武忠祥老师 23 考研数学每日一题

每日一题（2022 年 1 月 16 日）

证明当 $x>0$ 时，有不等式 $\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$.

每日一题（2022 年 1 月 17 日）

证明当 $x>0$ 时，有不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

每日一题（2022 年 1 月 18 日）

(1993年5) 设 p,q 是大于1的常数，并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

证明：对于任意的 $x>0$，有 $\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}\geq x$.

每日一题（2022 年 1 月 19 日）

(2003年3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

每日一题（2022 年 1 月 20 日）

（1996年3）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

每日一题（2022 年 1 月 21 日）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明.

(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2) $\exists\eta\in(a,b)$，使 $f'(\eta)-f(\eta)=0$;

(3) $\exists\zeta\in(a,b)$，使 $f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$;

每日一题（2022 年 1 月 22 日）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，

试证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.

每日一题（2022 年 1 月 23 日）

(2010年2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

每日一题（2022 年 1 月 24 日）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 a,b 同号，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$.

每日一题（2022 年 1 月 25 日）

求不定积分 $\int \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$

每日一题（2022 年 1 月 26 日）

求不定积分 $I=\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

每日一题（2022 年 1 月 27 日）

求不定积分 $I=\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$

每日一题（2022 年 1 月 28 日）

$$I=\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

每日一题（2022 年 1 月 29 日）

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$$ 等于（　）.

（A）$\int_1^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$　　（B）$2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$

（C）$2\int_1^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$　　（D）$\int_1^2\ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$

每日一题（2022 年 1 月 30 日）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]=\underline{\qquad\qquad}.$$

每日一题（2022 年 1 月 31 日）

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\le g(x)$，则对任何 $c\in(0,1)$，（　）.

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\,\mathrm{d}t$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\,\mathrm{d}t$

（C）$\int_{c}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_{c}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$　　（D）$\int_{c}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{c}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$