Final Spring 2011 参考答案

2012 年 6 月 6 日

4.

(a)可以用 backward induction 的方法来找：

左边的子博弈中的 NE 有三个：(M,M), (F,F), $\left(\alpha_1(M)=\frac{3}{4},\alpha_2(M)=\frac{1}{4}\right)$，其支付分别是(3,1),(1,3),(3/4,3/4)。

右边的子博弈中的 NE 有三个：(M,M), (F,F), $\left(\alpha_1(M)=\frac{3}{4},\alpha_2(M)=\frac{1}{4}\right)$，其支付分别是(2,1),(0,3),(-1/4,3/4)。

在 SPE 中，两个子博弈都采用 NE 策略，而 player1 根据两边的支付的大小，来决定是选 0 还是 D，所以存在 9 个 SPE：

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=1,\beta_1(D)(M)=1;\beta_2(0)(M)=1,\beta_2(D)(M)=1$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=1,\beta_1(D)(M)=10\beta_2(0)(M)=1,\beta_2(D)(M)=0$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=1,\beta_1(D)(M)=\frac{3}{4};\beta_2(0)(M)=1,\beta_2(D)(M)=\frac{1}{4}$$

$$\beta_1(\phi)(0)=0,\beta_1(0)(M)=0,\beta_1(D)(M)=1;\beta_2(0)(M)=0,\beta_2(D)(M)=1$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=0,\beta_1(D)(M)=0;\beta_2(0)(M)=0,\beta_2(D)(M)=0$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=0,\beta_1(D)(M)=\frac{3}{4};\beta_2(0)(M)=0,\beta_2(D)(M)=\frac{1}{4}$$

$$\beta_1(\phi)(0)=0,\beta_1(0)(M)=\frac{3}{4},\beta_1(D)(M)=1;\beta_2(0)(M)=\frac{1}{4},\beta_2(D)(M)=1$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=\frac{3}{4},\beta_1(D)(M)=0;\beta_2(0)(M)=\frac{1}{4},\beta_2(D)(M)=0$$

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=\frac{3}{4},\beta_1(D)(M)=\frac{3}{4};\beta_2(0)(M)=\frac{1}{4},\beta_2(D)(M)=\frac{1}{4}$$

(b)只需要任意改动一个 SPE，使其非均衡路径上不是 NE 就行，例如改动第一个 SPE，使右边那个子博弈中不是 NE 即可：

$$\beta_1(\phi)(0)=1,\beta_1(0)(M)=1,\beta_1(D)(M)=1;\beta_2(0)(M)=1,\beta_2(D)(M)=0$$

5.

题目没说是用 NE 还是 SPE 来构造，鉴于 SPE 在 discount criterion 下太复杂，我们这里用 NE：

为保证 trigger strategy 是有效的，须满足：

$$M_i+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t v_i \le \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t w_i \text{ , for player i=1,2}$$

其中 M_i 是在 player i 在单期博弈中的最大支付，这里是 10； v_i 是 minmax 支付，

这里是 1； $w_i = 5$ 。

据此可得到δ的范围： $\delta \geq \frac{5}{9}$.

6.

(a)去年有讲 general equilibrium 理论，今年没讲，不会考，我也不记得 Pareto efficient 的定义了。

(b)记 players 的策略分别为： $g_1(\theta_1)$ 和 $g_2(\theta_2)$ ，对于 player 1，当知道θ_1后，使用策略 $g_1(\theta_1)$ 能带来的期望效用是：

$$\mu_1(g_1, g_2, \theta_1) = \int_3^4 (5 - g_1) + \theta_1 g_1 - \frac{(g_1 + g_2(\theta_2))^2}{2} d\theta_2$$

对 g_1 求导，得到 FOC：

$$\theta_1 - 1 - g_1 - E[g_2] = 0 ,$$

对于 player 2，也是类似的，因此有：

$$g_1 = \theta_1 - 1 - E[g_2],$$

$$g_2 = \theta_2 - 1 - E[g_1]$$

将第一式两边以θ_1的分布为测度积分，得到：

$$E[g_1] = 2.5 - E[g_2]$$

对第二式积分，得到同样的等式，因此有：

$$E[g_1] + E[g_2] = 2.5$$

故 2.5 既为期望的公共品数量，可以看出均衡不是唯一的，满足以上等式的策略函数 g_i 很多。

7.

Player 2 有两个 information sets，记上面那个为 I_1， 下面那个为 I_2.

(a)这里存在两种 pooling equilibrium 的可能性，既 player1 在两种 type 下都选 Q 或者都选 B。

假设 player 1 总选 Q，那么可以确定 player 2 在 I_1 上的 belief : $\mu_2(I_1)(strong) = 0.9,$

$\mu_2(I_1)(weak)=0.1$，在这个 belief 下，player 2 的最优选择是选 N,既 $\beta_2(I_1)(N)=1$。

为确保 strong type 下 player 1 会选择 Q，须有：$\beta_2(I_2)(N)\cdot 3+(1-\beta_2(I_2)(N))\le 2$，

既：$\beta_2(I_2)(N)\le 0.5$，据此得到 player 2 在 I_2 上的 belief，最终的均衡有两个（确切的说是两类）：

$\beta_1(strong)(Q)=1, \beta_1(weak)(Q)=1;\ \beta_2(I_1)(N)=1, 0<\beta_2(I_2)(N)\le 0.5$,

$\mu_2(I_1)(strong)=0.9,\ \mu_2(I_2)(strong)=0.5$

$\beta_1(strong)(Q)=1, \beta_1(weak)(Q)=1;\ \beta_2(I_1)(N)=1, \beta_2(I_2)(N)=0$

$\mu_2(I_1)(strong)=0.9,\ \mu_2(I_2)(strong)\le 0.5$

假设 player 1 总选 B，那么可以确定 player 2 在 I_2 上的 belief：$\mu_2(I_2)(strong)=0.9$,

$\mu_2(I_2)(weak)=0.1$，在这个 belief 下，player 2 的最优选择是选 N,既 $\beta_2(I_2)(N)=1$。

为确保 weak type 下 player 1 会选择 B，须有：$\beta_2(I_1)(N)\cdot 3+(1-\beta_2(I_1)(N))\le 2$，

既：$\beta_2(I_1)(N)\le 0.5$，据此得到 player 2 在 I_2 上的 belief，最终的均衡有：

$\beta_1(strong)(B)=1, \beta_1(weak)(B)=1;\ \beta_2(I_2)(N)=1, 0<\beta_2(I_1)(N)\le 0.5$,

$\mu_2(I_2)(strong)=0.9,\ \mu_2(I_1)(strong)=0.5$

$\beta_1(strong)(B)=1, \beta_1(weak)(B)=1;\ \beta_2(I_2)(N)=1, \beta_2(I_1)(N)=0$,

$\mu_2(I_2)(strong)=0.9,\ \mu_2(I_1)(strong)\le 0.5$

(b) 这里同样存在两种 separating equilibrium 的可能性。
假设 player 1 在 strong type 下选 Q，在 weak type 下选 B，那么可以确定 player 2 在 I_1 和 I_2 上的 belief：$\mu_2(I_1)(strong)=1, \mu_2(I_2)(strong)=0$，在这个 belief 下，player 2 的最优选择是: $\beta_2(I_1)(N)=1$， $\beta_2(I_2)(N)=0$。

给定以上策略，可以看到 player 1 在 weak type 下选择 B 不是最优的，（如果他选择 Q 的话可以得到 3，而现在只得到 0），因此不存在这样的均衡。

假设 player 1 在 strong type 下选 B，在 weak type 下选 Q，那么可以确定 player 2 在 I_1 和 I_2 上的 belief：$\mu_2(I_1)(strong)=0, \mu_2(I_2)(strong)=1$，在这个 belief 下，player

2 的最优选择是: $\beta_2(I_1)(N)=0$， $\beta_2(I_2)(N)=1$。

给定以上策略，可以看到 player 1 在 weak type 下选择 Q 不是最优的，（如果他选择 B 的话可以得到 2，而现在只得到 1），因此不存在这样的均衡。
综上，此处不存在 separating equilibrium.