方程有根问题（罗尔定理.拉格朗日中值定理）

1. 设 $f\in C[a,b]$, $f\in D(a,b)$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明：$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$

解：罗尔定理点出导数的零点，
ξ 满足了 $f'(x)+2x\cdot f(x)=0$. 那么而是
$f'(x)+2xf(x)=0$ 为某函数导数.
于是要构造.

$f'(x)+2xf(x)=0$ 即 $e^{x^2}(f'(x)+2xf(x))=0$

设 $g(x)=e^{2x}f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导
且 $g'(x)=e^{x^2}f'(x)+2xe^{x^2}f(x)$,
$g(a)=g(b)=0$

故 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $g'(\xi)=0$ 即 $e^{\xi^2}(f'(\xi)+2\xi f(\xi))=0$
即 $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, $(0,2)$ 可导, $f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$
证明：存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.
其中 η 为 $\exists\,\eta\in(1,2)$, 使 $f(\eta)=\eta$.

解：（本来第一问先证明 η 的存在性，是零点的证明）
其实此题是证明2个方程有根.

(1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{f(x)-2}{x-1}(x-1)+2\right]=2$,
$g(x)=f(x)-x$, $g(2)=-2$, $g(1)=1$,
故 $\exists\,\eta\in(1,2)$ s.t. $g(\eta)=f(\eta)-\eta=0$ 即 $f(\eta)=\eta$

(2)（罗尔定理+构造）
[要证 $\xi f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=0$, 容易看出
原型 $xf(x)-x^2$]
设 $h(x)=xf(x)-x^2$, $h(0)=h(\eta)=0$
$h(x)$ 在 $[0,\eta]$ 连续, $(0,\eta)$ 可导
故 $\exists\,\xi\in(0,\eta)$ 使 $h'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=0$.

注：(1) 问零点证明，零值原理
(2) 问与第1题一样的.

如果实在构造不出来，
$f'(x)+\square f(x)$ 看不出来的时候：
$\square$ 当成 $g'(x)$, 那么 $(f'(x)+g'(x)f(x))e^{g(x)}$
是 $f(x)\cdot e^{g(x)}$ 的导数.

3. 设 $f\in C[0,1]$, $f\in D(0,1)$, $f(0)=f(1)$
证明：$\exists\,0<\xi<\eta<1$ 使 $f'(\xi)+3f'(\eta)=0$

分析：拉格朗日中值定理可连接导数与原函数.
设一个 $a\in(0,1)$, 用 a 与 ξ、η 搭钩条件.
$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$, $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a}$,
$f'(\xi)+3f'(\eta)=\frac{f(a)-f(0)}{a}+3\cdot\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=0$
分母一样的，解出 $a=\frac14$, 写证明倒写回去.

证明：取 $a=\frac14$.
$\exists\,\xi\in(0,\frac14)$, $f'(\xi)=\frac{f(\frac14)-f(0)}{\frac14}$
$\exists\,\eta\in(\frac14,1)$, $f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\frac14)}{1-\frac14}$
$f'(\xi)+3f'(\eta)=4(f(\frac14)-f(0)+f(1)-f(\frac14))=0$

4. 设 $f\in C[0,1]$, $f\in D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=\frac14$
证明：$\exists\,\xi\in(0,\frac12)$, $\exists\,\eta\in(\frac12,1)$, s.t. $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$

分析：$f'(\xi)-\xi^3+f'(\eta)-\eta^3=0$. 用拉格朗日中值定理化一个未知量，希望 $f'(x)-x^3$ 为一个 $g'(x)$, 所以比第3题多一步构造.
$g(x)=f(x)-\frac14x^4$, $g(0)=0$, $g(1)=0$
设 $\exists\,a\in(0,1)$, $g'(\xi)=\frac{g(a)-g(0)}{a}$
$g'(\eta)=\frac{g(1)-g(a)}{1-a}$, $g'(\xi)+g'(\eta)=0$
$a=\frac12$ 即可.

~~故~~

证明：设 $g(x)=f(x)-\frac{x^4}{4}$, $g'(x)=f'(x)-x^3$
$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导
由拉格朗日中值定理：
$\exists\,\xi\in(0,\frac12)$, $g'(\xi)=\frac{g(\frac12)-g(0)}{\frac12}=2g(\frac12)$
$\exists\,\eta\in(\frac12,1)$, $g'(\eta)=\frac{g(1)-g(\frac12)}{\frac12}=-2g(\frac12)$
故 $g'(\xi)+g'(\eta)=f'(\xi)-\xi^3+f'(\eta)-\eta^3=0$
即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$

（两层的构造）5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在开区间 $(0,1)$ 内二阶可导，
且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$, 证明：
(1) $\exists\,\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$;
(2) $\exists\,\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)=f(\eta)$

证明：(1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ 知 $\exists\,\delta\in(0,\frac12)$, $x_1\in(0,\delta)$ 使 $f(x_1)>0$
由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$ 知 $\exists\,\delta\in(0,\frac12)$, $x_2\in(1-\delta,1)$ 使 $f(x_2)<0$
故 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ 使 $f(\xi)=0$

(2) [分析] $f''(x)-f(x)=0$ 有根问题，与1.2是一类题.
但是 $f''(x)$ 与 $f(x)$ 差得太远，一次构造不行. 必须有 $f'(x)$.
即 $f''(x)+f'(x)-(f'(x)+f(x))=0$ 于是有 $F(x)=(f'(x)+f(x))e^{-x}$,
找 $F'(x)=0$. $f'(x)+f(x)$ 去找 $g(x)=e^x\cdot f(x)$, 那么代入得
$F(x)=g'(x)e^{-2x}$. 找 $F'(x)=0$, 即找 $F(x)=0$ 两根，即找 $g'(x)$
两根. $g'(x)=0$ 两根即找 $g(x)=0$ 的三根. 即 $f(x)$ 三根.

证明：$g(x)=e^xf(x)$,
$g(0)=e^0f(0)=0$
$g(\xi)=e^\xi f(\xi)=0$
$g(1)=e^1f(1)=0$
故 $\exists\,x_3\in(0,\xi)$, $\exists\,x_4\in(\xi,1)$
使 $g'(x_3)=g'(x_4)=0$
设 $F(x)=g'(x)e^{-2x}$, $F(x_3)=F(x_4)=0$
故 $\exists\,\eta\in(x_3,x_4)\subseteq(0,1)$ 使 $F'(\eta)=0$
即 $F'(\eta)=e^{-\eta}(f''(\eta)+f'(\eta)-f'(\eta)-f(\eta))=0$
即 $f''(\eta)=f(\eta)$

介值性

1. $f(x)$在$[0,3]$连续,$(0,3)$可导,且$f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$, 证明存在$\xi\in(0,3)$, $f'(\xi)=0$

证明: f在$[0,2]$连续,故$f(x)$在$[0,2]$上有最小值m,最大值M.

$\cancel{f(x_1)+f(x_2)}$

$$\boxed{m=\frac{3m}{3}\leq\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leq\frac{3M}{3}=M}$$

故由介值性,$\exists x_0\in[0,2]$, $f(x_0)=1$

于是 $f(x_0)=f(3)$,由罗尔定理知

$\exists\xi\in(x_0,3)\subseteq(0,3)$ 使$f'(\xi)=0$

评. □内为用介值性的关键. 用闭区间连续的最值性质,~~再加~~所有

$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\omega_i$ (ω_i是权重)都可以

放在一个界内,用介值性 存在一个x_0取到.

2. 设$f(x)$在(a,b)内连续,$g(x)$在(a,b)内有定义,且$g(x)>0$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$为(a,b)内任意n个点,证明,至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)=f(\xi)\sum_{i=1}^{n}g(x_i)$.

证明: 取 $x_{min}=min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$x_{max}=max\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$

$f(x)$在$[x_{min},x_{max}]$内连续,故$f(x)$在$[x_{min},x_{max}]$上存在最小值m与最大值M. $f(x_i)\in[m,M]$ $(i=1,2,\cdots n)$

$$m\leq\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{g(x_i)}{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}\leq M$$

故 $\exists\xi\in[x_{min},x_{max}]\subseteq(a,b)$

使 $f(\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{g(x_i)}{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}$

即 $f(\xi)\sum_{i=1}^{n}g(x_i)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)$

极限类

1. 设函数 $f(x)$ 当 $|x|\le 1$ 时有二阶导数

且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{\ln(e^{\sin x}+4x)}=-3$

求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

解：[法一]

（分母是0，分子为同阶无穷小）

等价无穷小代换：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{e^{\sin x}+4x-1}=-3$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}+4\right)}=-3$

于是 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{5x^2}=-3}$ → f(0)这种值用极限求，是从这式子"剥离"出来的，但又不可以直接移。一眼就看出 $f(x)$ 为 x^2 的同阶无穷小，可是怎么解释？从已知式子里剥

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}\cdot 5x^2=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=0 \quad (f(x)\text{是}x^2\text{同阶})$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}\cdot\frac{5x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-30$$

[法二]

先用等价无穷小代换，变形

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}=-3$$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{5x^2}=-3+\alpha$ （$\alpha\to 0$，当 $x\to 0$）

即 $f(x)=-15x^2+o(x^2)$ （当 $x\to 0$）

在 $x=0$ 展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

所以 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=-30$

再例：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$，解释 $f(x)=2$ 为什么，

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-2}{x-1}(x-1)+2\right]=\lim_{x\to 1}(5(x-1)+2)=2$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2$

求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$

解. [法一]

化一下得到

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)-x}{x^2}=2}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)-x}{x^2}\cdot x^2-e^x-\ln(1+2x)+x\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-e^x-\ln(1+2x)+x\right)$$

$$=-1$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\cancel{a}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)-x}{x^2}\cdot x+\frac{-e^x-\ln(1+2x)+x+1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}2x+\lim_{x\to 0}\frac{-(e^x-1)-\ln(1+2x)+x}{x}$$

$$=-1-2+1=-2$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+2}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2x+1}{\frac{1}{2}x^2}$ → 逆用洛必达，分子凑成个0，导就可以推回去！

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)-x}{x^2}+\frac{-e^x-\ln(1+2x)+x+2x+1}{x^2}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{-e^x-\frac{2}{2x+1}+3}{2x}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{-e^x+\frac{4}{(2x+1)^2}}{2}\right)$$

$$=7$$

[法二]

得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+e^x+\ln(1+2x)-x}{x^2}=2$

$\Leftrightarrow f(x)=-e^x-\ln(1+2x)+x+2x^2+o(x^2)$ $(x\to 0)$

$x=0$ 展开

$$f(x)=-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(2x-2x^2+o(x^2)\right)+x+2x^2+o(x^2)$$

$$=-1-2x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)$$

$f(0)=-1$，$f'(0)=-2$，$f''(0)=7$

这一类题目，要解释如何从极限中抽出 $f(x)$，只能从已知极限表达式入手，题中的 $\boxed{\quad\quad}$ 内关系，因为是已知极限值，当然可以利用 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ $(x\to 0)$ 这一个关系。解题方法除了直接求外，由于高阶导数，很自然联想用泰勒公式，快很多。还用到了洛必达法则逆应用，求 $f''(0)$ 的时候）

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4-1)^a-x]=b$，求常数 a,b.

解：与前面1.2两题有类似应用．极限不好变形，我们把它变成函数角度，可以方便变形．变形完好求

由题意，$(x^5+7x^4-1)^a-x=b+\alpha$．（$\alpha\to0$ 当 $x\to+\infty$）

于是 $a\ln(x^5+7x^4-1)=\ln(x+b+\alpha)$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+b+\alpha(x))}{\ln(x^5+7x^4-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\ln(1+\frac{b}{x}+\frac{\alpha}{x})}{\ln(x^5)+\ln(1+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^5})}$$

$$=\frac{1}{5}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}((x^5+7x^4-1)^{\frac{1}{5}}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x((1+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{5}(\frac{7}{x}-\frac{1}{x^5})=\frac{7}{5}.$$

4.(1) f 在 $(-\delta,\delta)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^2$，求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{f(x)}{x})}=e^2$ 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{x}=2$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$，$f(x)=2x^2+o(x^2)$

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+\sin x+\frac{2x^2+o(x^2)}{x})}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\frac{2x^2+o(x^2)}{x^2}}$$

$$=e^3$$

评注：幂指型换底，~~要~~要意识到 $\ln(1+\frac{f(x)}{x})$ 与 x 为同阶无穷小，$\frac{f(x)}{x^2}$ 是无穷小量，如果没意识到，没把 $\frac{f(x)}{x}$ 等价无穷小换出来，就不好做了.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近连续，且 $\lim\limits_{x\to0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $\lim\limits_{x\to0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$ （(1)反过来）

$$\lim_{x\to0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}=e^3$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x}=3$

$\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})=0$，$\lim\limits_{x\to0}(x+\frac{f(x)}{x})=0$

故 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x^2})=3$　$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

$$\lim_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

5.(1) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-x)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则常数 $a=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$

[分析] 这题 $f(x)$ 以 n 的极限式给出，先求 n 极限（把 x 当常数），得到 $f(x)$ 表达式.

总 $q^n=\begin{cases}0 & |q|<1\\1 & q=1\\\infty & |q|>1\end{cases}$

解：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a-1}{1-a} & x=1\\1 & x=0\\1 & 0<x<1\\x & x>1\end{cases}$$

$f(x)$ 连续 则 $f(1)=\frac{a-1}{1-a}=1$，$a=\frac{1}{2}$

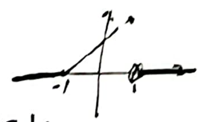
注：$f(x)$ 以 n 的极限形式给出，$\lim\limits_{n\to\infty}$ 的计算优先级最高．如果对 x、n 不知道先看哪个，就乱了套了.

5.(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$ 间断点为 $\underline{x=1}$

解：$|x|>1$，则 $f(x)=0$.

$x=1$，则 $f(x)=1$

$|x|<1$，则 $f(x)=x+1$



显然 $x=1$ 是个跳跃间断点.

6. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(|x|)^n+(\frac{x^2}{2})^n}$，则 $f(x)=$ ______

[分析] 同样是 $f(x)$ 以 n 的极限形式来给出．做法是找出大头.

解：$x\leq1$，$1=(1)^{\frac{1}{n}}<(1+(|x|)^n+(\frac{x^2}{2})^n)^{\frac{1}{n}}<(3)^{\frac{1}{n}}=1$

$1<|x|<2$，$(1+(|x|)^n+(\frac{x^2}{2})^n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x(\frac{1}{|x|^n}+1+(\frac{x}{2})^n)^{\frac{1}{n}}$

$|x|=2$，$(1+2^n+2^n)^{\frac{1}{n}}=2=x$

$x>2$，$(1+(|x|)^n+(\frac{x^2}{2})^n)^{\frac{1}{n}}=\frac{x^2}{2}((\frac{2}{x})^n+\frac{1}{|x|^n}+(\frac{x}{2})^n)^{\frac{1}{n}}$

$$=\frac{x^2}{2}$$

故 $f(x)=\begin{cases}x & 1\leq|x|\leq2\\\frac{x^2}{2} & |x|>2\\1 & |x|\leq1\end{cases}$