



## 스튜어트 플랫폼의 순방향/역방향 힘 전달 해석

The Forward/Inverse Force Transmission Analyses of the Stewart Platform

---

저자 (Authors)	김한성, 최용제 Han Sung Kim, Yong Je Choi
출처 (Source)	<a href="#">한국정밀공학회지 16(5)</a> , 1999.5, 200-208 (9 pages) <a href="#">Journal of the Korean Society for Precision Engineering 16(5)</a> , 1999.5, 200-208 (9 pages)
발행처 (Publisher)	<a href="#">한국정밀공학회</a> Korean Society Of Precision Engineering
URL	<a href="http://www.dbpia.co.kr/Article/NODE00844734">http://www.dbpia.co.kr/Article/NODE00844734</a>
APA Style	김한성, 최용제 (1999). 스텐워드 플랫폼의 순방향/역방향 힘 전달 해석. 한국정밀공학회지, 16(5), 200-208.
이용정보 (Accessed)	서울과학기술대학교 117.17.189.*** 2016/11/19 17:29 (KST)

---

### 저작권 안내

DBpia에서 제공되는 모든 저작물의 저작권은 원저작자에게 있으며, 누리미디어는 각 저작물의 내용을 보증하거나 책임을 지지 않습니다.

이 자료를 원저작자와의 협의 없이 무단게재 할 경우, 저작권법 및 관련법령에 따라 민, 형사상의 책임을 질 수 있습니다.

### Copyright Information

The copyright of all works provided by DBpia belongs to the original author(s). Nurimedia is not responsible for contents of each work. Nor does it guarantee the contents.

You might take civil and criminal liabilities according to copyright and other relevant laws if you publish the contents without consultation with the original author(s).

# 스튜어트 플랫폼의 순방향/역방향 힘 전달 해석

김한성\*, 최용제\*\*

## The Forward/Inverse Force Transmission Analyses of the Stewart Platform

Han Sung Kim\* and Yong Je Choi\*\*

### ABSTRACT

The statics relation of the Stewart platform has been investigated from the viewpoint of the forward and inverse force transmission analyses. Two eigenvalue problems corresponding to the forward and inverse force transmission analyses have been formulated. The forward force transmission analysis is to determine the ranges of the magnitudes of the force and moment generated at the end-effector for the given magnitude of linear actuator forces. In reverse order, the inverse force transmission analysis is to find the range of the magnitude of actuator forces for the given ranges of the magnitudes of the force and moment at the end-effector. The inverse force transmission analysis is important since it can provide a designer with a valuable information about how to choose the linear actuators. It has been proved that two eigenvalue problems have a reciprocal relation, which implies that solving either of the eigenvalue problems may complete the forward/inverse force transmission analysis. A numerical example has been also presented.

**Key Words** : Parallel-type mechanism(평행구조 기구), Jacobian matrix(자코비안 행렬), Forward/inverse statics relations(순방향/역방향 정역학 관계), Actuator force(구동력), Wrench(웬치), Eigenwrench(고유웬치), Force/moment transmission ellipsoid(힘/모멘트 전달 타원)

### 1. 서론

오늘날 로봇공학에 관련하고 있는 많은 연구자들은 평행구조 기구의 하나인 스튜어트 플랫폼을 공작기계로 이용하는 문제에 대하여 많은 관심을 갖고 있다. 이는 이 기구가 직렬형 로봇과 비교하여, 상대적으로 높은 정밀도와 강성을 갖고 있다는 측면에서 이해될 수 있다. 공작기계로서의 스튜어트 플랫폼을 설계함에 있어서 고려해야 하는 많은 연구과제중의 하나는, 이 기구의 힘/모멘트 전달 능력에 대한 완벽한 이해이다. 이는 설계하고자 하는 기구의 정역학적 측면에서의 성능을 가

리키는데, 이로부터 설계하고자 하는 기구의 구동기 선정에 대한 중요한 기초 자료를 얻을 수 있기 때문이다. 스튜어트 플랫폼의 순방향 정역학 관계(forward statics relation)는 구동기에 가해지는 구동력에 대하여, 이의 결과로 얻게 되는 엔드이펙터(또는, 이동 플랫폼의 기준점)에서의 힘과 모멘트(또는, 웬치, wrench)와의 관계를 나타내며, 역방향 정역학 관계(inverse statics relation)는 요구되는 엔드이펙터에서의 웬치를 발생시키기 위하여 구동기에 가해주어야 할 구동력의 크기를 결정하는 문제가 된다. 이러한 스튜어트 플랫폼의 정역학 관계는 초보적인 로봇공학의 문제로서 일반적으로 자

\* 회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\* 회원, 연세대학교 기계전자공학부

코비안 행렬에 의하여 표현된다. 그러나 구동기의 구동력 벡터의 크기가 주어졌을 때, 이에 대한 엔드이펙터에서 발생하는 힘과 모멘트 크기의 범위 및 방향을 결정하는 순방향 힘 전달 해석과, 그 역의 해석인 역방향 힘 전달 해석은 간단한 문제가 아니며, 이에 적절한 고유치 해석을 통하여 수행될 수 있다. 이러한 순방향 힘 전달 해석은 기구의 정력학적 성능 평가 및 경로 계획에 사용될 수 있으며, 한편, 역방향 힘 전달 해석은 구동부 크기를 선정하는 문제에 효과적으로 이용될 수 있다.

힘 전달 해석에 대한 연구결과는 Yoshikawa<sup>(1)</sup> 및 Togai<sup>(2)</sup>에 의해 소개된 작업성(manipulability)이란 개념에 근거하여 직렬형 기구에 대하여 주로 진행되었다. 이중, Dubey<sup>(3)</sup>는 자코비안 행렬에 양한정 가중 행렬(positive-definite weighting matrix)을 적용하여 MVR(Manipulator Velocity Ratio) 및 MMA(Manipulator Mechanical Advantage)를 정의하였고, 이를 이용하여 직렬형 여유자유도 로봇의 경로계획을 하였다. 한편, 스튜어트 플랫폼과 같은 평행구조 기구에 대해서는 이러한 힘 전달 해석이 비교적 최근에 진행되었다. Kosuge<sup>(4)</sup>는 기존의 연구가 주로 웬치 전체의 크기를 이용하여 정역학적 성능을 결정하는 것과 달리, 힘과 모멘트를 분리하여 구동력 범위가 주어졌을 때, 엔드이펙터상에서 발생하는 힘과 모멘트의 범위를 고유치 해석을 이용하여 구하였다. 그러나, 모멘트를 영공간(null space)으로 만드는 구동력에 대해서 힘의 범위를 구하고 모멘트의 범위는 힘을 영공간으로 만드는 구동력을 이용하여 구하므로 엔드이펙터상에서 발생할 수 있는 힘 및 모멘트의 최대 범위를 구할 수 없는 단점을 갖는다. 또한, 역방향 힘 전달 해석방법의 하나로, Merlet<sup>(5)</sup>은 작업영역안에서 주어진 외부힘에 대하여 필요한 구동력의 범위를 산출하는 수치적 알고리즘을 제안하였다.

본 논문은, 이러한 스튜어트 플랫폼의 순방향과 역방향으로의 힘 전달 범위를 결정하기 위한 해석적인 방법의 개발을 목표로 한다. 이를 위하여, 먼저, 스튜어트 플랫폼의 정역학적 관계식으로부터 구동기의 구동력과 엔드이펙터에서의 힘과 모멘트와의 관계를 순방향과 역방향에 대한 고유치 문제들로 유도하고, 이들의 해석을 통하여 스튜어트 플랫폼의 순방향 및 역방향 힘 전달 범위를 결정하는 방법을 제시하도록 한다. 또한, 이러한 고유치

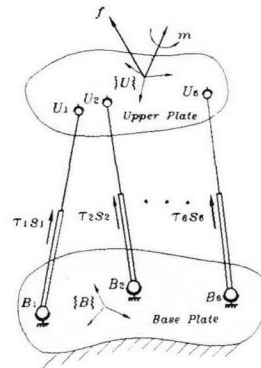


Fig. 1 Static relation of a general Stewart Platform

문제들이 단위의 변화에 따른 일관성을 갖음을 증명하였고, 이러한 순방향과 역방향 고유치 문제들은 서로 역인 관계에 있음을 증명하였다. 이는 중요한 결과로서, 두 개의 고유치 문제들 중의 하나만을 해석함으로써 양 방향의 힘 전달 해석이 동시에 완결될 수 있음을 의미한다. 마지막으로, 제안된 방법의 타당성을 입증하기 위하여 수치 예를 제시하였다.

## 2. 스튜어트 플랫폼의 정역학 관계

스튜어트 플랫폼은 Fig. 1에서 보는 바와 같이, 6개의 선형구동기(linear actuator)로 상판과 하판을 연결한 평행구조 기구이다. 여기서, 각 선형구동기와 상/하판은 구형 조인트(spherical joint)로 연결된다. 일반적으로 구동력과 엔드이펙터의 웬치와의 관계는 자코비안 행렬로 표현할 수 있다. 이 자코비안 행렬의 유도는 직렬구조 로봇(serial type manipulator)인 경우는 속도관계에서 유도가 용이하나, 스튜어트 플랫폼과 같은 평행구조 기구인 경우에는 정역학 관계로부터 유도될 수 있다.<sup>(6)</sup> 즉, Fig. 1에서 나타난 바와 같이, 구형 조인트는 모멘트를 전달하지 못하므로, 각 선형구동기에서 가해지는 선형 힘(linear force)의 합력은 스튜어트 플랫폼의 엔드이펙터에서 발생하는 웬치와 같다는 원리를 이용하여 구할 수 있으며, 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = \tau_1 \hat{s}_1 + \tau_2 \hat{s}_2 + \cdots + \tau_6 \hat{s}_6 \quad (1)$$

여기서,  $f$  및  $m$  를 각각 엔드이펙터에서 발생되

는 힘과 모멘트라고 할 때,  $\hat{w} = [f^T, m^T]^T$  는 플뤼커의 방사좌표계(plucker's ray coordinate)<sup>(7)</sup>로 표현된 웬치이고,  $\tau_i$  는 각 선형구동기에 가해지는 힘을 나타낸다. 또한,  $\hat{s}_i = [s_i^T, s_{0i}^T]^T$  는 각 선형구동기의 선벡터(line bound vector)를 표현한다. 이중,  $s_i$  는 선형구동기의 방향을 표현하는 단위 방향벡터이고  $r_i$  를 상판 좌표계  $\{U\}$  의 원점에서 각 선형구동기까지의 위치벡터라 할 때,  $s_{0i} = r_i \times s_i$  는 모멘트 벡터에 해당된다.

식 (1)로 표현되는 스튜어트 플랫폼의 정역학식은 행렬을 이용하여 표현하면 다음의 식 (2)와 같다.

$$\hat{w} = j \tau \quad (2)$$

여기서,  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_6]^T$  이고, 구동력을 엔드이펙터의 웬치로 사상(mapping)하는 자코비안 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$j = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_6 \\ r_1 \times s_1 & \dots & r_6 \times s_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

### 3. 순방향/역방향 힘 전달 해석

순방향 힘 전달 해석은 구동력이 구속되었을 때, 엔드이펙터에서 발생하는 웬치 크기의 범위를 구하는 문제이다. 또한, 역방향 힘 전달 해석은, 역의 과정으로서, 엔드이펙터의 웬치를 구속하였을 때, 이에 해당하는 구동력 크기의 범위를 결정하는 문제이다. 한편, 엔드이펙터의 힘과 모멘트를 표현하는 웬치의 크기를 구하는 것은 식 (4)에서 나타낸 바와 같이 서로 다른 두 개의 물리량을 더하는 문제점이 있고, 또한, 입출력 관계의 특성을 명확히 해석하는 데 어려움이 있으므로, 엔드이펙터에서 발생하는 힘과 모멘트를 각각 분리하여 순방향 및 역방향 힘 전달 해석을 수행하도록 한다.

$$[\hat{w}]^2 \rightarrow [N]^2 + [Nm]^2 \quad (4)$$

여기서,  $\| \cdot \|$  은 Euclidean norm 을 의미한다.

#### 3.1 순방향 힘 전달 해석

먼저, 구동기가 모두 선형구동기일 경우, 단위 구동력이 주어졌을 때, 엔드이펙터에서 발생하는 힘 크기의 범위를 결정하는 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } \|f\|^2 &= \hat{w}^T \Gamma \hat{w} = \tau^T j^T \Gamma j \tau \\ \text{Subject to: } \|\tau\|^2 &= \tau^T \tau = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\Gamma \equiv \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$  인 행렬이고,  $I_3$  및  $0_3$  은 각각 크기가  $3 \times 3$  인 단위행렬 및 영행렬을 의미한다. Lagrange's Multiplier 를 이용하면, 위의 식 (5)는 다음의 식 (6)과 같은 고유치 문제가 된다.

$$(j^T \Gamma j) \tau_j = \alpha_j^2 \tau_j \quad (6)$$

여기서,  $\alpha_j^2$  은 행렬  $j^T \Gamma j$  의 고유치이고,  $\tau_j$  는  $\alpha_j^2$  에 해당되는 단위 고유벡터이다.

마찬가지로, 단위 구동력이 주어졌을 때, 엔드이펙터에서 발생하는 모멘트 크기의 범위를 정하는 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } \|m\|^2 &= \hat{w}^T L \hat{w} = \tau^T j^T L j \tau \\ \text{Subject to: } \|\tau\|^2 &= \tau^T \tau = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,  $L \equiv \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$  인 행렬로 정의된다. 식 (7)은 다음의 식 (8)과 같은 고유치 문제가 된다.

$$(j^T L j) \tau_m = \alpha_m^2 \tau_m \quad (8)$$

여기서, 엔드이펙터의 힘 크기의 범위를 구하는 경우와 마찬가지로  $\alpha_m^2$  은  $j^T L j$  의 고유치이고,  $\tau_m$  은 단위 고유벡터이다.

이상의 2 가지의 고유치 문제들은 자코비안 행렬  $j$  가 특이(singular)하지 않다면, 행렬  $j^T \Gamma j$  과  $j^T L j$  는 각각  $\Gamma$  와  $L$  이 차수(rank)가 3 인 행렬이므로, 차수가 3 인 양의 반한정 대칭행렬(symmetric positive semi-definite matrix)이 된다. 즉, 고유치 문제 해석을 통하여 구하여진 고유치중 3 개는 양의 값을 갖고, 나머지 3 개는 영이다. 따라서, 구동력 벡터 공간( $\tau \in R^6$ ) 안에서 6 개의 서로

직교하는 고유벡터를 축으로 하고 그에 해당하는 고유치의 제곱근을 축의 길이로 하는 타원을 이루는데, 고유치중 3 개만이 양의 값을 가지므로 3 차원 타원(3 dimensional degenerated ellipsoid)이 된다.

또한, 직교공간(Cartesian space)상에서, 위의 고유치 해석의 물리적 의미는 다음과 같다. 먼저, 엔드 이펙터상의 힘 크기의 범위를 결정하는 경우, 영의 고유치에 해당되는 3 개의 고유벡터들은 자코비안 행렬을 통하여 3 차원 힘 공간(force space,  $f \in R^3$ )을 영공간(null space)으로 만들므로 양의 고유치에 해당되는 3 개의 고유벡터들에 의하여 엔드이펙터의 힘은 의미 있는 최대 및 최소값을 갖는다. 즉, 식 (9)와 같이 자코비안 행렬  $j$  에 양의 고유치에 해당되는 단위 고유벡터  $\tau_i$  를 곱하여 얻은 값을, 여기서는 고유웁치(eigenwrench,  $\hat{w}_i$ )라 정의하도록 한다.

$$\hat{w}_i = j \tau_i, \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

이러한 고유웁치중 힘 벡터 성분  $f_i$  들은 서로 직교하고 힘 벡터의 크기는 고유치의 제곱근에 해당하는 성질을 갖는다.

$$\hat{w}_i^T \Gamma \hat{w}_j = f_i^T f_j = 0, \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{when } i \neq j \quad (10)$$

$$\|f_i\| = \alpha_i, \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

3 개의 고유웁치들은 힘 공간안에서 3 차원 힘 전달 타원(force transmission ellipsoid)을 이룬다. 타원의 주축은 고유웁치이고 축의 길이는 고유치의 제곱근에 해당된다. 이러한 힘 전달 타원의 개념을 이용하여, 양의 고유치에 해당되는 3 개의 단위 고유벡터들로 선형 조합되는 구동력 공간이 만들 수 있는 힘의 최대 및 최소 크기 및 방향을 해석할 수 있다. 또한, 엔드이펙터상의 모멘트 크기의 범위를 결정하는 경우에 대해서도, 마찬가지로, 모멘트 전달 타원(moment transmission ellipsoid)을 만들 수 있으며, 이 때, 얻어지는 고유웁치,  $\hat{w}_m$ , 중 모멘트 벡터 성분을  $m_m$  이라 하면, 식 (10) 및 식 (11)과 유사하게, 이 모멘트 벡터도 서로 직교하며 크기가 고유치 제곱근,  $\alpha_m$ , 과 같다. 즉, 힘 및 모멘트 전달 타원은 다음의 Fig. 2 와 같다.

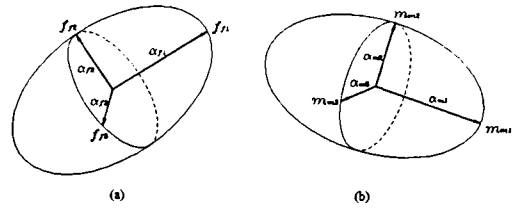


Fig. 2 (a) Force transmission ellipsoid.  
(b) Moment transmission ellipsoid.

양의 고유치에 해당되는 단위 고유벡터들로 만들 수 있는 힘과 모멘트 전달 타원을 이용하여 엔드이펙터의 힘과 모멘트 크기의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_{f \min} &\leq \|f\| \leq \alpha_{f \max}, \\ \alpha_{m \min} &\leq \|m\| \leq \alpha_{m \max} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $\alpha_{f \max}^2$  및  $\alpha_{f \min}^2$  는 각각 식 (6)에서 얻은 양의 고유치들중 최대 및 최소값을 표현하며, 마찬가지로  $\alpha_{m \max}^2$  및  $\alpha_{m \min}^2$  는 각각 식 (8)에서 구한 양의 고유치들중 최대 및 최소값에 해당된다. 위의 식 (12)는 단위 구동력이 구동기에 가해졌을 때, 엔드이펙터에서는 특정한 방향으로 최대  $\alpha_{f \max}$  의 힘을 발생할 수 있고, 모든 방향으로 힘을 최대  $\alpha_{f \min}$  까지 만들어 낼 수 있다는 것을 의미한다. 모멘트의 경우도 같은 논리가 성립한다.

한편, 위에서 제시된 고유치 문제들이 단위에 변화에 대하여 일관성을 갖는 것을 살펴 보기 위하여, 행렬  $j^T \Gamma j$  와  $j^T L j$  를 전개하면 다음과 같다.

$$j^T \Gamma j = \begin{bmatrix} s_1 \cdot s_1 & s_1 \cdot s_2 & \cdots & s_1 \cdot s_6 \\ s_2 \cdot s_1 & s_2 \cdot s_2 & \cdots & s_2 \cdot s_6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_6 \cdot s_1 & s_6 \cdot s_2 & \cdots & s_6 \cdot s_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$j^T L j = \begin{bmatrix} s_{01} \cdot s_{01} & s_{01} \cdot s_{02} & \cdots & s_{01} \cdot s_{06} \\ s_{02} \cdot s_{01} & s_{02} \cdot s_{02} & \cdots & s_{02} \cdot s_{06} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{06} \cdot s_{01} & s_{06} \cdot s_{02} & \cdots & s_{06} \cdot s_{06} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서,  $s_i \cdot s_j$  는 선형구동기의 단위 방향벡터들끼리의 내적(inner product)에 해당되고,  $s_{0i} \cdot s_{0j}$  는 모멘트 벡터들 사이의 내적값이다. 즉,  $j^T \Gamma j$  및  $j^T L j$  의 단위는 다음과 같다.

$$j^T \Gamma j = [[\ ]], \quad j^T L j = [[L^2]] \quad (15)$$

여기서,  $[\ ]$  과  $[L]$  는 각각 단위가 무차원과 길이인 행렬을 표현한다.

엔드이펙터의 힘과 모멘트 크기의 범위를 분리하여 해석함으로써, 고유치 해석시 사용하게 되는 행렬의 원소들은 같은 단위를 갖으며, 각 행렬에 해당되는 고유치들은 단위의 변화에 대해 일관성을 갖는다.

### 3.2 역방향 힘 전달 해석

역방향 힘 전달 해석에서도 식 (4)에서 지적하였듯이 웅치의 크기를 구하는 것은 물리적 의미를 상실하게 되므로 구속 조건을 힘 또는 모멘트로 나누어 해석한다.

스튜어트 플랫폼의 구동기가 모두 선형구동기라 가정하면(또는, 동일한 형태의 구동기), 엔드이펙터의 힘의 크기가 구속되었을 때, 구동력 크기의 범위를 결정하는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } \|\tau\|^2 &= \tau^T \tau = \hat{w}^T (j j^T)^{-1} \hat{w} \\ \text{Subject to: } \|f\|^2 &= f^T f = \hat{w}^T \Gamma \hat{w} = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

마찬가지로, 엔드이펙터의 모멘트의 크기가 구속되었을 때, 구동력 크기의 범위를 정하는 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } \|\tau\|^2 &= \tau^T \tau = \hat{w}^T (j j^T)^{-1} \hat{w} \\ \text{Subject to: } \|m\|^2 &= m^T m = \hat{w}^T L \hat{w} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

위의 식 (16) 및 식 (17)은 각각 식 (18) 및 식 (19)와 같은 특이 고유치 문제(singular eigenvalue problem)가 된다.<sup>(8)</sup>

$$(j j^T)^{-1} \hat{w}_f = \beta_f^2 \Gamma \hat{w}_f \quad (18)$$

$$(j j^T)^{-1} \hat{w}_m = \beta_m^2 L \hat{w}_m \quad (19)$$

여기서,  $\beta_f^2$  및  $\beta_m^2$  는 각각 힘 및 모멘트가 구속되었을 때의 고유치에 해당되고,  $\hat{w}_f$  및  $\hat{w}_m$  은 각각  $\beta_f^2$  및  $\beta_m^2$  에 해당되는 고유웅치이다.

위의 고유치 문제에서  $\Gamma$  및  $L$  은 차수가 3인 행렬이므로 고유치 중 3개는 무한대값을 갖고 이에 해당되는 고유웅치는 의미를 상실한다. 나머지 3개의 고유치 및 고유웅치를 구하기 위하여 행렬  $(j j^T)^{-1}$  를 다음과 같이 4개의 부분행렬로 나눈다.

$$(j j^T)^{-1} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

위의 식 (20)을 이용하여 식 (18)을 다음의 식 (21)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_f \\ m_f \end{bmatrix} = \beta_f^2 \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_f \\ m_f \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서,  $\hat{w}_f = [f_f^T, m_f^T]^T$  이다.

식 (21)을 전개하면, 식 (18)의 특이 고유치 문제는 다음과 같은 일반 고유치 문제로 해석할 수 있다.

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}) f_f &= \beta_f^2 f_f \\ m_f &= -a_{22}^{-1} a_{21} f_f \end{aligned} \quad (22)$$

식 (19)도 위의 과정과 마찬가지로, 다음의 식 (23)과 같은 일반 고유치 문제로 해석할 수 있다.

$$\begin{aligned} (a_{22} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{12}) m_m &= \beta_m^2 m_m \\ f_m &= -a_{11}^{-1} a_{12} m_m \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,  $\hat{w}_m = [f_m^T, m_m^T]^T$  이다.

식 (22)의 고유치 해석을 통하여, 엔드이펙터상의 힘 크기가 구속되었을 때, 다음과 같이 구동력 크기의 범위를 구할 수 있다.

$$\beta_{f \min} \leq \|\tau\| \leq \beta_{f \max}, \quad \text{when } \|f\| = 1 \quad (24)$$

여기서,  $\beta_{f \max}$  및  $\beta_{f \min}$  는 각각 행렬

$(a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21})$ 의 최대 및 최소 고유치의 제곱근이다. 또한, 식 (23)을 이용하여 엔드이펙터상의 모멘트 크기가 구속되었을 때, 구동력 크기의 범위는 다음과 같다.

$$\beta_{m \min} \leq \|\tau\| \leq \beta_{m \max}, \quad \text{when } \|m\| = 1 \quad (25)$$

여기서,  $\beta_{m \max}$  및  $\beta_{m \min}$ 는 행렬  $(a_{22} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{12})$ 의 최대 및 최소 고유치의 제곱근이다. 위의 식 (24)와 식 (25)는 역방향 힘 전달 해석시 요구되는 엔드이펙터의 힘 및 모멘트 크기를 만족하기 위해서는 구동력의 크기가  $\beta_{f \max}$  및  $\beta_{m \max}$ 보다 커야 함을 의미한다.

한편, 순방향 힘 전달 해석과 마찬가지로, 역방향 힘 전달 해석에서 다루는 고유치 문제가 단위의 변화에 대해 일관성을 갖는가를 살펴보기 위하여  $(j j^T)^{-1}$  행렬을 식 (26)과 같이 4개의 부분행렬(submatrix)로 나눈다.

$$(j j^T)^{-1} = \begin{bmatrix} [ \quad ]_{3 \times 3} & [L^{-1}]_{3 \times 3} \\ [L^{-1}]_{3 \times 3} & [L^{-2}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

엔드이펙터상의 힘 크기가 구속되는 경우의 행렬의 단위는 다음과 같다.

$$(a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}) = [[ \quad ]_{3 \times 3}] \quad (27)$$

또한, 엔드이펙터상의 모멘트 크기가 구속되는 경우의 행렬의 단위는 다음과 같다.

$$(a_{22} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{12}) = [[L^{-2}]_{3 \times 3}] \quad (28)$$

순방향 힘 전달 해석과 같이, 역방향 힘 전달 해석에서 다루게 되는 행렬 원소의 단위가 모두 같으므로, 구하고자 하는 고유치도 단위에 대해 일관성을 갖는다.

### 3.3 순/역방향 힘 전달 해석시 다루는 고유치 문제들간의 관계

순/역방향 힘 전달 해석시 사용된 고유치 문제들을 정리하면, Table I과 같다.

Table I. Eigenvalue problems of the forward and inverse force transmission analyses.

Forward Force Transmission Analysis		
Input	Output	Eigenvalue Problem
$\ \tau\ $	$\ f\ $	$(j^T \Gamma j) \tau_f = \alpha_f^2 \tau_f \quad (6)$
	$\ m\ $	$(j^T L j) \tau_m = \alpha_m^2 \tau_m \quad (8)$
Inverse Force Transmission Analysis		
Input	Output	Eigenvalue Problem
$\ f\ $	$\ \tau\ $	$(j j^T)^{-1} \hat{w}_f = \beta_f^2 \Gamma \hat{w}_f \quad (18)$
$\ m\ $		$(j j^T)^{-1} \hat{w}_m = \beta_m^2 L \hat{w}_m \quad (19)$

**정리 1.** 순방향 힘 전달 해석시의 고유치와 역방향 힘 전달 해석시의 고유치는 서로 역수인 관계에 있다. ( $\alpha_f^2 = 1/\beta_f^2, \alpha_m^2 = 1/\beta_m^2$ )

**증명:** 순방향 힘 전달 해석중, 힘 크기의 범위를 구하는 고유치 문제, 즉, 식 (6)의 양변에  $j^{-T}$ 를 곱하고  $\tau_f = j^{-T} \hat{w}_f$ 의 관계를 이용하면 다음과 같다.

$$(j j^T)^{-1} \hat{w}_f = \frac{1}{\alpha_f^2} \Gamma \hat{w}_f \quad (29)$$

이제, 식 (29)를 식 (18)과 비교하면,  $\alpha_f^2 = 1/\beta_f^2$ 임을 쉽게 알 수 있다. 모멘트 경우에 대하여도 비슷한 과정을 통하여  $\alpha_m^2 = 1/\beta_m^2$ 인 관계를 얻을 수 있다. **증명 끝.**

이러한 결과로부터 또한 다음을 알 수 있다: 순방향 힘 전달 해석시의 단위 고유벡터  $\tau_f$ 와 역방향 힘 전달 해석시의 고유텐치  $\hat{w}_f$ 는  $c \hat{w}_f = j \tau_f$ 의 관계로 구속되어 있다. 여기서,  $c$ 는 임의의 영이 아닌 상수이다. 모멘트 전달 해석의 경우는  $c \hat{w}_m = j \tau_m$ 의 관계로 구속된다.

정리 1은 스튜어트 플랫폼의 힘 전달 해석에 있어서 중요한 결과이며, 이로부터, 순방향 또는 역방향, 한쪽 방향만의 해석으로 완벽한 힘 전달 해석을 할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 힘 전달 해석의 수치 예

여기서는 Fig. 3 과 같이 상/하판의 인접하는 두 조인트들이 한 점에 일치하고, 이들이 각 기준 좌표계의 원점에서  $r_p$ ,  $r_b$  만큼 떨어진 곳에 위치하며,  $120^\circ$  간격을 유지하는 대칭 형태를 갖는 3-3 형 스튜어트 플랫폼을 대상으로 힘 전달 해석을 수행하고자 한다. 여기서,  $r_p$ ,  $r_b$  는 각각 상/하판의 반경이다.

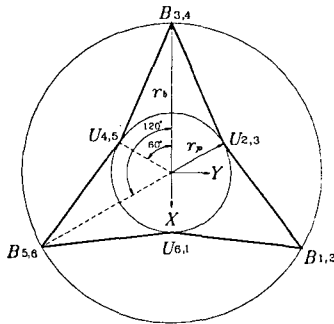


Fig. 3 Geometric configuration of 3-3 type Stewart platform.

각 좌표계에서 표현된 구형조인트의 위치 벡터는 다음과 같다.

$$B_{1,2} = \left[ \frac{1}{2}r_b, \frac{\sqrt{3}}{2}r_b, 0 \right]^T, \quad B_{3,4} = \left[ -r_b, 0, 0 \right]^T,$$

$$B_{5,6} = \left[ \frac{1}{2}r_b, -\frac{\sqrt{3}}{2}r_b, 0 \right]^T,$$

$$U_{6,1} = \left[ r_p, 0, 0 \right]^T, \quad U_{2,3} = \left[ -\frac{1}{2}r_p, \frac{\sqrt{3}}{2}r_p, 0 \right]^T,$$

$$U_{4,5} = \left[ -\frac{1}{2}r_p, -\frac{\sqrt{3}}{2}r_p, 0 \right]^T \quad (30)$$

스튜어트 플랫폼은 하판 및 상판의 반경이 각각  $r_b = 2[m]$ ,  $r_p = 1[m]$  이고, 상판이 하판과 평행하며, 높이가  $z = \sqrt{3}[m]$  일 때 스튜어트 플랫폼은 기구학적으로 최적의 자세를 갖는다는 연구결과가 발표되었다.<sup>(9,10,11)</sup> 여기서는, 이러한 3-3 형 스튜어트 플랫폼의 최적 자세를 기준으로 힘 전달 해석의 수치 예제를 제시하고자 한다.

위에서 정한 변수에 대한 기구의 자코비안 행렬은 식 (3)을 이용하면, 다음과 같이 구할 수 있다. 여기서, 길이의 단위는 meter 로 설정하였다.

$$j = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.6124 & 0.6124 & 0.6124 & -0.6124 & 0.0000 \\ -0.7071 & -0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0.0000 & 0.6124 & 0.6124 & -0.6124 & -0.6124 & 0.0000 \\ -0.7071 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

순방향 힘 전달 해석시, 엔드이펙터의 힘과 모멘트 크기의 범위는 식 (6)과 식 (8)의 고유치 해석을 이용하여 구할 수 있다. 각각의 고유치의 제곱근과 이에 해당되는 단위 고유벡터를 다음과 같이 제시하였다. 여기서,  $\alpha_f$  의 단위는 무차원이고  $\alpha_m$  의 단위는 meter 이다.

$$[\alpha_{f1,2,3}] = \begin{bmatrix} 1.2247 & 1.2247 & 1.7321 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_{m1,2,3}] = \begin{bmatrix} 1.2247 & 1.2247 & 1.7321 \end{bmatrix}$$

$$[\tau_{f1,2,3}] = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.5774 & 0.4082 \\ -0.5000 & -0.2887 & 0.4082 \\ 0.5000 & 0.2887 & 0.4082 \\ 0.5000 & -0.2887 & 0.4082 \\ -0.5000 & 0.2887 & 0.4082 \\ 0.0000 & 0.5774 & 0.4082 \end{bmatrix}$$

$$[\tau_{m1,2,3}] = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.5774 & -0.4082 \\ 0.5000 & 0.2887 & 0.4082 \\ 0.5000 & 0.2887 & -0.4082 \\ -0.5000 & 0.2887 & 0.4082 \\ -0.5000 & 0.2887 & -0.4082 \\ 0.0000 & -0.5774 & 0.4082 \end{bmatrix}$$

고유값들은 자코비안 행렬  $j$  에 위의 단위 고유벡터들을 곱하여 구할 수 있다.

$$[\hat{w}_{f1,2,3}] = \begin{bmatrix} 1.2247 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.2247 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.7321 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{w}_{m1,2,3}] = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.2247 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.2247 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.7321 \end{bmatrix}$$



즉, 이러한 수치 예제는 기구학적 최적자세의 경우, 크기가  $1[N]$  인 구동력이 입력되었을 때, 엔드이펙터에서 모든 방향으로 최대  $1.2247[N]$  과  $1.2247[Nm]$  인 힘과 모멘트를 발생할 수 있다는 것을 의미한다. 또한, 최대의 힘 및 모멘트 전달 방향은 Z 방향이고, 이 방향의 힘 및 모멘트 크기는 X, Y 방향 보다  $\sqrt{2}$  배 크다.

역방향 힘 전달 해석에 대해서는, 힘 및 모멘트 구속에 대한 구동력 크기의 범위를 각각 식 (22) 및 식 (23)의 고유치 해석을 통하여 해석할 수 있다. 또한, 역방향 해석시의 고유치는 순방향 해석에서 얻은 고유치의 역수임을 이용하여,  $\beta_f$  및  $\beta_m$ 를 구하면 다음과 같다. 여기서,  $\beta_f$ 의 단위는 무차원이고  $\beta_m$ 의 단위는 1/meter 이다.

$$[\beta_{f1,2,3}] = [0.8165 \quad 0.8165 \quad 0.5774]$$

$$[\beta_{m1,2,3}] = [0.8165 \quad 0.8165 \quad 0.5774]$$

만약, 힘과 모멘트가 각각  $1[N]$  및  $1[Nm]$ 로 구속되었을 때, 이를 만족하도록 하는 구동력의 크기는 역방향 힘 전달 해석시의 최대고유치의 제곱근값인  $0.8165[N]$ 보다 커야 함을 알 수 있다.

힘 전달 해석의 모의 실험은, 기구학적 최적자세를 기준으로 Fig. 4에 도시한 것과 같이 X축과 Z축 방향으로 이동할 때와, Fig. 5에 도시한 것과 같이 X축과 Z축에 대하여 회전하는 경우에 대하여, 순방향에 대해서만 모의 실험을 수행하였다. 여기서는 크기가  $1[N]$ 인 구동력이 가해졌을 때 (단, 구동력 벡터는 양의 고유치에 해당되는 고유 벡터 공간에 속함), 엔드이펙터에서 발생할 수 있는 힘( $\alpha_f$ ) 및 모멘트( $\alpha_m$ )의 최대값(점선) 및 최소값(실선)을 도시하였다.  $\alpha_{f \min}$  및  $\alpha_{m \min}$ 는 일반적으로 상판의 좌표계가 중앙에 위치할 때 최대가 됨을 알 수 있고, Z축으로 이동하는 경우에는 다른 경우에 비하여 크게 변화함을 알 수 있다. 또한, 단위 구동력에 대해서 모든 방향으로 최대  $\alpha_{f \min}$  및  $\alpha_{m \min}$ 인 힘 및 모멘트를 전달할 수 있으므로  $\alpha_{f \min}$ 와  $\alpha_{m \min}$ 가 최대가 되는 자세를 엔드이펙터상의 힘 및 모멘트 전달 측면에서의 최적 자세라 할 수 있다. 이러한 최적자세는 상판의 좌표계가 중앙에 위치하고 하판과 평행하며, 높이는 힘의 경우  $\sqrt{3/2}[m]$ 이고 모멘트의 경우는  $\sqrt{6}[m]$ 가 된다.

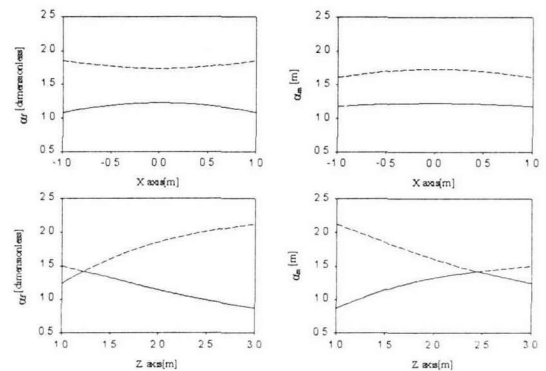


Fig. 4 Forward force transmission analysis when moving along X and Z axis.(dotted line: the maximum value, solid line: the minimum value)

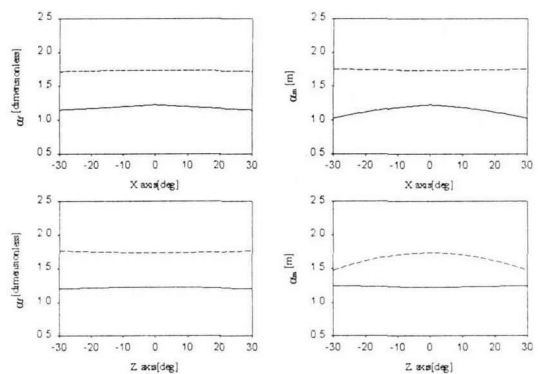


Fig. 5 Forward force transmission analysis when rotating about X and Z axis.(dotted line: the maximum value, solid line: the minimum value)

## 5. 결론

본 연구에서는 구동력과 엔드이펙터상의 힘과 모멘트의 상호 전달 관계를 순방향/역방향 고유치 해석 문제로 유도하였다. 이러한 고유치 해석들은 단위의 변화에 대해 일관성을 갖으며, 구동력 벡터공간에 아무런 제약 조건을 가하지 않으므로, 이로부터 엔드이펙터에서 나타날 수 있는 모든 힘과 모멘트에 대한 정보를 획득할 수 있다. 그리고, 순방향과 역방향 고유치들은 서로 역의 관계에 있음을 증명하였다. 이는 한쪽 방향의 고유치 문제만 해석함으로써 힘 전달 해석 문제를 완결할 수

있다는 것을 의미한다. 순방향 해석에서 제시한 힘 및 모멘트 전달 타원을 통하여 힘 전달의 크기만이 아니라 방향성도 도시적으로 해석할 수 있는 도구를 제시하였다. 끝으로, 힘 전달 해석의 방법 및 그 결과를 수치 예제와 모의 실험을 통하여 제시하였다.

### 후기

본 연구는 1996 년도 연세대학교 학술연구비의 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

### 참 고 문 헌

1. T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms," The International Journal of Robotic Research, Vol. 4, No. 2, pp.3-9, 1985.
2. M. Togai, "An Application of the Singular Value Decomposition to Manipulability and Sensitivity of Industrial Robots," SIAM, Vol. 7, No. 2, pp. 315-320, 1986.
3. R. Dubey and J. Y. S. Luh, "Redundant Robot Control Using Task Based Performance Measures," Journal of Robotic Systems, Vol.5, No. 5, pp. 409-432, 1988.
4. K. Kosuge, M. Okuda, H. Kawamata and T. Fukuda, "Input/Output Force Analysis of Parallel Link Manipulators," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.714-719, 1993.
5. J. P. Merlet, "Efficient Estimation of the Extremal Articular Forces of a Parallel Manipulator in a Translation Workspace," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1982-1987, 1998.
6. J. Duffy, "Statics and Kinematics with Applications to Robotics," Cambridge University Press, 1996.
7. L. Plücker, "On a New Geometry of Space," Phil. Trans. Royal Society of London, Vol. 155, pp. 725-791, 1865.
8. A. Bunse-Gerstner, "An Algorithm for the Symmetric Generalized Eigenvalue Problem," Linear Algebra and Applications, Vol. 58, pp. 43-48, 1984.
9. K. H. Pittens and R. P. Podhorodeski, "A Family of Stewart Platform with Optimal Dexterity," Journal of Robotic Systems, Vol. 10, No. 4, pp. 463-480, 1993.
10. J. Lee, J. Duffy and K. Hunt, "A Practical Quality Index base on the Octahedral Manipulator," International Journal of Robotic Research, in press, 1997.
11. 김한성, 최용제, 정용섭, "스튜어트 플랫폼의 기구학적 최적지수에 관한 연구," 대한기계학회 추계학술대회논문집, pp. 573-578, 1997.