

629.8  
김 1751

工學碩士學位論文

스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에 관한 연구

A Study on the Forward Kinematic Analysis  
of Stewart Platform



이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

仁荷大學校 大學院

自動化工學科(自動化工學 專攻)

金 鍾 玖

254885

95.10.25

이 論文을 金鍾玖의 碩士學位 論文으로 認定함

1995年 8月 日

主審\_\_\_\_\_인

副審\_\_\_\_\_인

委員\_\_\_\_\_인

## 요 약

본 논문은 정확성과 큰 힘을 필요로 하는 작업에 사용되고 있는 6자유도 평행 매니퓰레이터인 스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에 관한 연구이다.

정기구학은 다리의 길이가 주어졌을 때, 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향을 계산하여 매니퓰레이터가 취할 수 있는 모든 형상을 구하는 문제이다.

정기구학 해석을 위해 두 가지의 알고리즘을 사용한다.

먼저, 6-3 스튜어트 플랫폼과 3-3 스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에 이용할 수 있는 알고리즘 1을 제시한다. 알고리즘 1에서는, 원의 자취를 따라 움직이는 이동판의 관절의 위치와 주어진 다리 길이를 이용하여 유도된 1원 16차 다항식으로 부터 실근을 구해서 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향을 계산한다.

또한, 일반적인 6-6 스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에도 적용할 수 있는 알고리즘 2를 제시한다. 6개의 선형식과 3개의 비선형 구속식으로 부터 도출된 1원 26차 다항식을 이용하여 실근을 구해서 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향을 계산한다.

알고리즘 1과 알고리즘 2를 이용하여 모의실험을 수행하고, 그 결과를 제시한다.

## ABSTRACT

In this paper, the forward kinematic analysis of 6 degree of freedom parallel manipulator, Stewart Platform, which is an ideal device for accurate applications and large force required works has been analysed.

The forward kinematics is the problem for finding all the possible configuration of the manipulator when the lengths of legs are given. The shapes of the manipulator are defined after computing the position and orientation of the moving plate relative to the base plate.

Two algorithms are presented.

First, algorithm 1 is used for the forward kinematic analysis of 6-3 and 3-3 Stewart Platform. Using the given leg lengths and the positions of joints in the moving plate which move the trajectory of the circle, algorithm 1 finds the real roots of the 16th order polynomial equation with one variable, and then computes the position and orientation of the moving plate relative to the base plate.

Algorithm 2 is applicable to the forward kinematic analysis of general 6-6 Stewart Platform. The 26th order polynomial equation with one variable is derived from the 6 linear equations and 3 nonlinear constraint equations. Algorithm 2 calculates the real roots of the polynomial equation, and then computes the position and orientation of the moving plate relative to the base plate.

The forward kinematics is simulated through algorithm 1 and algorithm 2, then the results are presented.

## 목 차

1. 서론 .....	1
1.1 매니플레이터 .....	1
1.2 기구학 .....	3
1.3 스튜어트 플랫폼 .....	4
1.4 연구목적 및 내용 .....	5
2. 스튜어트 플랫폼 .....	7
3. 역기구학 .....	11
4. 정기구학 .....	14
4.1 알고리즘 1 .....	14
4.2 알고리즘 2 .....	27
5. 모의실험 .....	39
6. 결 론 .....	51
참고 문헌 .....	52

## 그 립 목 차

Fig. 1	6-3 Stewart Platform .....	9
Fig. 2	3-3 Stewart Platform .....	10
Fig. 3	Coordinates and positions of joints .....	11
Fig. 4	Trajectory of the spherical joint .....	14
Fig. 5	Equivalent mechanism .....	16
Fig. 6	Origin and radius of the circle .....	16
Fig. 7	Position of the spherical joint .....	19
Fig. 8	Distances between the spherical joints .....	20
Fig. 9	Coordinate of the moving plate .....	25
Fig. 10	Coordinates and positions of joints .....	27
Fig. 11	3-3 Stewart Platform .....	32
Fig. 12	3-3 Stewart Platform .....	39
Fig. 13	Configurations of simulation I .....	44
Fig. 14	Configurations of simulation II .....	49

## 표 목 차

Table 1-1 Result of simulation I by algorithm 1	.....	42
Table 1-2 Result of simulation I by algorithm 2	.....	43
Table 2-1 Result of simulation II by algorithm 1	.....	45
Table 2-1 Result of simulation II by algorithm 2	.....	47

## 1. 서론

본 논문은 스튜어트 플랫폼의 기구학 해석에 관한 연구이다.

기구학 해석에 관한 설명에 앞서 매니퓰레이터, 기구학, 스튜어트 플랫폼, 그리고 연구목적 및 내용에 대해서 서술하고자 한다.

이어지는 1.1절에 매니퓰레이터, 1.2절에 기구학, 1.3절에 스튜어트 플랫폼과 1.4절에 연구목적 및 내용에 대해 기술한다.

### 1.1 매니퓰레이터

매니퓰레이터는 다수의 링크들이 서로 상대적인 운동을 할 수 있도록 관절들로 연결되어 있는 기구연쇄(kinematic chain)이다.

기구연쇄는 링크와 관절이 연결된 상태에 따라서 개형 기구연쇄(open kinematic chain)과 폐형 기구연쇄(closed kinematic chain), 그리고 개형 연쇄와 폐형 연쇄가 혼합된 복합 기구연쇄(complex kinematic chain)[1]으로 구분할 수 있다.

기구연쇄를 구성하는 링크중에서 움직임이 없는 링크를 기저링크(base link), 매니퓰레이터의 자유로운 끝단 링크를 엔드이펙터(end-effector)라고 하면 개형 기구연쇄는 기저링크와 엔드이펙터를 제외한 모든 링크들이 두개 이상의 관절에 의해서 연결되는 기구연쇄이며, 폐형 기구연쇄는 엔드이펙터만을 제외한 모든 링크가 두개 이상의 관절에 의해서 연결되는 기구연쇄이다.



그리고, 관절들은 1자유도의 회전관절(revolute joint), 또는 1자유도의 직진관절(prismatic joint)이다. 회전관절의 경우에, 각 링크는 연결되는 다른 링크에 대해 회전운동을 하므로 관절변수는 회전각이다. 그리고, 직진관절의 경우에는 상대적인 병진운동을 하므로, 관절변수는 링크간의 이동 거리가 된다. 또한, 2자유도의 유니버어설 조인트와 3자유도의 구관절은 각각 2개, 3개의 회전관절의 조합으로 구성된다.

최근, 자동화된 산업 현장에서 널리 사용하고 있는 SCARA 로봇및 PUMA 로봇등의 로봇 팔은 사람의 팔 구조와 같은 개형 기구연쇄 구조의 직렬 매니퓰레이터로서 작업공간이 넓은 곳이나, 복잡한 작업에 사용되고 있다.

그러나 직렬 매니퓰레이터는 링크와 관절이 기저링크에서부터 엔드이펙터까지 순차적으로 연결되어 있기 때문에 기저링크에서 가까운 관절의 변위에 오차가 발생한다면 그 오차는 엔드이펙터까지 중첩되게 된다. 따라서, 각각의 관절의 작은 오차가 누적되어 엔드이펙터의 위치 및 방향의 정밀도에 큰 오차를 유발하게된다. 그리고 엔드이펙터에 작용하는 힘과 링크들의 하중은 매니퓰레이터 전체에 대해서 균일하게 작용하지 않고 엔드이펙터에서 기저링크로 갈수록 액츄에이터(actuator)에 부과되는 하중이 증가하게 된다. 따라서 기저링크에 가까울수록 큰 하중을 견딜 수 있는 액츄에이터가 필요하다.

그러므로 직렬 매니퓰레이터는 정확성이나 큰 부하를 필요로 하는 작업에는 부적합하다.

이와 같은 직렬 매니퓰레이터의 단점을 보완하기 위한 대안이 바로 평행 매니퓰레이터이다. 평행 매니퓰레이터는 폐형 기구연쇄 구조이므로 직렬 매니퓰레이터와 비교했을 때, 이웃하는 관절의 오차로 인한 영향이 적으며 외부로 부터 작용하는 힘이 링크들의 하중이 매니퓰레이터의 전체에 고르게 분포하기 때문에 정확성과 큰 부하를 필요로 하는 작업에 적합하다. 그러나 평행 매니퓰레이터의 가장 큰 단점은 작업공간이 제한되어 있다는 점이다.

## 1.2 기구학

기구학은 운동을 일으키는 힘은 고려하지 않고 물체의 상대운동을 해석하는 분야로서 정기구학과 역기구학으로 구분할 수 있다. 그리고 매니퓰레이터의 기구학적 모델링은 공간상의 엔드이펙터의 위치, 방향과 매니퓰레이터의 관절 변수들 사이의 관계를 기술한다.

정기구학은 매니퓰레이터의 관절 변수가 주어졌을 때, 엔드이펙터의 위치와 방향을 구하는 문제이다. 그리고 역기구학 문제는 정기구학과는 반대로, 엔드이펙터의 위치와 방향이 주어졌을 때, 매니퓰레이터의 관절 변수를 구하는 문제이다.

직렬 매니퓰레이터의 경우, 정기구학 문제는 유일한 해를 가지며 쉽게 해결되지만, 역기구학 문제는 엔드이펙터의 같은 위치와 방향에 대해 여러 쌍의 관절 변수가 존재하기 때문에, 해석 과정이 복잡하다.

평행 매니퓰레이터의 경우에는 직렬 매니퓰레이터와 기구학 해석에 관해서 정반대의 특성을 갖고 있다. 즉, 역기구학 문제는 유일한 해를 가지며 쉽게 해를 구할 수 있지만, 정기구학 해석은 고차의 비선형 방정식을 풀어야 하기 때문에 같은 관절 변수에 대해 여러 쌍의 엔드이펙터의 위치와 방향이 존재할 수 있고, 해석 과정이 복잡하다.

일반적으로 직렬 매니퓰레이터는 개형 연쇄기구 구조이므로 관절의 갯수와 자유도의 수가 같기 때문에 쉽게 자유도를 구할 수 있다. 그러나 평행 매니퓰레이터는 폐형 기구연쇄 구조이므로 링크들이 복잡하게 연결되어 있기 때문에, 자유도를 쉽게 알 수 없으며 Gruebler의 관계식[2]을 이용하여 구한다.

### 1.3 스튜어트 플랫폼

평행 매니퓰레이터의 대표적인 예로는 스튜어트 플랫폼이 있다.

스튜어트 플랫폼은 모의 비행실험을 위한 장치로서, 1965년에 Stewart에 의해 처음 고안되었다. 일반적으로 스튜어트 플랫폼은 기저판과 이동판, 그리고 기저판과 이동판을 연결하는 6개의 다리들로 이루어져 있다. 이동판의 위치와 방향은 다리의 길이에 의해서 조절된다. 이때 각 다리의 길이는 다리에 위치한 직진 운동을 하는 액추에이터를 구동시킴으로써 변하게 된다. 그리고 기저판과 다리는 유니버설 조인트로, 이동판과 다리는 구관절로 연결되어 있으며, 유니버설 조인트와 구관절의 위치에 의해 기저판과 이동판의 모양이 결정된다.

본 논문에서는 기저판과 이동판의 모양이 모두 육각형인 스튜어트 플랫폼을 6-6 스튜어트 플랫폼으로 정의하였고, 기저판이 육각형이고 이동판이 삼각형인 경우를 6-3 스튜어트 플랫폼, 그리고 기저판과 이동판이 모두 삼각형인 스튜어트 플랫폼을 3-3 스튜어트 플랫폼이라 정의하였다.

이와 같은 스튜어트 플랫폼의 정기구학 문제에 관해서는 그동안 많은 연구가 수행되어 왔다.

F.Behi[3]는 3개의 다리를 가진 3-3 스튜어트 플랫폼에 대해 수치적으로 정기구학의 해를 구하였고, X.Shi[4]는 6-6 스튜어트 플랫폼의 정기구학 문제의 계산 과정을 단순화 시키기 위해서 관절에 encoder를 부착시켜 구한 정기구학의 해를 제시하였으며, C.Innocenti[5], P.Nanua[6], J.P.Merlet[7]은 6-3 스튜어트 플랫폼에 대해 16차 다항식을 풀어서 최대 16개의 해석적인 해를 구함으로써 정기구학 문제를 해결하였다.

하지만 기저판과 이동판의 모든 관절들이 서로 다른 임의의 위치에 존재하는 가장 일반적인 6-6 스튜어트 플랫폼의 경우에 대해서는 정기구학의 해석적인 해를 구하지 못하였다.

#### 1.4 연구목적 및 내용

본 연구에서는 공간상의 임의의 위치를 나타내기 위해 필요한 9개의 성분, 즉, 3개의 위치 성분과 6개의 방향 성분을 다리의 길이를 구하는 식으로 부터 다리의 갯수와 같은 6개의 선형식과 방향을 나타내는 회전 행렬의 각 열의 크기가 1이고, 서로 수직한 것을 이용하여 3개의 비선형 구속식을 유도함으로써 일반적인 6-6 스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에 적용할 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다.

본 논문의 구성을 살펴보면, 2장에서는 6-3과 3-3 스튜어트 플랫폼의 모형과 구조에 대해 설명하였고, 3장에서는 스튜어트 플랫폼의 역기구학에 관한 식을 유도하였으며, 4장에서는 6-3과 3-3 스튜어트 플랫폼의 정기구학 문제에 적용할 수 있는 알고리즘 1과 6-6 스튜어트 플랫폼의 정기구학 해석에 적용할 수 있는 알고리즘 2에 대해 기술하였으며, 5장에서는 제안된 알고리즘을 이용하여 3-3 스튜어트 플랫폼의 정기구학 모의 실험을 수행하여 얻은 결과를 제시하였다. 그리고 6장에서는 결론을 맺었다.

## 2. 스튜어트 플랫폼

스튜어트 플랫폼은 1965년에 D. Stewart가 모의 비행실험을 위해 고안한 장치이다. 일반적으로 스튜어트 플랫폼은 기저판과 이동판, 그리고 기저판과 이동판을 연결하는 6개의 다리로 이루어져 있다. 이동판의 위치와 방향은 6개의 다리의 길이를 변화시킴으로서 조절되고, 각각의 다리는 상부링크와 하부링크로 구성되며, 이 두 링크는 액추에이터가 부착되어 있는 직진관절로 연결되어 있다. 따라서 직진관절에 위치한 액추에이터를 구동시킴으로서 다리의 길이를 조절할 수 있다. 기저판과 다리는 2자유도의 유니버어설 조인트로 연결되어 있고, 이동판과 다리는 3자유도의 구관절로 연결되어 있다.

기저판의 모양은 유니버어설 조인트의 위치에 의해서, 그리고 이동판의 모양은 구관절의 위치에 의해서 결정된다. 따라서 유니버어설 조인트와 구관절이 모두 서로 다른 위치에 있으면, 기저판과 이동판은 모두 6각형의 모양을 갖는다. 이처럼 기저판과 이동판이 모두 6각형인 경우를 6-6 스튜어트 플랫폼이라 정의한다. 또한, 그림1과 같이 기저판이 6각형이고 이동판이 3각형인 경우는 6-3 스튜어트 플랫폼이라 한다. 이 경우에는 한 위치에 두 개의 구관절이 존재한다. 그리고 기저판과 이동판이 모두 3각형인 경우는 그림2의 3-3 스튜어트 플랫폼이라 정의한다.

스튜어트 플랫폼은 기저판과 이동판, 그리고 6개의 다리가 각각 상부링크와 하부링크로 구성되므로 총 링크수는 14이다. 그리고, 기저판에 위치한 6개의 유니버어설 조인트, 이동판에 있는 6개의 구관절과 각 다리에 1개씩의 직진관절을 합해서 전체 관절수는 18이다.

따라서, 스튜어트 플랫폼의 자유도는 Gruebler의 관계식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F &= 6(N_L - N_J - 1) + \sum_{i=1}^n f_i \\ &= 6(14 - 18 - 1) + \sum_{i=1}^6 (2+1+3) = 6 \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서

$F$  : 전체 자유도 수

$N_L$  : 기저판을 포함한 전체 링크 수

$N_J$  : 전체 관절의 수

$f_i$  :  $i$ 번째 관절의 자유도 수

그림1은 6-3 스튜어트 플랫폼의 모형이고, 그림2는 3-3 스튜어트 플랫폼을 표현하였다.

그림1과 그림2에서  $A_i$ 와  $B_i$ 에는 유니버어설 조인트가 각각 1개씩 있고,  $D_i$ 에는 각각 2개의 구관절이 존재한다. ( $i = 1, 2, 3$ ) 그리고 6개의 다리,  $1_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ )에는 각각 1개씩의 직진관절과 액추에이터가 위치한다.

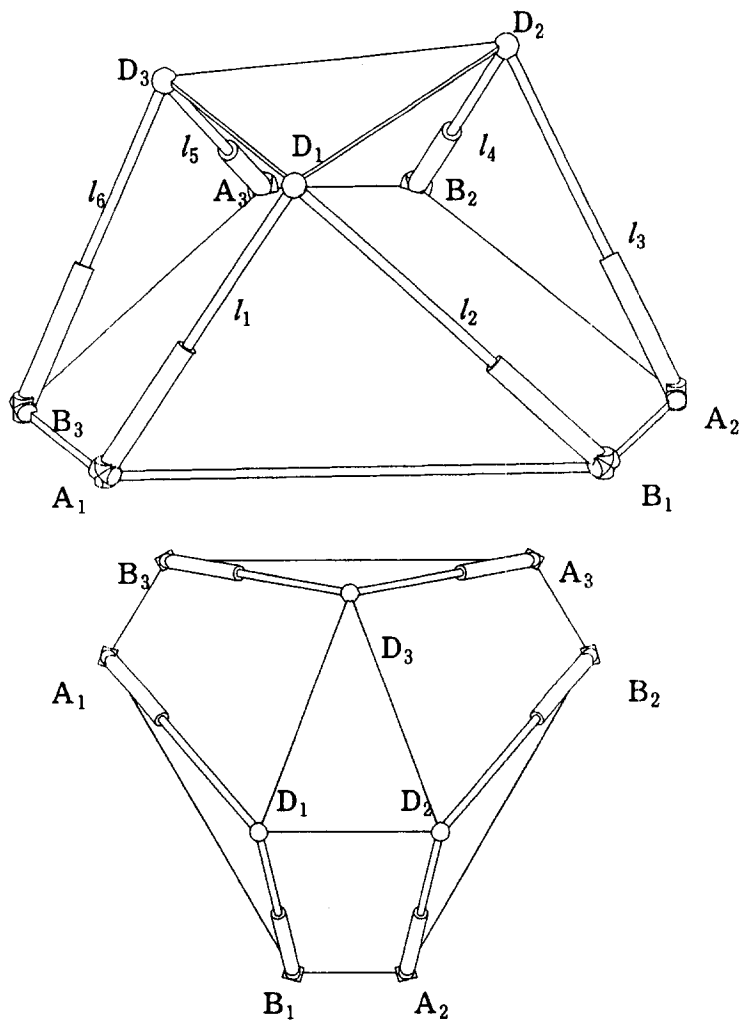


Fig.1 6-3 Stewart Platform



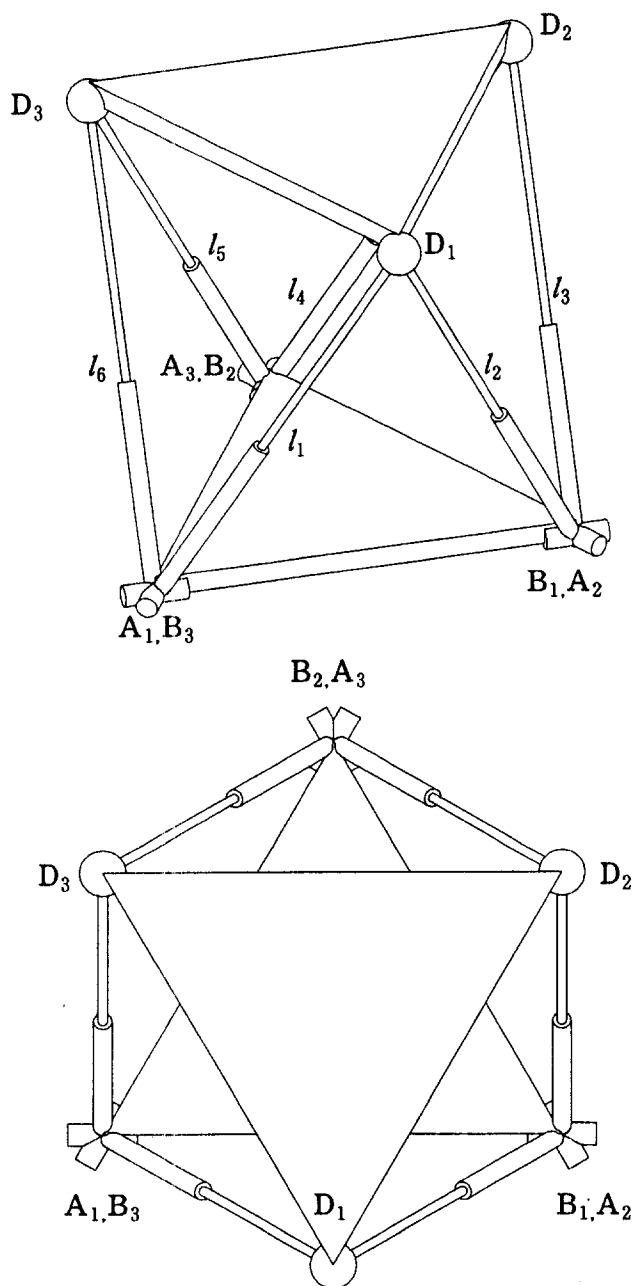


Fig.2 3-3 Stewart Platform

### 3. 역기구학

역기구학 문제는 스튜어트 플랫폼의 형상과 기저판에 대한 이동판의 위치 및 방향이 주어지면 구동관절의 관절변수를 구하는 문제로서, 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향을 나타내는 동차변환행렬이 주어졌을 때 스튜어트 플랫폼의 형상을 고려하여 기저판과 이동판을 연결하는 각각의 다리의 길이를 구하게 된다.[8]

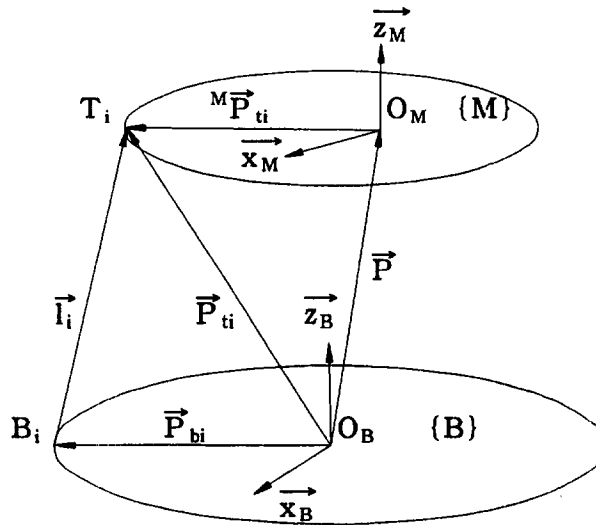


Fig.3 Coordinates and positions of joints

개략적으로 표현된 그림3의 스튜어트 플랫폼에서 기저판에 기저좌표계 {B}, 이동판에는 이동좌표계 {M}을 다음과 같이 정의하였다.

$$\{B\} \triangleq (O_B, x_B, y_B, z_B)$$

$$\{M\} \triangleq (O_M, x_M, y_M, z_M)$$

또한, 상기의 그림3에서 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 다리의 길이벡터  $l_i$ , 이동판에 부착된 관절의 위치벡터  $P_{ti}$ , 그리고 기저판에 부착된 관절의 위치벡터  $P_{bi}$ 의 관계는 다음과 같다.

$$l_i = P_{ti} - P_{bi} \quad (3.1)$$

상기식에서  $P_{ti}$ 를 기저좌표계 {B}에 대한 이동좌표계 {M}의 원점  $O_M$ 의 위치벡터  $P$ 와 이동좌표계 {M}에 대해 표현된 상대 위치벡터  ${}^M P_{ti}$ 로서 표현하면 식(3.1)은 다음과 같이 표현된다.

$$l_i = P + R {}^M P_{ti} - P_{bi} \quad (3.2)$$

여기서

$P$  : 기저좌표계 {B}에 대해 표현된  $O_M$ 의 위치벡터

$$P = ({}^B P_x, {}^B P_y, {}^B P_z)^T$$

$R$  : 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 이동좌표계 {M}의 회전행렬

$$R = ({}^B x_M \quad {}^B y_M \quad {}^B z_M) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

따라서 각각의 다리의 길이는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} | l_i | &= | P_{ti} - P_{bi} | \\ &= | P + R {}^M P_{ti} - P_{bi} | \end{aligned} \quad ( i = 1, \dots, 6 ) \quad (3.3)$$

여기서

$l_i$  : 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 다리의 길이벡터

$$l_i = (l_{xi}, l_{yi}, l_{zi})^T$$

$P_{bi}$  : 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 기저판위에 위치한 관절의  
위치벡터

$$P_{bi} = (b_{xi}, b_{yi}, b_{zi})^T$$

$P_{ti}$  : 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 이동판위에 위치한 관절의  
위치벡터

$$P_{ti} = (t_{xi}, t_{yi}, t_{zi})^T$$

${}^M P_{ti}$  : 이동좌표계 {M}에 대해 표현된 이동판위에 위치한 관절  
의 위치벡터

$${}^M P_{ti} = ({}^M t_{xi}, {}^M t_{yi}, {}^M t_{zi})^T$$

## 4. 정기구학

정기구학 문제는 구동관절의 관절변수가 주어지면 스튜어트 플랫폼이 취할 수 있는 형상을 구하는 문제로서, 각 다리의 길이가 주어졌을 때 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향을 나타내는 동차변환행렬을 구하여 기저판에 위치한 좌표계에 대해 표현된 이동판의 각각의 관절의 위치를 구하게 된다.

### 4.1 알고리즘 1

알고리즘 1은 일반적인 6-6 스튜어트 플랫폼이 아닌 3-3이나 6-3 스튜어트 플랫폼의 제한된 형상의 정기구학 문제에 적용할 수 있는 방법이다.

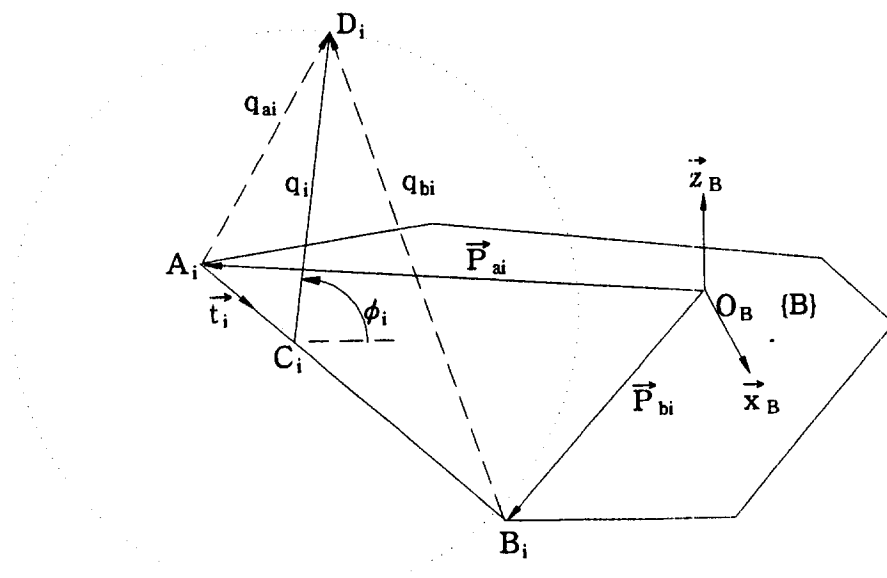


Fig.4 Trajectory of the spherical joint

상기의 그림4는 이동판의 구관절  $D_i$ 의 위치를 표현하였으며, 이때 기저좌표계  $\{B\}$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$\{B\} \triangleq (O_B, x_B, y_B, z_B)$$

그리고, 기저좌표계  $\{B\}$ 에 대해 표현된 기저판에 위치한 유니버어설 조인트의 위치벡터를  $P_{ai}$ 와  $P_{bi}$ 로 정의한다.

그림4와 같이 이동판을 고려하지 않는다면  $D_i$ 는  $A_i$ 가 중심이고 반지름이  $q_{ai}$ 인 구위에 존재해야 한다. 또한  $D_i$ 는  $B_i$ 가 중심이고 반지름  $q_{bi}$ 인 구위에 존재해야 한다. 따라서,  $D_i$ 의 자취는 두개의 구가 만나는 점들이어야 한다. 그리고 이 점들은 두 개의 구의 중심을 연결하는 직선  $A_iB_i$  위에 중심  $C_i$ 가 위치한 원이 될 것이다. 그러므로 6-3 스텔트 플랫폼은 그림5의 기구학적으로 동가한 기구(equivalent mechanism)으로 표현된다. 두개의 링크,  $A_iD_i$ 와  $B_iD_i$ 는 기저판과 회전관절(revolute joint), 이동판과 구관절로 연결된 하나의 링크  $C_iD_i$ 로 대체된다. 회전관절의 위치는 선분  $A_iB_i$ 와  $D_i$ 를 지나면서  $A_iB_i$ 에 직교하는 직선이 만나는 점이 된다. 그리고 회전관절의 축은  $A_iB_i$  방향이다.[5][6][7]

따라서 두개의 구가 만나는 점들의 자취인 원의 중심을 나타내는  $C_i$ 와 반지름  $q_i$ , 그리고 기저판과 반지름이 이루는 각인  $\phi_i$ 를 결정함으로써 기저좌표계  $\{B\}$ 에 대해 표현된 구관절의 위치  $D_i$ 를 구할 수 있다.

이때  $A_i$ 와  $B_i$ 는 기저판과 동일한 평면상에 있고  $D_i$ 는 이동판과 같은 평면상에 존재한다고 가정한다. 또한, 그림5와 같이, 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 이동판위의 구관절의 위치벡터를  $P_{di}$ , 그리고 원의 중심의 위치벡터를  $P_{ci}$ 로 정의한다.

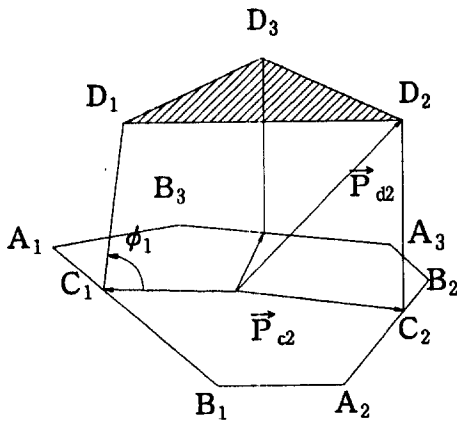


Fig.5 Equivalent mechanism

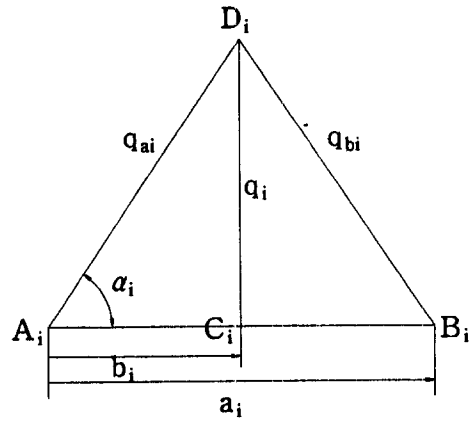


Fig.6 Origin and radius of the circle

상기의 그림6은 이동판의 구관절  $D_i$ 에 연결된 두개의 다리길이  $q_{ai}$ 와  $q_{bi}$ 가 주어졌을 때,  $D_i$ 의 자취인 원의 중심  $C_i$ 와 반지름  $q_i$ 를 나타내고 있다.

그림6로 부터 기저판위의 두 관절을 잇는 선분  $A_iB_i$ 와  $A_i$ 와  $D_i$ 를 연결하는  $q_{ai}$ 가 이루는 각  $\alpha_i$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\cos \alpha_i = \frac{a_i^2 + q_{ai}^2 - q_{bi}^2}{2a_i q_{ai}} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_i &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_i} \\ &= \frac{\sqrt{\{(a_i + q_{ai})^2 - q_{bi}^2\} \{-(a_i - q_{ai})^2 + q_{bi}^2\}}}{2a_i q_{ai}} \end{aligned}$$

여기서  $a_i$ 는 기저판위의 두 관절사이의 거리이다.( $i = 1, 2, 3$ )

따라서  $A_i$ 로 부터 원의 중심  $C_i$ 까지의 거리와 원의 반지름  $q_i$ 는 아래의 식으로 부터 주어진 다리의 길이에 관한 식으로 표현된다.

$$b_i = q_{ai} \cos \alpha_i = \frac{a_i^2 + q_{ai}^2 - q_{bi}^2}{2a_i} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} q_i &= q_{ai} \sin \alpha_i \\ &= \frac{\sqrt{\{(a_i + q_{ai})^2 - q_{bi}^2\} \{-(a_i - q_{ai})^2 + q_{bi}^2\}}}{2a_i} \end{aligned}$$

여기서  $b_i$ 는 기저판위의 관절  $A_i$ 로 부터 원의 중심  $C_i$ 까지의 거리이다.



또한,  $A_i$ 로 부터  $B_i$ 방향의 단위 벡터  $t_i$ 와  $A_i$ ,  $B_i$ 는 기저판과 동일한 평면상에 존재한다고 가정했으므로, 기저판과 동일한 평면상에 있고 단위 벡터  $t_i$ 에 수직하는 단위벡터  $n_i$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$t_i = \frac{(P_{bi} - P_{ai})}{|P_{bi} - P_{ai}|} \quad (4.1.3)$$

$$n_i = z_B \times t_i \quad (4.1.4)$$

따라서, 원의 중심의 위치벡터는 아래와 같다.

$$P_{ci} = P_{ai} + b_i t_i \quad (4.1.5)$$

또한, 원의 중심사이의 거리는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$c_{ai}^2 = |P_{ci+1} - P_{ci}|^2 \quad (4.1.6)$$

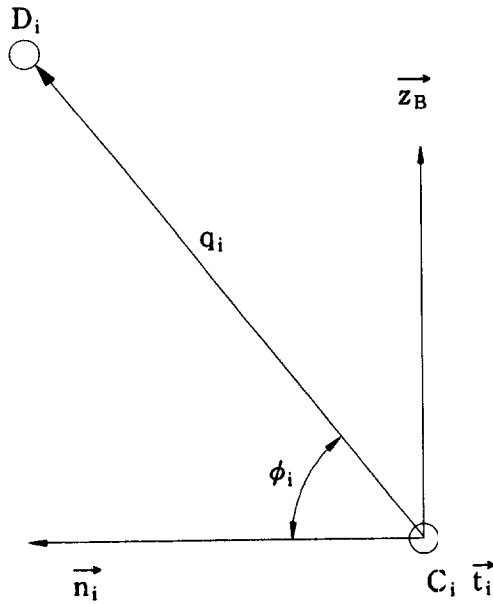


Fig.7 Position of the spherical joint

상기의 그림7로부터 기저판과  $q_i$ 가 이루는 각  $\phi_i$ 를 이용하면 기저좌표계 {B}에 대한 구관절  $D_i$ 의 위치벡터  $P_{di}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P_{di} = P_{ci} + q_i \cos \phi_i n_i + q_i \sin \phi_i z_B \quad (4.1.7)$$

그리고, 상기의 식(4.1.7)로부터 이동판의 구관절들 사이의 상대 위치벡터는

$$\begin{aligned} (P_{di+1} - P_{di}) &= (P_{ci+1} - P_{ci}) + (q_{i+1} \cos \phi_{i+1} n_{i+1} - q_i \cos \phi_i n_i) \\ &\quad + (q_{i+1} \sin \phi_{i+1} - q_i \sin \phi_i) z_B \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

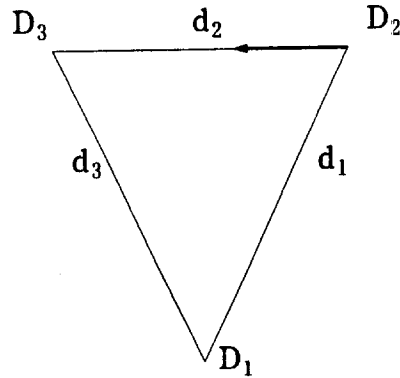


Fig.8 Distances between the spherical joints

이때, 상기의 그림8에서와 같이 이동판 위의 구관절 사이의 거리는 고정되어있기 때문에, 구관절 사이의 거리  $d_i$ 는 다음의 구속식을 만족해야 한다.

$$d_i^2 = |P_{di+1} - P_{di}|^2 \quad (4.1.9)$$

상기의 구속식을 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & - [ (P_{ci+1} - P_{ci})^T n_{i+1} ] q_{i+1} \cos \phi_{i+1} \\ & + [ (P_{ci+1} - P_{ci})^T n_i ] q_i \cos \phi_i \\ & + (n_{i+1}^T n_i) q_i q_{i+1} \cos \phi_i \cos \phi_{i+1} + q_i q_{i+1} \sin \phi_i \sin \phi_{i+1} \\ & = \frac{1}{2} (c_{ai}^2 + q_{i+1}^2 + q_i^2 - d_i^2) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

상기식(4.1.10)을  $\phi_i$ 에 대해서 정리하면 다음과 같으며

$$\begin{aligned}
 & A_i \cos \phi_{i+1} + B_i \cos \phi_i + C_i \cos \phi_i \cos \phi_{i+1} \\
 & + D_i \sin \phi_i \sin \phi_{i+1} = -E_i \\
 & (i = 1, 2, 3) \quad (4.1.11)
 \end{aligned}$$

이때,  $\gamma_i$ 을 다음과 같이 정의하고,  $\gamma_i$ 에 대해서 상기의 식(4.1.11)을 다시 정리하면 다음과 같이 도출된다.

$$\gamma_i \triangleq \tan \frac{\phi_i}{2} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned}
 & A_i \frac{(1 - \gamma_{i+1}^2)}{(1 + \gamma_{i+1}^2)} + B_i \frac{(1 - \gamma_i^2)}{(1 + \gamma_i^2)} + C_i \frac{(1 - \gamma_{i+1}^2)(1 - \gamma_i^2)}{(1 + \gamma_{i+1}^2)(1 + \gamma_i^2)} \\
 & + D_i \frac{4\gamma_{i+1}\gamma_i}{(1 + \gamma_{i+1}^2)(1 + \gamma_i^2)} + E_i = 0 \quad (4.1.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{(-A_i - B_i + C_i + E_i)\gamma_i^2 + (-A_i + B_i - C_i + E_i)\}\gamma_{i+1}^2 \\
 & + \{4D_i\gamma_i\}\gamma_{i+1} \\
 & \{(A_i - B_i - C_i + E_i)\gamma_i^2 + (A_i + B_i + C_i + E_i)\} = 0 \\
 & (4.1.14)
 \end{aligned}$$

i = 1, 2, 3 이므로 상기의 식(4.1.14)는 아래와 같이 표현된다.

$$(P_1 \gamma_1^2 + Q_1) \gamma_2^2 + (R_1 \gamma_1) \gamma_2 + (S_1 \gamma_1^2 + T_1) = 0 \quad (4.1.15)$$

$$(P_2 \gamma_2^2 + Q_2) \gamma_3^2 + (R_2 \gamma_2) \gamma_3 + (S_2 \gamma_2^2 + T_2) = 0 \quad (4.1.16)$$

$$(P_3 \gamma_3^2 + Q_3) \gamma_1^2 + (R_3 \gamma_3) \gamma_1 + (S_3 \gamma_3^2 + T_3) = 0 \quad (4.1.17)$$

또한, 식(4.1.17)을  $\gamma_3$  에 대해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(P_3 \gamma_1^2 + S_3) \gamma_3^2 + (R_3 \gamma_1) \gamma_3 + (Q_3 \gamma_1^2 + T_3) = 0 \quad (4.1.18)$$

여기서, 식(4.1.16)와 식(4.1.18)로부터 도출된 아래의 식을 이용하면  $\gamma_3$ 를 소거할 수 있다.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (P_2 \gamma_2^2 + Q_2) & (R_2 \gamma_2) & (S_2 \gamma_2^2 + T_2) & 0 \\ 0 & (P_2 \gamma_2^2 + Q_2) & (R_2 \gamma_2) & (S_2 \gamma_2^2 + T_2) \\ (P_3 \gamma_1^2 + S_3) & (R_3 \gamma_1) & (Q_3 \gamma_1^2 + T_3) & 0 \\ 0 & (P_3 \gamma_1^2 + S_3) & (R_3 \gamma_1) & (Q_3 \gamma_1^2 + T_3) \end{vmatrix} = 0$$

$\gamma_3$ 을 소거한  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 에 대한 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & F_4 (\gamma_1^4) \gamma_2^4 + F_3 (\gamma_1^3) \gamma_2^3 + F_2 (\gamma_1^4) \gamma_2^2 \\ & + F_1 (\gamma_1^3) \gamma_2 + F_0 (\gamma_1^4) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

여기서  $F_4, F_2, F_0$ 는  $\gamma_1$ 에 대해 짝수 차수로만 이루어진 계수이고  $F_3, F_1$ 은  $\gamma_1$ 에 대해 홀수 차수로만 구성된다.

즉,  $F_4 = e_4 \gamma_1^4 + e_2 \gamma_1^2 + e_0$  이고  $F_3 = h_3 \gamma_1^3 + h_1 \gamma_1$  등 이다.

또한, 식(4.1.15)와 식(4.1.19)를 이용하면  $\gamma_2$ 를 소거할 수 있다. 이때 식(4.1.15)의 계수를 다음과 같이 다시 정의하여 계산하면 결과식은  $\gamma_1$ 에 관한 16차 다항식으로 표현된다.

$$\text{Det} \begin{bmatrix} F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & F_0 & 0 \\ 0 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & F_0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & G_1 & G_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & G_1 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & G_1 & G_0 \end{bmatrix} = 0$$

여기서

$$G_2 \triangleq P_1 \gamma_1^2 + Q_1, \quad G_1 \triangleq R_1 \gamma_1, \quad G_0 \triangleq S_1 \gamma_1^2 + T_1$$

$\gamma_1$ 에 관한 16차 다항식은 다음과 같다.

$$a_{16} \gamma_1^{16} + \dots + a_1 \gamma_1 + a_0 = 0 \quad (4.1.20)$$

이때,  $\gamma_1$ 의 홀수 차수의 계수는 모두 0이므로 식(4.1.20)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b_8x^8 + b_7x^7 + \cdots + b_1x + b_0 = 0 \quad (4.1.21)$$

여기서

$$x \triangleq \gamma_1^2, \quad b_i = a_{2i} \quad (i = 0, \cdots, 8)$$

상기의 식(4.1.21)로 부터 고유치방법을 이용하여  $x$ 의 근사값을 구한다. 이때 구한  $x$ 값 중에서 실수값만을 취하여

$$\gamma_1 = \pm\sqrt{x} \quad (4.1.22)$$

따라서 식(4.1.21)을 만족하는  $\gamma_1$ 의 실수값은 최대 16개가 존재할 수 있다.

위에서 구한  $\gamma_1$ 값을 초기치로 정의하여 Newton method를 이용하면 보다 정확한  $\gamma_1$ 의 값을 구한다.

Newton method로 부터 구한  $\gamma_1$ 값을 이용하여 식(4.1.15)로 부터  $\gamma_2$ 를 구한다. 이때  $\gamma_2$ 는 최대 2개가 존재한다.

또한, Newton method로 부터 구한  $\gamma_1$ 값을 이용하여 식(4.1.16)으로 부터 최대 2개 존재하는  $\gamma_3$ 을 구할 수 있다.

그러므로, 1개의  $\gamma_1$ 에 대해 최대 4개의 해의 쌍(set)이 존재한다.

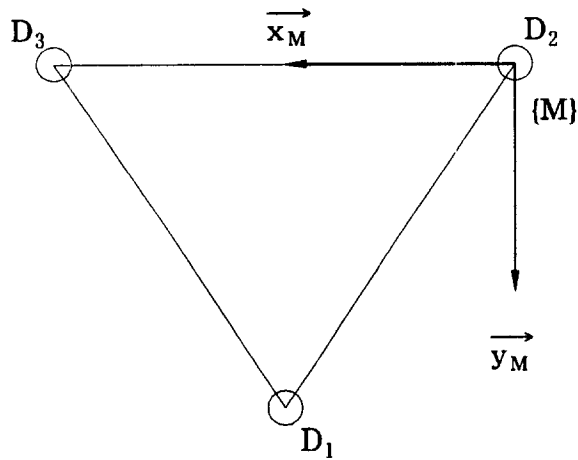


Fig.9 Coordinate of the moving plate

상기의 그림9는 이동판에 위치한 이동좌표계  $\{M\}$ 을 나타내고 있다. 이때, 이동좌표계  $\{M\}$ 의 원점  $O_M$ 과 구관절  $D_2$ 의 위치가 일치한다고 정의하였다.

그림9와 기저좌표계  $\{B\}$ 에 대해 표현된 구관절  $D_i$ 의 위치벡터  $P_{di}$ 를 이용하여 다음과 같이 기저좌표계  $\{B\}$ 에 대한 이동좌표계  $\{M\}$ 을 구할 수 있다.

$${}^B z_M = \frac{(P_{d2} - P_{d1}) \times (P_{d3} - P_{d2})}{|(P_{d2} - P_{d1}) \times (P_{d3} - P_{d2})|} \quad (4.1.23)$$



$${}^B x_M = \frac{(P_{d3} - P_{d2})}{|(P_{d3} - P_{d2})|} \quad (4.1.24)$$

$${}^B y_M = {}^B z_M \times {}^B x_M \quad (4.1.25)$$

$$P \triangleq P_{d2} \quad (4.1.26)$$

상기의 식으로부터 기저좌표계 {B}에 대한 이동좌표계 {M}의 회전행렬과 이동좌표계 {M}의 원점의 위치벡터를 다음과 같이 구할 수 있다.

R : 기저좌표계 {B}에 대한 이동좌표계 {M}의 회전행렬

$$R = [ {}^B x_M \quad {}^B y_M \quad {}^B z_M ]$$

P : 기저좌표계 {B}에 대한 이동좌표계 {M}의 원점의 위치벡터

$$P = [ {}^B P_x \quad {}^B P_y \quad {}^B P_z ]^T$$

그러므로, 기저판에 대한 이동판의 위치와 방향이 다음과 같은 동차변환행렬 A로 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.2 알고리즘 2

알고리즘 2는 6개의 다리를 갖는 일반적인 스튜어트 플랫폼에 적용할 수 있는 방법이고, 이 방법의 특징은 정기구학 문제를 두 부분으로 나누어 해석한다는 점이다. 첫째는 형상에 관련된 선형식으로 이루어져 있고, 두번째는 형상에 독립적인 비선형식으로 구성되어 있다. 그래서 본 논문에서 해석하고자 하는 6개의 다리를 갖는 3-3 스튜어트 플랫폼의 경우에는 기저판과 이동판의 관절의 위치와 다리의 길이로 표현된 6개의 선형식과 형상에는 독립적인 3개의 비선형 구속식으로 부터 공간상의 임의의 위치를 나타내기 위해 필요한 위치벡터와 회전행렬의 9개의 변수값을 결정할 수 있다.[13]

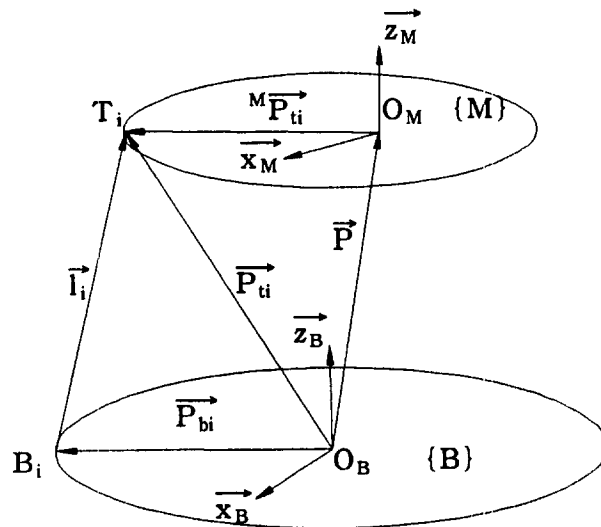


Fig.10 Coordinates and positions of joints

상기의 그림10은 3장의 그림3과 같이 기저판의 기저좌표계 {B}, 이동판의 이동좌표계 {M}과 기저좌표계에 대한 이동좌표계의 원점  $O_M$ 의 위치벡터  $P$ 를 나타내고 있다. 또한, 기저판의 관절의 위치벡터  $P_{bi}$ 와 이동판에 위치한 관절의 위치벡터  ${}^M P_{ti}$ , 그리고 다리의 길이벡터  $l_i$ 를 표현하였다.

상기의 그림10로 부터 다리의 길이를 구하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 |l_i|^2 &= |P + R {}^M P_{ti} - P_{bi}|^2 \\
 &= |P|^2 + |{}^M P_{ti}|^2 + |P_{bi}|^2 \\
 &\quad + 2(P^T R {}^M P_{ti} - P^T P_{bi} - (R {}^M P_{ti})^T P_{bi}) \\
 &\quad (i = 1, \dots, 6) \qquad (4.2.1)
 \end{aligned}$$

이때, 기저판의 모든 관절은  $x_B y_B$ 평면에 있고 이동판위의 모든 관절은  $x_M y_M$ 평면상에 존재한다고 가정한다. 그리고  ${}^M P = R^T P$ 임을 이용하면 상기식(4.2.1)에서 기저판의 관절의 위치벡터  $P_{bi}$ , 이동판의 관절의 위치벡터  ${}^M P_{ti}$ 와 다리의 길이  $|l_i|$ 는 주어졌으므로  $P$ 와  $R$ 에 대해 식(4.2.1)을 아래와 같이 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &|P|^2 + 2 {}^M t_{xi} {}^M P_x + 2 {}^M t_{yi} {}^M P_y - 2 b_{xi} {}^B P_x - 2 b_{yi} {}^B P_y \\
 &- 2 b_{xi} {}^M t_{xi} r_{11} - 2 b_{xi} {}^M t_{yi} r_{12} - 2 b_{yi} {}^M t_{xi} r_{21} - 2 b_{yi} {}^M t_{yi} r_{11} = c_i
 \end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

$$\text{여기서 } c_i = |l_i|^2 - |P_{bi}|^2 - |P_{ti}|^2$$

$$P_{bi} = (b_{xi}, b_{yi}, 0)$$

$${}^M P_{ti} = ({}^M t_{xi}, {}^M t_{yi}, 0)$$

상기식(4.2.2)는  $|P|^2$ 과 기저좌표계 {B}에 대해 표현된 이동좌표계 {M}의 원점  $O_M$ 에 대한 위치벡터 P와 회전행렬 R의 성분들에 대해 선형식으로 표현된다. 따라서 다리의 갯수에 해당하는 6개의 선형식들을 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$Ap = L \quad (4.2.3)$$

여기서

$$A = \begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} & {}^M t_{x1} & {}^M t_{y1} & b_{x1} {}^M t_{x1} & b_{x1} {}^M t_{y1} & b_{y1} {}^M t_{x1} & b_{y1} {}^M t_{y1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{x6} & b_{y6} & {}^M t_{x6} & {}^M t_{y6} & b_{x6} {}^M t_{x6} & b_{x6} {}^M t_{y6} & b_{y6} {}^M t_{x6} & b_{y6} {}^M t_{y6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{6 \times 9}$$

$$p = \left( {}^B P_x \quad {}^B P_y \quad -{}^M P_x \quad -{}^M P_y \quad r_{11} \quad r_{12} \quad r_{21} \quad r_{22} \quad -\frac{1}{2} |P|^2 \right)^T$$

$$p \in R^9$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |P_{b1}|^2 + |{}^M P_{t1}|^2 - |l_1|^2 \\ \vdots \\ |P_{b6}|^2 + |{}^M P_{t6}|^2 - |l_6|^2 \end{pmatrix} \quad L \in R^6$$

상기식에서 행렬 A와 열행렬 L은 기저판과 이동판의 관절의 위치와 다리 길이에 대해 표현되었으므로 모두 주어진 값이다. 행렬 A의 1과 2열은 기저판의 관절의 위치, 3과 4열은 이동판의 관절의 위치, 그리고 5, 6, 7, 8열은 다리의 연결관계를 나타낸다. 따라서, 열행렬 p의 성분들이 구하고자 하는 미지수이다. 미지수는 9개이고 식의 수는 6개이므로 3개의 구속식이 필요하게 된다. 이때, 구속식은  $RR^T = I$  임을 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

여기서  $r_{31}$ 과  $r_{32}$ 는  ${}^M P = R^T P$ 를 이용하면 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{aligned} r_{31} &= \frac{1}{B P_z} ({}^M P_x - r_{11} B P_x - r_{21} B P_y) \\ r_{32} &= \frac{1}{B P_z} ({}^M P_y - r_{12} B P_x - r_{22} B P_y) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

또한,  $B P_z$ 는 기저좌표계 {B}로 표현된  $O_M$ 의 위치벡터의 z성분이므로 다음과 같다.

$$B P_z = \pm \sqrt{|P|^2 - B P_x^2 - B P_y^2} \quad (4.2.6)$$

식(4.2.4)의 구속식은 식(4.2.5)와 식(4.2.6)의 관계를 이용하여 식(4.2.3)의 열행렬  $p$ 의 성분들에 대해서 다음과 같은 3개의 비선형식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} (1 - r_{11}^2 - r_{21}^2)(|P|^2 - {}^B P_x^2 - {}^B P_y^2) \\ - ({}^M P_x - r_{11} {}^B P_x - r_{21} {}^B P_y)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} (1 - r_{12}^2 - r_{22}^2)(|P|^2 - {}^B P_x^2 - {}^B P_y^2) \\ - ({}^M P_y - r_{12} {}^B P_x - r_{22} {}^B P_y)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} (r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22})(|P|^2 - {}^B P_x^2 - {}^B P_y^2) \\ + ({}^M P_x - r_{11} {}^B P_x - r_{21} {}^B P_y)({}^M P_y - r_{12} {}^B P_x - r_{22} {}^B P_y) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

일반적인 스튜어트 플랫폼에 대해서 유도한 (4.2.1)-(4.2.9)식을 6개의 다리로 연결된 3-3 스튜어트 플랫폼에 적용하면 다음과 같다. 즉, 기저판과 이동판이 삼각형이 되도록 기저판 및 이동판에 위치한 관절의 위치,  $P_{bi}$ 와  ${}^M P_{ti}$ 를 아래와 같이 정의하고, 이때의 형상은 그림11과 같다.

$$P_{b1} = P_{b2} = (0, 0, 0) \quad P_{b3} = P_{b4} = (a, 0, 0)$$

$$P_{b5} = P_{b6} = (b, c, 0)$$

$${}^M P_{t1} = {}^M P_{t6} = (d, 0, 0) \quad {}^M P_{t2} = {}^M P_{t3} = (e, f, 0)$$

$${}^M P_{t4} = {}^M P_{t5} = (0, 0, 0)$$

여기서,  $a, c, d, f > 0$ 라고 가정한다.

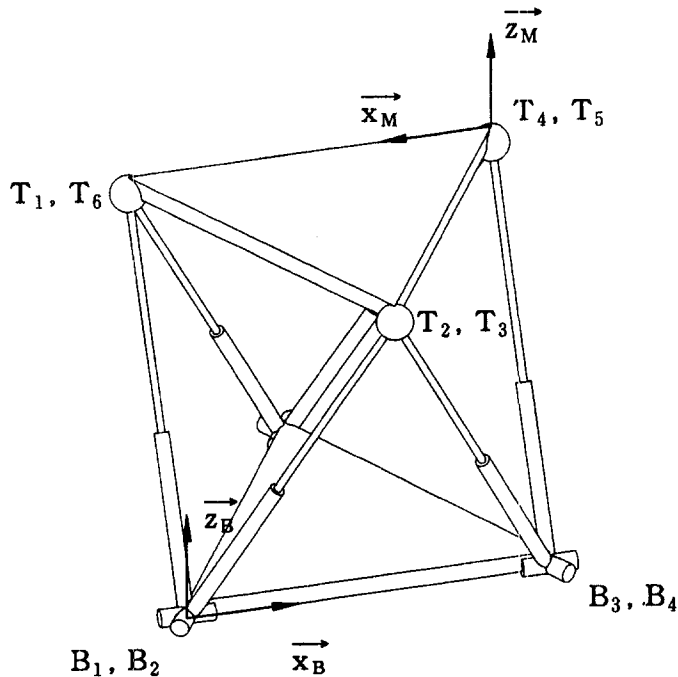


Fig.11 3-3 Stewart Platform

또한, 상기의 식(4.2.2)에 3-3 스튜어트 플랫폼에 해당하는 관절들의 위치를 대입하여 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & e & f & af & 0 & ae & 1 \\ b & c & d & 0 & 0 & cd & bd & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^B P_x \\ {}^B P_y \\ -{}^M P_x \\ -{}^M P_y \\ r_{12} \\ r_{21} \\ r_{11} \\ -\frac{1}{2} |P|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_3 \\ L_6 \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

여기서

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_3 \\ L_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d^2 - |l_1|^2 \\ e^2 + f^2 - |l_2|^2 \\ a^2 - |l_4|^2 \\ b^2 + c^2 - |l_5|^2 \\ a^2 + e^2 + f^2 - |l_3|^2 \\ b^2 + c^2 + d^2 - |l_6|^2 \end{pmatrix}$$

상기식(4.2.10)에서  $|P|^2$ ,  $r_{11}$ 과  $r_{22}$ 를 각각 독립변수  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 라고 정의하면 (4.2.10)식의 나머지 6개의 변수는 독립변수  $x$ ,  $y$ 로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^B P_x &= c_1 x + d_1 \\ {}^B P_y &= c_2 x + d_2 \\ {}^M P_x &= c_3 x + d_3 \\ {}^M P_y &= c_4 x + d_4 \\ r_{12} &= c_5 x + c_6 y + d_5 \\ r_{21} &= c_7 x + c_8 y + d_6 \end{aligned} \quad (4.2.11)$$



상기식(4.2.11)의 6개의 변수를 3개의 구속식 ((4.2.7)-(4.2.9))에 대입하여 독립변수  $x, y, z$ 에 대해서 정리하면 다음과 같은 3개의 비선형식으로 표현된다.

$$K_2(x)y^2 + K_1(x)y + K_0(x) = 0 \quad (4.2.12)$$

$$B_2(x, y)z^2 + B_1(x, y)z + B_0(x, y) = 0 \quad (4.2.13)$$

$$E_1(x, y)z + E_0(x, y) = 0 \quad (4.2.14)$$

식(4.2.13)와 (4.2.14)으로 부터 도출된 아래의 식을 이용하면  $z$ 를 소거한  $x, y$ 에 관한 식을 구할 수 있다.

$$\text{Det} \begin{bmatrix} B_2 & B_1 & B_0 \\ E_1 & E_0 & 0 \\ 0 & E_1 & E_0 \end{bmatrix} = 0$$

$z$ 를 소거한  $x, y$ 에 관한 식은 다음과 같이 표현된다.

$$M_4(x)y^4 + M_3(x)y^3 + M_2(x)y^2 + M_1(x)y + M_0 = 0 \quad (4.2.15)$$

또한, 식(4.2.12)와 식(4.2.15)를 이용해서 도출된 아래의 식을 이용하면 y를 소거한 x만을 변수로 갖는 식을 구할 수 있다.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} M_4 & M_3 & M_2 & M_1 & M_0 & 0 \\ 0 & M_4 & M_3 & M_2 & M_1 & M_0 \\ K_2 & K_1 & K_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & K_1 & K_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & K_1 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & K_1 & K_0 \end{vmatrix} = 0$$

y를 소거한 x에 관한 식은 다음과 같이 표현된다.

$$A_{26}x^{26} + A_{25}x^{25} + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (4.2.16)$$

상기의 결과식은 x에 관한 26차 다항식으로 표현된다.

식(4.2.16)로 부터 고유치방법을 이용하여 x의 근사값을 구한다. 이때 구한 실수의 x값은 x의 정의와 식(4.2.6)으로 부터 다음의 두 조건식을 만족해야 한다.

$$x \geq 0 \quad (4.2.17)$$

$$x - {}^B P_x^2 - {}^B P_y^2 \geq 0 \quad (4.2.18)$$

식(4.2.17)과 식(4.2.18)의 조건식을 만족하는  $x$ 값을 초기치로 정의해서 Newton method를 이용하여 보다 정확한 값을 구한다.

Newton method로 부터 구해진  $x$ 값을 식(4.2.12)에 대입하여  $y$ 값을 구한다. 이때, 독립변수로 정의된  $y$ 는 회전행렬의 성분이므로 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$|y| \leq 1.0 \quad (4.2.19)$$

이때  $y$ 값은 1개의  $x$ 값에 대해 최대 2개가 존재한다.

앞에서 구한  $x$ ,  $y$ 값을 식(4.2.14)에 대입하여  $z$ 값을 구한다. 독립변수  $z$ 도  $y$ 와 같이 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$|z| \leq 1.0 \quad (4.2.20)$$

이때  $z$ 값은  $y$ 값에 대해 1개만이 존재한다.

그러므로, 1개의  $x$ 값에 대해 최대 2개의 해의 쌍(set)  $(x, y, z)$  이 존재할 수 있다.

x, y값이 결정되면 식(4.2.11)로 부터 6개의 나머지 변수의 값을 구할 수 있다.

$${}^B P_x = c_1 x + d_1$$

$${}^B P_y = c_2 x + d_2$$

$${}^M P_x = c_3 x + d_3$$

$${}^M P_y = c_4 x + d_4$$

$$r_{12} = c_5 x + c_6 y + d_5$$

$$r_{21} = c_7 x + c_8 y + d_6$$

또한,  ${}^B P_x$ 와  ${}^B P_y$ 의 값을 구했으므로, 식(4.2.6)의 관계로 부터  ${}^B P_z$ 를 구할 수 있다.

$${}^B P_z = \pm \sqrt{x - {}^B P_x^2 - {}^B P_y^2}$$

이때,  ${}^B P_z$ 는 최대 2개의 값이 존재한다.

x, y, z의 독립 변수와 식(4.2.11)의 6개의 변수값, 그리고  ${}^B P_z$ 값이 결정되면 기저좌표계 {B}에 대한 이동좌표계 {M}의 회전행렬인 R의 나머지 항들, 즉, ( $r_{13}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{31}$ ,  $r_{32}$ ,  $r_{33}$ )을 구할 수 있다.

먼저,  $r_{31}$ 과  $r_{32}$ 는 x, y, z의 값을 식(4.2.5)에 대입하여 구할 수 있다.

$$r_{31} = \frac{1}{{}^B P_z} ({}^M P_x - r_{11} {}^B P_x - r_{21} {}^B P_y)$$

$$r_{32} = \frac{1}{{}^B P_z} ({}^M P_y - r_{12} {}^B P_x - r_{22} {}^B P_y)$$

그리고  $r_{13}, r_{23}, r_{33}$ 의 값은 회전행렬  $R$ 의 각 열이 서로 orthogonal임을 이용하여 아래의 식으로 부터 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{31} & r_{21} \\ r_{31} & 0 & -r_{11} \\ -r_{21} & r_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} \quad (4.2.21)$$

그러므로 기저판에 대한 이동판의 위치( $P$ )와 회전( $R$ )을 나타내는 동차 변환행렬  $A$ 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & {}^B P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & {}^B P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & {}^B P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5. 모의 실험

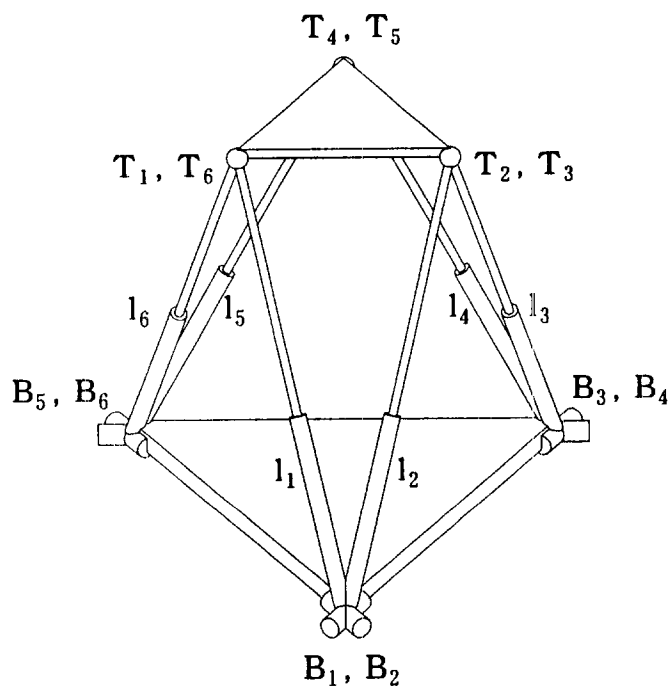


Fig.12 3-3 Stewart Platform

그림12의 3-3 스튜어트 플랫폼에 대해서 알고리즘 1과 알고리즘 2를 이용하여 정기구학 해석에 관한 모의실험을 수행하였다.

이때, 모의실험에 사용된 스튜어트 플랫폼의 기저판과 이동판의 관절의 위치는 다음과 같다.

$$P_{b1} = P_{b2} = (0, 0, 0)^T$$

$$P_{b3} = P_{b4} = (1.0, 0, 0)^T$$

$$P_{b5} = P_{b6} = (0.5, 0.86603, 0)^T$$

$${}^M P_{t1} = {}^M P_{t6} = (0.25, 0.433015, 0)^T$$

$${}^M P_{t2} = {}^M P_{t3} = (0, 0, 0)^T$$

$${}^M P_{t4} = {}^M P_{t5} = (0.5, 0, 0)^T$$

표1과 표2의 첫째 칸에 각각 주어진 다리길이에 대해서 모의실험I과 모의실험II를 수행하였다. 모의실험I의 주어진 다리길이에 대해서 알고리즘 1을 이용하여 모의실험을 수행한 결과를 표1-1에, 그리고 알고리즘 2를 이용하여 모의실험을 수행한 결과를 표1-2의 두번째 칸에 제시하였다. 모의실험II에 대해서도 같은 방법으로 표2-1과 표2-2에 모의실험 결과를 제시하였다. 이때, 각 표의 두번째 칸의 처음 3열은 기저좌표계에 대한 이동좌표계의 회전행렬, 4열은 이동좌표계의 원점의 위치벡터를 나타낸다. 그리고, 세번째 칸은 정기구학에서 구한 회전행렬과 위치벡터를 이용하여 역기구학으로 부터 구한 다리의 길이이다.

상기의 기저판과 이동판의 관절들의 위치와 주어진 다리길이에 대해 알고리즘 1과 알고리즘 2를 이용하여 모의실험I에서는 4개의 동일한 형상을 구하였고, 모의실험II에서는 8개의 동일한 형상을 구할 수 있었다. 이때의 형상을 그림13과 그림14에 표현하였다. 그리고 그림13과 그림14의 각 경우에서, 처음의 그림은 기저판에 대해서  $30^{\circ}$  위에서 본 그림이고, 두번째는 정면도, 세번째는 평면도이다.



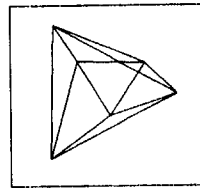
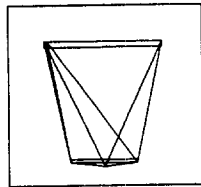
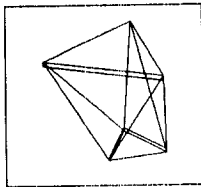
Table 1-1 Result of simultion I by algorithm 1

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179	(set 1)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	0.84777   -0.47858   0.22859   0.31228 0.52142   0.83090   -0.19421   0.18029 -0.09699   0.28384   0.95395   -0.86286 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 2)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	-0.86603   -0.50000   0.00000   0.75000 0.50000   -0.86603   0.00000   0.43301 0.00000   0.00000   1.00000   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 3)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	0.84777   -0.47858   -0.22859   0.31228 0.52142   0.83090   0.19421   0.18029 0.09699   -0.28384   0.95395   0.86286 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 4)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	-0.86603   -0.50000   0.00000   0.75000 0.50000   -0.86603   0.00000   0.43301 0.00000   0.00000   1.00000   1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

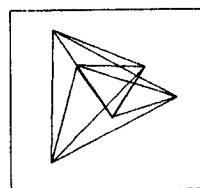
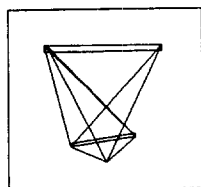
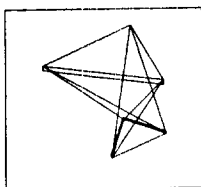
Table 1-2 Result of simulation I by algorithm 2

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179	(set 1)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	0.84777   -0.47858   0.22859   0.31228 0.52142   0.83090   -0.19421   0.18029 -0.09699   0.28384   0.95395   -0.86286 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 2)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	-0.86603   -0.50000   0.00000   0.75000 0.50000   -0.86603   0.00000   0.43301 0.00000   0.00000   1.00000   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 3)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	0.84777   -0.47858   -0.22859   0.31228 0.52142   0.83090   0.19421   0.18029 0.09699   -0.28384   0.95395   0.86286 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 4)	leg1 = 1.06488 leg2 = 1.22474 leg3 = 1.11803 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.03295 leg6 = 1.25179
	-0.86603   -0.50000   0.00000   0.75000 0.50000   -0.86603   0.00000   0.43301 0.00000   0.00000   1.00000   1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

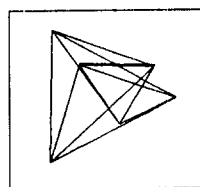
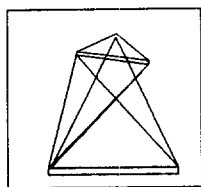
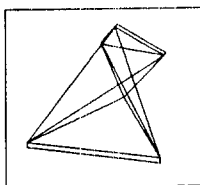
set 1



set 2



set 3



set 4

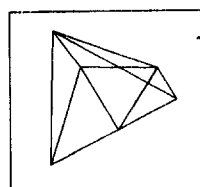
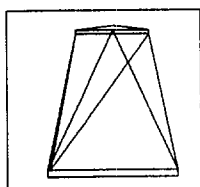
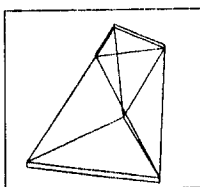


Fig.13 Configurations of simulation I

Table 2-1 Result of simultion II by algorithm 1 (continue)

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472	(set 1)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.99756   -0.06976   0.00000   0.75000 0.06976   -0.99756   -0.00000   0.43301 0.00000   -0.00000   1.00000   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 2)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	0.99725   -0.06922   0.02661   0.25107 0.07029   0.99667   -0.04137   0.14495 -0.02365   0.04312   0.99879   -0.81737 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 3)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.75519   0.51136   0.41012   0.43778 0.65087   0.65922   0.37655   0.25275 -0.07781   0.55131   -0.83067   -0.93275 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 4)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.83940   0.40267   0.36506   0.50589 0.54218   0.66740   0.51050   0.29208 -0.03808   0.62645   -0.77853   -0.95945 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

Table 2-1 Result of similtion II by algorithm 1

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472	(set 5)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.83940   0.40267   -0.36506   0.50589 0.54218   0.66740   -0.51050   0.29208 0.03808   -0.62645   -0.77853   0.95945 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 6)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.75519   0.51136   -0.41012   0.43778 0.65087   0.65922   -0.37655   0.25275 0.07781   -0.55131   -0.83067   0.93275 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 7)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	0.99725   -0.06922   -0.02661   0.25107 0.07029   0.99667   0.04137   0.14495 0.02365   -0.04312   0.99879   0.81737 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 8)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.99756   -0.06976   0.00000   0.75000 0.06976   -0.99758   -0.00001   0.43301 0.00000   -0.00001   1.00002   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

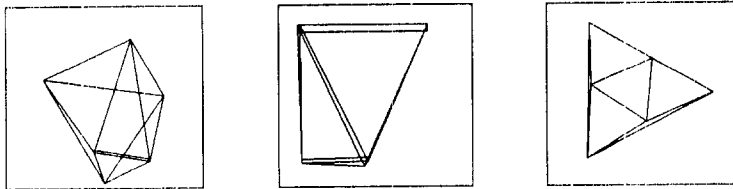
Table 2-2 Result of simlution II by algorithm 2 (continue)

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472	(set 1)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.99756   -0.06976   0.00000   0.75000 0.06976   -0.99758   -0.00001   0.43301 0.00000   -0.00001   1.00002   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 2)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	0.99725   -0.06922   0.02661   0.25107 0.07029   0.99667   -0.04137   0.14495 -0.02365   0.04312   0.99879   -0.81737 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 3)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.75519   0.51136   0.41012   0.43778 0.65087   0.65922   0.37655   0.25275 -0.07781   0.55131   -0.83067   -0.93275 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 4)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.83940   0.40267   0.36506   0.50589 0.54218   0.66740   0.51050   0.29208 -0.03808   0.62645   -0.77853   -0.95945 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

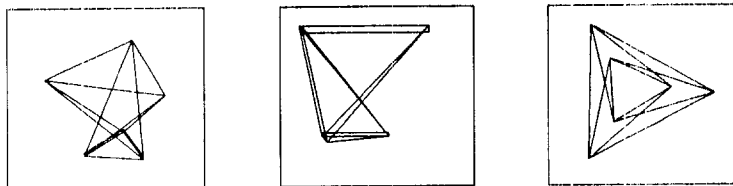
Table 2-2 Result of simultion II by algorithm 2

입력된 다리 길이	이동판의 동차변환행렬	결과 다리 길이
leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472	(set 5)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.83940   0.40267   -0.36506   0.50589 0.54218   0.66740   -0.51050   0.29208 0.03808   -0.62645   -0.77853   0.95945 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 6)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.75519   0.51136   -0.41012   0.43778 0.65087   0.65922   -0.37655   0.25275 0.07781   -0.55131   -0.83067   0.93275 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 7)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	0.99725   -0.06922   -0.02661   0.25107 0.07029   0.99667   0.04137   0.14495 0.02365   -0.04312   0.99879   0.81737 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	
	(set 8)	leg1 = 1.13227 leg2 = 1.10527 leg3 = 1.13173 leg4 = 1.11803 leg5 = 1.11803 leg6 = 1.10472
	-0.99756   -0.06976   0.00000   0.75000 0.06976   -0.99758   -0.00000   0.43301 0.00000   -0.00000   1.00000   -1.00000 0.00000   0.00000   0.00000   1.00000	

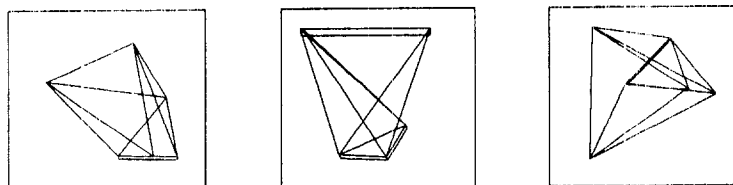
set 1



set 2



set 3



set 4

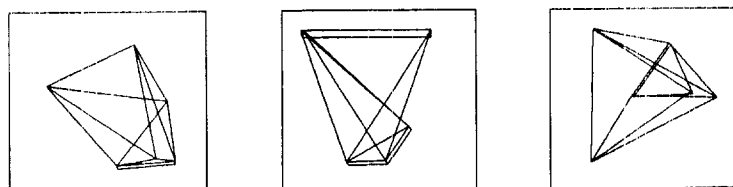
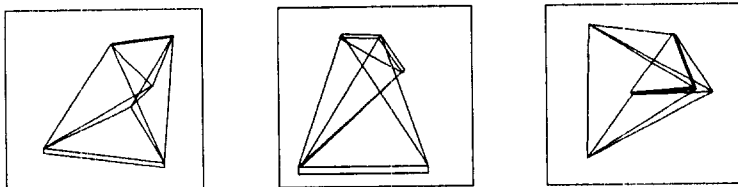


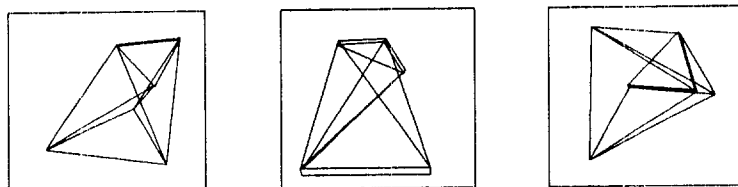
Fig.14 Configurations of simulation II (continue)



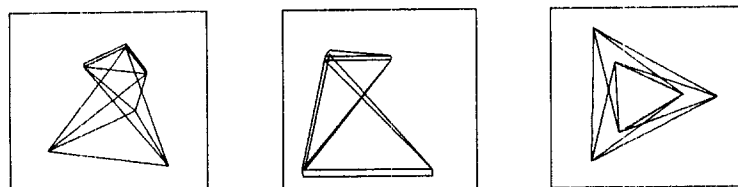
set 5



set 6



set 7



set 8

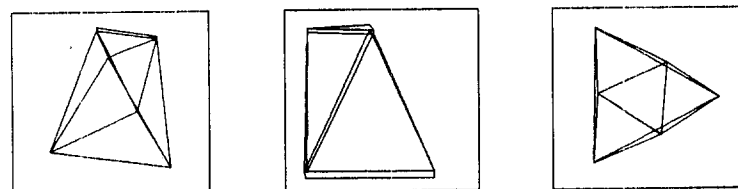


Fig.14 Configurations of simulation II

## 6. 결론

알고리즘 1은 이동판의 구관절이 원의 자취를 따라 운동할 경우에만 적용할 수 있기 때문에, 이동판이 삼각형인 3-3 스튜어트 플랫폼이나 6-3 스튜어트 플랫폼에만 적용할 수 있고, 이동판이 육각형인 6-6 스튜어트 플랫폼에는 적용할 수 없다.

따라서, 기저판과 이동판의 관절의 위치와 다리 길이에 관련된 선형식과 형상과는 독립적인 비선형식을 이용하여 6-6 스튜어트 플랫폼에 적용할 수 있는 알고리즘 2를 제시하였다.

3-3 스튜어트 플랫폼의 주어진 다리 길이에 대해서 알고리즘 1과 알고리즘 2를 이용하여 정기구학 문제를 해결하였을 때, 정기구학 해석의 결과로서 동일한 형상을 구할 수 있음을 모의실험을 통해서 알 수 있었다.

그러나, 1원 16차 다항식을 유도하여 정기구학 문제를 해결한 알고리즘 1이 유도된 1원 26차 다항식으로 부터 정기구학을 해석한 알고리즘 2보다 누적오차가 작았다. 그 이유는 알고리즘 2에서 26차 다항식의 수치계산 과정에서 누적된 오차가 매우 커지기 때문이다.

따라서 일반적인 6-6 스튜어트 플랫폼의 정기구학을 해석하기 위해서는 고차의 다항식으로 인한 오차누적을 효과적으로 해결하기 위한 수치해법에 관한 연구가 필요하다.

## 참고문헌

- [1] M. Vukobratovic, "Introduction to Robotics", springer-verlag, 1989.
- [2] J. J. Craig, "Introduction to Robotics", 2nd edition, addison-wesley, 1989.
- [3] F. Behi, "Kinematic Analysis for a Six-Degree-of-Freedom 3-PRPS Parallel Mechanism", IEEE J. Robotics and Automation, vol.4, No.5, 1988, pp.561-565
- [4] X. Shi and R. G. Fenton, "Solution to The Forward Instantaneous Kinematics for a General 6-DOF Stewart Platform", Mech. Mach. Theory, vol.27, No.3, pp.251-259
- [5] C. Innocenti and V. Parenti-Castelli, "Direct Position analysis of the Stewart Platform Mechanism", Mech. Mach. Theory, vol.25, No.6, pp.150-162.
- [6] P. Nanua, K. J. Waldron and V. Murthy, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform", IEEE Trans. Robotics and Automation, 1990, pp.438-443.
- [7] J. P. Merlet, "Direct Kinematics and Assembly Modes of Parallel Manipulators", Int. J. Robotics Research, vol.11, No.2, 1992, pp.150-162.
- [8] K. Cleary and T. Brooks, "Kinematic Analysis of a Novel 6-DOF Parallel Manipulator", IEEE J. Robotics and Automation, 1993, pp.708-713
- [9] E. F. Fichter, "A Stewart Platform Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", Int. J. Robotics Research, vol.5, No.2, 1986, pp.157-182.

- [10] M.G.Mohamed and J.Duffy, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators", Trans. J. Mech., Transmissions and Automation in Design, vol.107, 1985, pp,226-229
- [11] K.Sugimoto, "Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra", Trans. J. Mech., Transmissions and Automation in Design, vol.109, 1987, pp.3-7
- [12] Y.Nakamura, "Advanced Robotics Redundancy and Optimization", addison-wesley, 1991.
- [13] R.Nair and J.H.Maddocks, "On the Forward Kinematics of Parallel Manipulators", Int. J. Robotics Research, vol.13, No.2, 1994, pp.171-188.
- [14] K.E.Atkinson, "An Introduction to Numerical Analysis", John wiley & Sons, 1988

## 감사의 글

부족한 글을 마치며 “좀 더 잘할 수도 있었을 텐데”라는 아쉬움과 너무 오랫동안 저를 뒷바라지 해오신 할머니께 죄스러움을 느낍니다.

논문을 마칠때 까지 많은 조언과 충고를 아끼지 않으신 김창부 지도교수님께 깊은 감사를 드립니다. 그리고 대학과 대학원에서 많은 가르침을 주신 자동화 공학과 교수님께 감사를 드립니다.

또한, 이년동안의 대학원 생활에서 항상 함께 지내오면서 정이 들었고, 논문을 완성하기 까지 도움을 아끼지 않았던 수섭이 형, 효식, 덕호, 광수, 현석, 찬교에게 이 자리를 빌어 고맙다는 말을 드립니다. 정말 고맙습니다.

그리고 힘들 때 많은 얘기 나눈 보희형과 요섭이, 웅태, 정락이, 그리고 자동화 공학과의 모든 대학원생들께 감사드리며, 정말 뜻깊은 대학생활이 되도록 함께 해준 윤모와 자동화 공학과 후배들에게 감사드립니다.

끝으로, 언제나 부족한 저를 믿어 주시고 늦은 시간까지 잠 못이루신 할머니와 어머니, 그리고 아버지께 머리숙여 감사를 드리며, 이 부족한 글을 바칩니다.

1995. 6. 27.

김 중구