征值 λ_2 随着重连概率增加而减小, 说明较小的重连概率有利于增加系统的同步。

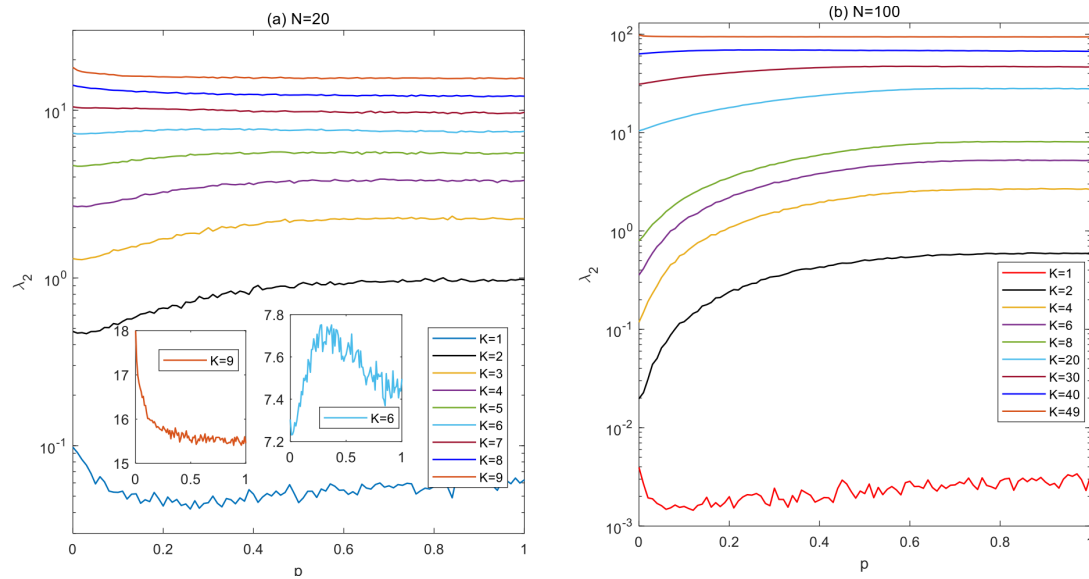


图 3.14 第二大特征值与重连概率的关系

下图则给出了粒子个数为 $N = 20, 100$ 时, Duffing-WS 小世界网络 Laplacian 矩阵的最大特征值 λ_N 在不同的 K 值下随重连概率 p 变化的曲线 (平均 100 次)。可以看出, 在 $N = 20$ 时, 最大特征值随着重连概率的增加而增大, 连接度越大则最大特征值越大。在 $N = 100$ 时, 连接度小于 40 时随着重连概率的增大最大特征值增大, 但是在连接度为 40 时发生突变, 形成先下降后增加的趋势, 随后变化不明显。

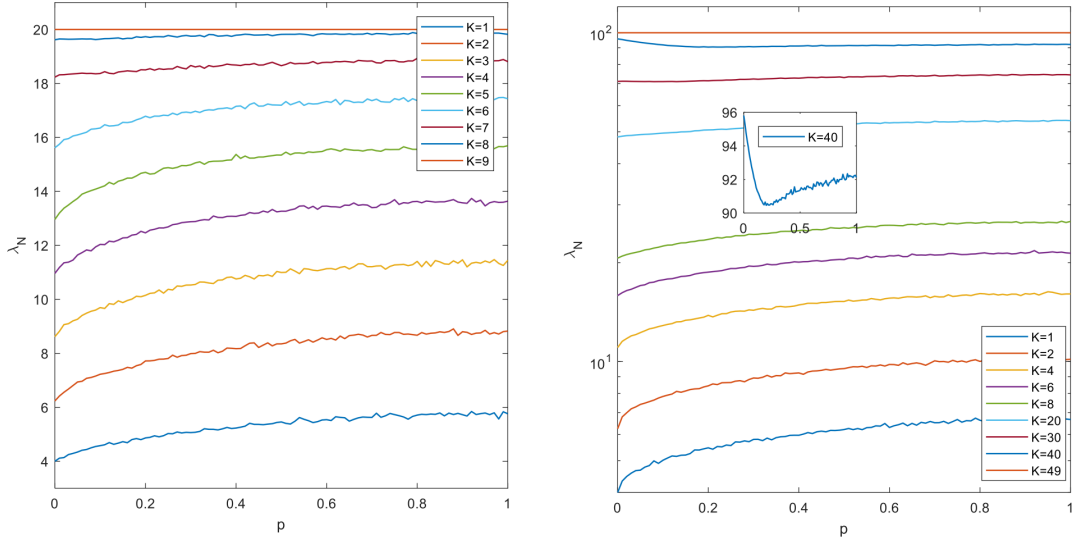


图 3.15 最大特征值与重连概率的关系

3.3 小结

本文基于经典的 Duffing 振子, 提出了一个以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 型复杂网络 (简称 Duffing-WS 型小世界网络), 利用变分法推导该网络的最大李雅普诺夫指数表达式, 以庞加莱截面分岔图和李雅普诺夫指数为工具研究其混沌现象, 并分析小世界网络重连度, 重连概率和耦合强度等参数对其混沌运动状态参数范围的影响。研究表明, Duffing-WS 小世界网络的各个粒子输出也呈现出小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等多种状态, 其混沌的参数范围较单个 Duffing 方程更为复杂。网络重连度, 重连概率和耦合强度等参数对其混沌区域的影响也较传统规则网络有明显不同。同时我们发现, 一定程度的随机性会极大促进系统的同步, 同时这种促进作用在重连概率大于 0.5 时不再明显, 这表明复杂网络比规则网络更容易同步。

第4章 混沌信号的稀疏重构算法

在实际情况下，混沌信号总会被噪声污染，又由于混沌信号的非周期、宽带频谱等特性，使得一些现有的信号重构方法在处理混沌信号时难以获得理想的效果。为此，本章基于稀疏重构理论提出了一种针对被噪声污染混沌信号的重构算法，而随后的以第3章提出的 Duffing-WS 小世界网络输出混沌信号为例的仿真实验也表明，该方法能较为稳健地恢复受噪声干扰的 Duffing-WS 型小世界网络输出的带噪混沌信号，不仅较具有更高的输出信噪比，而原始信号的混沌特性也能得到较大程度的恢复，这是一般稀疏重构算法不具有的。

4.1 基于稀疏重构的混沌信号重构算法

设 Duffing-WS 小世界网络某个节点输出的离散化带噪混沌信号序列为：

$$u[n] = x[n] + w[n], n = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

其中 $x[n]$ 为原始混沌序列, $w[n]$ 为零均值和方差为 σ 的高斯白噪声。因此，方程又写成矢量形式为：

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (4.2)$$

我们知道 Duffing-WS 小世界网络输出的混沌信号在时域上并不是稀疏信号，但它可能具有某类特定的变换基 Ψ ，使得在此基上的变换系数服从幂指数递减，这也说明该信号在此变换域中具有较强的可压缩性。这里不妨假设 $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{a}$, \mathbf{a} 为稀疏表示系数，我们保留所有系数中绝对值最大的 s 个系数得到真正的稀疏系数 $\hat{\mathbf{a}}_s$ ，基于稀疏重构理论的混沌信号重构问题便是需要求解如下的基于 l_1 范数的稀疏重构最优化问题：

$$\min \|\hat{\mathbf{a}}_s\|_1, \text{ s.t., } \|\Psi \hat{\mathbf{a}}_s - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon \quad (4.3)$$

我们知道，基于 l_1 范数的稀疏重构算法有利于保持信号的稀疏性，也称为基追踪算法。目前针对该问题的重构算法主要可归为凸优化算法、贪婪算法和组合算法三大类。其中，贪婪算法通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号，简单、易于理解且快速方便。典型的贪婪算法有匹配追踪 (MP) 算法，而改进的有正交匹配追踪 (OMP) 算法和压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算

法等。压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算法是由 Needell 与 Tropp 提出的一个针对 OMP 的改进算法, 具有比 MP 和 OMP 更好的数值表现, 该算法是结合 OMP 思想与采样技巧, 在每次迭代中将一些随机样本加入到选定的支撑集中, 并采用最小二乘法对所选支撑集进行解的估计。

本章考虑基于 CoSaMP 算法对带噪的混沌信号进行重构, 其中而稀疏变换基选择离散傅里叶变换基。这是因为混沌信号虽然具有时域类随机性但它认可看成低频信号, 因此其傅里叶系数在高频区域将大幅度衰减, 因此我们可将其高频傅里叶系数置零将其离散信号转换为近似稀疏向量。算法如下

(1) 初始化输出信号 $\mathbf{a}^0 \leftarrow \mathbf{0}$, 将当前的采样信号作为初始值 $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{u}$

(2) 迭代变量 $k \leftarrow 0$

(3) 进入循环: $k \leftarrow k + 1$

计算内积 $\mathbf{y} \leftarrow \Phi^* \mathbf{v}$

确定支撑集 (2 倍稀疏度) $\Omega \leftarrow \text{supp}(\mathbf{y}_{2s}), T \leftarrow \Omega \cup \text{supp}(\mathbf{a}^{k-1})$

运用最小二乘法给出取值 $\mathbf{b}|_T \leftarrow \Phi_T \mathbf{u}, \mathbf{b}|_{T^c} \leftarrow \mathbf{0}$

更新输出信号 $\mathbf{a}^k \leftarrow \mathbf{b}_s$

更新残差 $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{u} - \Phi \mathbf{a}^k$

直至 $k = s$ 跳出, 输出 \mathbf{a} 。

算法的输入为采样矩阵 Φ (这里设置为高斯随机矩阵) 和采样信号 \mathbf{u} (即 Duffing-WS 小世界网络某个节点输出的带噪混沌信号), 并假设采样信号截断处理后的傅里叶基表示系数 \mathbf{a} 的稀疏度为 s ; 算法的输出为 s 维的压缩后的信号 \mathbf{a} , 利用傅里叶逆变换即可重构原始混沌信号。

4.2 仿真分析

这一节我们给出用 OMP 和 CoSaMP 两种稀疏重构算法对混沌信号的稀疏采样后还原的仿真结果对比和分析, 其中混沌信号选择为模型 Duffing-WS 小世界网络第一个节点的输出, 并叠加一定强度的高斯白噪声。

图 (4.1) 给出了 OMP 和 CoSaMP 两种算法的重构误差关于噪声强度的变化图, 其中重构误差定义为重构输出信号和真实信号差的 l_2 范数。可以看到, CoSaMP 算法在噪声强度小于 0.2 时具有非常低的重构误差, 即较好的抗噪重构

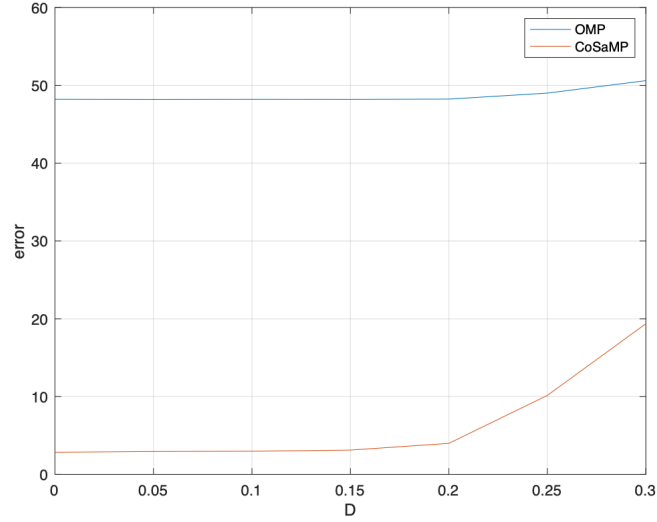


图 4.1 OMP 和 CoSaMP 两种算法的去噪能力

性能，但之后因噪声强度的增加其误差有快速增长，但其重构性能始终优于经典的 OMP 算法。经典的 OMP 算法对于混沌信号始终存在较大的重构误差。由此可见，CoSaMP 算法相较于传统 OMP 算法有更出色的重构抗噪声能力。

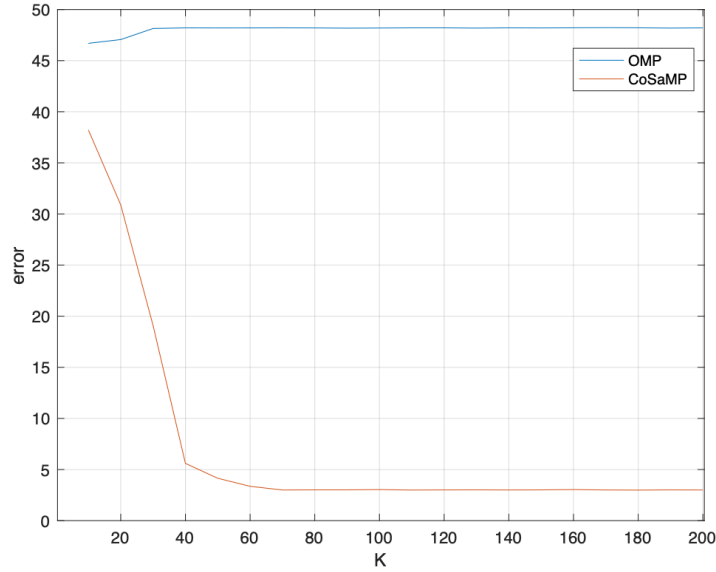


图 4.2 OMP 和 CoSaMP 两种算法的重构误差

图 (4.2) 则给出了选择不同稀疏度 K 值时，OMP 和 CoSaMP 两种算法相应的重构误差。可以看出，CoSaMP 算法在稀疏度增加时重构误差显著减小，在 $K = 60$ 左右趋于稳定，也说明该混沌信号经过离散傅里叶变换之后的稀疏系数取为 $K = 60$ 即可较为稳健地恢复该信号，而 OMP 算法对该混沌信号的重构能力一直不佳。

由此可见,含噪声的混沌信号稀疏重构问题目前尚未有完善的研究,常规的稀疏重构算法也对混沌信号的重构性能不佳,以OMP算法为例,该算法在常规情况有很好的性能,但是在混沌信号情形的效果不佳。因此对混沌信号重构对传统稀疏重构算法提出了新的挑战。

4.3 小结

混沌信号作为复杂网络常见的输出形式,构建相应混沌信号在噪声干扰下的重构方法,对复杂网络的混沌控制和混沌信号的各种应用都具有重要的意义。本章针对复杂网络输出的混沌信号,运用稀疏采样还原算法成功压缩且高精度还原了带噪声的混沌信号,并且对比了不同算法和在混沌信号情形下的性能。仿真实验表明,该方法能较为稳健地恢复受噪声干扰的Duffing-WS型小世界网络输出的带噪混沌信号,不仅较具有更高的输出信噪比,而原始信号的混沌特性也能得到较大程度的恢复,这是一般稀疏重构算法不具有的。

第 5 章 结论

复杂网络广泛存在于各个科学领域，对复杂网络的研究目前已成为非线性科学和复杂性问题领域的一个研究热点。复杂网络的各个节点具有自身的动力学，而这些节点由于网络拓扑结构的不同而演化出不同的群体行为，可能收敛于平衡点、周期轨或者混沌吸引子。混沌作为复杂网络重要的动力学特性，研究其产生机理和对参数的依赖性，构建相应混沌信号在噪声干扰下的重构方法，对复杂网络的混沌控制和混沌信号的各种应用都具有重要的意义。

本文生成一种新的 **Duffing-WS** 型小世界网络模型，通过变分法计算出其最大李雅普诺夫指数表达式作为衡量网络混沌的标准，分析不同参数对网络混沌的影响。同时运用稀疏采样还原算法成功压缩且高精度还原了带噪声的混沌信号，并且对比了不同算法和在混沌信号情形下的性能。我们发现，**Duffing-WS** 小世界网络具有比单个 **Duffing**-方程更为复杂的混沌特性，而系统重连概率、重连度以及耦合强度对系统混沌区域的影响也有别于传统规则网络：和传统的规则网络不同，网络耦合强度 ϵ 对混沌的影响并不是单调的，当网络重连度 K 较小时，耦合强度的增强反而会促进系统的混沌现象；只有在重连度 K 增大到一定程度之后，较强的耦合强度才会对系统混沌起到控制效果；但是重连度 K 足够大以后，系统混沌网络重连度 K 在不同重连概率 p 下对混沌有明显的影响，对于规则网络 ($p = 0$) 和小世界网络 ($0 < p < 1$)，足够大的重连度会抑制系统混沌，较小的重连度则促进系统的混沌运动；相比前面两种网络，完全随机网络 ($p = 1$) 的混沌区域则更大，重连度 K 对其混沌区域的影响也呈现非单调性，随着重连度 K 的增加，其混沌区域先增加后减小。网络重连概率 p 对复杂网络混沌区域的影响不明显。

本文同时对小世界网络模型的同步性进行了初步研究，给出了重连概率与网络同步性的分析，在一定情形下，重连概率极大的促进了混沌系统的同步，也就是说，随着复杂系统随机性的增强，整个系统会更容易同步。最后本文针对混沌信号进行稀疏重构算法的适应性研究，得出混沌信号对两种算法的适应性分析，**CoSaMP** 算法在混沌信号的稀疏重构能力极大强于 **OMP** 算法，这说明混沌信号的稀疏重构特性值得探讨。

致 谢

感激 `casthesis` 作者吴凌云学长, `gbt7714-bibtex-style` 开发者 `zepinglee`, 和 `ctex` 众多开发者们。若没有他们的辛勤付出和非凡工作, \LaTeX 菜鸟的我无法完成此国科大学位论文 \LaTeX 模板 `ucasthesis` 的。在 \LaTeX 中的一点一滴的成长源于开源社区的众多优秀资料和教程, 在此对所有 \LaTeX 社区的贡献者表示感谢!

`ucasthesis` 国科大学位论文 \LaTeX 模板的最终成型离不开以霍明虹老师和丁云云老师为代表的国科大学位办公室老师们制定的官方指导文件和众多 `ucasthesis` 用户的热心测试和耐心反馈, 在此对他们的认真付出表示感谢。特别对国科大的赵永明同学的众多有效反馈意见和建议表示感谢, 对国科大本科部的陆晴老师和本科部学位办的丁云云老师的细致审核和建议表示感谢。谢谢大家的共同努力和支持, 让 `ucasthesis` 为国科大学子使用 \LaTeX 撰写学位论文提供便利和高效这一目标成为可能。