

几何建模与处理基础

GAMES102

作业 2：曲线拟合

Qingjun CHANG

2020 年 10 月 25 日

1 目标

- 学习 RBF 神经网络 [1]
- 学习 Python 基本语法，并在 Python 中实现 RBF 以及作业 1 的相关算法
- 比较和分析算法

2 拟合算法描述

问题：对于给定 \mathbb{R}^2 域内一组点 $\{\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ ，找到一个拟合这组点的函数 $f(x)$ 。

当使用高斯函数作为基函数时，设 $f(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i g_{\mu_i, \sigma_i}(x)$ ，其中

$$g_{\mu_i, \sigma_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

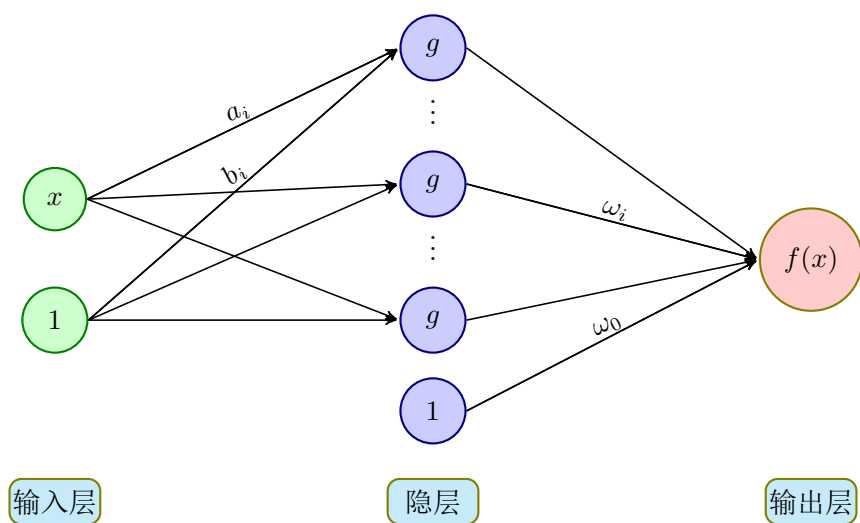


图 1: 以高斯函数为基函数的 $f(x)$ 的网络图

将一般高斯函数改写为标准高斯函数，即均值为 0，方差为 1：

$$g_{\mu_i, \sigma_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma_i} - \frac{\mu_i}{\sigma_i})^2} = g_{0,1}(a_i x + b_i)$$

其中 $a_i = \frac{1}{\sigma_i}$, $b_i = -\frac{\mu_i}{\sigma_i}$ ，则

$$f(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i g_{0,1}(a_i x + b_i) \quad (1)$$

可以看出确定 $f(x)$ 需要参数 ω , \mathbf{a} , \mathbf{b} ，其中

$$\omega = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n]^T, \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

如图 2 所示，公式 (1) 可用网络表示，图中隐层激活函数 g 的个数为 m 。

3 数值示例

我们在 TensorFlow 框架中实现 RBF 算法。该例数据样本点大约 20 个，用拉格朗日插值多项式进行插值时，出现 Runge 现象，振幅较大，本节不再展示拉格朗日插值多项式的结果。以下主要比较不同参数对 RBF 结果的影响 (sec: 3.1)，比较固定网络结构的 RBF 与 Gauss 基函数插值 (sec: 3.2)，以及比较 RBF 与最小二乘和岭回归 (sec: 3.3)。

3.1 不同参数对网络训练结果的影响

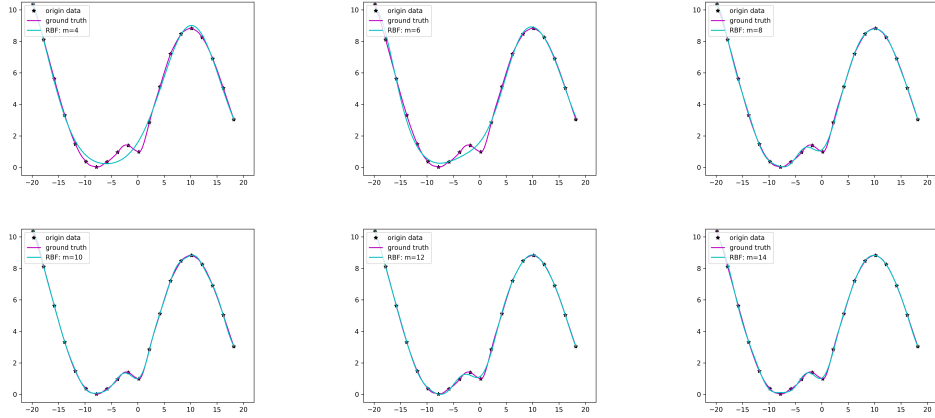


图 2: 不同 m 值的训练结果对比, $m = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, 图中黑色星号表示样本数据点, 品红色实线表示 ground truth, 青色实线为 RBF 算法预测结果。

在网络中隐层的层数为 $m + 1$ ，从图 2 可以看出不同的 m 对训练结果有影响。当 $m = 10$ 时，RBF 预测的曲线与 ground truth 曲线较为相近。当 $m = 12$ 时可能出现过拟合现象。

3.2 RBF 与高斯基函数插值结果比较

如图 3 所示，当高斯基函数方差较小时，函数振幅较大，当选取较好的方差时，插值结果与 RBF 结果几乎一致，这从实验方面也反映了以高斯函数作为基函数的 RBF 算法与高斯基函数插值函数的联系。

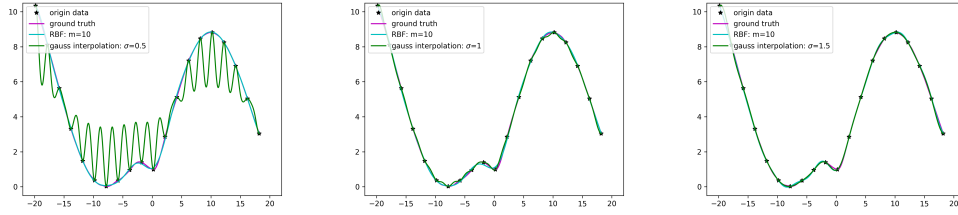


图 3: 高斯基函数方差对插值结果的影响, 以及与 RBF 的对比。图中从左到右分别取标准层 $\sigma = 0.5, 1, 1.5$, RBF 中 $m = 10$, 其中黑色星号表示样本数据点, 品红色实线表示 ground truth, 青色实线为 RBF 算法预测结果, 绿色为高斯基函数插值结果。

3.3 RBF 与最小二乘逼近型函数的比较

由于本例所用数据样本点包含 4 个拐点, 故在用多项式拟合时选取了 5 次多项式。从图 4 可以看出当岭回归中 λ 的值对函数有局部平移的效果, 这是因为岭回归本质是对最小二乘误差函数添加正则项。且该例中 RBF 拟合结果相对于最小二乘型拟合结果较好。

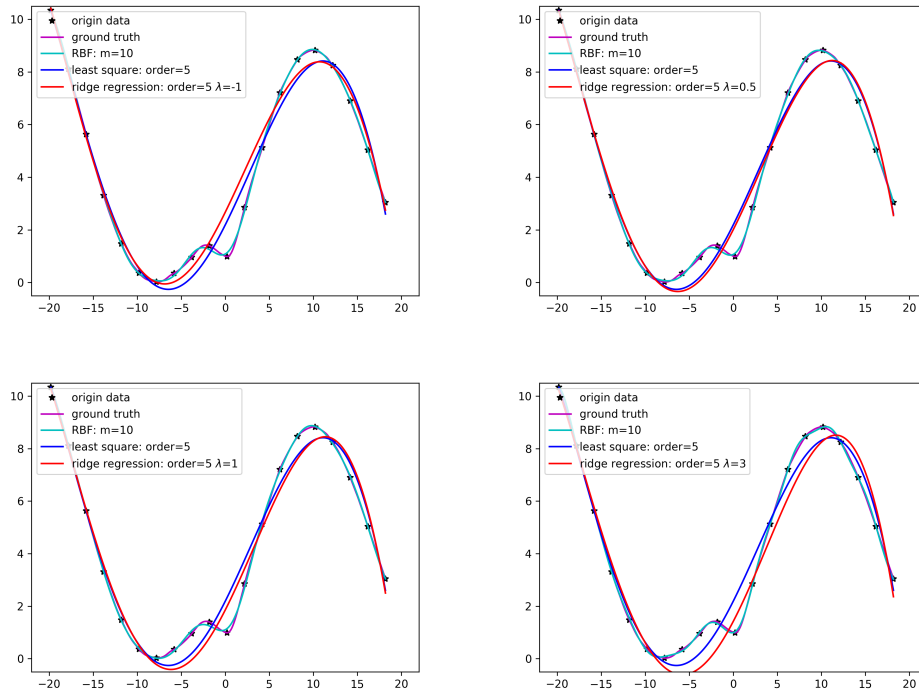


图 4: 5 次多项式岭回归 λ 对拟合结果的影响, 以及与最小二乘结果和 RBF 的对比。RBF 中 $m = 10$, 其中黑色星号表示样本数据点, 品红色实线表示 ground truth, 青色实线为 RBF 算法预测结果, 蓝色为最小二乘拟合结果, 红色为岭回归拟合结果。

参考文献

- [1] 张朝阳. 径向基函数 (rbf) 神经网络. [EB/OL]. <https://www.cnblogs.com/zhangchaoyang/articles/2591663.html> 2012-07-14.